

信号流图和系统

赵永昌 编著

科学出版社

51.85
228

信号流图和系统

赵永昌 编著



科学出版社

1988

8810774

内 容 简 介

本书以七章的篇幅介绍了信号流图的基本理论,信号流图在网络分析、网络综合、离散系统、反馈系统及随机系统中的应用,并讨论了用拓扑方法计算系统灵敏度的问题。全书内容全面、系统,在介绍应用方法的同时,列举了许多实例,以帮助读者深入理解书中内容。

本书可供电子、电工、自动化、系统工程、应用图论、管理科学等方面的科研、工程技术、管理人员参考。

2592/17

信 号 流 图 和 系 统

赵永昌 编著

责任编辑 张建荣 刘晓融

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1988年6月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1988年6月第一次印刷 印张:11 1/8

印数:0001—8,200 字数:291,000

ISBN 7-03-000323-3/TN·15

定价: 3.50 元

前 言

信号流图是以图的形式表示线性方程组的变量间相互关系的一种数学模型。它与物理系统有密切的联系,直观、灵活、使用方便,它是对线性系统进行构模和分析的有用工具。从 S. J. Mason 于 1953 年系统地建立了信号流图理论以来,其应用范围已从电工和自动控制扩大到很多工程领域(例如,机械、化工、热转换、空气动力学等),特别是近年来在管理科学中也得到了很好的应用。一些应用问题的提出,又促进了理论的丰富和发展。

有关信号流图方面的文章在文献中屡见不鲜,而专门的书籍则寥若晨星,且大部分都是六十年代出版的。这些出版的书籍各有所侧重,但没有包括七十年代以来的新成果。本书力求反映该领域的新成果,较全面地论述信号流图的基本理论及其在各个系统中的应用,以供教学、科研、工业管理部门的读者利用信号流图这一工具解决各种实际问题。

全书共分七章。第一章阐述信号流图的基本理论,主要包括信号流图与方程组的关系,求解方程的间接和直接方法(即 Mason 增益公式),以及有关信号流图的一些基本问题。第二章着重从图的观点讨论从网络直接构成信号流图,并由后者求得符号网络函数的无相消项的方法。第三章以信号流图为桥梁,分别讨论从 LC 电路和传输函数得出对应的有源 RC 电路的方法,即网络综合问题。第四章阐述用拓扑方法计算灵敏度的问题。第五章讨论信号流图在离散系统中的应用。包括分析采样系统的三种方法,多速采样系统的分析,以及开关电容网络的分析和综合。第六章利用信号流图模型研究反馈系统,并由此指出,用信号流图可简便地推导出反馈理论中的一些定理。第七章论述随机系统,用信号流图分析 Markov 过程和半 Markov 过程中的一些基本问题。读

者只需具备线性代数和简单的图论知识即可无困难地阅读本书的基本内容。

限于水平,书中不当之处在所难免,恳请读者批评、指正。

在本书编写过程中美国 PURDUE 大学林本铭教授给予了关心和支持,北京工业学院李育珍教授百忙中审阅了全稿,在此向他们表示衷心的感谢。

赵永昌

1986年2月于上海

目 录

第一章	信号流图的基本理论.....	1
1-1	基本定义和性质.....	1
1-2	信号流图和线性方程组的关系.....	4
1-3	图的简化规则.....	6
1-4	反向.....	12
1-5	信号流图的矩阵描述.....	18
1-6	Mason 增益公式.....	23
1-7	闭环信号流图.....	35
1-8	Mason 增益公式的系统实现.....	37
1-9	节点分裂、回归差和部分回归差.....	44
1-10	图的复杂性.....	48
1-11	两种节点的信号流图.....	57
1-12	矩阵信号流图及其简化规则.....	67
1-13	求矩阵信号流图传输的拓扑方法.....	71
第二章	有源网络分析.....	80
2-1	网络的直接分析.....	80
2-2	符号网络函数.....	83
2-3	不包括相消项的符号网络函数的拓扑计算.....	88
2-4	状态方程的建立.....	98
第三章	有源网络综合.....	108
3-1	LC 电路的信号流图表示.....	108
3-2	有源 RC 电路的实现和参数计算.....	121
3-3	LC 电路的无电容模拟.....	129
3-4	传输函数的有源实现(一).....	137
3-5	传输函数的有源实现(二).....	145
第四章	灵敏度.....	171
4-1	灵敏度和它的一些性质.....	171

4-2	多参数灵敏度	175
4-3	灵敏度及其有关定理	180
4-4	计算灵敏度的拓扑公式	188
4-5	灵敏度的结构分析	198
4-6	高阶灵敏度	202
4-7	大变化灵敏度	207
4-8	灵敏度图	210
第五章	离散系统	220
5-1	采样的一些性质	220
5-2	复合信号流图	223
5-3	Sedlar-Bekey 增益公式	230
5-4	节点逐步消除法	236
5-5	多速采样系统	243
5-6	信号流图在离散系统中的应用——开关电容网络的分析和综合	247
第六章	反馈系统	266
6-1	反馈系统的信号流图分析	266
6-2	广义的 Rode 公式	274
6-3	互补回归差矩阵	277
6-4	广义回归差矩阵	279
6-5	任意参考值的回归差矩阵和零回归差矩阵	287
6-6	多环反馈系统的灵敏度	290
第七章	随机系统	296
7-1	Markov 过程和随机图	296
7-2	半 Markov 过程	308
7-3	分析随机网络的变换方法	326
7-4	分析随机网络的时域方法	334
索引	345

第一章 信号流图的基本理论

本章首先讨论信号流图的一些定义,基本性质及其与线性方程组的关系。然后,进一步阐明求解线性方程组的间接和直接的拓扑方法。间接方法就是逐步化简方法,它包括一些简化规则和反向规则的应用。直接方法是著名的 Mason 增益公式。对 Mason 增益公式的实现作了仔细的讨论。从实用观点出发,还讨论了简化图的拓扑结构的闭环信号流图,及适用于包括运算放大器的有源电路分析的两种节点的信号流图。对在灵敏度和反馈系统分析中应用很广的有关节点分裂、回归差和部分回归差的概念,以及对于结构复杂的图,求得表征图的复杂性的图的指数及指数节点的方法,都作了系统的阐述。最后,讨论多环反馈系统中应用很广的矩阵信号流图,以及分析矩阵信号流图的逐步化简法和拓扑方法。

本章包括了信号流图的基本理论,它为后面各章的讨论提供了基础。

1-1 基本定义和性质

信号流图是一种赋权的有向图。它由连接在节点间的有向支路构成。节点用小圆圈表示,支路用带箭头的线段表示。每个节点对应于一个变量,又称节点信号。每条支路的权称为支路传输的数值,它就是方程组中某一变量的系数。对一个节点,支路有入支路(进入该节点的支路)和出支路(离开该节点的支路)之分。入支路的数量称为该节点的入度。出支路的数量称为该节点的出度。入度为零的节点称为源点。出度为零的节点称为汇点。入度和出度均不为零的节点称为内节点(以后简称节点)。路是从某一

8810774

• 1 •

节点出发，连续经过不同的支路(沿着支路方向)和节点而到达另一节点(或同一节点)的一种结构。如果路的起点和终点相同，则称为闭路或环，否则称为开路。自环是环的一个特殊情况，它只包括一条支路和一个节点。从源点到汇点的路称为前向路(以后简称路)。路和环的传输是其中所包括的支路的支路传输之积。

信号流图有两个重要的性质：

(1) 传输性。对每一非汇点，节点信号沿不同的出支路传输到不同的节点。到达后一节点的信号等于支路始端的节点信号乘以相应支路的支路传输。

对某一节点 j (节点信号为 x_j)，若 j 有 k 个出支路分别至节点 $1, 2, \dots, k$ ，其支路传输分别为 $t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{kj}$ ，则由节点 j 至节点 $1, 2, \dots, k$ 的信号分别为 $t_{1j}x_j, t_{2j}x_j, \dots, t_{kj}x_j$ 。

(2) 迭加性。对每一非源点，节点信号等于从其他节点来的所有信号的代数和。

对某一节点 s ，有 r 个入支路，支路始端分别为 $1, 2, \dots, r$ ，支路传输分别为 $t_{s1}, t_{s2}, \dots, t_{sr}$ ，则节点 s 的信号

$$x_s = \sum_{j=1}^r t_{sj}x_j.$$

信号流图的上述两个性质如图 1-1 所示。



图 1-1

Mason 曾将信号流图与信号传输系统作了比较。源点可看成是发送站，其他节点看成是中继站。每个支路看成是单方向的

放大器。支路传输的数值相当于放大器的增益。每个中继站将从所有放大器输出端来的信号代数相加，并向另一些放大器的输入端传输。汇点可看成为接收站。这就是“信号流图”名称的由来。

信号流图可以根据它有无环而分为级联图和反馈图两类。前者又称无环图，后者又称有环图。

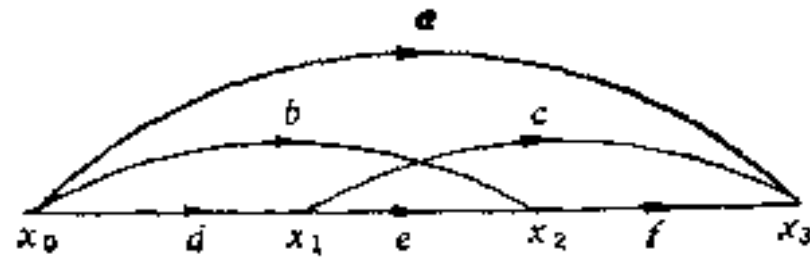


图 1-2

图 1-2 为级联图，其中 $x_0 \rightarrow d \rightarrow x_1 \rightarrow e \rightarrow x_2 \rightarrow f \rightarrow x_3$ 是从源点 x_0 到汇点 x_3 的一条前向路。

图 1-3 为反馈图，其中有两个环 bc 和 de 。包括在环中的节点和支路分别称为反馈节点和反馈支路。不在环中的节点和支路分别称为级联节点和级联支路。图 1-3 中， x_1, x_2, x_3 为反馈节点， x_0 为级联节点。当然，源点和汇点均为级联节点。 b, c, d, e 为反馈支路， f, g, h 为级联支路。

还有一种特殊的级联图——残图。残图是只包括源点和汇点的图。如图 1-4。

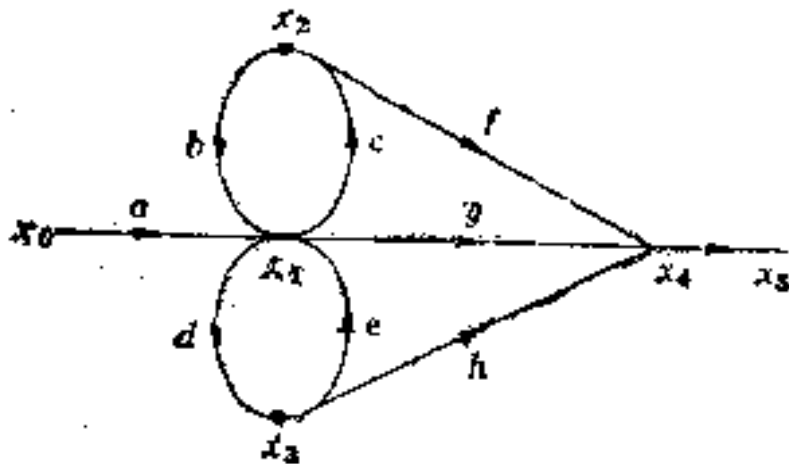


图 1-3

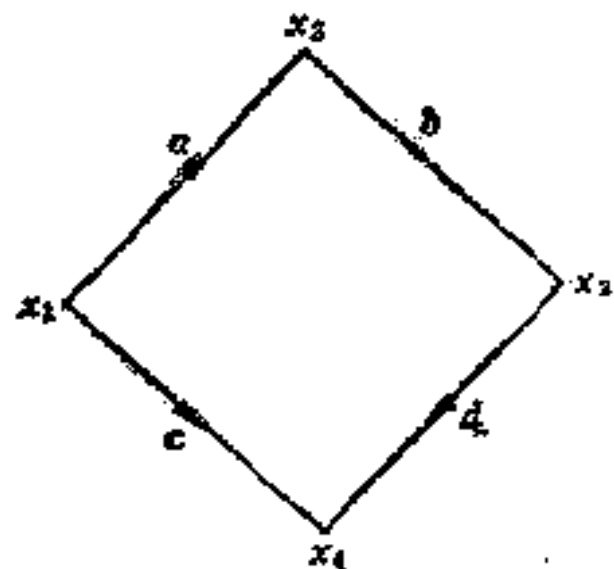


图 1-4

1) 为说明方便，以后用节点信号表示节点，而不再用节点编号。

1-2 信号流图和线性方程组的关系

要用信号流图解线性方程组，首先必须了解信号流图与方程组的关系，即如何用信号流图表示线性方程组。我们可将方程组中的每个方程写成因果形式，即每个方程可看成是很多因产生的一个果。将对应于因的变量放在方程的一端，而将对应于果的变量放在方程的另一端。每个变量在方程组中只能作为果出现一次，在其他方程中则只能作为因出现。这种因果关系的观点是构成信号流图的基础。因果关系表示方式对于很多物理系统是很方便的，其优点是能清楚地看出变量间的相互关系，并用拓扑方法求解方程组。

构成信号流图的步骤是，首先，将方程组中每个方程写成因果形式；然后，对每一作为因和果的变量，在图上分别用一个节点表示。再从作为因变量的节点作一支路向着作为果的变量的节点。该支路的支路传输是因变量的系数。重复上面的步骤，直至所有作为果的变量均表示完毕为止。这样，就得出了与方程组对应的信号流图。

设有下列方程组

$$\sum_{j=0}^n t_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-1)$$

式中 x_0 为自变量， $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 为因变量。

现需作出对应的信号流图。首先，需将上述方程组中的每个方程均写成因果形式，并注意每个变量只能作为果出现一次，即每个变量只能用其他变量显式地表示一次。于是，可将式(1-1)写成

$$x_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-2)$$

式中

$$a_{ij} = -\frac{t_{ij}}{t_{ii}}$$

• • •

式(1-2)中共有 n 个方程。其中

$$x_i = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \quad (1-3)$$

我们可画出 $(n+1)$ 个节点分别表示 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 。然后,从 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别画一支路向着 x_i , 其支路传输分别为 $a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$, 如图 1-5。类似地, 考虑其余的 $x_i (j = 1, 2, \cdots, n, j \neq i)$ 的显示表示(即其余的 $n-1$ 个方程), 迭加在图 1-5 上, 即为方程组(1-2)所对应的信号流图。

由此可知, 每一信号流图一定有唯一的方程组与之对应。方程组中的方程数与图中的节点数相同(源节点除外)。但是, 若方程组中的方程不是显式表示, 则与方程组对应的信号流图并不是唯一的。例如, 在方程组(1-1)中, 我们并不一定按顺序写出 x_1, x_2, \cdots, x_n 的显式表示(即第 1 个方程写出 x_1 的显式表示, 第 2 个方程写出 x_2 的显式表示等等), 也可用第 j 个方程写出 x_i 的显式表示。故与方程组(1-1)对应的信号流图共有 $n!$ 种, 它们称为等效的非同构图。等效的意义表明, 尽管这些图是非同构的, 但利用它们求得的方程组的解则是相同的。

例 1-1. 有方程组

$$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0 \quad (1-4)$$

$$dx_0 + ex_1 + fx_2 = 0 \quad (1-5)$$

从式(1-4)写出 x_1 的显式表示:

$$x_1 = -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}x_2 \quad (1-6)$$

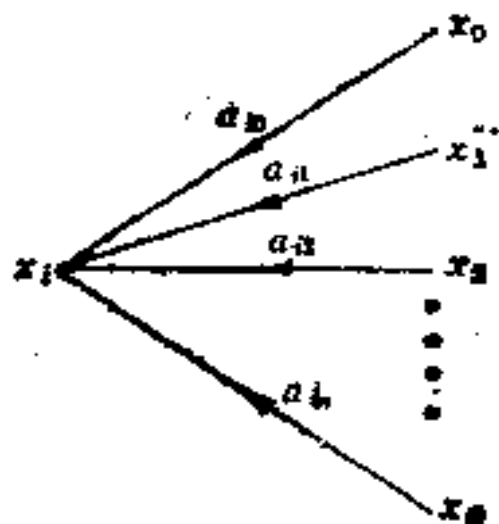


图 1-5

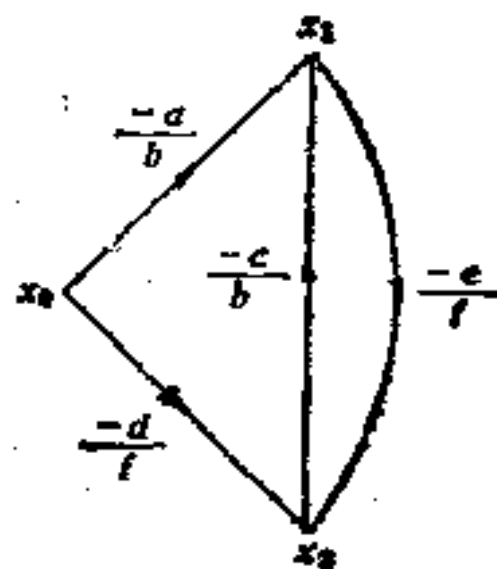


图 1-6

从式(1-5)写出 x_2 的显式表示:

$$x_2 = -\frac{d}{f}x_0 - \frac{a}{f}x_1 \quad (1-7)$$

由式(1-6)和(1-7)可得出图 1-6 的信号流图。

若从式(1-4)和(1-5)分别写出 x_2 和 x_1 的显式表示,则有

$$x_2 = -\frac{a}{c}x_0 - \frac{b}{c}x_1 \quad (1-8)$$

$$x_1 = -\frac{d}{e}x_0 - \frac{f}{e}x_2 \quad (1-9)$$

由式(1-8)和(1-9)可得出图 1-7 的信号流图。

显然,图 1-6 和图 1-7 是对于方程组(1-4)、(1-5)的等效的非同构图。

应该指出,如果一个变量显式表示一次以上,则作出的信号流图是不正确的。例如,从式(1-4)和(1-5)都写出 x_1 的显式表示:

$$x_1 = -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}x_2 \quad (1-10)$$

$$x_1 = -\frac{d}{e}x_0 - \frac{f}{e}x_2 \quad (1-11)$$

与式(1-10)和(1-11)对应的信号流图(图1-8)是不正确的。

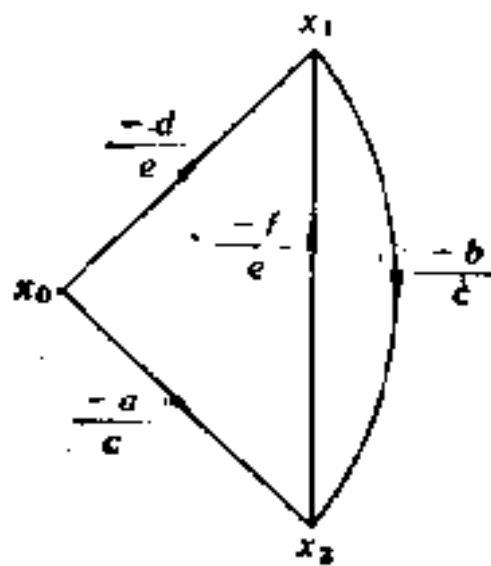


图 1-7

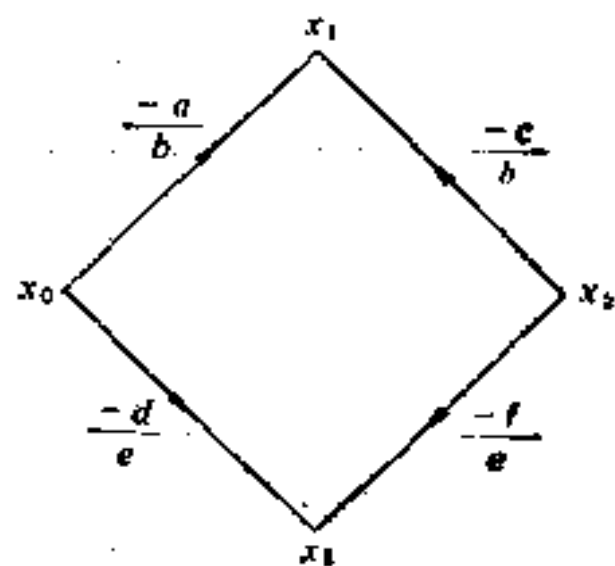


图 1-8

1-3 图的简化规则

在解方程组时,常用迭代法逐步消去一些变量,最后得出方程

• • •

组的解。对应地,在信号流图中可以逐步消去节点,最终使图简化为只包括源点和汇点的残图。残图中从源点到汇点的支路传输就是用自变量表示因变量的系数。

下面将阐述几个基本简化规则。

1. 支路并联简化规则

设在节点 x_0 和 x_1 间有 n 条并联(同方向)支路。它们的支路传输值分别为 t_1, t_2, \dots, t_n (图 1-9)。

图 1-9 对应于方程:

$$x_1 = x_0(t_1 + t_2 + \dots + t_n) = x_0 \sum_{i=1}^n t_i \quad (1-12)$$

与式(1-12)对应的图如图 1-10。

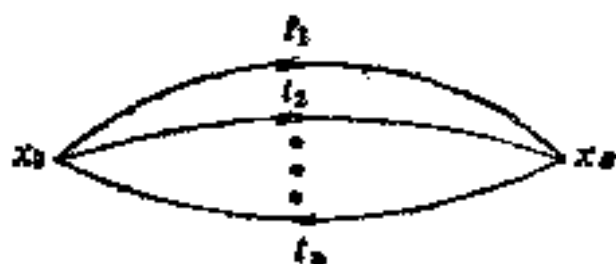


图 1-9

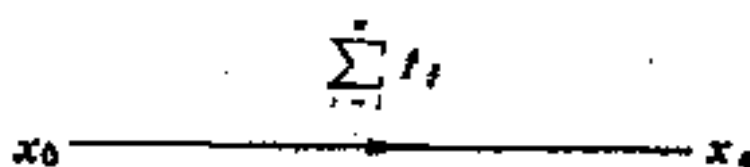


图 1-10

由此可知, n 条同方向的并联支路可用一条支路代替。后者的传输是 n 条支路的支路传输之和。

2. 支路串联简化规则

设在节点 x_0 连续经过 n 条同方向的支路(其支路传输分别为 t_1, t_2, \dots, t_n)而至节点 x_n , 如图 1-11。

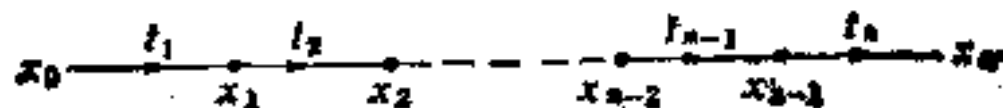


图 1-11

图 1-11 对应于方程组:

$$x_1 = t_1 x_0, \quad x_2 = t_2 x_1, \quad \dots, \quad x_n = t_n x_{n-1} \quad (1-13)$$

式(1-13)中共有 n 个方程。将第一个方程代入第二个方程,……,第 $n-1$ 个方程代入第 n 个方程,最后可得

• • •

$$x_n = t_1 t_2 \cdots t_n x_0 = \left(\prod_{i=1}^n t_i \right) x_0 \quad (1-14)$$

与式(1-14)对应的信号流图如图 1-12。

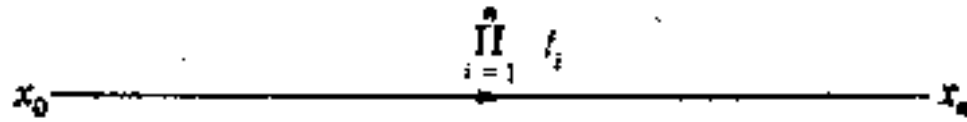


图 1-12

由此可知, n 条同方向的串联支路, 可用一条支路代替, 后者的传输是 n 条支路的支路传输之积。

3. 支路移动规则——节点的吸收

上面的规则 1. 和 2. 可分别减少图的支路数和节点数。现在讨论一个更普遍的消除节点的方法。在信号流图中消除节点称为节点吸收。吸收一个节点对应于消除一个变量。考虑某一节点 N , 它有 m 条入支路和 n 条出支路。入支路和出支路的传输分别为 a_1, a_2, \dots, a_m 及 b_1, b_2, \dots, b_n 。如图 1-13 所示。

由图 1-13 可写出下列方程组:

$$x_N = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m \quad (1-15)$$

$$y_1 = b_1 x_N \quad (1-16)$$

$$y_2 = b_2 x_N \quad (1-17)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$y_n = b_n x_N \quad (1-18)$$

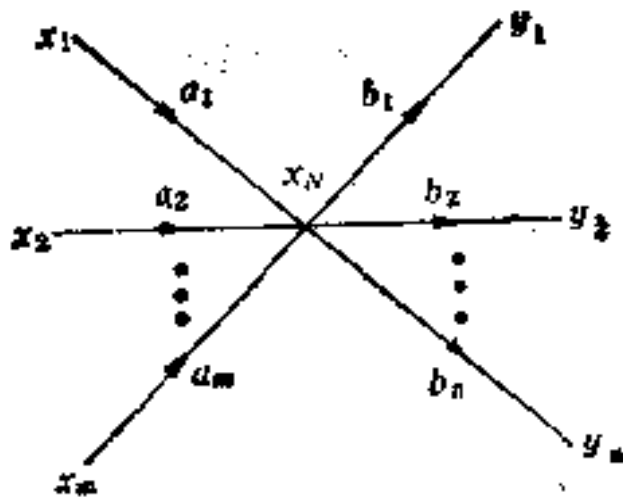


图 1-13

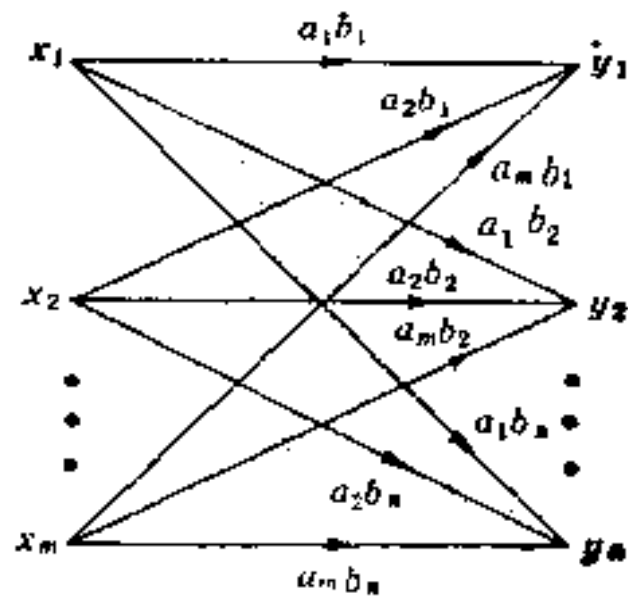


图 1-14

将式(1-15)分别代入式(1-16)、(1-17)及(1-18),得出

$$y_1 = a_1 b_1 x_1 + a_2 b_1 x_2 + \dots + a_m b_1 x_m \quad (1-19)$$

$$y_2 = a_1 b_2 x_1 + a_2 b_2 x_2 + \dots + a_m b_2 x_m \quad (1-20)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$y_n = a_1 b_n x_1 + a_2 b_n x_2 + \dots + a_m b_n x_m \quad (1-21)$$

方程组式(1-19)~(1-21)对应于下列信号流图(图 1-14)。

在图 1-14 中,节点 N 已被吸收。这对应于在代数学中用迭代法消去了变量 x_N 。实际上,比较图 1-13 和图 1-14 可看出,节点的吸收是支路移动的结果。于是,将上述过程总结成支路移动规则如下:

(1) 要吸收一个入度为 m , 出度为 n 的节点, 可将该节点的 m 条入支路分别沿 n 条出支路移动(即移动入支路的末端)。

(2) 入支路的始端不动, 其末端移动到该节点的出支路的末端。一条入支路经移动后产生 n 条支路。移动后产生的新支路的支路传输等于被移动的支路和沿其移动的两条支路的支路传输之积。当所有 m 条支路移动完毕后, 节点被吸收, 产生了 mn 条新支路。由于节点吸收的结果, 增加了 $mn - (m + n)$ 条支路。

实际上, 简化规则 2. 是支路移动规则的一个特殊情况。将支路移动规则连续应用于图 1-11 的节点 x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , 即可得出图 1-12。

例 1-2. 简化图 1-15。

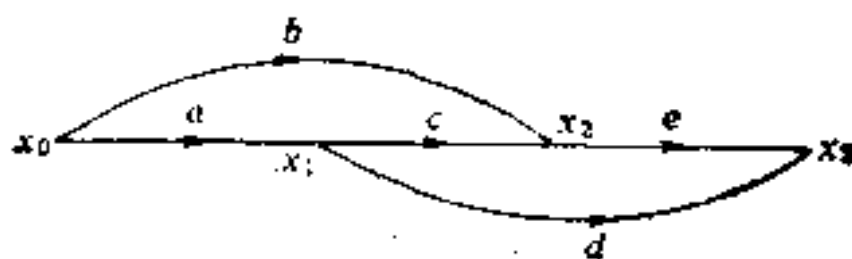


图 1-15

先对节点 x_1 应用规则 3., 然后对支路 ac 和 b 应用规则 1., 再对支路 $(ac + b)$ 和 e 应用规则 2.; 最后, 对支路 ad 和 $(ac + b)e$ 应用规则 1., 即得到只包括源点 x_0 和汇点 x_3 的残图。简化过程如图 1-16。

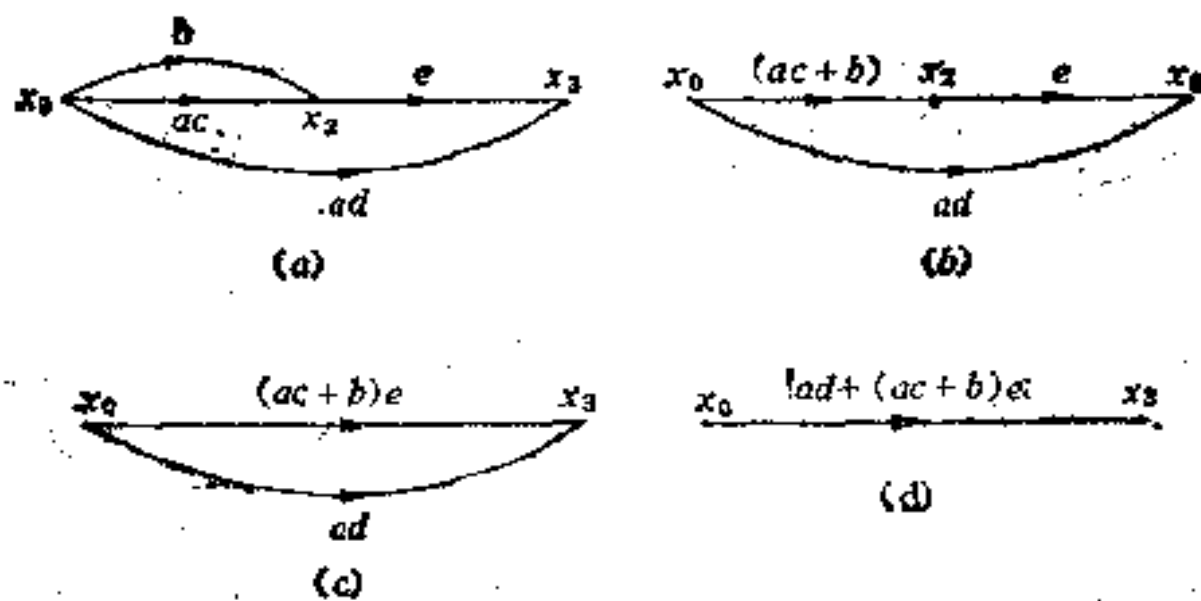


图 1-16

图 1-15 是级联图。应用简化规则 1., 2., 3., 最后得出了残图。对于任何级联图, 都可利用上述三个简化规则得到残图。但对反馈图, 利用上述简化规则是不够的。

例 1-3. 简化图 1-17. 它是一个反馈图。

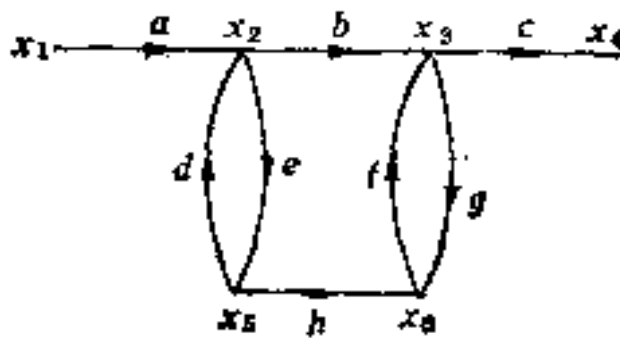


图 1-17

先利用规则 3. 吸收节点 x_2 , 再吸收节点 x_3 . 简化过程分别如图 1-18(a) 和 (b) 所示。

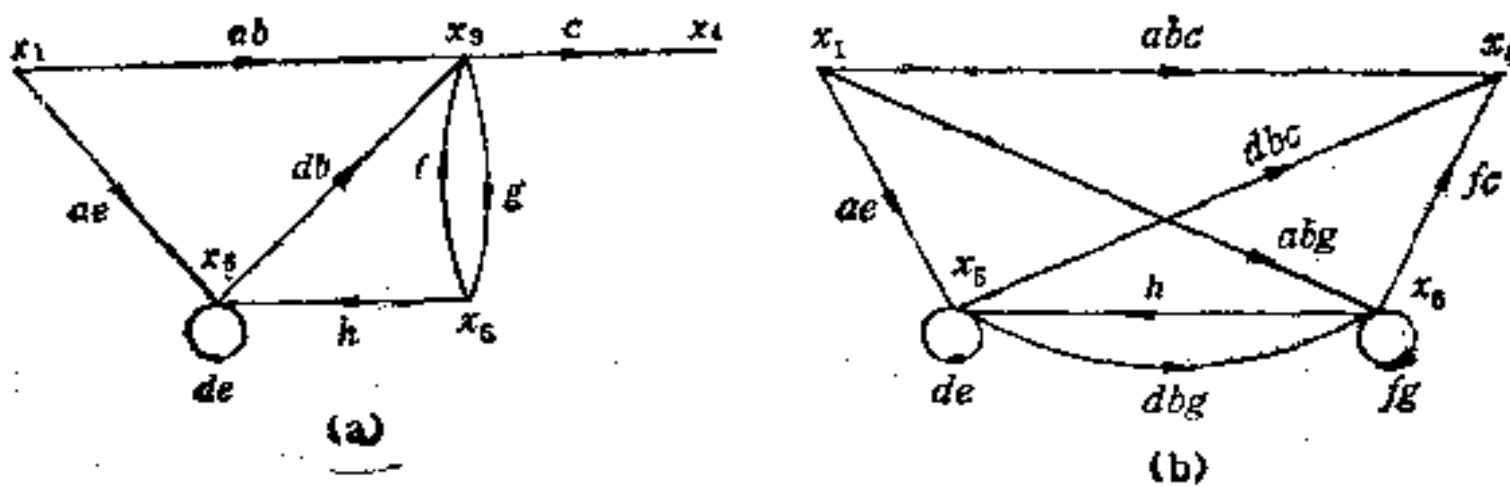


图 1-18

利用上面的三个简化规则，已经不能对图 1-18(b) 作进一步的化简，因为在节点 x_5 和 x_6 有自环出现。这就要应用下面的自环消除规则。

4. 自环消除规则

设在图 1-13 中的节点 x_N 处有一自环，其传输为 t ($t \neq 1$)，则在节点 x_N ，可写出

$$x_N = tx_N + \sum_{k=1}^m a_k x_k \quad (1-22)$$

$$y_p = b_p x_N \quad (p = 1, 2, \dots, N) \quad (1-23)$$

由式(1-22)：

$$x_N = \left(\frac{\sum_{k=1}^m a_k}{1-t} \right) x_k \quad (1-24)$$

比较式(1-22)和(1-24)可看出，若将有自环的节点的所有入支路传输分别乘以(1-自环传输)的倒数，则可消去该节点的自环。自环消除规则是简化反馈图不可缺少的。

对于图 1-18(b)，利用自环消除规则，可分别消除 x_5 和 x_6 的

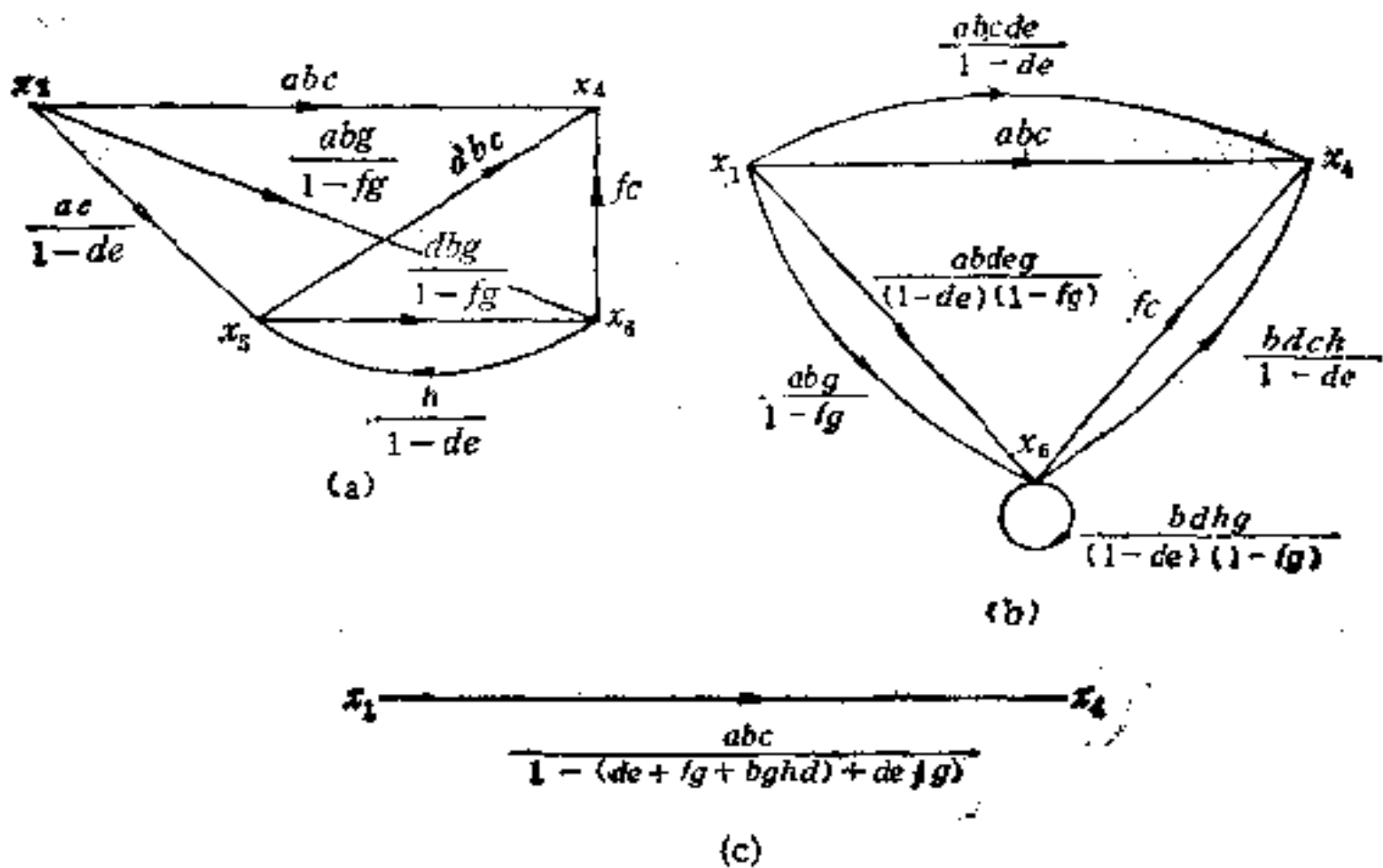


图 1-19

自环,如图 1-19(a). 再用支路移动规则吸收 x_3 ,如图 1-19(b). 消去节点 x_3 的自环,再由规则 1.、2.、3. 化简,最后得出残图,如图 1-19(c) 所示.

因此,对于任何信号流图,无论它的结构多么复杂,总可以利用上述四个简化规则进行化简,最终得出从源点到汇点的传输.在文献[4]中,源点到汇点的传输也称为图传输.

1-4 反 向

前面已经指出,用信号流图表示的线性方程组中,每个方程是以因果形式出现的.每一变量至多只能在一个方程中作为果出现一次.显然,只作为因出现的变量对应于源点,只作为果出现的变量对应于汇点.有时,我们需要改变因果关系,使因果颠倒过来.例如,方程

$$x_0 = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 \quad (1-25)$$

中, x_0 是果, x_1, x_2, x_3, x_4 是因.现希望将 x_0 作为因,而 x_1 作为果.则可显式地用 x_0, x_2, x_3, x_4 表示 x_1 .有

$$x_1 = \frac{1}{a} (x_0 - bx_2 - cx_3 - dx_4) \quad (1-26)$$

与方程 (1-25) 和 (1-26) 对应的信号流图分别如图 1-20 和

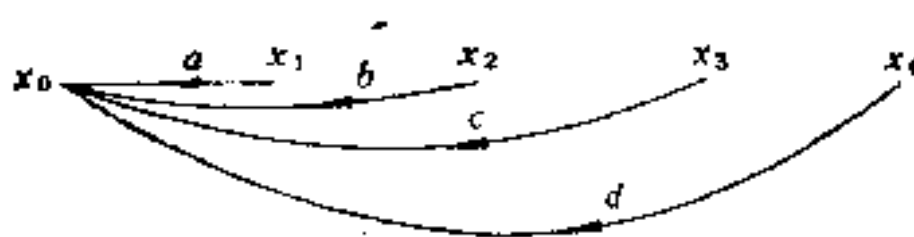


图 1-20

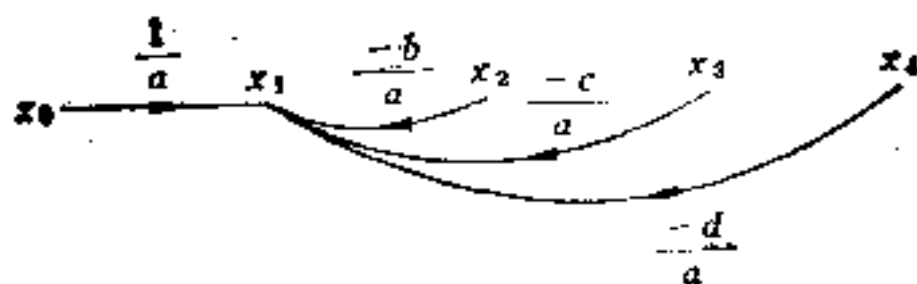


图 1-21

1-21 所示。从图 1-20 和图 1-21 可看出,因果关系的改变在图上对应于因果支路的方向及有关支路端点和相应的支路传输数值的变化。

反向可以简化图的拓扑结构,将系统从一种参数表示方式变化为另一种参数表示方式,是信号流图变换中常用的一种方法。

现讨论下面两种反向情况:

1. 从源点出发的支路的反向

顾名思义,所谓支路的反向就是将该支路的方向反过来。同时,有关支路的传输和图的拓扑结构也要发生相应的变化。设有方程

$$x_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \quad (1-27)$$

它的对应的信号流图如图 1-22。

在式(1-27)中, x_0 为因, x_1 为果。现使 x_1 为因, x_0 为果。于是,式(1-27)可写成

$$x_0 = \frac{1}{a_{10}}x_1 - \frac{a_{11}}{a_{10}}x_1 - \frac{a_{12}}{a_{10}}x_2 \dots - \frac{a_{1m}}{a_{10}}x_m \quad (1-28)$$

与式(1-28)对应的信号流图如图 1-23。

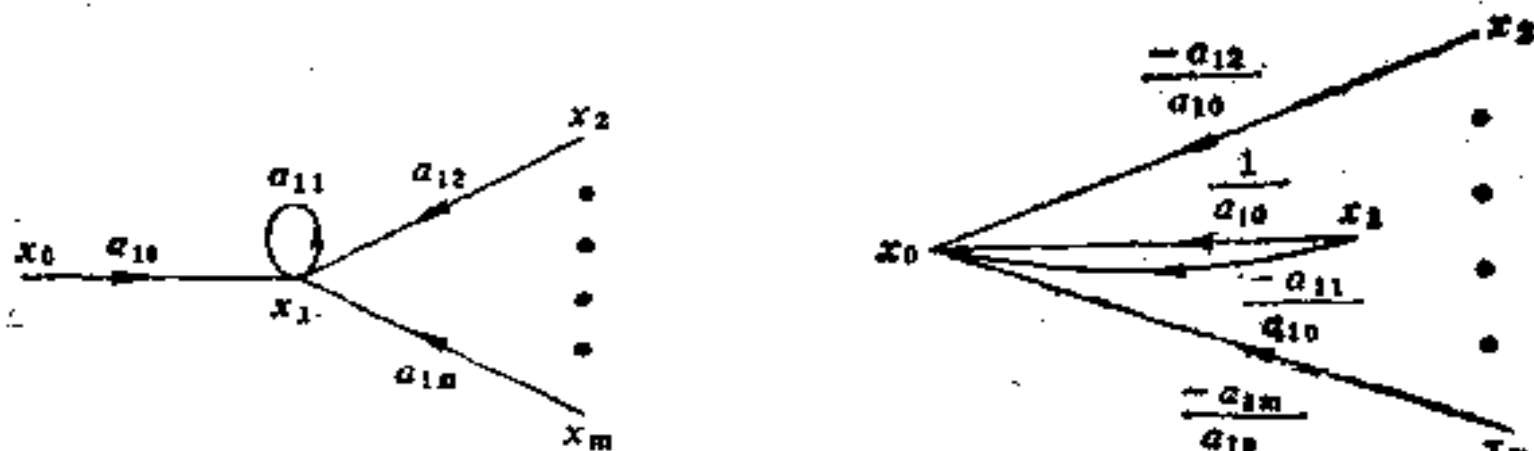


图 1-22

图 1-23

在图 1-23 中,从 x_0 到 x_1 的支路已反向。比较图 1-22 和图 1-23 可以得出结论:要使得从源点出发的支路反向,必须(1)将被反向的支路的方向反过来,其传输变为原支路传输的倒数;(2)将原来接在被反向支路终端的所有支路(包括自环)的终端改接在反向后的支路的终端,并分别将这些支路的传输乘以被反向支路

的支路传输的倒数,并加负号。

2. 从源点出发的路的方向

若该路中包括 m 条支路,从源点 0 经 1, 2, 3, ... 等节点至节点 m 。首先,将源点 0 到节点 1 的支路按上述规则反向。原来终点在节点 1 的支路,其终点都移到节点 0。这时,节点 1 成为源点。再将节点 1 到节点 2 的支路反向。依此类推,顺序将 m 条支路反向完毕,即完成从源点出发的路的方向。

例 1-4. 将图 1-24 中从节点 x_0 到 x_6 的路反向。

应用从源点出发的支路反向规则,顺序地将节点 x_0 到 x_2 , x_2 到 x_4 , x_4 到 x_6 的路反向,即得到路的方向,如图 1-25。

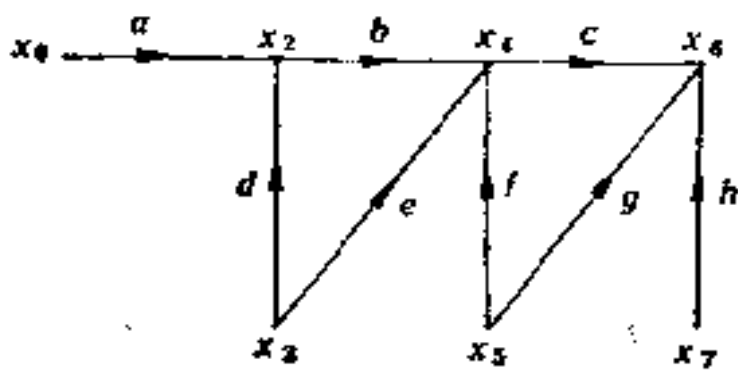


图 1-24

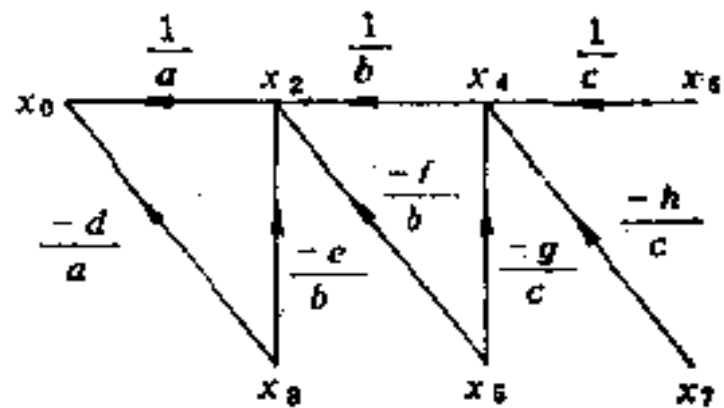


图 1-25

此外,环也可以反向,只要将环中所包括的支路依次反向。详细讨论,请参阅[26]。

应该指出,不从源点出发的支路和路是不能反向的。原因可说明如下。设图中有两个节点 x_i 和 x_j , x_i 有一条支路向着 x_j 。 x_i 不是源点。现在需要将 x_i 到 x_j 的支路反向。因为 x_i 不是源点,由图可写出 x_i 的显式表示(即 x_i 已经作为果出现一次)。若将 x_i 到 x_j 的支路反向,意味着 x_i 又将显式表示一次,这是不允许的。例如,图 1-26 对应于方程组

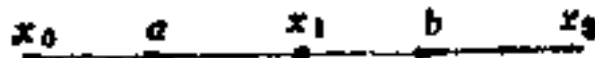


图 1-26

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_0 \\ x_2 &= bx_1 \end{aligned} \tag{1-29}$$

由式(1-29), $x_2 = abx_0$.

若将节点 x_1 到 x_2 的支路 b 反向, 则有图 1-27.

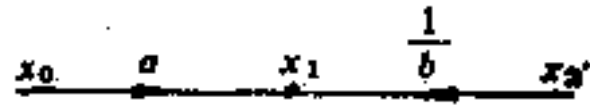


图 1-27

由图 1-27, $x_1 = ax_0 + \frac{1}{b}x_2$, 这显然是不正确的.

反向在信号流图分析中有着广泛的应用, 它可以简化图的拓扑结构, 将反馈图变为级联图. 例如, 图 1-28 是一个反馈图. 源点为 x_0 , 汇点为 x_5 . 现将 $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5$ 的路进行反向. 反向和化简过程如图 1-29 所示.

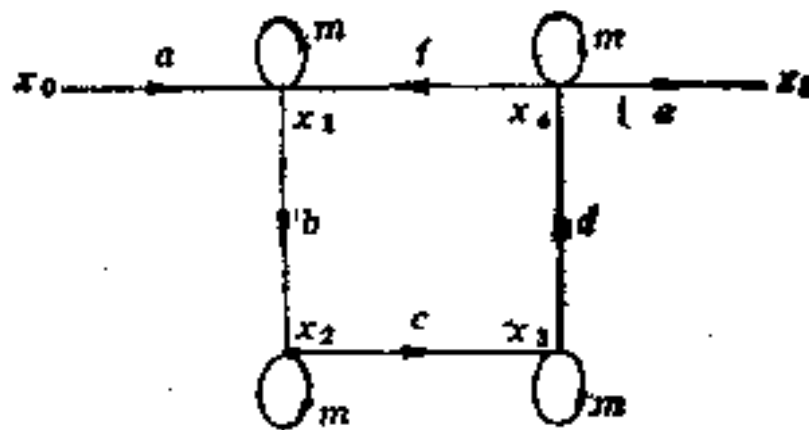


图 1-28

反向完毕后的图 (图 1-29(e)) 已经是一个很简单的级联图.

经化简后, 可得出 $x_0 = \frac{(1-m)^4 - bcdf}{abcde} x_5$.

反向的另一个重要应用是, 可以灵活而方便地从表示系统性能的一种参数制变为另一种参数制. 例如, 已知四端网络 (图 1-30) 的链接矩阵参数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, 及其对应的信号流图 (图 1-31). 现需用导纳矩阵表示这个四端网络的性能. 这时, 要使 v_1, v_2 作为源点, i_1, i_2 作为汇点. 因 v_2 已是源点, 故只需将源点

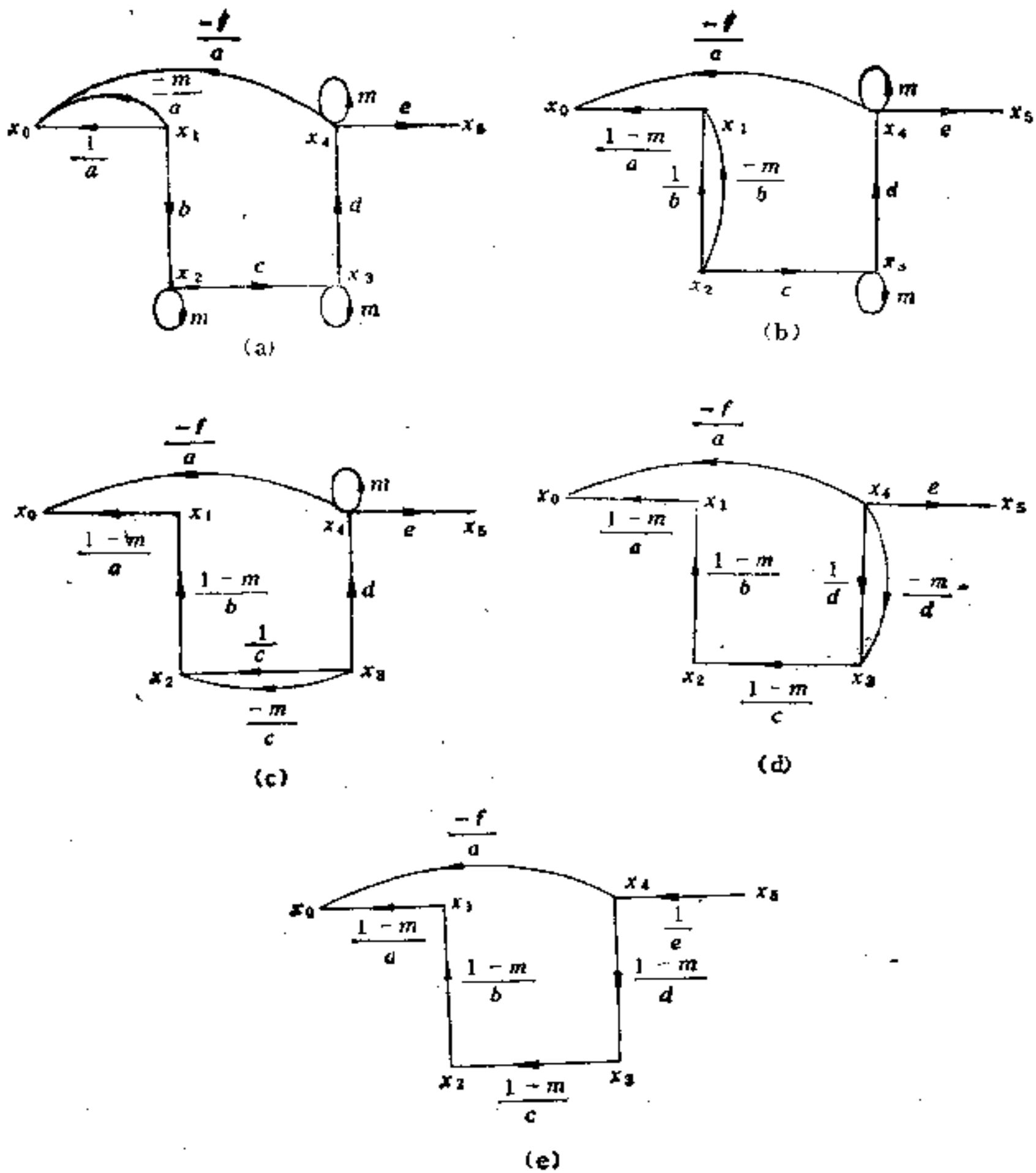


图 1-29

i_2 到 v_1 的支路反向, v_1 就成为源点。反向并化简后的图如图 1-32。

由图 1-32 (b), 可得出用链接矩阵参数表示导纳矩阵参数的关系:



图 1-30

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

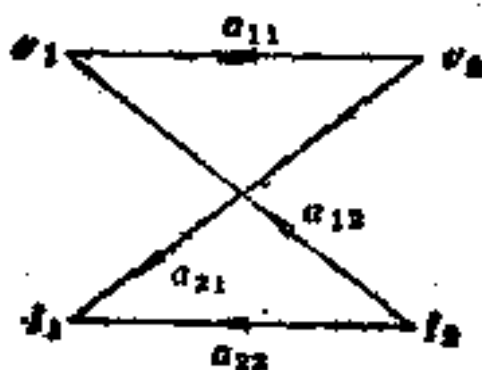


图 1-31

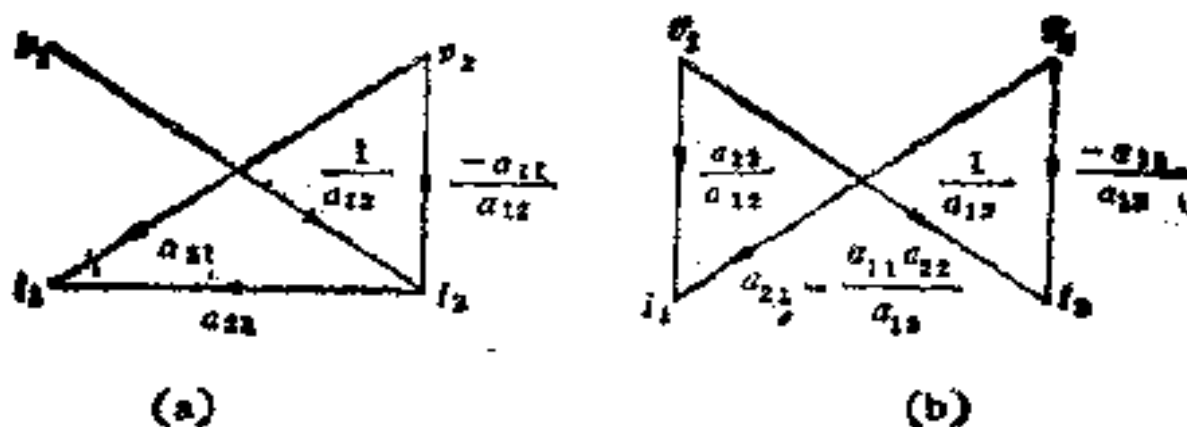


图 1-32

$$y_{11} = \frac{a_{22}}{a_{12}}, \quad y_{12} = \frac{-a_{11}a_{21} + a_{12}a_{21}}{a_{12}}, \quad y_{21} = \frac{-1}{a_{12}}, \quad y_{22} = \frac{a_{11}}{a_{12}}$$

同理，将图 1-31 中从 v_2 到 i_1 的支路 a_{21} 反向并化简，可得阻抗矩阵的信号流图表示。将支路 a_{22} , a_{11} , a_{12} 和 a_{21} 反向可分别得到串-并联(h 参数)、并-串联(g 参数)、反向链接(b 参数)的信号流图表示。因此，可得到用链接矩阵参数表示其他五种参数的结果。类似地，可得到其他参数间相互表示的关系。参阅[26]。

总之，图的各种可能的反向对应于用因果关系表示的各种方程组。只要物理系统用图的形式表示出来，用拓扑反向过程不难

得到所有的因果关系表示方式。

1-5 信号流图的矩阵描述

以上讨论了信号流图的简化规则和图的变换(反向)。利用上述方法可以通过图的逐步简化,最后得到只包括源点和汇点的残图,由残图直接写出从源点到汇点的传输。这就是一般所谓的间接法。下面要讨论到求图中从源点到汇点的传输的直接法,即根据给定的图,利用一定的拓扑规则直接写出从源点到汇点的传输,不需要一系列的化简过程。为此,首先要引入描述信号流图的几个矩阵。

信号流图有两个显著的特点,即支路和节点的关联,及支路和节点的赋权。因此,我们自然联想到用矩阵描述它。定义下列三个矩阵。

分支矩阵 B 。 B 是一个节点-支路关联矩阵。行对应于节点,列对应于支路。

$$B = [b_{ij}], \quad b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若支路 } j \text{ 的起点是节点 } i \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

因为每条支路只能有一个起点,故每列只能有一个元素为 1。

汇总矩阵 S 。 S 也是一个节点-支路关联矩阵。行对应于节点,列对应于支路。

$$S = [s_{ij}], \quad s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若支路 } j \text{ 的终点是节点 } i \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

因为每条支路只能有一个终点,故每列也只能有一个元素为 1。

显然, $B - S$ 即为有向图中的节点-支路关联矩阵 A 。

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若支路 } j \text{ 的起点是节点 } i \\ -1, & \text{若支路 } j \text{ 的终点是节点 } i \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

支路的权矩阵 W 。 W 是一个 b 阶对角矩阵 (b 是图中的支路

数).

$$W = [w_{ij}],$$

$$w_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & i = j, w_{ij} \text{ 是支路 } i \text{ 的权, 即支路传输} \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

例如, 对下列方程组:

$$\begin{aligned} x_1 - fx_2 - ex_3 &= y_1 \\ -ax_1 + x_2 - dx_3 &= 0 \\ -bx_2 + x_3 - gx_4 &= y_3 \\ -cx_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (1-30)$$

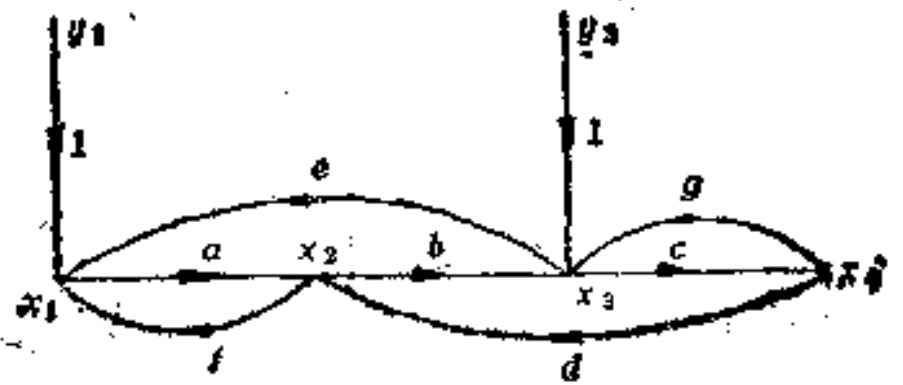


图 1-33

相应的信号流图如图 1-33。不考虑源点和离开源点的支路, 可写出:

$$B = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$S = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} a & & & & & \\ & b & & & & \\ & & c & & & \\ & & & d & & \\ & & & & e & \\ & & & & & f \\ & & & & & & g \end{bmatrix}$$

这里 W 中行和列的顺序与 B, S 中的相同。

上述 B, S 和 W 三个矩阵完全描述了信号流图。下面的定理证实了这一论断。

对于下列方程组：

$$AX = Y \quad (1-31)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

定理 1-1 成立。

定理 1-1. 设矩阵为 B, S 和 W 的信号流图描述了方程组 (1-31), 则下式成立：

$$I - SWB^t = A \quad (1-32)$$

式中 I 是单位矩阵, 阶数为 n 。 B^t 是 B 的转置。

证明. 令 q_{ij} 是矩阵 $(I - SWB^t)$ 的第 i 行, 第 j 列的元素。若 $i \neq j$, 显然有

$$q_{ij} = - \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n s_{ik} w_{kr} b_{rj} \quad (1-33)$$

因为 W 是对角矩阵, 故 q_{ij} 简化为

$$q_{ij} = - \sum_{k=1}^n s_{ik} w_{kk} b_{jk} \quad (1-34)$$

根据上述三个矩阵的定义可知

$s_{iK}w_{KK}b_{jK} = w_{KK}(b_K \text{ 的传输}),$

若支路 b_K 离开节点 j 进入节点 i

$s_{iK}w_{KK}b_{jK} = 0$, 否则

因为任一对节点间不可能有一条以上的支路, 故若任一支路 b_K 离开节点 j 进入节点 i , 则 $-q_{ij}$ 是支路 b_K 的传输。如果没有这样的支路, 则 $q_{ij} = 0$ 。因此, $q_{ij} = a_{ij}$ 。

若 $i = j$, 有

$$q_{ii} = 1 - \sum_{K=1}^b s_{iK}w_{KK}b_{iK} \quad (1-35)$$

由图的构造可知, 没有进入和离开同一节点的支路 (即自环), 故 $s_{iK}w_{KK}b_{iK} = 0 (K = 1, 2, \dots, b)$ 。因此, $q_{ii} = a_{ii} = 1$ 。定理证毕。

引理 1-1. 设 B (或 S) 的方子矩阵 F 包括 K 个节点 $(1, 2, \dots, K)$ 和 K 条支路 (b_1, b_2, \dots, b_K) 。当且仅当 K 个节点中的每个节点正好有一条出 (或入) 支路在 (b_1, b_2, \dots, b_K) 中, 则 F 为非奇异矩阵。

证明. 讨论矩阵 B (对 S 的证明相同)。设节点集 $(1, 2, \dots, K)$ 的每个节点正好有一条出支路在支路集合 (b_1, b_2, \dots, b_K) 中。则 F 的第一行正好有一非零元素 f_1 , 第二行正好有一非零元素 f_2 。因为每条支路只能有一个起点, 故 f_1 和 f_2 不可能在同一列上。连续进行下去。 F 的第 K 行正好有一非零元素 f_K 。它不可能与 f_1, f_2, \dots, f_{K-1} 在同一列。故 F 的行列式为 $\pm (f_1 f_2 \dots f_K) = \pm 1$, 因为 f_1, f_2, \dots, f_K 均为 1。因此, F 为非奇异矩阵。

设 F 为非奇异矩阵。若节点 $i (1 \leq i \leq K)$ 没有出支路在支路集 (b_1, b_2, \dots, b_K) 中, 则 F 的第 i 行的元素全为零, 与 F 的非奇异性的假设相矛盾。若节点 i 有两条出支路 $b_p, b_q (1 \leq p, q \leq K)$, 则 F 的第 p 列和第 q 列相同, 仍与 F 的非奇异性的假设相矛盾。故每个节点 i 只能有一条出支路在支路集 (b_1, b_2, \dots, b_K) 中。引理证毕。

引理 1-1 的证明表明, B 和 S 的所有非奇异子矩阵的行列式

为±1,故B和S为么模矩阵。下面的定理指出了B和S的非奇异子矩阵与图的拓扑结构的关系。

定理 1-2. B和S的对应方子矩阵 F_1 和 F_2 (它们由同样的行和列所定义)均为非奇异的,当且仅当对应于 F_1 和 F_2 的列的支路形成环或不接触环集。不接触环集是由一些不接触环组成的集合。不接触的意义是该集合中任何两个环都没有公共节点。

证明. 为讨论方便,设对应于 F_1 和 F_2 的列的支路为 b_1, b_2, \dots, b_K , 对应于 F_1 和 F_2 的行的节点为 $1, 2, \dots, K$ 。由引理1,当且仅当 $1, 2, \dots, K$ 中的每个节点正好在支路集 (b_1, b_2, \dots, b_K) 中有一条入支路和一条出支路时, F_1 和 F_2 才都是非奇异的。当子图是连通图时,每个节点的人度和出度都是1的子图显然是环。当子图不连通时,这个子图一定是不接触环集。

例如,考虑图 1-33 中对应于节点 2, 3, 4 的行和对应于支路 b, c, d 的列所构成的B和S的方子矩阵 F_1 和 F_2 , 则

$$F_1 = \begin{matrix} & b & c & d \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad F_2 = \begin{matrix} & b & c & d \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

F_1 和 F_2 都是非奇异阵。由于该子图是连通图,故对应于 F_1 和 F_2 的列的支路集 (b, c, d) 形成环 bcd 。

如考虑图 1-33 中对应于节点 1, 2, 3, 4 的行和支路 a, c, f, g 的列所构成的B和S的方子矩阵 F_1 和 F_2 , 则

$$F_1 = \begin{matrix} & a & c & f & g \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad F_2 = \begin{matrix} & a & c & f & g \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

F_1 和 F_2 也都是非奇异阵。由于该子图是不连通图,故对应于 F_1 和 F_2 的列的支路集 (a, c, f, g) 形成不接触环集 af, cg 。

本节讨论了信号流图与矩阵 B, S, W 的关系,并研究了有关

B, S 的拓扑性质。在此基础上,将进一步推导 Mason 增益公式。

1-6 Mason 增益公式

Mason 增益公式是直接由与线性方程组对应的信号流图写出方程组解的拓扑公式。它是求信号流图中源点到汇点的传输的直接方法,在线性系统分析中得到广泛的应用。下面以式(1-31)为基础,求方程组的解与图的拓扑结构的关系。先建立两个引理。

引理 1-2. 设 F_1 和 F_2 分别为 B 和 S 的非奇异子矩阵,令 L_1, L_2, \dots, L_r 为对应于 F_1 和 F_2 的列的支路所形成的不接触环集。 N 为环集 (L_1, L_2, \dots, L_r) 中有偶数支路的环数。当且仅当 N 为偶数时, F_1 和 F_2 的行列式相同(即都为 1 或 -1)。

证明. 考虑 $L_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 。设 L_i 中的支路为 $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n_i}}$, L_i 中的节点排列成使支路 b_{i_j} 离开节点 i_j , 进入节点 $i_{j+1} (j = 1, 2, \dots, n_i)$ 。设 F_{1i} 是由行 i_1, i_2, \dots, i_{n_i} 和列 $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n_i}}$ 所构成的 F_1 的子矩阵, F_{2i} 是 F_2 的对应的子矩阵。则有

$$F_{1i} = \begin{matrix} & b_{i_1} & b_{i_2} & \dots & b_{i_{n_i}} \\ \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n_i} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$F_{2i} = \begin{matrix} & b_{i_1} & b_{i_2} & \dots & b_{i_{n_i}} \\ \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n_i} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

当然, F_{1i} 和 F_{2i} 都是非奇异的。由相邻两行的交换,可使 F_{2i} 通过 $(n_i - 1)$ 次交换后,和 F_{1i} 相同。因此,当 n_i 为奇时, F_{1i} 和 F_{2i} 的行列式相等,即 $|F_{1i}| = |F_{2i}|$; 当 n_i 为偶时, $|F_{1i}| = -|F_{2i}|$ 。

现将环 L_1, L_2, \dots, L_r 这样排列,使得环 L_1, L_2, \dots, L_N ($N \leq r$) 是有偶数条支路的环,其余 $r - N$ 个环都是支路数为奇数的环. F_1 和 F_2 可划分如下:

$$F_1 = \begin{bmatrix} F_{11} & & & & & & & 0 \\ & F_{12} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & F_{1N} & & & & \\ & & & & F_{1N+1} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & & & F_{1r} \end{bmatrix} \quad (1-36)$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} F_{21} & & & & & & & 0 \\ & F_{22} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & F_{2N} & & & & \\ & & & & F_{2N+1} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & & & F_{2r} \end{bmatrix} \quad (1-37)$$

由式(1-36)和(1-37)可知:

$$|F_1| = |F_{11}| |F_{12}| \cdots |F_{1N}| |F_{1N+1}| \cdots |F_{1r}| \quad (1-38)$$

$$|F_2| = |F_{21}| |F_{22}| \cdots |F_{2N}| |F_{2N+1}| \cdots |F_{2r}| \quad (1-39)$$

因为环 L_1, L_2, \dots, L_N 是由偶数条支路构成的环,环 L_{N+1}, \dots, L_r 是由奇数条支路构成的环,故

$$|F_{1i}| = -|F_{2i}| (i \leq N) \quad (1-40)$$

$$|F_{1i}| = |F_{2i}| (i > N) \quad (1-41)$$

所以, $|F_1| = (-1)^N |F_2|$.

例如,图 1-33 中环 L_1 由支路 af 构成,环 L_2 由支路 cg 构成. L_1 和 L_2 为不接触环集,且都是包括偶数条支路的环, $N = 2$. 故由引理 2, $|F_1| = |F_2|$. 实际上, $|F_1| = |F_2| = -1$.

引理 1-3. 设 F_1 和 F_2 分别是 B 和 S 的非奇异子矩阵. 支路 b_1, b_2, \dots, b_k 对应于 F_1 和 F_2 的列. L_1, L_2, \dots, L_r 是由支路 b_1, b_2, \dots, b_k 所构成的不接触环集,则当且仅当 k 和 r 同时为偶

或奇时, F_1 和 F_2 的行列式 $|F_1|$ 和 $|F_2|$ 才相等.

证明. 设 N 是环集 (L_1, L_2, \dots, L_r) 中有偶数条支路的环数. N 和 $r - N$ 的奇和偶可能有四种不同的组合: (1) 当 N 为偶, $r - N$ 也为偶时, r 一定为偶, 支路数 K 也一定为偶; (2) 当 N 为偶, $r - N$ 为奇时, r 一定为奇, K 也一定为奇; (3) 当 N 为奇, $r - N$ 为偶时, r 一定为奇, K 一定为偶; (4) 当 N 为奇, $r - N$ 为奇时, r 一定为偶, K 一定为奇. 结果如表 1-1.

表 1-1

	N	$r - N$	r	K
1	偶	偶	偶	偶
2	偶	奇	奇	奇
3	奇	偶	奇	偶
4	奇	奇	偶	奇

由引理 1-2, 当且仅当 N 为偶时, $|F_1|$ 和 $|F_2|$ 才相等. 从上表中可看出, 只有 K 和 r 同时为偶或奇时, N 才为偶. 故引理 1-3 证毕.

定理 1-3. 设 G 为方程组 $AX = Y$ 所对应的信号流图. A 为式(1-31)所定义的系数矩阵. G 中的环集为 (L_1, L_2, \dots, L_r) . W_i 为环 $L_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 的传输, 则 A 的行列式

$$|A| = \Delta = 1 - \sum_{i=1}^r W_i + \sum_{i,j} W_i W_j + \dots + (-1)^\alpha \sum_{i,j,\dots,m} W_i W_j + \dots + W_m \quad (1-42)$$

式中 α 是 (i, j, \dots, m) 中的元素数, 即最多的不接触环集中的环数. Δ 又称图行列式, 用文字来说:

$\Delta = 1 -$ (所有环的环传输之和) $+$ (所有两个不接触环的环传输之和) $\dots + (-1)^\alpha$ (所有 α 个不接触环的环传输之和)

证明. 信号流图 G 可用矩阵 B, S 和 W 表征. 令 $R = SWB'$, 由定理 1-1, $I - R = A$. 对行列式 $|I - R|$ 用两矩阵之和的行

列式展开公式^[26]得

$$\Delta = |A| = |I - R| = 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j M_j \quad (1-43)$$

式中 n 是矩阵 A 的阶数, M_j 是 R 的所有 j 阶主余式之和.

因为 G 中不包括自环, 故 R 的主对角线上的元素都是零, 因此 $M_1 = 0$. 现讨论由 R 的第 $1, 2, \dots, K$ 行和第 $1, 2, \dots, K$ 列所组成的 K 阶主余式 $r_{11}r_{22} \cdots r_{KK}$. 要计算它, 可从 R 中去掉第 $K+1, K+2, \dots, n$ 行和第 $K+1, K+2, \dots, n$ 列, 即

$$|r_{11}r_{22} \cdots r_{KK}| = |S_0 W B_0'|$$

式中 S_0 和 B_0' 分别为从 S 和 B 中去掉第 $K+1, K+2, \dots, n$ 行后得出的矩阵. S_0 为 $K \times b$ 阶, W 为 $b \times b$ 阶, B_0' 为 $b \times K$ 阶.

因为 K 阶主余式 $|r_{11}r_{22} \cdots r_{KK}|$ 是矩阵 $S_0 W$ 和 B_0' 之积的行列式. 矩阵 $S_0 W$ 是用 W 中的支路传输去乘 S_0 中对应于该支路的列得出. 因此, 只有 S_0 的对应子矩阵非奇异时, $S_0 W$ 的子矩阵才是非奇异的. 对 $|S_0 W B_0'|$ 应用 Binet-Chuchy 定理展开. 若 $S_0 W$ 的子矩阵非奇异, 而对应的 B_0' 的子矩阵也非奇异. 由定理 1-2, $|S_0 W B_0'|$ 展开式中的典型项为 $\pm w_1 w_2 \cdots w_K$ (这里 w_i 是支路 b_i 的传输), 支路 b_1, b_2, \dots, b_K 形成了关联节点 $1, 2, \dots, K$ 的环或不接触环集. 考虑 R 的所有 2 至 n 阶的主余式, 并按不接触环的数目加以集项后即得式(1-42)(除每项前的符号外). 留下的问题是决定每项前的符号. 更确切地说, 要决定每项前的符号与不接触环数目的关系. 要解决这个问题, 可参阅表 1-2.

表 1-2

	K	r	$ r_{11} \cdots r_{KK} $ 展开式中 $w_1 \cdots w_K$ 的符号 (由引理 3)	式(1-43)中 $ r_{11} \cdots r_{KK} $ 的符号	Δ 展开式中 $w_1 \cdots w_K$ 的符号
1	偶	偶	+	+	+
2	偶	奇	-	+	-
3	奇	偶	-	-	+
4	奇	奇	+	-	-

比较表 1-2 中第 2 列和第 5 列可看出, r (环数) 为偶时, Δ 展开式中 $W_1 \cdots W_K$ 前的符号为正, r 为奇时为负. 定理 1-3 证毕.

定理 1-4 解决了行列式 $|A|$ 中某一元素的余因式的拓扑表示问题.

定理 1-4. 设 A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的余因式, 则当 $i \neq j$ 时,

$$A_{ij} = \sum_K P_K \Delta_K \quad (1-44)$$

式中 P_K 是从节点 i 到 j 的第 K 条路的传输, Δ_K 是不接触从 i 到 j 的第 K 条路的图行列式. 它是在图 G 中去掉 P_K 的所有节点和这些节点所关联的支路后按 (1-42) 式算出的图行列式. \sum_K 表示对所有可能的从节点 i 到 j 的路求和.

证明. 不失一般性, 讨论 A_{n1} ($n \neq 1$), 则 A_{n1} 可写成

$$A_{n1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q & a_{2n} & \vdots & a_{n-1n} \end{vmatrix} \quad (1-45)$$

式中

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{32} & 1 & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

将 A_{n1} 展开可得

$$A_{n1} = (-1)^{n+1} \left[(-1)^n a_{1n} Q + (-1)^{n-1} \sum_{i,j=2}^{n-1} a_{in} a_{ij} Q_{ij} \right] \quad (1-46)$$

式中 Q_{ij} 是 Q 的第 i 行第 j 列的余因式 ($i, j = 2, 3, \dots, n-1$).

对于图 G , 图中从节点 j 到节点 i 的支路的传输 $t_{ji} = -a_{ij}$, 方程 (1-46) 可写成

$$A_{n1} = t_{n1} Q + \sum_{i,j=2}^{n-1} t_{ni} t_{jp} Q_{ij} \quad (1-47)$$

对应于 Q 的子图 G' 是从图 G 中去掉节点 1 和 n , 及这些节点上所关联的支路得出的. 因此, Q 是 G' 的图行列式. 式(1-47)中第一项是从节点 n 到节点 1 的路(这里是一条支路)与不接触该路的图行列式之积. 类似地, 将 Q_{ij} 展开如下:

$$Q_{ij} = t_{ij}V + \sum_{\substack{K, m=2 \\ K, m \neq i \text{ 或 } j}}^{n-1} t_{iK}t_{mj}P_{Km} \quad (1-48)$$

式中对应于 V 的子图 G'' 是从图 G' 去掉节点 i 和 j , 及这些节点上所关联的支路得出的.

继续上述过程, 我们可得到 A_{ij} 中的一个典型项是: $t_{ni}t_{iK}t_{Kp} \cdots t_{qm}t_{mj}t_{jl}|R|$, 这里 $t_{ni}t_{iK}t_{Kp} \cdots t_{qm}t_{mj}t_{jl}$ 是从节点 n 经节点 i, K, p, \cdots, q, m, j 至节点 1 的路 P_K 的传输, $|R|$ 是从 G 中去掉路 P_K 上的节点和它们所关联的支路后的图行列式. 所以, 证明了式(1-44). 当 $i = j$ 时, A_{ii} 显然是从图 G 中去掉节点 i 及其所关联的支路的图行列式.

设方程组(1-31)中,

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ y_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

即暂考虑有一个源点 y_i . 于是, 它的解

$$x_j/y_i = \frac{A_{ij}}{|A|} \quad (1-49)$$

由定理 1-3 和定理 1-4,

$$x_j/y_i = \frac{\sum_K P_K \Delta_K}{\Delta} \quad (1-50)$$

式中 Δ 和 $\sum_K P_K \Delta_K$ 分别由式(1-42)和式(1-44)定义.

式(1-50)就是著名的 Mason 增益公式。它表明了从源节点 i 到节点 j 的传输，等于所有可能的从 i 到 j 的路传输与对应的不接触该路的图行列式积之和与图行列式之比。

如果图中有 n 个源点，则可分别利用式(1-50)求每个源点到节点 j 的传输，再乘以相应的源点的信号并迭加起来就是所有源点对节点 j 的贡献，即

$$x_j = \frac{1}{\Delta} \sum_s \left[y_s \left(\sum_k P_k \Delta_k \right) \right] \quad (1-51)$$

式中 y_s 是源点 s 的信号； \sum 表示对所有的源点求和。

例 1-5. 用 Mason 增益公式求图 1-28 中从源点 x_0 到汇点 x_5 的传输。

(1) 先求图行列式 Δ ：

由图 1-28 可知，单环¹⁾为 $m, m, m, m, bcdj$ ，两个不接触环为 mm, mm, mm, mm, mm, mm (共 $C_2^4 = 6$ 种)，三个不接触环为 mmm, mmm, mmm, mmm (共 $C_3^4 = 4$ 种)，四个不接触环为 $mmmm$ 。

所以，

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (4m + bcdj) + 6m^2 - 4m^3 + m^4 \\ &= (1 - m)^4 - bcdj \end{aligned} \quad (1-52)$$

(2) 再求 $\sum_k P_k \Delta_k$ ：

从源点 x_0 到汇点 x_5 的路只有一条，路的传输是 $abcde$ 。因为该路包括图的所有节点，所以不接触该路的图行列式 $\Delta_k = 1$ 。因此，

$$\sum_k P_k \Delta_k = abcde. \quad (1-53)$$

将式(1-52)和(1-53)代入 Mason 增益公式(1-50)，得出

$$\frac{x_5}{x_0} = \frac{abcde}{(1 - m)^4 - bcdj} \quad (1-54)$$

1) 这里所写的都是环传输。对于两个以上的不接触环所写出的也是环传输。以下同。

这与用逐步化简法得出的结果相同。

例 1-6. 求图 1-33 中的 x_4 。

这里有两个源点 y_1 和 y_3 。需分别求出 y_1 和 y_3 到 x_4 的传输。

(1) 求 y_1 到 x_4 的传输:

$$\Delta = 1 - (af + bcd + cg + abe) + afcg \quad (1-55)$$

$$\sum_K P_K \Delta_K = abc.$$

(2) 求 y_3 到 x_4 的传输:

图行列式 Δ 同前。

$$\sum_K P_K \Delta_K = c(1 - af) \quad (1-56)$$

将(1)、(2)中的结果代入式(1-51), 得出

$$x_4 = \frac{1}{1 - (af + bcd + cg + abe) + afcg} [y_1 abc + y_3 c(1 - af)] \quad (1-57)$$

1-6-1 图行列式 Δ 的项数

在应用 Mason 增益公式时, 需要计算图和有关子图的图行列式。预先算出其中所包括的项数, 可以检查所得的结果是否有遗漏。为了讨论方便, 需给出下列定义。

矩阵 A 的符号不变的行列式是 A 的行列式中所有各项都取正号的行列式, 以下简称不变行列式, 并用符号 $|A^+|$ 表示。例如,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

则

$$|A^+| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

由式 (1-32) 可知, $A = I - SWB'$. 在讨论 Δ 中的项数时, 不必考虑支路传输, 可使每条支路的传输都为 1, 即令 W 为单位矩阵, 于是 $A = I - SB'$. 若图中包括 n 个节点 (除源点外), 则 SB' 为 $n \times n$ 矩阵, 令 $SB' = C$. 由 S 和 B 的性质可知, 若 C_{ij} (C 的第 i 行、第 j 列的元素) 为 1, 表明从节点 j 有一条支路至节点 i . 矩阵 C 称为连接矩阵, 它可由图直接写出, 不需要由 SB' 之积得出. 因此,

$$\Delta \text{ 中的项数} = |I - C| = |I + C| \quad (1-58)$$

例 1-7 求图 1-28 中的图行列式 Δ 中所包括的项数.

由图 1-28, 可写出

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$\Delta \text{ 中所包括的项数} = |I + C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 17$$

这证实了式 (1-52) 中的项数是正确的.

例 1-8. 求图 1-33 中的 Δ 所包括的项数.

由图 1-33,

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

故

$$\Delta \text{ 中所包括的项数} = |I + C|$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

这证实了式(1-55)中的项数是正确的。

关于分子中与路 P_K 不接触的图行列式 Δ_K 中的项数,可从图 G 中去掉路 P_K 中的节点及其所关联的支路,得到图 G' ,再求出图 G' 的矩阵 C ,由 $|I + C|$ 求得 Δ_K 中的项数。例如,对图 1-33,不接触从源点 y_3 到节点 x_4 的路的图行列式 Δ_K 中包括的项数等

$$\text{于 } |I + C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2. \text{ 这就是式(1-56)中的两项 } 1 \text{ 和 } af.$$

还应指出,在信号流图中若去掉所有的级联支路(当然,和源点与汇点关联的支路都是级联支路)后,图变为 n 个不连通的部分,则该图的图行列式

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_n \quad (1-59)$$

式中 $\Delta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是第 i 个连通部分的图行列式,它可按式(1-42)求出,相应地,这类图的图行列式的项数为

$$\prod_{i=1}^n |I_i + C_i| \quad (1-60)$$

式中 C_i 是第 i 个连通部分的连接矩阵; I_i 是维数等于第 i 个连通部分的单位矩阵; $|I_i + C_i|$ 是 $I_i + C_i$ 的不变行列式。

1-6-2 多个节点的消除

同时消除多个节点是信号流图简化中常用的一种方法。如果要消除图中的 s 个节点,用 1-3 节中的简化方法,需要进行 s 次才能消除这 s 个节点,下面讨论的方法可以一次同时消除 s 个节点。现在利用 Mason 公式推导出多个节点消除的算法。

设 V 是图 G 的节点集, V_m 是 V 的真子集 (即 $V \supset V_m$), 且

$K = \det G(V_m) \neq 0$. 这里 $G(V_m)$ 是 $G(V)$ 的子图, 它的节点集为 V_m , 且包括两个节点都属于 V_m 的那些支路. 现需从 $G(V)$ 中消除节点集 V_m , 以及 V_m 所关联的支路. 用 \hat{G} 表示从 G 中消除 V_m 后的图. 显然, \hat{G} 的节点集为 $(V - V_m)$. 要求得 \hat{G} , 必须求出 G 中从节点 i 到节点 j 的支路传输 t_{ji} (对所有 $i, j \in (V - V_m)$).

对任一节点 $j, j \in (V - V_m)$, 节点 j 的信号

$$x_j = \sum_i t_{ji} x_i + \sum_q t_{jq} x_q, \quad i \in (V - V_m), q \in V_m \quad (1-61)$$

现在要用 x_i 表示 $\sum_q t_{jq} x_q$. 对于图 1-34 所示的信号流图 G 中的每个节点 $i, i \in (V - V_m)$, 可将其分裂为两个节点 i' 和 i'' , 使得所有从节点 i 出来并连接在 V_m 中的节点的支路现从 i' 出来, 所有原来接到节点 i 的支路现接到 i'' . 节点分裂后的图如图 1-35 所示.

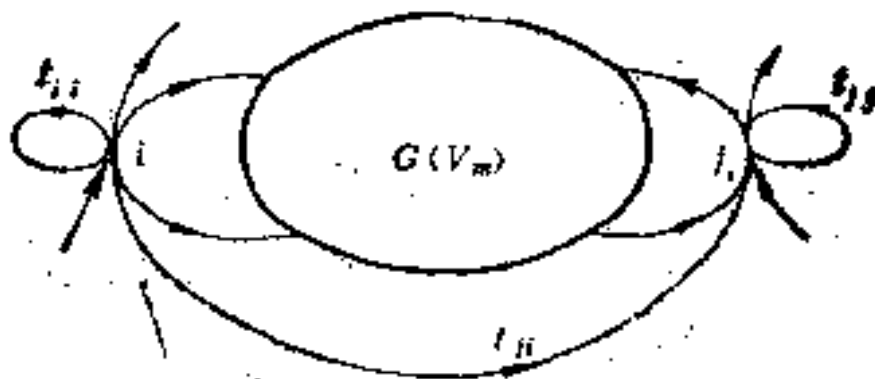


图 1-34

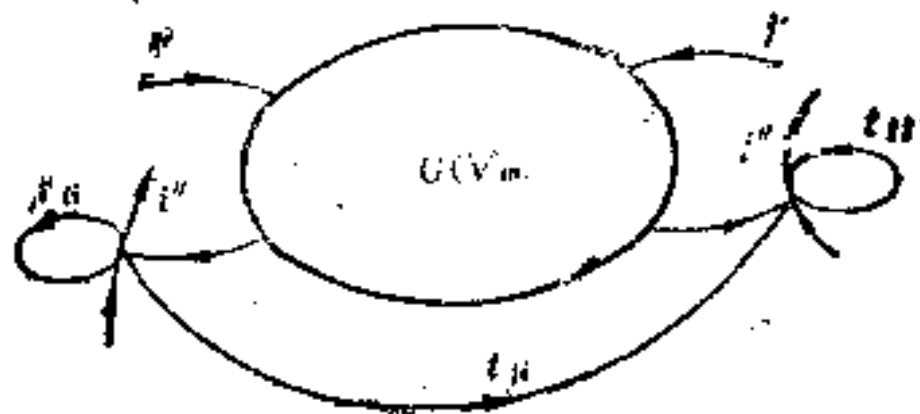


图 1-35

因为节点 i' 是源节点, 其节点信号可以独立地选取. 若 i' 的信号取为 x_i , 则 V_m 中的节点信号 x_q 不变. 因此, 从图 1-35, 利用

Mason 增益公式可用 x_i 表示 $\sum_q t_{iq}x_q$ 如下:

$$\sum_q t_{iq}x_q = \sum_i \left(\frac{\sum_K P_K \Delta_K}{K} \cdot x_i \right), \quad i \in (V - V_m) \quad (1-62)$$

式中 P_K 是从节点 i 到 j 的通过 $G(V_m)$ 的第 K 条路的增益; Δ_K 是不接触路 P_K 的 $G(V_m)$ 的图行列式; \sum 表示对所有从节点 i 到节点 j 求和。

将式(1-62)代入式(1-61),可求得

$$x_j = \sum_i \hat{t}_{ji} x_i, \quad i, j \in (V - V_m) \quad (1-63)$$

式中

$$\hat{t}_{ji} = t_{ji} + \frac{\sum_K P_K \Delta_K}{K} \quad (1-64)$$

式(1-64)表明,去掉节点集 V_m 后,简化图 \hat{G} 中从节点 i 到节点 j 的支路传输等于图 G 中从 i 到 j 的支路传输加上从节点 i 经 V_m 中的节点到 j 的传输。这就是多个节点消除的规则。实际上,当 V_m 中只包括一个节点时, P_K 即为该节点所关联的两条支路(一条入支路和一条出支路)的传输之积, $\Delta_K = 1, K = 1$ 。这就是 1-3 节中的支路移动规则。当 V_m 包括图中除源点和汇点以外的节点时,多个节点的消除就变为用 Mason 增益公式求源点到汇点的传输。

例 1-9. 求图 1-36 中消除节点 2 和 3 的简化图。

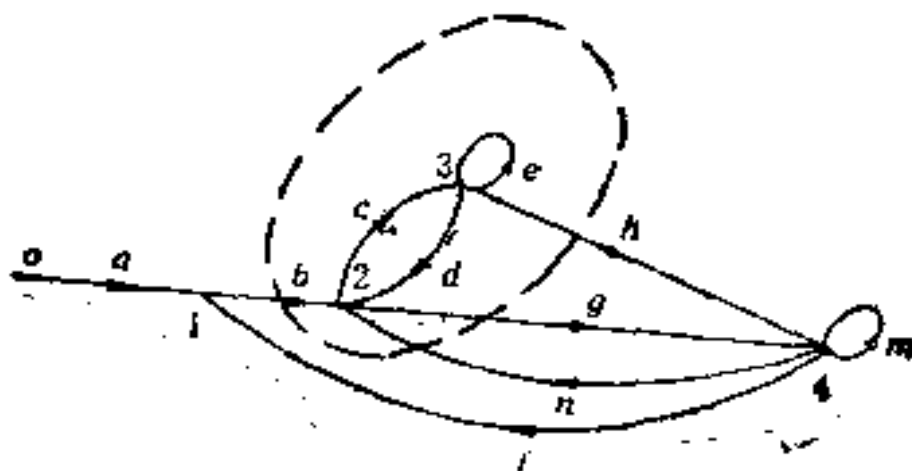


图 1-36

由式(1-64),

$$\hat{z}_{10} = z_{10} = a$$

$$\hat{z}_{14} = z_{14} = f$$

$$\hat{z}_{41} = z_{41} + \sum_{K=1}^1 \frac{P_K \Delta_K}{K} = 0 + \frac{bg(1-e)}{1-cd-e}$$

$$\hat{z}_{44} = z_{44} + \sum_{K=1}^1 \frac{P_K \Delta_K}{K} = m + \frac{hdg + ng(1-e)}{1-cd-e}$$

简化后的结果如图 1-37 所示。

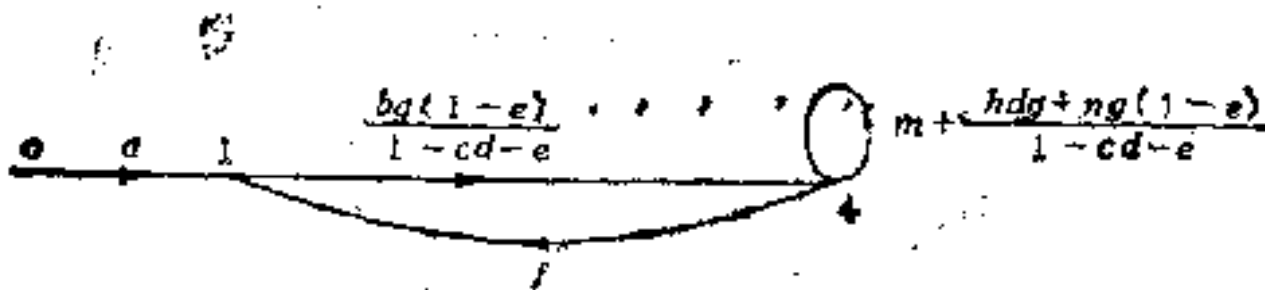


图 1-37

1-7 闭环信号流图

Mason 增益公式需要分别求出分子和分母(参阅式(1-50)). 分子的计算需要找出图中的路和环,分母的计算则涉及环. 总之,需要找出两种拓扑结构:环和路. 从计算观点看来,这是不方便的. 闭环信号流图是为了解决这个问题而提出的. 它使我们只需求出一种拓扑——环,就能算出图中从源点到汇点的传输.

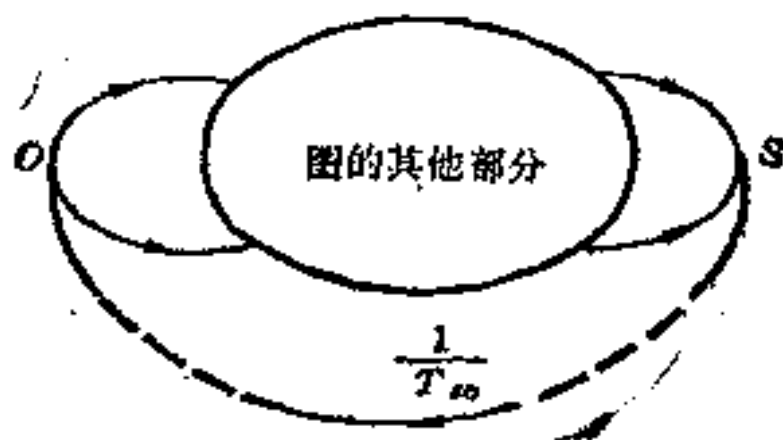


图 1-38

在图 1-38 中,源点为 0,汇点为 s ,源点到汇点的传输为 T_{0s} 。若在 s 到 0 间加一条支路(如图中虚线所示),其传输为 $\frac{1}{T_{0s}}$,这样的信号流图称为闭环信号流图。显然,原图(未加虚线所示的支路的图)中从源点 0 到汇点 s 的路都能与 s 到 0 的支路构成环。于是,闭环信号流图的图行列式:

$$\Delta_c = \Delta - \sum_k \frac{P_k \Delta_k}{T_{0s}} \quad (1-65)$$

及

$$\Delta_c = 1 - T_{0s} \times \left(\frac{1}{T_{0s}} \right) = 0 \quad (1-66)$$

这样,可以得到求图中从源点到汇点的传输 T_{0s} 的方法如下:首先,从汇点 s 至源点 0 作一支路,其支路传输为 $\frac{1}{T_{0s}}$;然后,按式(1-42)写出闭环信号流图的图行列式 Δ_c (只需找出单环和不接触环集)并令 $\Delta_c = 0$;最后,将 Δ_c 中所包括的各项予以分类,含有 $\frac{1}{T_{0s}}$ 因子的各项之和 ($\frac{1}{T_{0s}}$ 不计在内)组成 Mason 增益公式的分子,不含 $\frac{1}{T_{0s}}$ 因子的各项之和组成分母。

例 1-10. 求图 1-39 中从源点 x_0 到汇点 x_4 的传输 T_{40} 。

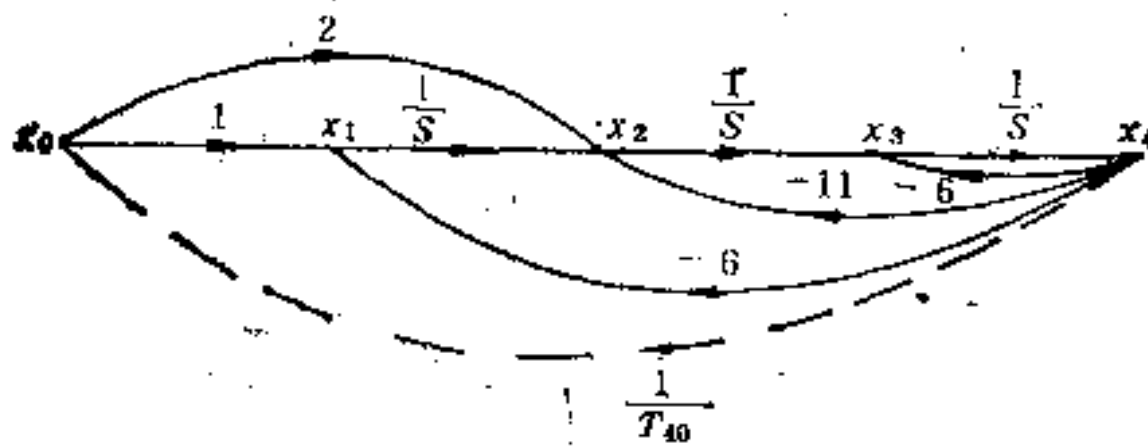


图 1-39

当然,我们可按 Mason 增益公式(1-50)分别求得分子和分母。这样做,需要找出从 x_0 到 x_4 的路,以及各种环。现从 x_4 到 x_0

加一支路（传输为 $\frac{1}{T_{40}}$ ），如图 1-39 中虚线所示。对于构成的闭环信号流图可写出：

$$\begin{aligned} \text{单环: } L_1 &= \frac{-6}{s}, & L_2 &= -\frac{11}{s^2}, & L_3 &= \frac{-6}{s^3}, \\ L_4 &= \frac{1}{T_{40}s^3}, & L_5 &= \frac{2}{T_{40}s^2}. \end{aligned}$$

没有二阶及二阶以上的不接触环集。

所以，

$$\Delta_c = 1 + \frac{6}{s} + \frac{11}{s^2} + \frac{6}{s^3} - \frac{1}{T_{40}s^3} - \frac{2}{T_{40}s^2} = 0 \quad (1-67)$$

对式 (1-67) 的各项予以分类，包括 $\frac{1}{T_{40}}$ 的项之和为 $\left(\frac{1}{s^3} + \frac{2}{s^2}\right)$ ，是从 x_0 到 x_4 的传输 T_{40} 的分子；不包括 $\frac{1}{T_{40}}$ 的各项之和为 $\left(1 + \frac{6}{s} + \frac{11}{s^2} + \frac{6}{s^3}\right)$ ，是 T_{40} 的分母。所以，

$$T_{40} = \frac{\left(\frac{1}{s^3} + \frac{2}{s^2}\right)}{\left(1 + \frac{6}{s} + \frac{11}{s^2} + \frac{6}{s^3}\right)} = \frac{2s + 1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad (1-68)$$

闭环信号流图的主要优点是只需寻找一种拓扑结构——环。这在用计算机分析结构复杂的图时特别方便。

1-8 Mason 增益公式的系统实现

Mason 增益公式在线性系统中获得广泛应用。对于节点和支路数较少的信号流图，可用观察方法求得该公式的分母和分子中的各项。但对结构复杂的大图，人工方法难于实现，且很易遗漏项数。为此，面向计算机的算法就显得十分必要。利用 1-7 节中的闭环信号流图，问题就归结于找出单环和各种阶数的不接触环集。陈树柏等曾提出过一种算法，并在计算机上得到实现^[10]。该算法

利用了有向的基本回路矩阵形成单环。然后,引入无向的节点-支路关联矩阵 A_m 和 E 矩阵形成各种阶数的不接触环。在形成 $(K+1)$ ($K=1, 2, \dots, n-1$) 阶不接触环过程中,需进行 $(b \times n)$ 阶, $(n \times b)$ 阶及 $(b \times L_K)$ 阶三个矩阵连乘的计算。这里, b 为支路数, n 为节点数, L_K 为 K 阶不接触环数。矩阵计算是相当麻烦的。

这里,我们提出一种系统实现 Mason 增益公式的方法。首先,对信号流图 G 加入一条从汇点 i^0 到源点 0 的支路 (其传输为 $\frac{1}{T_{i^0}}$ = F), 变为闭环信号流图 G' 。然后,根据变元邻接矩阵的概念^[8]得到不同长度的单环。在单环形成后,再由各种单环的所有可能组合,进行模 2 相加,得到 2 阶不接触环。再由 2 阶不接触环与单环模 2 相加,得到 3 阶不接触环。……,依此类推,直到得出 n 阶不接触环为止。最后,对所有的环进行分类。分母由所有不包括支路 F 的环和不接触环集组成,分子由所有包括支路 F 的环和不接触环集组成。整个过程如图 1-40 所示。

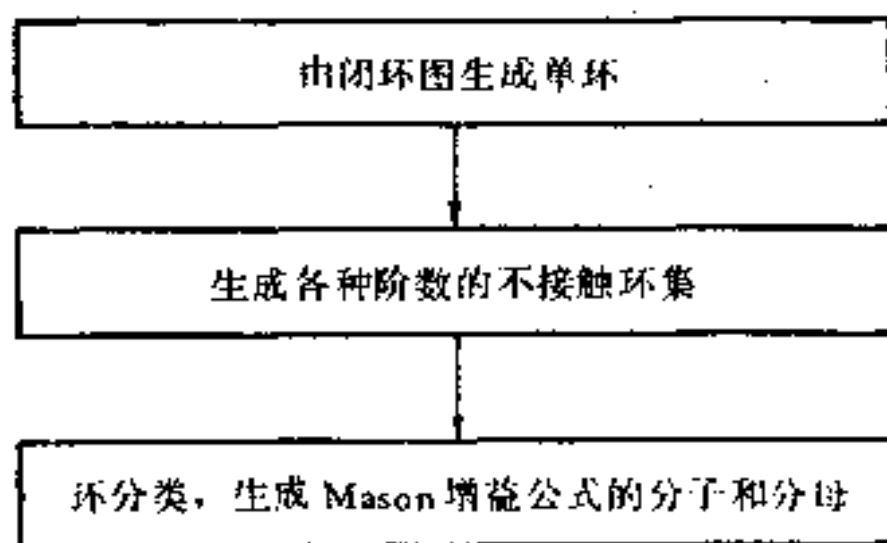


图 1-40

现分别叙述如下:

1. 单环的生成步骤

第 1 步. 在图 G 中加入从汇节 i 到源点 0 的支路 F (传输为

1) 任一节点(非源点)均可加入一条传输为 1 的出支路后成为汇点。

$\frac{1}{T_{ij}}$), 形成图 G' .

第 2 步. 记下各个节点的自环, 并删去它们.

第 3 步. 形成变元邻接矩阵 $A = [a_{ij}]$.

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{若从节点 } i \text{ 有一条支路(支路传输为 } a_{ij}) \text{ 到节点 } j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

并令 $K = 1$.

第 4 步. 若 $K = n$, 则各种阶数的不接触环集都找到, 结束. 否则, 转向第 5 步.

第 5 步. 形成矩阵 $A'_{K+1} = A_K \cdot A$.

A'_{K+1} 中不为零的对角元素对应于长度为 $K+1$ 的单环. 这些元素组成矩阵 A'_{K+1d} . 记下这些单环. 应该指出, 每一长度为 $K+1$ 的单环在 A'_{K+1d} 中一定出现 $K+1$ 次, 它们出现的形式是, 在节点 i_1 为 $a_{i_1, i_1} a_{i_1, i_2} \cdots a_{i_{K+1}, i_K} a_{i_1, i_{K+1}}$, 在节点 i_2 为 $a_{i_2, i_2} \cdots a_{i_2, i_1} \cdots$, 在节点 i_{K+1} 为 $a_{i_{K+1}, i_{K+1}} a_{i_{K+1}, i_1} \cdots a_{i_{K+1}, i_K}$. 也就是说, A'_{K+1d} 中不为零的项数一定是 $(K+1)$ 的倍数. 我们只需取其中的一项.

对于 A'_{K+1} 中的非对角元素, 需删去那些对应于不是路的元素, 即这些元素所对应的结构中一定有一个节点满足条件: $\text{Max}(\text{节点入度}, \text{节点出度}) > 1$. 设上述元素所组成的矩阵是 A'_{K+1nd} .

在进一步求单环的过程中, 需去掉 A'_{K+1d} 和 A'_{K+1nd} , 故有

$$A_{K+1} = A'_{K+1} - A'_{K+1d} - A'_{K+1nd}$$

令 $K = K + 1$, 转第 4 步.

2. $K(K = 2, 3, \cdots, n)$ 阶不接触环集的生成

第 1 步. 在求得单环的基础上, 形成单环矩阵

$$L_1 = [l_{ij}],$$

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若环 } i \text{ 接触节点 } j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

第 2 步. 对 L_1 的行(若有 θ 个单环, 则行数为 θ)的所有可能两两结合(共 C_2^θ 种)进行模 2 相加.

设第 i 行为 $(l_{i1}, l_{i2}, \cdots, l_{in})$ (对应于第 i 个环)

第 j 行为 $(l_{j1}, l_{j2}, \dots, l_{jn})$ (对应于第 j 个环)

当第 i 行与第 j 行相加后,有

$$(l_{i1} + l_{j1} \quad l_{i2} + l_{j2} \quad \dots \quad l_{in} + l_{jn})$$

其中只要有某一元素 l_{if} 或 $l_{if} \neq l_{if} + l_{if} (1 \leq f \leq n)$, 即出现 $1 + 1 = 0$ 的情况, 则环 l_i 与 l_j 相接触, 不考虑此情况. 否则, 为不接触环. 将这些不接触环记下后形成 2 阶不接触环集 L_2 , 令 $K = 2$.

第 3 步. 对矩阵 $\begin{bmatrix} L_1 \\ L_K \end{bmatrix}$ 取 L_1 的行分别与 L_K 的行模 2 相加, 形成 $K + 1$ 阶不接触环集 L_{K+1} . 若 L_{K+1} 为空集, 表明不存在 $K + 1$ 阶及阶数更高的不接触环集. 结束. 否则, 转第 4 步.

第 4 步. 令 $K = K + 1$, 若 $K = n$, 表明所有 n 阶不接触环集均已找出. 结束. 否则, 转第 3 步.

(3) 环分类——Mason 增益公式的实现

根据以上求得的单环和各种阶数的不接触环集, 按它们是否包括支路 F 而分成两类:

(1) 分母

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \dots + (-1)^K \sum L_K + \dots \quad (1-69)$$

式中 $\sum L_K (K = 1, 2, \dots)$ 是所有不包括支路 F 的 K 阶不接触环的增益之和.

(2) 分子

$$\Delta' = \sum L_{1F} - \sum L_{2F} + \dots + (-1)^{K+1} \sum L_{KF} + \dots \quad (1-70)$$

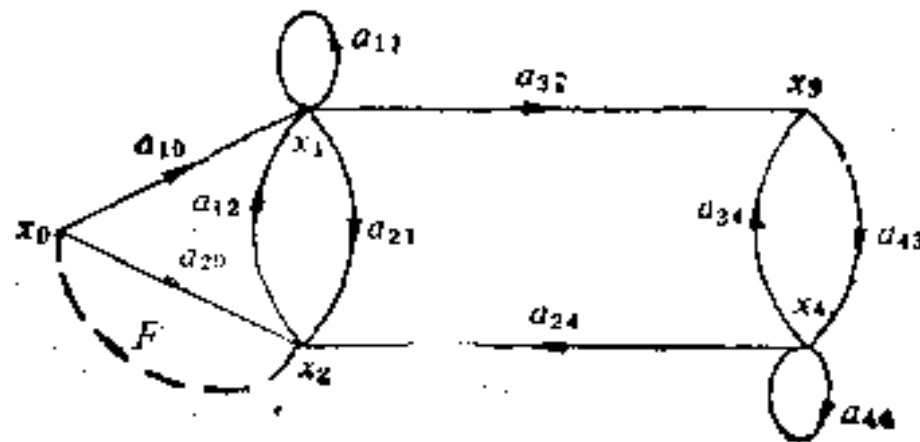


图 1-41

式中 $\sum L_{KF} (K = 1, 2, \dots)$ 是所有包括支路 F 的 K 阶不接触环的环增益之和。

例 1-11. 求图 1-41 中从源点 x_1 到节点 x_2 的传输。

要求得 $\frac{x_2}{x_1}$, 在 x_2 到 x_0 间加入支路 F , 得出闭环信号流图 G' (如图 1-41 中虚线所示)。

(1) 求单环、节点 x_1 和 x_4 分别有一自环 a_{11} 和 a_{44} 。按定义, 变元邻接矩阵

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & a_{10} & a_{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{31} & 0 \\ F & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{43} \\ 0 & 0 & a_{24} & a_{34} & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1-71)$$

于是,

$$A'_2 = A \cdot A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{20}F & a_{20}a_{12} & a_{10}a_{21} & a_{10}a_{31} & 0 \\ a_{21}F & a_{21}a_{12} & 0 & 0 & a_{31}a_{43} \\ 0 & Fa_{11} & Fa_{20} + a_{12}a_{21} & a_{12}a_{31} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43}a_{21} & a_{43}a_{34} & 0 \\ a_{24}F & a_{24}a_{12} & 0 & 0 & a_{34}a_{43} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1-72)$$

由 A'_2 的对角元素可知, 有 3 个长度为 2 的单环: $a_{20}F$, $a_{21}a_{12}$ 和 $a_{43}a_{34}$ 。

$$A'_{2d} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{20}F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Fa_{20} + a_{12}a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{43}a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{34}a_{43} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1-73)$$

$$A'_{2nd} = [0] \quad (1-74)$$

故

$$A_2 = A_1 - A_{10} - A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & a_{20}a_{12} & a_{10}a_{21} & a_{10}a_{31} & 0 \\ a_{21}F & 0 & 0 & 0 & a_{31}a_{43} \\ 0 & Fa_{10} & 0 & a_{12}a_{31} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43}a_{24} & 0 & 0 \\ a_{24}F & a_{24}a_{12} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-75)$$

故

$$A'_2 = A_2 \cdot A = \begin{bmatrix} a_{10}a_{21}F & a_{10}a_{21}a_{12} & a_{20}a_{12}a_{21} & a_{20}a_{12}a_{21} & a_{10}a_{21}a_{43} \\ 0 & a_{21}Fa_{10} & a_{21}Fa_{20} + a_{31}a_{43}a_{21} & a_{31}a_{43}a_{21} & 0 \\ 0 & 0 & Fa_{10}a_{21} & Fa_{10}a_{31} & a_{12}a_{31}a_{43} \\ a_{43}a_{24}F & a_{43}a_{24}a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{24}Fa_{10} & a_{24}Fa_{20} + a_{24}a_{12}a_{21} & a_{24}a_{12}a_{31} & 0 \end{bmatrix} \quad (1-76)$$

长度为 3 的单环是: $a_{10}a_{21}F$.

从 A'_2 中可知, 在它的非对角元素中, $a_{10}a_{21}a_{12}$, $a_{20}a_{12}a_{21}$, $a_{21}Fa_{20}$, $a_{31}a_{43}a_{24}$, $a_{24}Fa_{20}$, $a_{24}a_{12}a_{21}$ 等元素对应的结构都不是路, 应删去. 故

$$A_3 = A'_2 - A_{10} - A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{20}a_{12}a_{31} & a_{10}a_{31}a_{43} \\ 0 & 0 & a_{31}a_{43}a_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Fa_{10}a_{31} & a_{12}a_{31}a_{43} \\ a_{43}a_{24}F & a_{43}a_{24}a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{24}Fa_{10} & 0 & a_{24}a_{12}a_{31} & 0 \end{bmatrix} \quad (1-77)$$

同理, 可求得

$$A'_3 = A_3 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{10}a_{31}a_{43}a_{24} & a_{10}a_{31}a_{43}a_{24} & a_{20}a_{12}a_{31}a_{43} \\ a_{31}a_{43}a_{24}F & a_{31}a_{43}a_{24}a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{31}a_{43}a_{24}a_{20} & a_{12}a_{31}a_{43}a_{24} & Fa_{10}a_{31}a_{43} \\ 0 & a_{43}a_{24}Fa_{10} & a_{43}a_{24}Fa_{20} + a_{43}a_{24}a_{12}a_{21} & a_{43}a_{24}a_{12}a_{31} & 0 \\ 0 & 0 & a_{24}Fa_{10}a_{21} & a_{24}Fa_{10}a_{31} & a_{24}a_{12}a_{31}a_{43} \end{bmatrix} \quad (1-78)$$

长度为 4 的单环是 $a_{31}a_{43}a_{24}a_{12}$.

类似地,可求得 A_4 .

最后,在求长度为 5 的单环时,只需计算 $A_{5,2}$ 中 $(A_4 \cdot A)_{44}, (A_4 \cdot A)_{44}$ 表示 $A_4 \cdot A$ 中的对角元素.

于是,长度为 5 的单环是 $a_{10}a_{31}a_{43}a_{24}F$.

(2) 求各种阶数的不接触环. 按定义,单环矩阵

$$L_1 = \begin{matrix} l_1 = a_{11} \\ l_2 = a_{44} \\ l_3 = a_{20}F \\ l_4 = a_{21}a_{12} \\ l_5 = a_{43}a_{34} \\ l_6 = a_{10}a_{21}F \\ l_7 = a_{31}a_{43}a_{24}a_{12} \\ l_8 = a_{10}a_{31}a_{43}a_{24}F \end{matrix} \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (1-79)$$

对 L_1 的各行两两模 2 相加,有

$$L_2 = \begin{matrix} l_1l_2 \\ l_1l_3 \\ l_1l_5 \\ l_2l_3 \\ l_2l_4 \\ l_2l_6 \\ l_3l_4 \\ l_4l_5 \\ l_5l_6 \end{matrix} \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (1-80)$$

即共有 9 个 2 阶不接触环.

再由 $\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$ 中 L_1 的行分别与 L_2 的行两两模 2 相加,得

$$L_3 = \begin{array}{c} l_1 l_2 l_3 \\ l_1 l_3 l_2 \\ l_1 l_3 l_5 \\ l_1 l_5 l_3 \\ l_2 l_3 l_1 \\ l_3 l_5 l_1 \end{array} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cdots \text{多余项} \\ \cdots \text{多余项} \\ \cdots \text{多余项} \\ \cdots \text{多余项} \end{array} \end{array} \quad (1-81)$$

故只有 2 个 3 阶不接触环 $l_1 l_2 l_3$ 和 $l_1 l_3 l_5$ 。

再由 $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ 中 L_1 的行与 L_2 的行两两模 2 相加, 得

$$L_4 = [0] \quad (1-82)$$

即不存在 4 阶及 4 阶以上的不接触环。

(3) 环分类。由以上的单环和不接触环集分类后可算出 T_{20} 中的

$$\begin{aligned} \text{分母 } \Delta &= 1 - \sum L_1 + \sum L_2 = 1 - (a_{11} + a_{44} + a_{20} a_{12} \\ &\quad + a_{13} a_{34} + a_{31} a_{43} a_{24} a_{12}) + (a_{11} a_{44} + a_{11} a_{43} a_{14} \\ &\quad + a_{44} a_{12} a_{21} + a_{21} a_{12} a_{43} a_{34}) \end{aligned} \quad (1-83)$$

$$\begin{aligned} \text{分子 } \Delta' &= \sum L_{1F} - \sum L_{2F} + \sum L_{3F} = (a_{20} + a_{10} a_{21} \\ &\quad + a_{10} a_{31} a_{43} a_{24}) - (a_{11} a_{20} + a_{44} a_{20} + a_{44} a_{10} a_{21} \\ &\quad + a_{20} a_{43} a_{34} + a_{43} a_{34} a_{10} a_{21}) + (a_{11} a_{44} a_{20} \\ &\quad + a_{11} a_{20} a_{43} a_{34}) \end{aligned} \quad (1-84)$$

将式(1-83)和(1-84)代入 Mason 增益公式即可求得 $\frac{x_2}{x_1}$ 。

1-9 节点分裂、回归差和部分回归差

节点分裂在信号流图中有着很多的应用, 特别是为研究反馈系统中的问题而引用的很多定义都是基于节点分裂的概念。节点的分裂意味着阻断了通过该节点的信号传输。节点分裂的定义是: 将该节点分裂为源点和汇点两个节点, 所有出支路离开源点,

而所有入支路进入汇点。如图 1-42, 节点 1 分裂后的图如图 1-43 所示。节点 1 有三条出支路 b, d, g 和三条入支路 a, c, e 。节点 1 分裂为源点 $1'$ 和汇点 $1''$ 后, 出支路 b, d, g 离开源点 $1'$, 而入支路 a, c, e 进入汇点 $1''$ 。利用节点分裂的概念可得到下列一些定义。

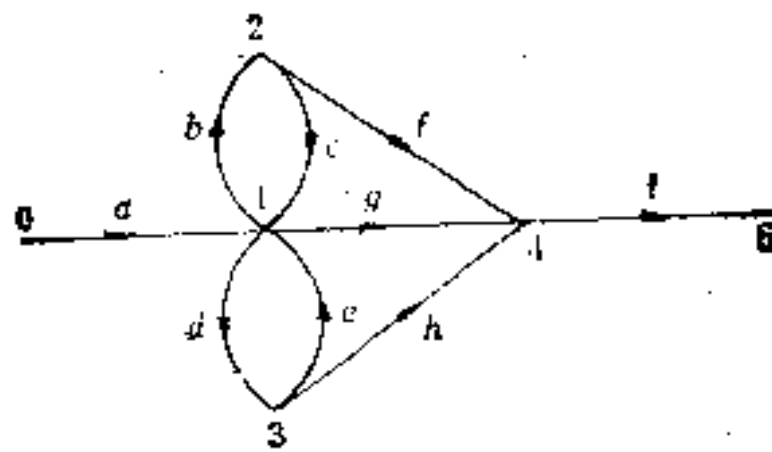


图 1-42

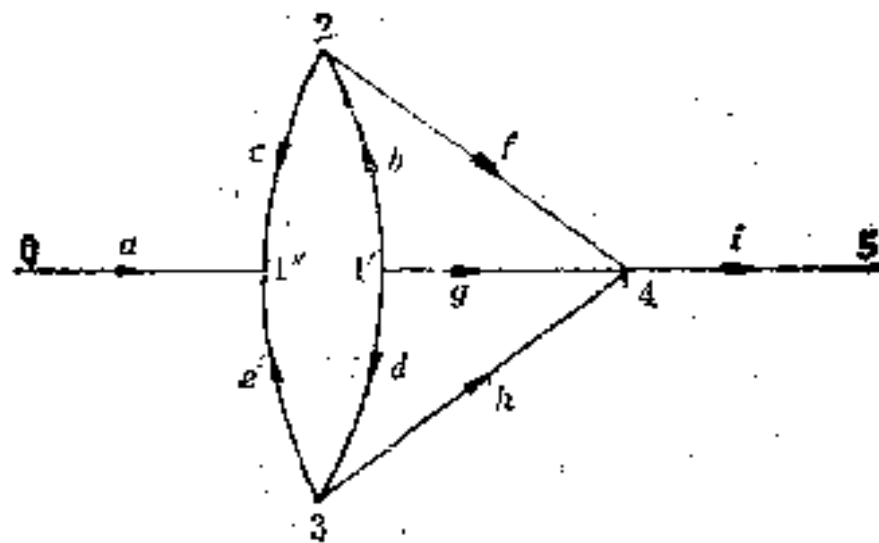


图 1-43

节点的环传输。它是节点分裂后从分裂后的源点到汇点的传输。例如, 图 1-42 中节点 1 的环传输就是图 1-43 中从源点 $1'$ 到汇点 $1''$ 的传输, 它等于 $bc + de$ 。

节点的回归差(环差)。它是单位信号与单位信号加在分裂后的源点时在汇点产生的信号之差, 即节点的回归差等于 $(1 - \text{节点的环传输})$ 。上例中, 节点 1 的回归差 $= 1 - (bc + de)$ 。

部分回归差。图的部分回归差是对应于一定的节点编号定义的。图的某一节点 m 的部分回归差是在图的给定的节点编号下,

将编号大于 m 的节点均分裂后所算出的节点 m 的回归差。例如，对于图 1-44，节点 1, 2, 3 的部分回归差可分别按图 1-45，图 1-46 和图 1-47 写出，它们分别为 1 ， $1 - \mu_1 \beta_1$ 和 $1 - \frac{(\mu_2 \beta_2 + \beta_0 \mu_1 \mu_2)}{1 - \mu_1 \beta_1}$ 。

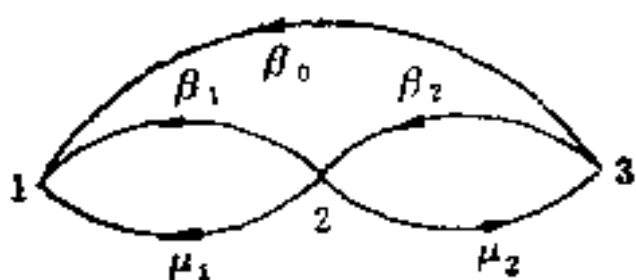


图 1-44

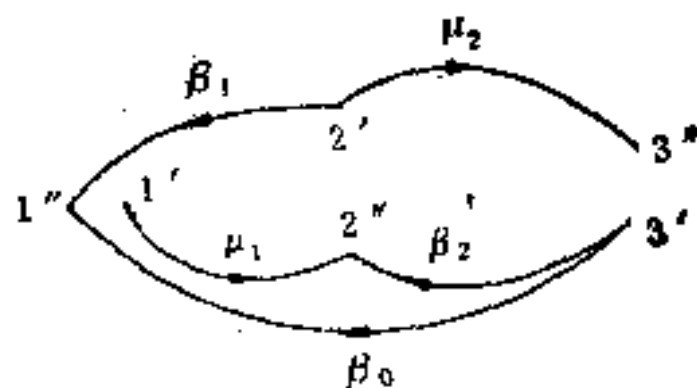


图 1-45

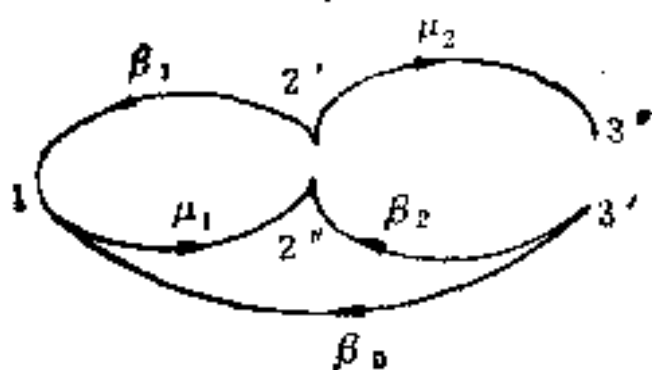


图 1-46

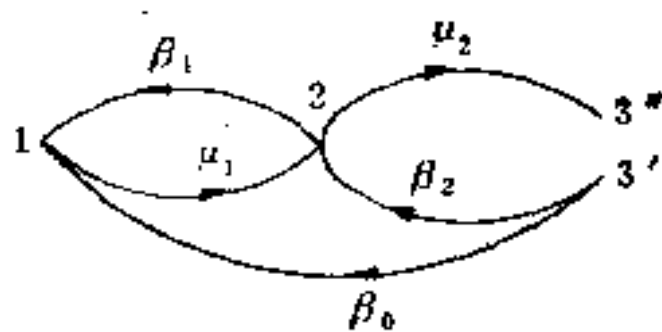


图 1-47

下面讨论节点的部分回归差与图行列式的关系。设有一 n 个节点的信号流图。每个节点 i 的自环传输为 t_{ii} ，节点 i 到节点 j 的支路传输为 t_{ji} ($i = 1, 2, \dots, n, i \neq j$)。显然，图行列式是

$$\Delta = |I - T| = \begin{vmatrix} 1 - t_{11} & -t_{12} & \dots & -t_{1n} \\ -t_{21} & 1 - t_{22} & \dots & -t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -t_{n1} & -t_{n2} & \dots & 1 - t_{nn} \end{vmatrix} \quad (1-85)$$

将 Δ 的第 1 行乘以 $\frac{t_{21}}{1 - t_{11}}$ 与第 2 行相加，第 1 行乘以 $\frac{t_{31}}{1 - t_{11}}$ 与第 3 行相加， \dots ，第 1 行乘以 $\frac{t_{n1}}{1 - t_{11}}$ 与第 n 行相加，则第 1 列的元素除第 1 行以外均为零。类似地，可使第 2 列的元素除第 1，

• 46 •

2行外均为零。依此类推,最后将 Δ 变为上三角行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - t_{11} & -t_{21} & \cdots & -t_{n1} \\ 0 & \left(1 - t_{22} - \frac{t_{12}t_{21}}{1 - t_{11}}\right) & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & & -t_{n1} \end{vmatrix} \quad (1-86)$$

由式(1-86)可知, Δ 即为 n 个主对角元素之积。其中,第1个主对角元素 $1 - t_{11}$ 是节点1的部分回归差,第2个主对角元素

$$\left(1 - t_{22} - \frac{t_{12}t_{21}}{1 - t_{11}}\right)$$

是节点2的部分回归差。节点3的部分回归差为

$$1 - t_{33} - \frac{t_{13}t_{31}}{1 - t_{11}} - \frac{\left(t_{23} + \frac{t_{21}t_{13}}{1 - t_{11}}\right)\left(t_{32} + \frac{t_{31}t_{12}}{1 - t_{11}}\right)}{1 - t_{22} - \frac{t_{12}t_{21}}{1 - t_{11}}} \quad (1-87)$$

它就是式(1-86)中第3行、第3列的元素。类似地,可证明第 n 个主对角元素就是节点 n 的部分回归差。于是,得出结论:图行列式等于图中所有节点的部分回归差之积。用这种形式表示图行列式在讨论稳定度时是很有用的。

现在还要证明,图行列式与 n 个节点的编号顺序无关。即是说,我们在计算 n 个节点的部分回归差时,节点的编号可任意选取。观察图1-48中两个节点 $m-1$ 和 m 。

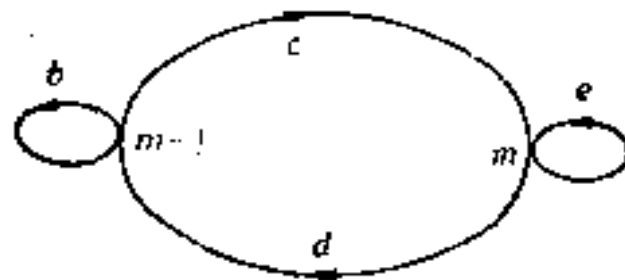


图 1-48

节点 $m-1$ 的部分回归差 $F_{m-1} = 1 - b$,节点 m 的部分回归差

$$F_m = 1 - e - \frac{cd}{1 - b}, \text{故}$$

$$F_{m-1}F_m = (1-b) \left(1 - e - \frac{cd}{1-b} \right) \quad (1-88)$$

若调换节点 $m-1$ 和节点 m 的编号, 如图 1-49.

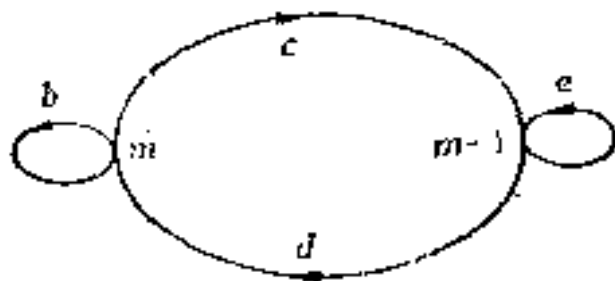


图 1-49

则 $F_{m-1} = 1 - e$, $F_m = \left(1 - b - \frac{cd}{1-e} \right)$, 故

$$F_{m-1}F_m = (1-e) \left(1 - b - \frac{cd}{1-e} \right) \quad (1-89)$$

由式(1-88)和(1-89)可知, 节点的互换不影响两个节点的部分回归差之积。通过相邻两个节点的互换, 可以使某一节点得到任意的编号, 这就表明了图行列式与节点编号无关。

1-10 图的复杂性

作为有向图的信号流图, 有各种各样的结构。为了客观而定量地评价它的复杂程度, 需要给以严格的定义。本节我们将在给出图的复杂性基础上, 讨论决定任意图的复杂性的方法。

信号流图的复杂性可用图的指数表征。图的指数是破坏图中所有的环而需要分裂的最少节点数。这些节点称为图的指数节点, 又称本征节点。这些节点的集合称为最小本征集。如图 1-50 中所示的信号流图, 分裂节点集 $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3\}$ 和 $\{1, 4\}$ 中的任何一组节点, 都能破坏图中所有的环, 但最少的节点数是 2, 故图的指数为 2。 $\{1, 3\}$ 或 $\{1, 4\}$ 都是最小本征集。一般, 图的本征集不是唯一的。按定义, 级联图是指数为零的图, 因为图中没有环。反馈图是指数 ≥ 1 的图。图 1-51 中的 (a), (b), (c) 分别是指数为 1, 2, 2 的图。

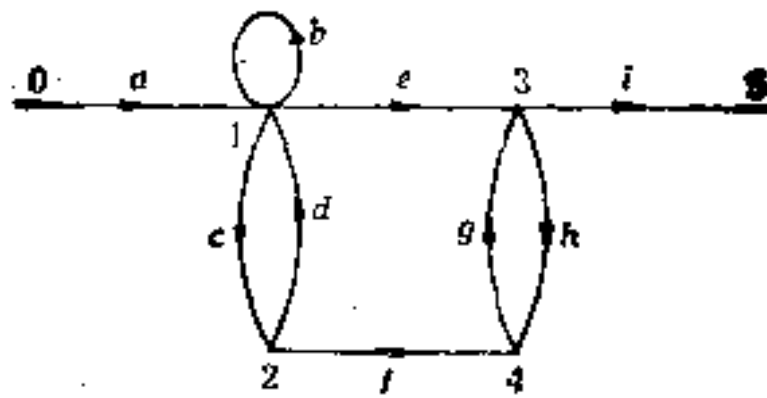


图 1-50

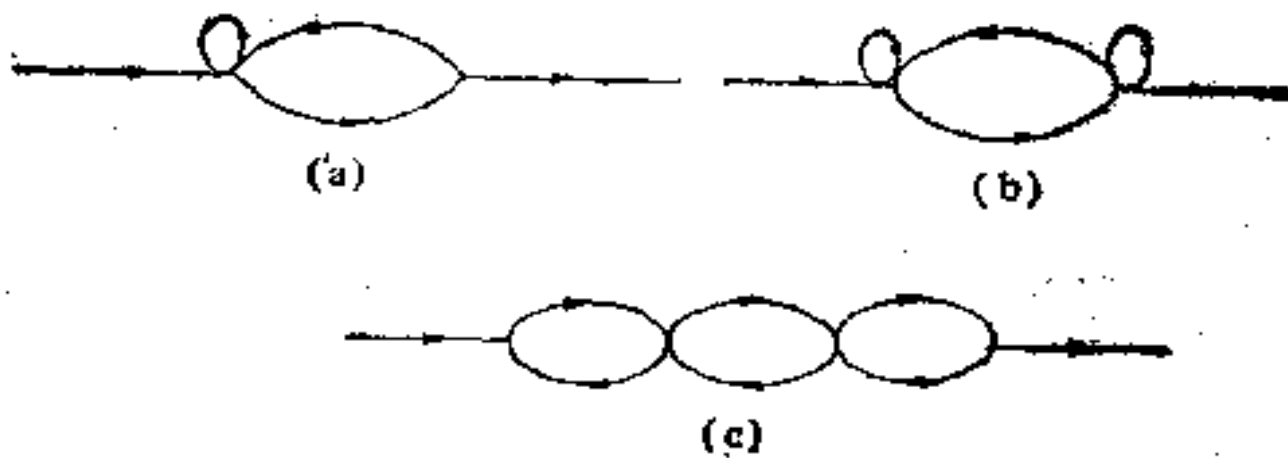


图 1-51

显然,有自环的节点一定是指数节点,因为其他节点分裂后都不能破坏该节点的自环。

从理论上来说,决定图的最小本征集是一个已经解决的问题。例如,可参阅[5]和[14]。但是,它所包括的计算量还是相当可观的,特别是对于某些复杂的图。因此,进一步提高计算的效率,还有不少工作要做。下面,较仔细地阐述求图的最小本征集的方法[5]。

这个方法的基本思想是,首先,对图作一些简化;然后产生那些决定图的指数所必须的环;最后,利用覆盖表决定图的最小本征集。它的主要步骤如下:

第1步. 利用一组拓扑规则对图进行初步简化,若图完全简化,到第5步。

第2步. 产生简化图中为决定图的指数所必须的有关环。

第3步. 构成覆盖表,对该表进行简化。若表已完全简化,到第5步。

第4步. 决定最小本征集。

第5步。结束。

在分别说明这些步骤以前,先引入下列定义。

删除节点 x 。从图 $G(X, E)$ 中删除节点 x 和它所关联的支路。

消去节点 x 。当且仅当支路 (z, x) 和 $(x, y) \in E$ 时,删去节点 x ,并将新支路 (z, y) 加至图 $G(X - \{x\})$ 上。若 $y = z$,则 (z, z) 为自环。

删除与节点 x 关联的一条支路。从 $G = (X, E)$ 中删去支路 $(x, y) \in E$ 或 $(y, x) \in E$,形成新子图 $G(X, E - \{(x, y) \text{ 或 } (y, x)\})$ 。

环 L_1 支配环 L_2 。若某一节点断开环 L_1 ,一定断开环 L_2 ,则称环 L_1 支配环 L_2 。

节点 x 的邻点。和节点 x 有支路相接的点称为 x 的邻点,用符号 $\text{adj}(x)$ 表示,即 $\text{adj}(x) = \{y \in X \mid (x, y) \text{ 或 } (y, x) \in E\}$ 。

1. 图的拓扑简化规则: 这些规则用于对图进行初步简化。

(1) 当节点 x 有自环时,删除节点 x 和它所关联的支路。显然,简化图的指数将比原图减小 1。

(2) 若 $\min(x \text{ 的入度}, x \text{ 的出度}) \leq 1$, 则消去节点 x 。这实际上就是 1-3 节中吸收节点的支路移动规则。它不影响图的指数。

(3) 当 $G\{(x) \cup \text{adj}(x)\}$ 为完全图,即为 (p, q) 和 $(q, p) \in E, p, q \in \{(x) \cup \text{adj}(x)\}$ 时,消去节点 x 。因为 $G\{(x) \cup \text{adj}(x)\}$ 为完全图,则至少要去掉 $|\{(x) \cup \text{adj}(x)\}| - 1$ 个节点才能断开该完全图的所有环。显然, $\text{adj}(x)$ 是 $G(X)$ 的本征节点。

(4) 若去掉在节点 x 的长度为 2 的环后, $\min(x \text{ 的入度}, x \text{ 的出度}) = 0$, 则删除节点 x 所关联的支路(但构成长度为 2 的环的支路不得删除)。这是因为,由这些被删除的支路所构成的环一定被通过 x 的长度为 2 的环所支配。

(5) 设支路 $(y, z) \in E, (x, z) \in E$, 若 $(y, x) \in E$, 而 $(x, y) \notin E$, 则可删除支路 (y, x) 。因为通过 (y, x) 和 (x, z) 的

环被通过 (y, z) 的环所支配, 通过 (y, x) 的其他环由 x 处的长度为 2 的环所支配, 故通过 (y, x) 的环在决定图的指数时不需要考虑. 类似地, 若 $(x, y) \in E$, 而 $(y, x) \notin E$, 则可删除 (x, y) . 现在通过实例来说明上述简化规则的应用.

例 1-12. 求图 1-52(a) 所示的图 $G(X, E)$ 的最小本征集.

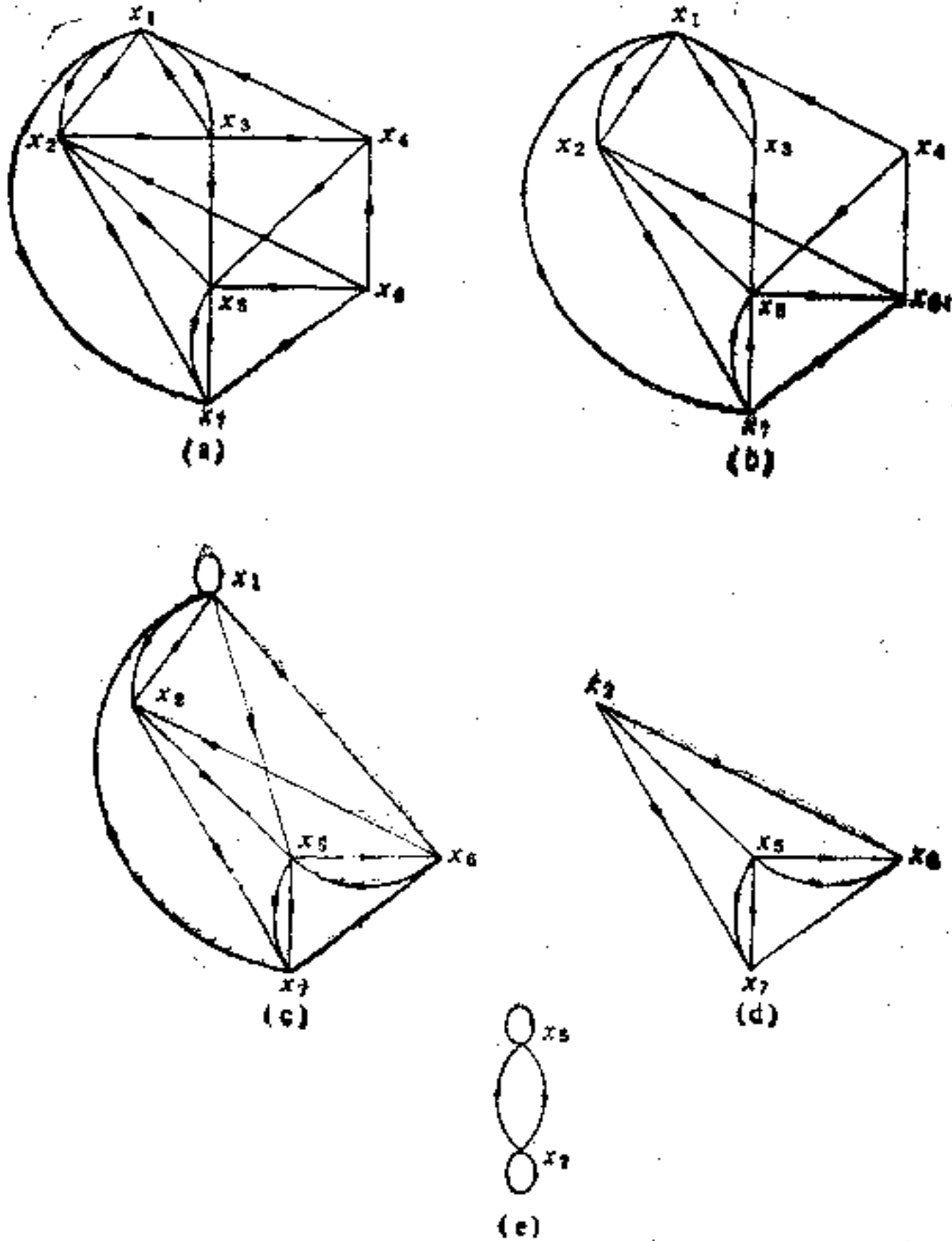


图 1-52

简化规则 (1), (2), (3), (4) 不能用于任何节点. 对节点 x_1 应用规则(5), 删除 (x_3, x_4) . 因为 (x_3, x_1) 和 $(x_6, x_1) \in E$. 再

对 x_3 应用规则(5), 删除 (x_2, x_3) . 简化图如 (b) 所示. 对 x_5 和 x_4 分别应用规则(2), 以消去它们, 得出图 (c). 应用规则(1) 删除 x_4 . x_1 为本征节点. 删除 x_1 后的图如 (d). 规则(2) 先后应用于 x_2 和 x_6 , 得出图 (e). 规则(1) 应用于 x_5 和 x_7 , 图完全简化. 于是, 得到最小本征集为 $\{x_1, x_3, x_7\}$.

用上述规则(1)~(5)对图进行初步简化的结果, 可得到一组本征节点和用规则(1)~(5)不能进一步简化的图. 一般来说, 简化图比原图在结构上要简单得多. 对简化图要产生一组环以决定图的最小本征集. 下面将讨论产生最小环集的方法.

2. 环的产生: 这里产生出决定图的最小本征集所必须的环集. 环集的产生基本上是节点消除过程.

首先, 定义标号图. 设 $G(X, E)$ 为给定的图, 则相应的标号图 $\tilde{G}(X, \tilde{E})$ 在结构上与 $G(X, E)$ 完全一样, 除了每条支路 $(x_i, x_j) \in \tilde{E}$ 有一标号 $\{x_i, x_j\}$ 外, 后者表示 \tilde{G} 中从 x_i 到 x_j 的长度为 1 的一条路. 在标号图中, 节点 x 的消去过程是: 当且仅当 (z, x) 和 $(x, y) \in \tilde{E}$, 则删去节点 x 并加新支路 (z, y) 到图 $\tilde{G}(X - \{x\})$ 中. 新支路 (z, y) 的标号是 $\{z, \dots, x, \dots, y\}$, 这里 $\{z, \dots, x\}$, $\{x, \dots, y\}$ 分别是 (z, x) 和 (x, y) 的标号.

如果 $y = z$, 则 (z, z) 是一个自环, 标号原则同上. 换句话说, 在消去图 $\tilde{G}_x = (X - \{x\}, \tilde{E}_x = \tilde{E} \cup \{\text{所有加入的支路}\} - \{\text{所有删去的支路}\})$ 中, 新支路 (z, y) 表示 \tilde{G} 中从 z 通过 x 到 y 的一条路. 重复应用节点消去过程, 最终可消去 \tilde{G} 的所有节点. 由上述节点消去过程可产生所有环. 但是, 某些环是被另些环所支配的. 为了减少被支配环的数目, 可对消去图作某些简化. 设 $\tilde{G}_*(X_*, \tilde{E}_*)$ 是从 $\tilde{G}(X, \tilde{E})$ 中消去 $X - X_*$ 后得出的某一消去图. 下面需要消去 $x \in X_*$. 在这以前, 为了使图简化, 需要删除与 x 关联的一些支路. 这些支路删除后并不改变图的指数. 下面就是几个删除支路的规则.

(6) 对每个 $y \in \text{adj}(x)$, 当 \tilde{G}_* 中有简单的 (即只包括两个

节点的)长度为 2 的环时,删除所有支路 (y, x) 和 $(x, y) \in \tilde{E}_*$. 应用这个规则时,需要记录简单的长度为 2 的环,并将其存储在“覆盖表”(作为一列)中.显然,这一规则保持了指数不变.因为通过被删去的支路的环被简单的长度为 2 的环 $\{y, x\}$ 所支配.

(7) 对每个 $y \in \text{adj}(x)$, 删去所有支路 $(x, y) \in \tilde{E}_*$, 但保留有简单标号(即仅包括两个节点)的一条支路 (\overline{x}, y) . 这一规则也保持图的指数不变,因为通过被删去的支路的环被通过 (\overline{x}, y) 的环所支配.

(8) 对每个 $y \in \text{adj}(x)$, 删去所有支路 $(x, y) \in \tilde{E}_*$, 这时有一条支路 $(\overline{x}, y) \in \tilde{E}_*$, 它的标号是被删去支路的标号的子集.这一规则也保持图的指数不变.

(9) 对每个 $y \in \text{adj}(x)$, 删去所有支路 $(y, x) \in \tilde{E}_*$. 这时有一条支路 $(\overline{x}, y) \in \tilde{E}_*$ 具有简单标号. 因为通过每条被删去的支路 (y, x) 的环被通过 (\overline{x}, y) 和 (y, x) 的环所支配, 所以这一规则保持图的指数不变. 应用这一规则时,需记录支路 (\overline{x}, y) 和 (y, x) 构成的长度为 2 的环, 并将其作为列存储在“覆盖表”中.

产生环的算法可总结如下:

第 1 步. 令 $G(X, E)$ 中, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. 定义标号图

$$\tilde{G}_1(X_1, \tilde{E}_1) = \tilde{G}_1(X, \tilde{E}).$$

第 2 步. 令 $i = 1$.

第 3 步. 考虑 \tilde{G}_i . 去掉 $x_i \in X_i$ 的自环, 记录并将其作为列存储在“覆盖表”中. 若 $i = n$, 到第 7 步.

第 4 步. 应用规则 (6) ~ (9) 删除 x_i 处的支路. 记录并存储有关的环.

第 5 步. 消去节点 x_i 后, 形成消去图 \tilde{G}_{i+1} .

第 6 步. 令 $i = i + 1$, 到第 3 步.

第 7 步. 结束.

现仍以图 1-52(a) 为例来说明上述算法的应用. 对应的标号图 $\tilde{G}_1(X_1, \tilde{E}_1)$ 如图 1-53(a) 所示. \tilde{G}_1 中的所有标号都是简单

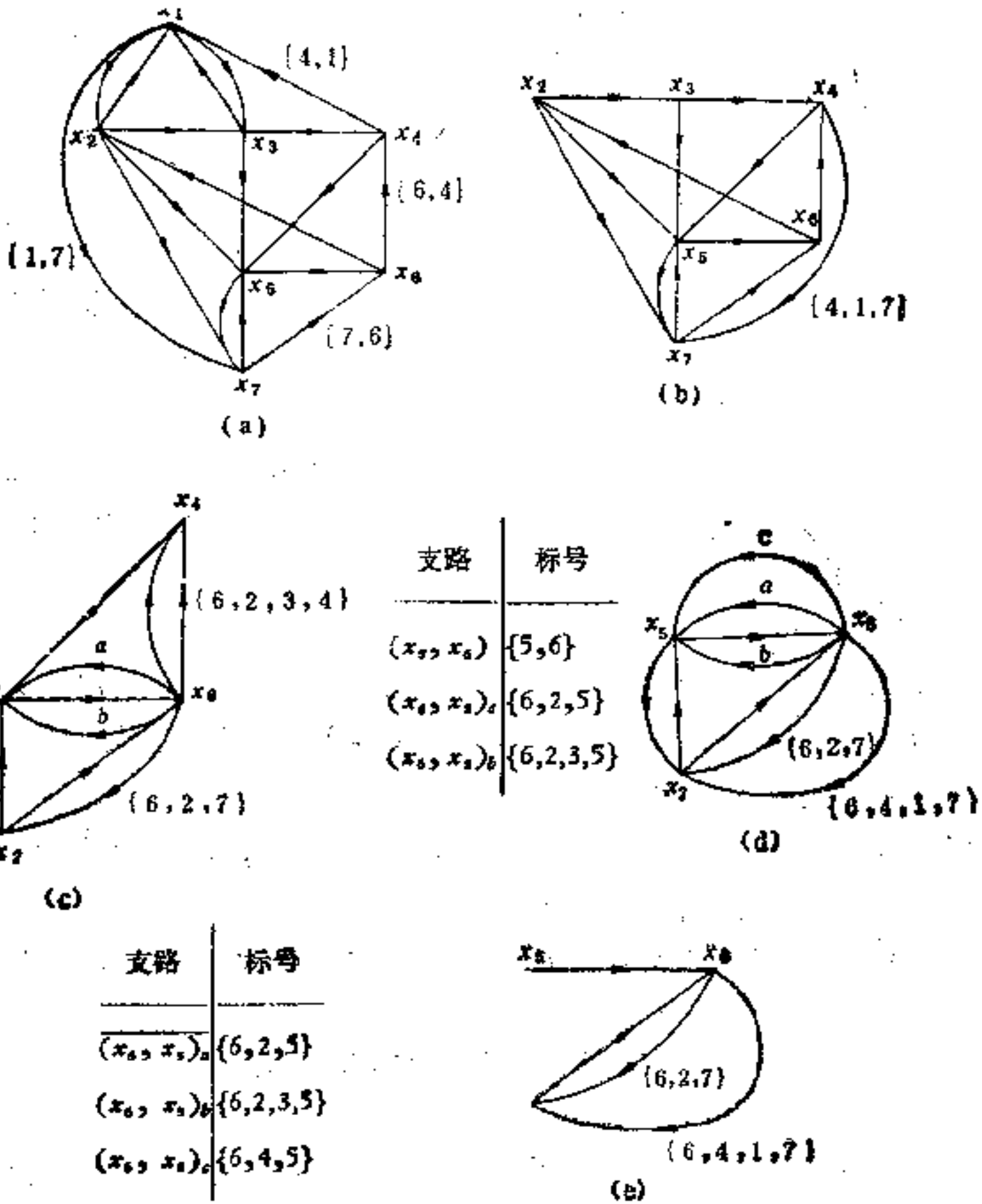


图 1-53

标号(只包括两个节点)。为简单起见,图中没有写出所有标号。对节点 x_1 ,应用规则(6),删除在 x_1 的两个长度为 2 的简单环 $\{x_1, x_2\}$ 和 $\{x_1, x_3\}$, 并将其存储在环集 S_L 中。然后,消去节点 x_1 , 得出消去图 \tilde{G}_2 , 如图 1-53(b)。注意,在 \tilde{G}_2 中由于消除节点 x_1 , 加入了新支路 (x_4, x_7) , 其标号为 $\{x_4, x_1, x_7\}$, 简写为 $\{4,1,7\}$ 。其余支路的标号不变。由 \tilde{G}_2 , 因为规则(6)~(9)不能应用于 x_2 ,

消去 x_2 。同理,消去 x_3 后,形成 \tilde{G}_4 ,如图 1-53(c)。在节点 x_1 ,应用规则(7),删去标号为 $\{x_6, x_2, x_3, x_4\}$ 的支路 (x_6, x_4) ,然后再消去 x_4 ,得出图 \tilde{G}_5 ,如图 1-53(d)。在节点 x_5 ,应用规则(6),删除支路 (x_5, x_7) 和 (x_7, x_5) ,并将环 $\{x_5, x_7\}$ 存储在环集 L_1 中。再对 x_5 应用规则(8),删去标号为 $\{x_6, x_2, x_3, x_5\}$ 的支路 (x_6, x_5) ,因为它的标号是支路 $(x_6, x_5)_a$ 的标号的子集。对 x_5 应用规则(9),删除支路 $(x_6, x_5)_a$ 和 $(x_6, x_5)_c$,并将环 $\{x_5, x_6, x_2\}$ 和 $\{x_5, x_6, x_4\}$ 存储在环集 L_1 中。在 x_5 进行以上一系列变换后, \tilde{G}_5 变为 \tilde{G}'_5 ,如图 1-53(e)。以后,消去节点 x_5, x_6, x_7 ,得到两个环 $\{x_2, x_6, x_7\}$ 和 $\{x_1, x_4, x_6, x_7\}$ 。

因此,环集 $L_1 = \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_5, x_7\}, \{x_2, x_3, x_6\}, \{x_4, x_5, x_6\}, \{x_2, x_6, x_7\}, \{x_1, x_4, x_6, x_7\}$ 。这里仅有 7 个环,足以用来进一步决定图的最小本征集。但是,图 1-53(a) 所包括的环数在 20 个以上,对于决定图的最小本征集显然是多余的。产生环集后,即可构成覆盖表。

3. 覆盖表的构成

产生环集后,构成覆盖表的过程是:行对应于节点,列对应于环。如果节点 i 包括在环 j 中,则在表的第 i 行、第 j 列的位置标以“×”号。否则,不标号。

构成覆盖表后,需要对它加以简化。为此,给出下列定义:

如果第 i 行(列)在第 j 行(列)有“×”的所有列(行)中都有“×”,而第 j 行(列)至少在第 i 行无“×”的一列(行)中有“×”,则称第 i 行(列)支配第 j 行(列)。

因此,如果第 i 行支配第 j 行,则可从覆盖表中删去第 j 行,因为通过节点 i 的环支配了通过节点 j 的环。如果第 i 列支配第 j 列,则可从覆盖表中删去第 j 列,因为环 j 支配环 i 。

根据前面得出的环集 L_1 ,可构成覆盖表如表 1-3。

由覆盖表 1-3 可看出,第 1 行支配第 3 行,删去第 3 行;第 6 行支配第 4 行,删去第 4 行;第 1 列支配第 2 列,删去第 1 列;第 4 列支配第 5 列,删去第 4 列;第 6 行支配第 2 行,删去第 6 行;第 7

表 1-3

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
x_1	×	×					×
x_2	×			×		×	
x_3		×					
x_4					×		×
x_5			×	×	×		
x_6				×	×	×	×
x_7			×			×	×

表 1-4

	I_1	I_2	I_3	I_4
x_1	×			
x_2			×	×
x_3				×
x_7			×	×

列支配第 6 列, 删去第 7 列。至此, 不能进一步化简的覆盖表如表 1-4。

4. 决定最小本征集

由于覆盖表不能再化简, 可利用布尔代数方法来决定最小本征集。首先, 将每个环表示为它的节点的布尔和, 然后取所有环的布尔积(注意应用布尔代数的运算法则: $a \cdot a = a$, $a + a = a$, $a + ab = a$)。布尔和之积的每项都表示本征集。取其中节点数最少的即为所求的最小本征集。

例如, 由上面的覆盖表可写出四个环的布尔和之积:

$$\begin{aligned} x_1(x_3 + x_7)(x_3 + x_6)(x_6 + x_7) &= x_1(x_3 + x_7)[x_6 + x_7(x_3 + x_6)] \\ &= x_1x_6(x_3 + x_7) + x_1x_7(x_3 + x_6) = x_1x_3x_6 + x_1x_5x_7 + x_1x_6x_7 \end{aligned}$$

其中每一项都包括三个节点, 故图的指数是 3。最小本征集为 $\{x_1, x_3, x_6\}$, $\{x_1, x_5, x_7\}$ 或 $\{x_1, x_6, x_7\}$ 。

1-11 两种节点的信号流图

近年来,随着集成电路技术的迅速发展,人们将信号流图应用于包括运算放大器在内的线性 RC 网络的分析^[19],这时,在信号流图中出现了自环传输为 1 的节点,这种节点对应于一个运算放大器。由于它的出现,在图行列式中出现了很多可以相消的项。这给计算带来了麻烦。特别是这种节点越多,表现得越为严重。为了克服图行列式中出现相消项的缺点, Mulawka 等^[19]提出了两种节点的信号流图,并得出了计算其图行列式的拓扑公式。该公式在分析带运算放大器的线性 RC 网络^[20]和开关电容网络^[21]中得到了方便的应用。

这里,我们利用 Coates 流图^[7,28](以下简称 C 图)推导出两种节点的信号流图的图行列式的拓扑公式。为叙述方便,引进下列定义:

信号流图(以下简称 M 图)中没有自环的节点或自环传输不为 1 的节点称为 N_1 型节点。自环传输为 1 的节点称为 N_2 型节点。每个节点最多只能有一个自环。两种节点的表示方式如图 1-54。



图 1-54

包括 N_1 型节点和 N_2 型节点的信号流图称为两种节点的信号流图,以下简称 BM 图。

只包括 N_1 型节点的环称为 L 环。包括 N_2 型节点在内的环称为 W 环。

包括图的所有节点在内的不接触环集(单环是不接触环集的一个特殊情况)称为图的连接。包括图中部分节点的不接触环集

称为图的部分连接。

连接(部分连接)中所有支路的支路增益之积(对于单环)或不接触环集的连接增益之积,称为该连接(部分连接)的连接增益。

从图中去掉部分连接包括的所有节点和这些节点所关联的有向支路后的图,称为部分连接(或不接触环集)的补图。

包括补图的所有节点的不接触环集称为补图的连接。

对补图用 Mason 增益公式写出的图行列式称为补图的图行列式。

大家知道, M 图和 C 图间存在着简单的关系^[4]。我们先将 BM 图变为等效的(从表示同一方程组的观点来说) C 图,再根据 C 图的拓扑公式写出图行列式,并阐明它的拓扑意义。

设 BM 图中共有 n 个节点,其中有 p 个 N_2 型节点, $n-p$ 个 N_1 型节点, q 个无自环的节点,其余 $n-p-q$ 个自环传输分别为 $a_i (i=1, 2, \dots, n-p-q)$ 的节点 ($a_i \neq 1$)。现将上述 BM 图变为 C 图。变换的方法是将 BM 图中所有带自环的节点的自环传输减 1;对无自环的节点,变为自环传输为 -1 的节点;节点间的支路传输不变。于是,在 C 图中 p 个 N_2 型节点变为无自环的节点, q 个 N_1 型节点变为自环传输为 -1 的节点,其余 $n-p-q$ 个 N_1 型节点变为自环传输为 $(a_i - 1) (i=1, 2, \dots, n-p-q)$ 的节点。

对于 C 图,求图行列式的问题是找出包括图中所有节点(源点和汇点除外)的各种不同的连接,并将它们的连接增益代数相加。

引理 1-4. C 图的一个连接(部分连接)的连接增益是一些节点和关联这些节点的支路所构成的部分连接(部分连接)的连接增益与该部分连接的补图构成的连接(部分连接)的连接增益之积。

证明. 按上述定义,连接是包括图的所有节点的不接触环集。我们可将不接触环集分为两部分:一部分构成一个部分连接,另一部分即为前者的补图的连接。因此,引理证毕。

现取 C 图中的所有 p 个 N_2 型节点和 q 个 N_1 型节点中的 r 个节点和 $n-p-q$ 个 N_1 型节点中的 s 个节点,以及它们相互

间的支路构成的部分连接(θ 个不接触环集)。这 θ 个不接触环中的每个环至少包括一个 N_2 型节点。也就是说,每个环都是 W 环。如果 $t = u = 0$, 则表明所有 W 环都由 N_2 型节点构成。这是一个特殊情况。由于 p 个 N_2 型节点在 C 图中无自环, 故 θ 个不接触环中的每个 W 环至少应由两个节点构成。

上述节点构成的部分连接(θ 个不接触环集)的连接增益为

$$(-1)^\theta W_1 W_2 \cdots W_\theta = (-1)^\theta W(\theta) \quad (1-90)$$

式中 $W_1, W_2, \dots, W_\theta$ 分别为每个 W 环的环增益, $W(\theta)$ 是 θ 个 W 环的环增益之积。

因此,上述部分连接的补图应包括其余的所有 N_1 型节点,即 $(q-t)$ 个自环传输为 -1 的节点和 $(n-p-q-u)$ 个自环传输为 $(a_i - 1)(i = u+1, \dots, n-p-q)$ 的节点,以及它们相互间的支路(包括自环)。补图的连接,不外下列五种情况:

(1) $(q-t)$ 个自环传输为 -1 的节点构成 $(q-t)$ 个自环, $(n-p-q-u)$ 个自环传输为 $(a_i - 1)(i = u+1, \dots, n-p-q)$ 的节点构成 $(n-p-q-u)$ 个自环。故连接增益为

$$\begin{aligned} & (-1)^{q-t+n-p-q-u} \cdot (-1)^{q-t} \cdot (-1)^{n-p-q-u} \left(1 - \sum_{i=u+1}^{n-p-q} a_i \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\substack{i,j=u+1 \\ i \neq j}}^{n-p-q} a_i a_j \cdots + \prod_{j=u+1}^{n-p-q} a_j \right) \\ & = \left(1 - \sum_{i=u+1}^{n-p-q} a_i + \sum_{\substack{i,j=u+1 \\ i \neq j}}^{n-p-q} a_i a_j \cdots + \prod_{i=u+1}^{n-p-q} a_i \right) \quad (1-91) \end{aligned}$$

(2) r 个自环传输为 -1 的节点构成 r 个自环, s 个自环传输为 $(a_i - 1)(i = u+1, \dots, u+s)$ 的节点构成 s 个自环,其余 $(n-p-t-u-r-s)$ 个 N_1 型节点构成 α 个不接触环(无自环),其环增益分别为 $b_1, b_2, \dots, b_\alpha$ 。故连接增益为

$$(-1)^{r+s+\alpha} \cdot (-1)^r \cdot (-1)^s \cdot \left(1 - \sum_{i=u+1}^{u+s} a_i + \cdots \right)$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^r \left(\prod_{i=u+1}^{u+r} a_i \right) b_1 b_2 \cdots b_n \\
= & (-1)^q \left[1 - \sum_{i=u+1}^{u+r} a_i + \cdots + (-1)^r \prod_{i=u+1}^{u+r} a_i \right] b_1 b_2 \cdots b_n
\end{aligned} \tag{1-92}$$

(3) g 个自环传输为 -1 的节点构成 g 个自环, 其余 $(n - p - r - u - g)$ 个 N_1 型节点构成 β 个不接触环(无自环), 其环增益分别为 c_1, c_2, \dots, c_β . 故连接增益为

$$(-1)^{g+\beta} \cdot (-1)^g c_1 c_2 \cdots c_\beta = (-1)^\beta c_1 c_2 \cdots c_\beta \tag{1-93}$$

(4) h 个自环传输为 $(a_i - 1) (i = u + 1, \dots, u + h)$ 的节点构成 h 个自环, 其余 $(n - p - r - u - h)$ 个节点构成 δ 个不接触环(无自环), 其环增益分别为 $d_1, d_2, \dots, d_\delta$. 其连接增益为

$$\begin{aligned}
& (-1)^{h+\delta} \cdot (-1)^h \left(1 - \sum_{i=u+1}^{u+h} a_i + \cdots + (-1)^h \prod_{i=u+1}^{u+h} a_i \right) d_1 d_2 \cdots d_\delta \\
= & (-1)^\delta \left(1 - \sum_{i=u+1}^{u+h} a_i + \cdots + (-1)^h \prod_{i=u+1}^{u+h} a_i \right) d_1 d_2 \cdots d_\delta
\end{aligned} \tag{1-94}$$

(5) 所有 $(n - p - q - r - u)$ 个 N_1 型节点构成 ϵ 个不接触环(无自环), 其环增益分别为 $f_1, f_2, \dots, f_\epsilon$. 故连接增益为

$$(-1)^\epsilon f_1 f_2 \cdots f_\epsilon \tag{1-95}$$

上述五种情况中的环都由 N_1 型节点构成, 故均为 L 环。

由引理 1-4 可知, 对于某一特定的部分连接 (θ 个不接触环集), 该部分连接的连接增益与它的补图的所有可能的连接的连接增益之积之和, 即为 C 图的一些连接的连接增益, 也就是图行列式中的一些项。故由式(1-90)分别与式(1-91)、(1-92)、(1-93)、(1-94)、(1-95)的积之和, 可得

$$\begin{aligned}
& (-1)^\theta W(\theta) (1 - \sum L_{\theta 1} + \sum L_{\theta 2} \cdots + (-1)^K \sum L_{\theta K} + \cdots) \\
= & (-1)^\theta W(\theta) \Delta_{\theta R}
\end{aligned} \tag{1-96}$$

式中 $L_{\theta 1}, L_{\theta 2}, \dots, L_{\theta K}$ 分别为 θ 个不接触环集的补图中的单环,

两个不接触环,……, K 个不接触环的环增益之积。这些不接触环包括环增益为 $a_i (i = u + 1, \dots, n - p - q)$ 的自环和 $(n - p - i - u)$ 个 N_1 型节点相互间构成的环。 $\Delta_{\theta R}$ 是补图的图行列式。因为补图中已不包括 N_2 型节点,故不存在相消项。

考虑到所有可能的 θ 个不接触环集,并将与式(1-96)类似的结果相加,则得

$$(-1)^{\theta} \sum_{i_{\theta}} [W(\theta) \Delta_{\theta R}] \quad (1-97)$$

式中 i_{θ} 是所有可能的 θ 个不接触环集的数目。

再考虑 $\theta = 1, 2, \dots, K, \dots$ 的情况,最后可得定理 1-5。

定理 1-5. BM 图的图行列式

$$\begin{aligned} \Delta = & (-1) \sum_{i_1} [W(1) \Delta_{1R}]_{i_1} + \sum_{i_2} [W(2) \Delta_{2R}]_{i_2} + \dots \\ & + (-1)^K \sum_{i_K} [W(K) \Delta_{KR}]_{i_K} + \dots \quad (1-98) \end{aligned}$$

式中 $\sum_{i_1}, \sum_{i_2}, \dots, \sum_{i_K}, \dots$ 表示对所有可能的不接触环集 ($\theta = 1, 2, \dots, K, \dots$) 与对应的补图的图行列式之积求和。

用文字来说,双节点信号流图的图行列式,等于包括所有 N_2 型节点在内的各种不同环数的所有可能不接触环集的环增益(在 C 图意义下是包括所有 N_2 型节点的部分连接的连接增益)与对应的不接触环集的补图的图行列式(在 M 图意义下是包括所有剩余的 N_1 型节点的图行列式)的积之和。

表面看来,这个结果似乎与 Mulawka 的结果不同。但实质上是一致的,只是表示形式上不同。这里是以环数相同的 W 环与其补图的图行列式之积来集项的。从计算观点看,这比较方便。我们可从 $\theta = 1$ 开始,搜索单个 W 环,然后求其补图的图行列式,取两者之积。再搜索所有可能的单个 W 环并求得其对应的补图的图行列式;将所有对应的乘积相加。对两个不接触的 W 环,……, K 个不接触的 W 环,……,同样进行,一直做到最大的不接触环数 $\theta = \theta_M$ 。

(不存在 $\theta_M + 1$ 个不接触环)为止。将计算结果相加。

Mulawka 的公式是以不接触环的总数(即 L 环与 W 环的环数之和)来集项的,即总环数相同的项集中在一起。这给计算带来不便。因为计算中要列出各种不同阶数的 L 环和 W 环,组合时还要考虑到它们是否接触,很易引起遗漏和错误。而且,它是以完全展开的形式出现的,计算中的乘法运算次数比式(1-98)所需的要多得多。

还应指出,因为每个 W 环的环增益不同,而补图的图行列式又无相消项,故利用式(1-98)计算 BM 图的图行列式时,一定不会出现相消项。

推论 1. BM 图的图行列式不为零的条件是,至少必须有一个 W 环或不接触的 W 环集包括图的所有 N_2 型节点。

这是式(1-98)的直接结果。因为如果没有一个 W 环或不接触的 W 环集包括图的所有 N_2 型节点,则 $W(\theta)$ ($\theta = 1, 2, \dots, K, \dots$) 都是零,故 Δ 必为零。

推论 2. 对于图的所有节点都是 N_2 型节点的 BM 图,图行列式

$$\Delta = (-1) \sum_i W(1) + \sum_i W(2) + \dots + (-1)^K \sum_K W(K) + \dots \quad (1-99)$$

这是式(1-98)的特殊情况。因为所有补图都不存在。补图的图行列式 $\Delta_{\theta R}(\theta = 1, 2, \dots, K, \dots) = 1$ 。故式(1-98)简化为式(1-99)。

例 1-13. 求图 1-55 所示的 BM 图的图行列式。

图中节点 2, 3, 4 为 N_2 型节点, 节点 1, 5, 6 为 N_1 型节点。这里自环传输 K 和 l 都不等于 1。

首先,求得包括节点 2, 3, 4 的单个 W 环的环增益及其对应的补图的图行列式为

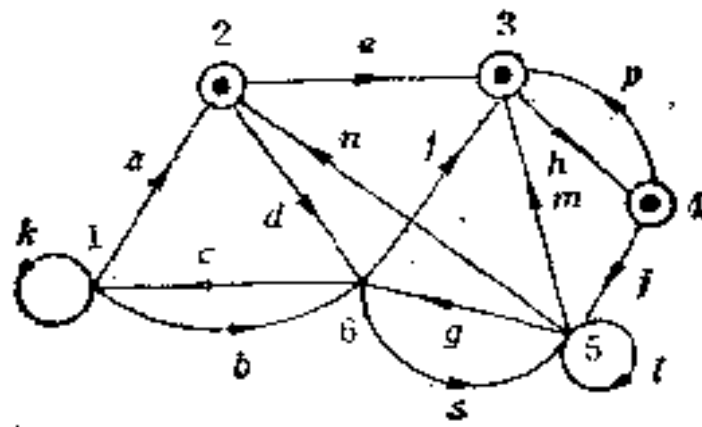


图 1-55

$$\begin{aligned}
 W(1)_1 &= ehjn, & (\Delta_{1R})_1 &= (1 - K - bc) \\
 W(1)_2 &= ehjgca, & (\Delta_{1R})_2 &= 1 \\
 W(1)_3 &= dfhjn, & (\Delta_{1R})_3 &= (1 - K)
 \end{aligned}
 \tag{1-100}$$

其次,包括节点 2, 3, 4 的两个不接触的 W 环的环增益及其对应的补图的图行列式为

$$\begin{aligned}
 W(2)_1 &= (adc)(ph), & (\Delta_{2R})_1 &= (1 - l) \\
 W(2)_2 &= (adc)(mhj), & (\Delta_{2R})_2 &= 1 \\
 W(2)_3 &= (dsn)(ph), & (\Delta_{2R})_3 &= (1 - K)
 \end{aligned}
 \tag{1-101}$$

没有三个及三个以上的不接触环,将上述结果代入式(1-98),得出

$$\begin{aligned}
 \Delta &= -ehjn(1 - K - bc) - ehjgca - dfhjn(1 - K) \\
 &\quad + adcph(1 - l) + adcmhj + dsnph(1 - K)
 \end{aligned}
 \tag{1-102}$$

显然, Δ 中不存在相消项。但是,如果用式(1-42)来求这个图

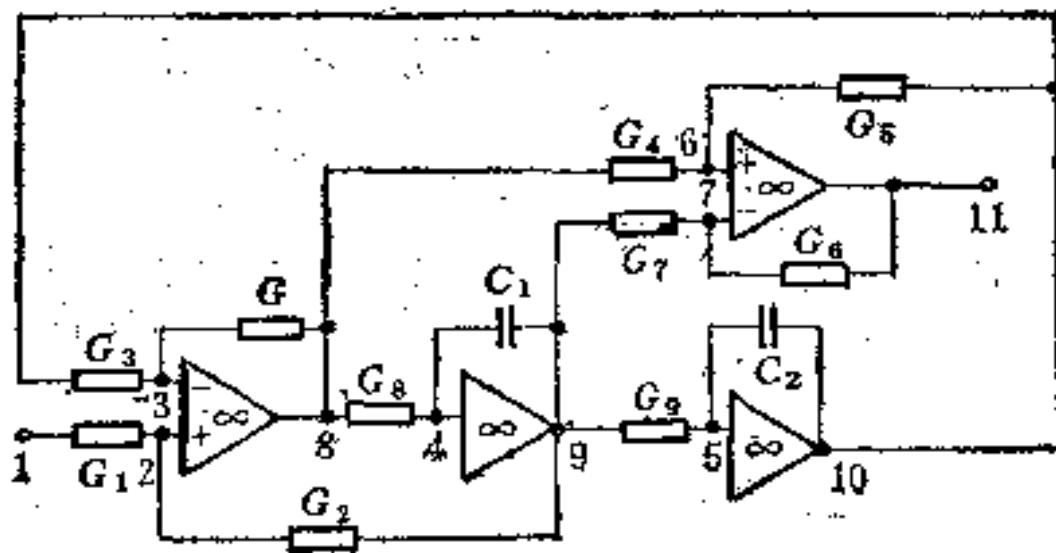


图 1-56

行列式将会出现 80 个相消项,而非相消项只有 11 项。

下面,是应用 BM 图分析实际电路(包括运算放大器)的例子。

例 1-14.^[1]图 1-56 是一个包括四只运算放大器的电路(其中有两只是差接运算放大器)。

运算放大器和差接运算放大器可分别用图 1-57(a), (b) 的 BM 图表示。

利用节点电压方程的关系,可直接从电路图作出对应的 BM 图^[1]。与图 1-56 对应的 BM 图如图 1-58 所示。两图中的节点有着一一对应关系。现在的问题是求节点 11 与节点 1 的电压比

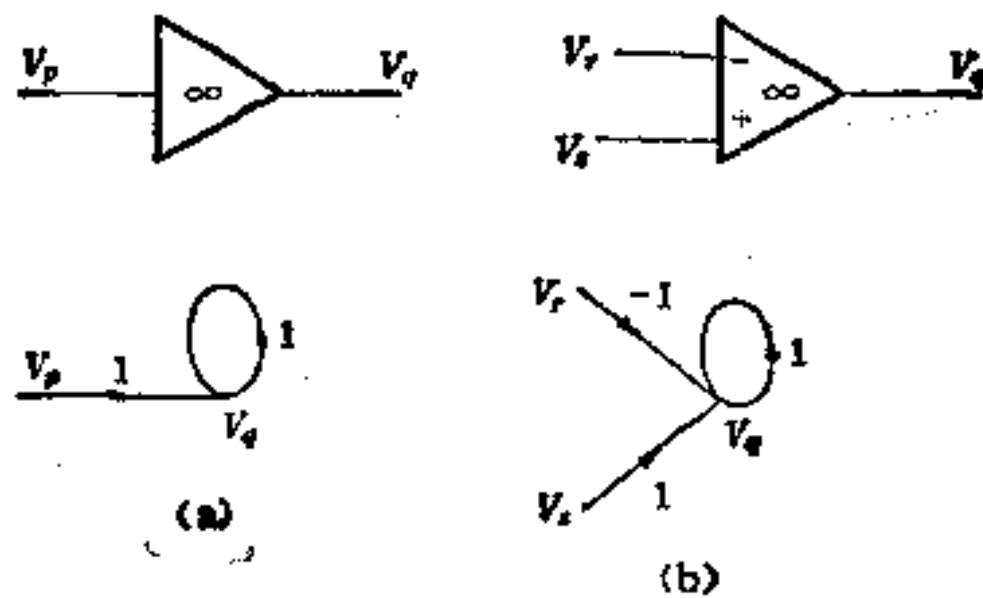


图 1-57

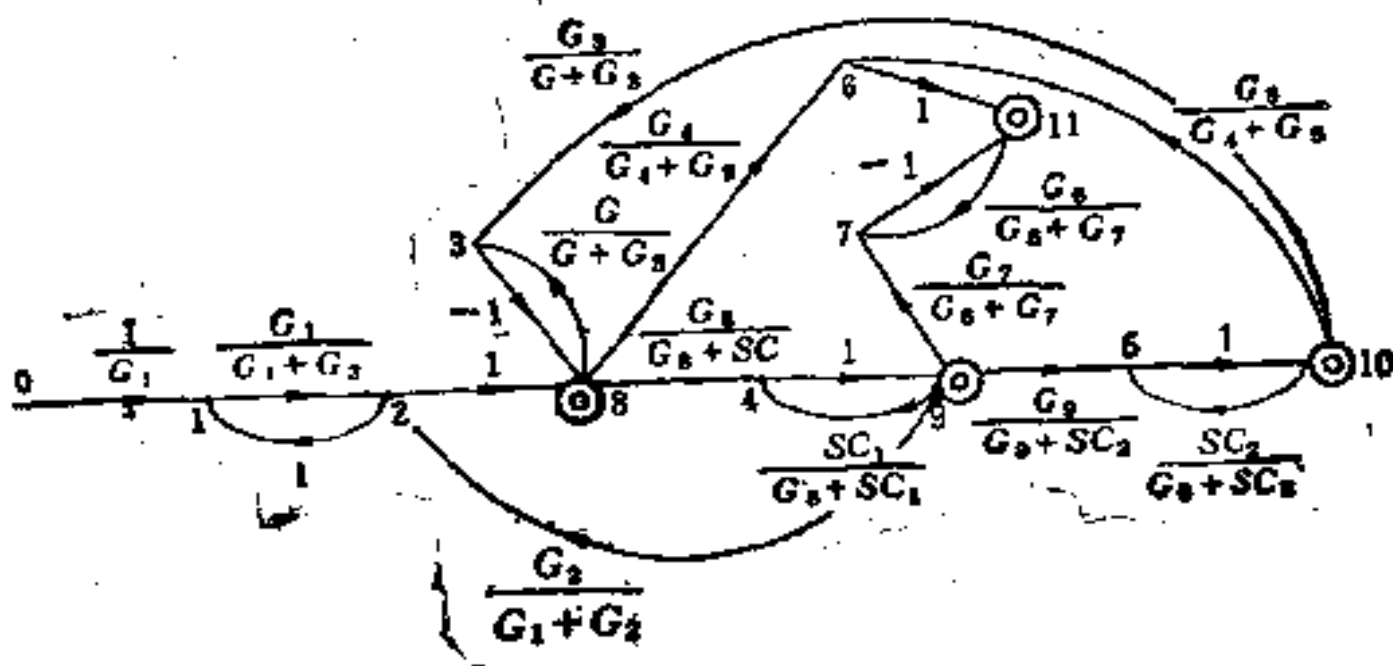


图 1-58*

* 此图及以后的图中出现的 S 应为 $s(=j\omega)$, 请读者在阅读时注意。——编者注

$\frac{V_{11}}{V_1}$ 。因为在图 1-58 中节点 1 不是源点，故不能直接应用 Mason 增益公式。因为

$$\begin{aligned} \frac{V_{11}}{V_1} &= \frac{V_{11}/V_0}{V_1/V_0} = \frac{\sum_K P_{K(1 \rightarrow 11)} \cdot \Delta_{K(1 \rightarrow 11)} / \Delta}{\sum_K P_{K(0 \rightarrow 1)} \cdot \Delta_{K(0 \rightarrow 1)} / \Delta} \\ &= \frac{\sum_K P_{K(1 \rightarrow 11)} \cdot \Delta_{K(0 \rightarrow 11)}}{\sum_K P_{K(0 \rightarrow 1)} \cdot \Delta_{K(0 \rightarrow 1)}} \end{aligned} \quad (1-103)$$

故求 $\frac{V_{11}}{V_1}$ 归结为求所有可能的从源点 0 到节点 11 的路传输 $P_{K(0 \rightarrow 11)}$ 与对应的不接触该路的图行列式 $\Delta_{K(0 \rightarrow 11)}$ 之积之和，对所有可能的从源点 0 到节点 1 的路传输 $P_{K(0 \rightarrow 1)}$ 与对应的不接触该路的图行列式 $\Delta_{K(0 \rightarrow 1)}$ 之积之和的比。

在求 $\Delta_{K(0 \rightarrow 11)}$ 和 $\Delta_{K(0 \rightarrow 1)}$ 时要用到求 BM 图的图行列式的式(1-98)，这比[1]中用式(1-42)要简便得多。

由图 1-58，源点 0 到节点 11 的路共有三条：

$$\begin{aligned} P_{1(0 \rightarrow 11)} &= \left(\frac{1}{G_1}\right) \left(\frac{G_1}{G_1 + G_2}\right) \left(\frac{G_4}{G_4 + G_5}\right), \\ \Delta_{1(0 \rightarrow 11)} &= \left(\frac{sC_1}{G_8 + sC_1}\right) \left(\frac{sC_2}{G_9 + sC_2}\right) \\ P_{2(0 \rightarrow 11)} &= \left(\frac{1}{G_1}\right) \left(\frac{G_1}{G_1 + G_2}\right) \left(\frac{G_8}{G_8 + sC_1}\right) \left(\frac{G_7}{G_6 + G_7}\right) (-1), \\ \Delta_{2(0 \rightarrow 11)} &= \left(\frac{sC_2}{G_9 + sC_2}\right) \\ P_{3(0 \rightarrow 11)} &= \left(\frac{1}{G_1}\right) \left(\frac{G_1}{G_1 + G_2}\right) \left(\frac{G_8}{G_8 + sC_1}\right) \left(\frac{G_9}{G_9 + sC_2}\right) \left(\frac{G_5}{G_4 + G_5}\right), \\ \Delta_{3(0 \rightarrow 11)} &= 1 \end{aligned} \quad (1-104)$$

源点 0 到节点 1 的路只有一条：

$$P_{1(0 \rightarrow 1)} = \left(\frac{1}{G_1}\right),$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1(i \rightarrow 1)} = & \left[\left(\frac{-G_6}{G_6 + G_7} \right) \left(\frac{G_8}{G_8 + sC_1} \right) \left(\frac{G_9}{G_9 + sC_2} \right) \left(\frac{G_3}{G + G_3} \right) (-1) \right. \\ & - \left(\frac{-G_6}{G_6 + G_7} \right) \left(\frac{sC_2}{G_8 + sC_2} \right) \left(\frac{G_9}{G_8 + sC_1} \right) \left(\frac{G_2}{G_1 + G_2} \right) \\ & \left. + \left(\frac{-G_6}{G_6 + G_7} \right) \left(\frac{sC_2}{G_9 + sC_2} \right) \left(\frac{sC_1}{G_8 + sC_1} \right) \left(\frac{-G}{G + G_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (1-105)$$

将式(1-104)代入式(1-103)的分子并整理后, 得出

$$\begin{aligned} \sum_K P_{K(0 \rightarrow 11)} \cdot \Delta_{K(0 \rightarrow 11)} &= \frac{G_4 G_8 G_9}{(G_1 + G_2)(G_4 + G_5)(G_8 + sC_1)(G_9 + sC_2)} \\ &\times \left[\frac{C_1 C_2}{G_8 G_9} s^2 + \frac{(G_4 + G_5) G_9 C_2}{(G_6 + G_7) G_4 G_9} s + \frac{G_9}{G_4} \right] \end{aligned} \quad (1-106)$$

将式(1-105)代入式(1-103)的分母并整理后, 得出

$$\begin{aligned} \sum_K P_{K(0 \rightarrow 1)} \cdot \Delta_{K(0 \rightarrow 1)} &= \frac{G_1 G_6 G_8 G_9}{G_1 (G + G_3)(G_6 + G_7)(G_8 + sC_1)(G_9 + sC_2)} \\ &\cdot \left[\frac{C_1 C_2}{G_8 G_9} s^2 + \frac{(G + G_3) G_2 C_2}{(G_1 + G_2) G G_9} s + \frac{G_3}{G} \right] \end{aligned} \quad (1-107)$$

将式(1-106)和(1-107)代入式(1-103), 得出

$$\begin{aligned} \frac{V_{11}}{V_1} = & \frac{G_1 G_4 (G + G_3)(G_6 + G_7)}{G G_6 (G_1 + G_2)(G_4 + G_5)} \\ & \times \left[\frac{C_1 C_2}{G_8 G_9} s^2 + \frac{(G_4 + G_5) G_9 C_2}{(G_6 + G_7) G_4 G_9} s + \frac{G_9}{G_4} \right] \\ & \cdot \left[\frac{C_1 C_2}{G_8 G_9} s^2 + \frac{(G + G_3) G_2 C_2}{(G_1 + G_2) G G_9} s + \frac{G_3}{G} \right] \end{aligned} \quad (1-108)$$

结果与[1]的相同。这里, 不存在相消项, 计算中要比[1]中方便得多。

1-12 矩阵信号流图及其简化规则

到目前为止，我们所讨论的信号流图是线性方程组的图形表示。图中的每个节点对应于某一变量，每条支路的传输对应于某一系数。因为节点和支路的权都是标量，所以这种信号流图称为标量信号流图。现在，要推广到线性矩阵方程组的图形表示，这就需要应用矩阵信号流图。矩阵信号流图在研究多环反馈系统中有着广泛的应用。在矩阵信号流图中，每个节点所表示的是一组变量，每条支路的传输是系数矩阵。因此，矩阵信号流图表示了一些变量组间的相互关系。例如，图 1-59 所示的信号流图中，将变量分成六组（如图中虚线所示），则可得到矩阵信号流图（图 1-60）。

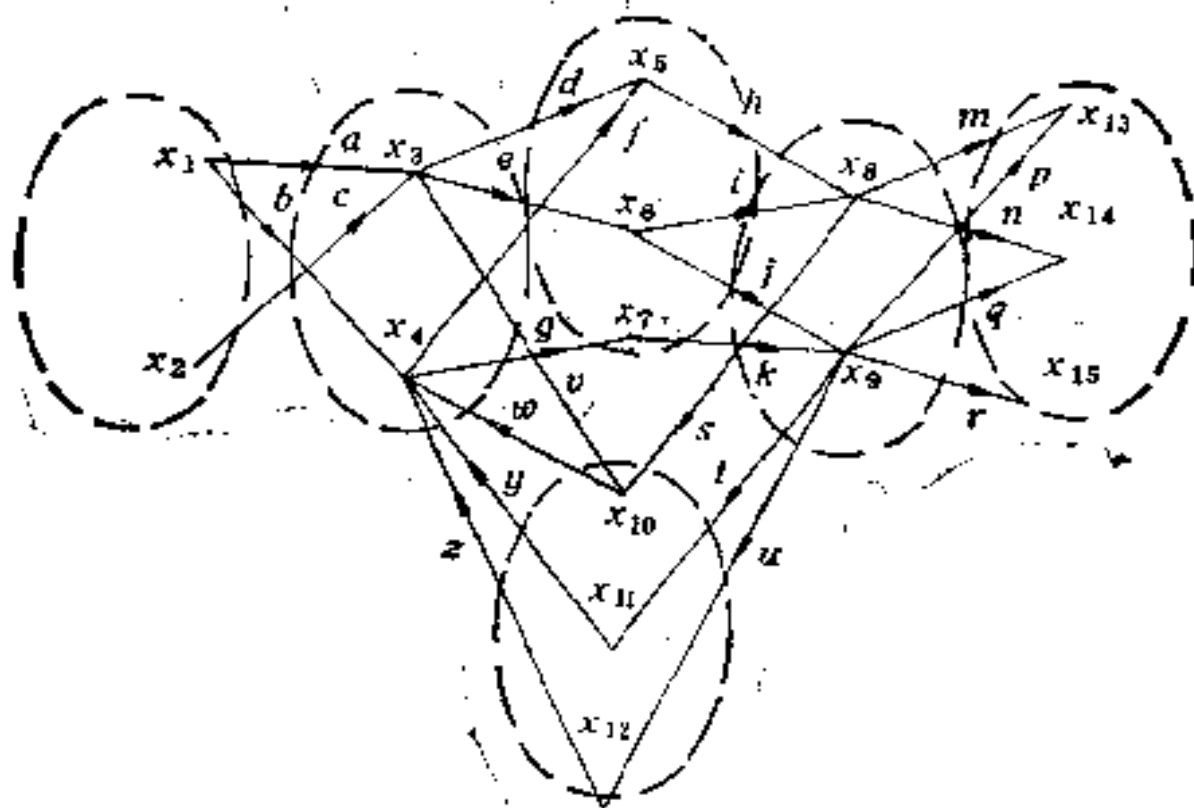


图 1-59

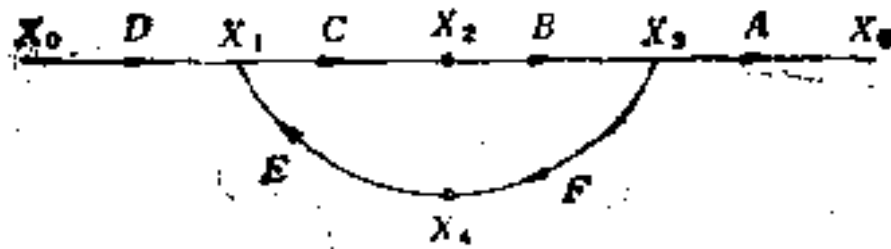


图 1-60

在图 1-60 中

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} m & p \\ n & q \\ 0 & r \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} h & i & 0 \\ 0 & j & k \end{bmatrix}, \\
 C &= \begin{bmatrix} d & f \\ e & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix}, & D &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & 0 \end{bmatrix}, \\
 E &= \begin{bmatrix} v & 0 & 0 \\ w & y & z \end{bmatrix}, & F &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & t \\ 0 & u \end{bmatrix}, \\
 X_0 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, & X_1 &= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, & X_2 &= \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}, \\
 X_3 &= \begin{bmatrix} x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}, & X_4 &= \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}, & X_5 &= \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \end{bmatrix} \quad (1-109)
 \end{aligned}$$

图 1-60 表示了下列矩阵方程组:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= DX_0 + EX_4, & X_2 &= CX_1, & X_3 &= BX_2, \\
 X_4 &= FX_3, & X_5 &= AX_3 \quad (1-110)
 \end{aligned}$$

如果所有变量和支路传输都是标量, 则应用 Mason 增益公式可求出

$$X_5 = \left(\frac{DCBA}{1 - CBEF} \right) X_0 \quad (1-111)$$

由于矩阵相乘不满足交换律(即 $AB \neq BA$), 故 Mason 增益公式不适用于求矩阵信号流图中源点到汇点的传输. 解决这个问题一般有两种方法: 一种是利用简化规则的逐步简化法; 另一种是直接由图的拓扑结构写出传输的拓扑方法. 拓扑方法中又分为两种: 一种是回环法, 另一种是最优拓扑法. 本节中先讨论逐步简化法中应用的几个基本简化规则. 这些规则与标量信号流图中的规则是一一对应的, 主要区别是矩阵运算代替了标量的运算.

1. 支路并联简化规则(图 1-61)

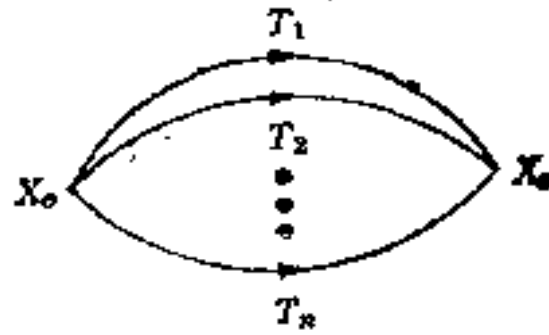


图 1-61

由图 1-61,

$$X_n = \left(\sum_{i=1}^n T_i \right) X_0 \quad (1-112)$$

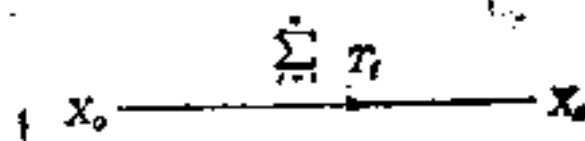


图 1-62

故 n 条同方向的并联支路可用一条支路代替。后者的传输是 n 条支路的支路传输之和(图 1-62)。

2. 支路串联简化规则(图 1-63)

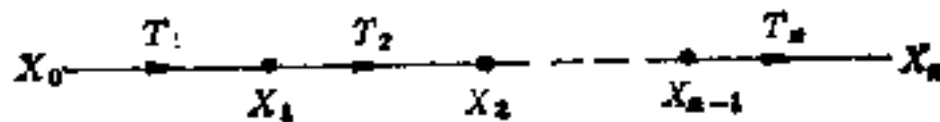


图 1-63

由图 1-63,

$$X_1 = T_1 X_0, \quad X_2 = T_2 X_1, \quad \dots, \quad X_n = T_n X_{n-1} \quad (1-113)$$

可得出

$$X_n = \prod_{i=1}^n T_i \quad (1-114)$$

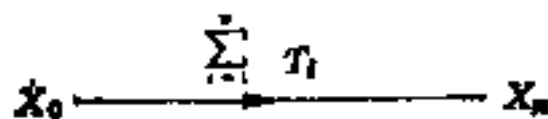


图 1-64

故 n 条同方向的串联支路可用一条支路代替。后者的传输是 n 条支路的支路传输之积 (图 1-64)。但需注意乘积的顺序是从最后一条支路开始, 依次倒退回第一条支路。

3. 支路移动规则——节点的吸收 (图 1-65)

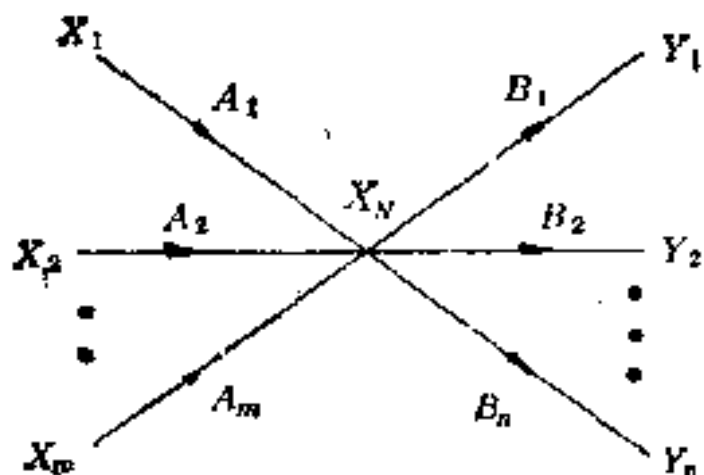


图 1-65

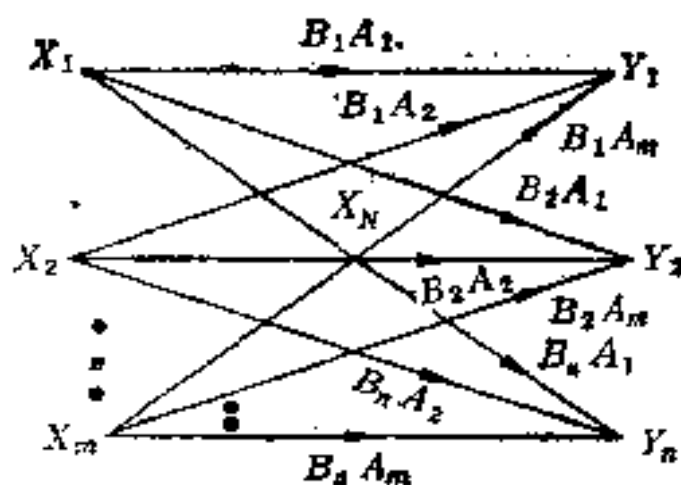


图 1-66

要吸收节点 X_N , 需要 m 条入支路沿 n 条出支路移动, 移动完毕后, 产生 $m \times n$ 条支路, 节点 X_N 被吸收。移动原则与 1-3 节中完全相同, 唯一需要注意的是移动后的支路传输应该是在被吸收节点的出支路的传输与入支路的传输之积, 两者不能颠倒, 如图 1-66。

4. 自环消除规则

设图中某节点 X_i 由下列方程表示

$$\sum_{j=0}^n A_{ij} X_j = X_i \quad (A_{ii} \neq I) \quad (1-115)$$

对应的矩阵信号流图如图 1-67。图中节点 X_i 有一自环 A_{ii} 。如果将方程(1-115)写成

$$X_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (I - A_{ii})^{-1} A_{ij} X_j \quad (1-116)$$

对应的矩阵信号流图如图 1-68。图中 X_i 的自环已消失。比较图 1-67 和图 1-68 可看出, 要吸收某节点的自环, 只需要将 X_i 的所有入支路的传输前乘 $(I - A_{ii})^{-1}$ 即可 (I 为单位阵)。

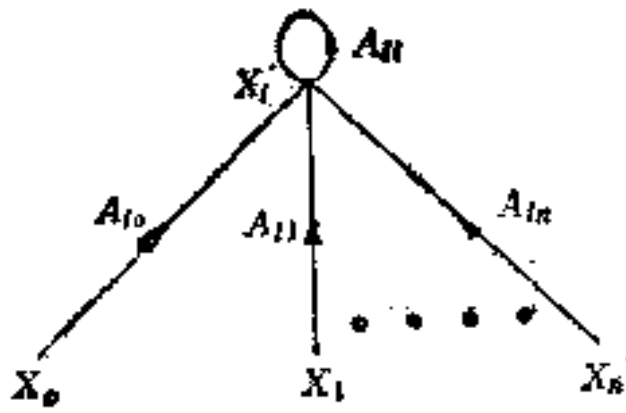


图 1-67

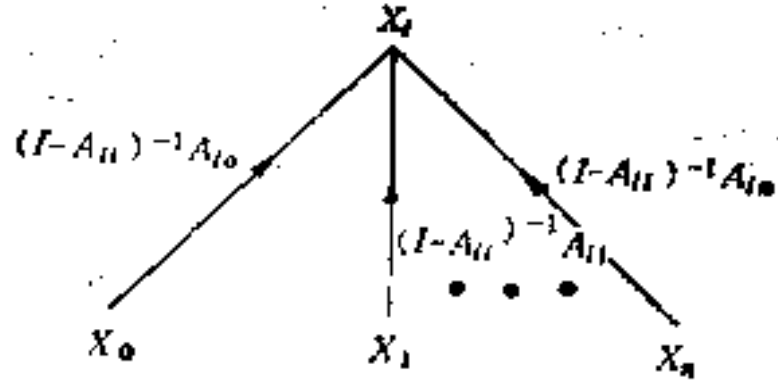


图 1-68

和标量信号流图一样，利用上述四个基本简化规则就可以逐步简化任何的矩阵信号流图，消去中间节点。以图 1-60 为例，说明简化规则的应用。先用规则 2 分别吸收节点 X_2 和 X_4 ，得出图 1-69(a)；再用规则 3 吸收 X_1 ，如图 1-69(b)；而后用规则 4 消除 X_3 的自环，并用规则 2 吸收 X_3 。最后，得出图 1-69(c)。于是

$$X_5 = A(I - BCEF)^{-1}BCDX_0$$

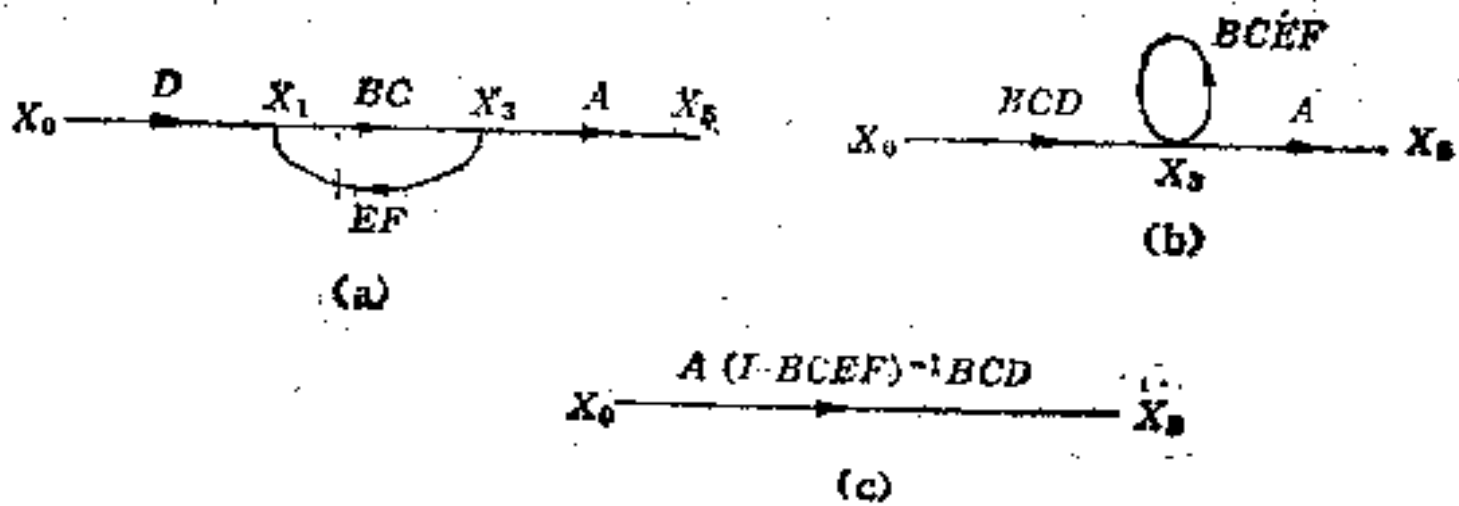


图 1-69

1-13 求矩阵信号流图传输的拓扑方法

下面阐述两种直接由图的拓扑结构求图传输的方法。

1. 回环法

在讨论回环法以前，需要引进下列定义。

关于节点分裂、节点的回环传输的定义与 1-9 节中标量信号流图的有关定义相同，不再重复。

从节点 X_i 到 X_j 的路传输（乘积）是路上从节点 X_i 到 X_j

的支路传输之积。例如,图 1-70 中从 X_1 到 X_5 的路传输(乘积)是 $DCBA$ 。

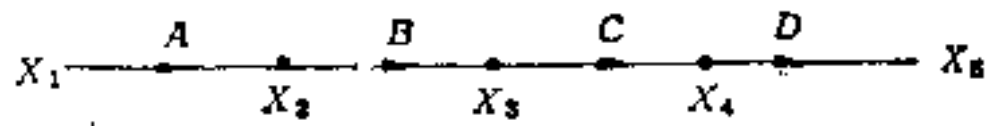


图 1-70

节点因子。路 p 上某节点 i 的节点因子是在 p 上节点 i 到汇点间的路上所有节点都分裂的条件下算出的节点 i 的回归差的逆矩阵。应指出,节点因子是与所讨论的路有密切关系的。同一节点在不同的路上,可以有不同的节点因子。

例如,在图 1-71 中,对路 $X_1-X_2-X_4-X_5-X_6$, 节点 X_2 的节点因子为 $(I-BC)^{-1}$, 而对路 $X_1-X_2-X_3-X_4-X_5-X_6$, 节点 X_2 的节点因子则为 1 (节点 X_3, X_4, X_5 都分裂后, X_2 无回归信号)。

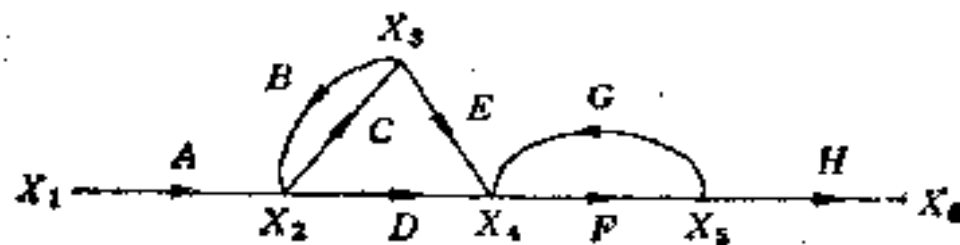


图 1-71

于是,得出了求矩阵信号流图中从源点 X_0 到任一中间节点 X_i 的传输的步骤如下:

- 第 1 步. 找出所有从源点 X_0 到节点 X_i 的路。
- 第 2 步. 对每条路 p , 算出 p 上每个节点 X_j 的节点因子, 然后将每个节点 X_j 的节点因子插入到 X_j 在 p 上所关联的两条支路的支路传输间, 得到了修改的路传输。
- 第 3 步. 将所有从 X_0 到 X_i 的修改的路传输相加, 即得到了从 X_0 到 X_i 的传输。

例 1-15. 应用回环法计算图 1-72 中从 X_1 到 X_6 的传输。

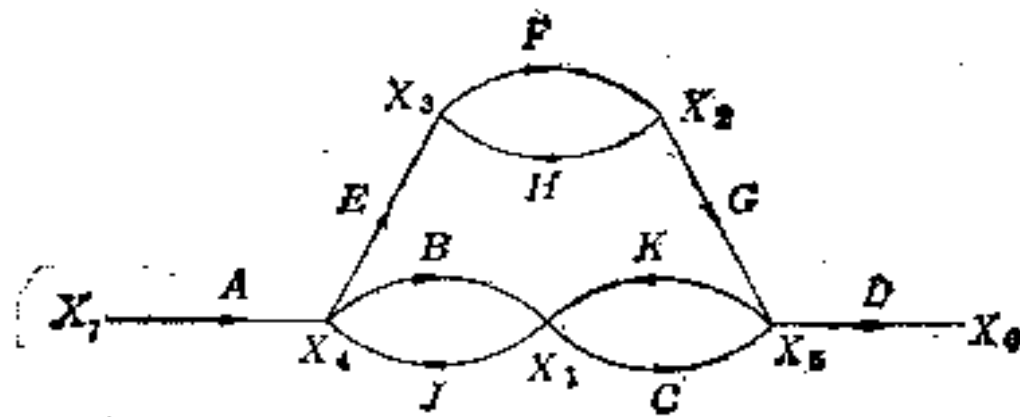


图 1-72

(1) 从节点 X_7 到 X_6 有两条路: 路 $X_7 \rightarrow X_4 \rightarrow X_3 \rightarrow X_2 \rightarrow X_5 \rightarrow X_6$ 的路传输是 $DGFEA$; 路 $X_7 \rightarrow X_4 \rightarrow X_1 \rightarrow X_5 \rightarrow X_6$ 的路传输是 $DCBA$.

(2) 对路 $X_7 \rightarrow X_4 \rightarrow X_3 \rightarrow X_2 \rightarrow X_5 \rightarrow X_6$:

$$\text{节点 } X_4 \text{ 的节点因子} = (I - JB)^{-1} \quad (1-117)$$

$$\text{节点 } X_3 \text{ 的节点因子} = I \quad (1-118)$$

$$\text{节点 } X_2 \text{ 的节点因子} = (I - FH)^{-1} \quad (1-119)$$

$$\begin{aligned} \text{节点 } X_5 \text{ 的节点因子} = & [I - C(1 - BJ)^{-1}K - G(I \\ & - FH)^{-1}FE(I - JB)^{-1}JK]^{-1} \quad (1-120) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \text{修改的路传输} = & D[I - C(1 - BJ)^{-1}K - G(I \\ & - FH)^{-1}FE(I - JB)^{-1}JK]^{-1}G(I - FH)^{-1} \\ & \cdot F \cdot E(I - JB)^{-1}A \quad (1-121) \end{aligned}$$

对路 $X_7 \rightarrow X_4 \rightarrow X_1 \rightarrow X_5 \rightarrow X_6$:

$$\text{节点 } X_4 \text{ 的节点因子} = I \quad (1-122)$$

$$\text{节点 } X_1 \text{ 的节点因子} = (I - BJ)^{-1} \quad (1-123)$$

节点 X_5 的节点因子与式(1-120)相同

故

$$\begin{aligned} \text{修改的路传输} = & D[I - C(1 - BJ)^{-1}K - G(I \\ & - FH)^{-1}FE(I - JB)^{-1}JK]^{-1}C(I - BJ)^{-1} \\ & \cdot BA \quad (1-124) \end{aligned}$$

(3) 式(1-121)与式(1-124)相加, 即为从 X_7 到 X_6 的传输

$$T = D[I - C(1 - BJ)^{-1}K - G(I - FH)^{-1}FE(I$$

$$\begin{aligned}
& - JB)^{-1}JK]^{-1}G(I - FH)^{-1}FE(I - JB)^{-1}A \\
& + D[I - C(I - BJ)^{-1}K - G(I - FH)^{-1}FE(I \\
& - JB)^{-1}JK]^{-1}C(I - BJ)^{-1}BA \quad (1-125)
\end{aligned}$$

及 $X_6 = TX_7$ 。注意,式(1-125)中包括四种不同的逆矩阵。

2. 最优拓扑法^[22]

最优拓扑法(以下简称 OTM)中,最优的意思是指增益表示式中不同的逆矩阵数最少,拓扑的意思是指增益表示式可由图的结构直接得出,而不需要进行图的简化。

为了说明 OTM,需要下列定义。

有序的本征节点集是将图的本征节点加以编号的集合。

有序的本征节点的环差是在所有编号大的本征节后都分裂的条件下,算出的该本征节点的环差。

有序的本征节点因子是该节点的环差的逆。

OTM 路是在给定的有序本征节点集下从源点到汇点的连续的支路集。如果某一本征节点接触两次,则在两次接触间一定要接触到编号更大的本征节点。OTM 路传输是 OTM 路上所有支路的传输之积。支路的顺序是从汇点向着源点进行。

给定图 G 和它的源点和汇点后,决定传输表示式的下列步骤称为 OTM:

第 1 步. 决定有序的本征节点集。

第 2 步. 决定所有从源点到汇点的 OTM 路。

第 3 步. 传输表示式的每一项是一个 OTM 路传输,并在路传输的两条支路间插入相应的本征节点的有序本征节点因子。

第 4 步. 传输表示式等于第 3 步中每个 OTM 所产生的各项之和。

例 1-16. 对于图 1-60,指数为 1. 若选节点 X_1 作为本征节点,则只有一条 OTM 路,其路传输是 $ABCD$. 节点 X_2 的节点因子是 $CEFB$. 故从 X_6 到 X_7 的传输

$$T = AB(I - CEFB)^{-1}CD. \quad (1-126)$$

若选节点 X_i 作为本征节点, 则有两条 OTM 路。它们的路传输分别为 $ABCD$ 和 $ABCEFBCE$ 。节点 X_i 的有序本征节点因子是 $(I - FBCE)^{-1}$ 。故从 X_i 到 X_j 的传输

$$T = ABCD + ABCE(I - FBCE)^{-1}FBCE \quad (1-127)$$

从这个例子可看出, 由于本征节点集的选择不同, 可得到一些不同的等效的传输表示式。从计算观点来说, 可能某一表示式更有利些。例如, 在图 1-60 中, 若 X_2 和 X_1 的维数分别是 10×1 和 2×1 , 则式(1-126)需要求 10×10 的矩阵的逆, 而式(1-127)则只需求 2×2 矩阵的逆。

关于 OTM 的证明, 参阅[22]。

对于简单的图, 可以用观察方法决定 OTM 路和有序的本征节点因子。但对于复杂的图, 要用观察方法解决上述问题是非常困难的。因此, 需要有一个系统的搜索过程来求出 OTM 路和有序的本征节点因子。

下面阐述 OTM 树的构成方法。从 OTM 树可以得到所有的 OTM 路和有序的本征节点因子。

1. 从图 G 产生连接表。连接表的行数等于图的节点数。每行的第 1 个元素对应于 G 中的节点号。其他元素对应于以第 1 个元素的节点为终点的支路起点的节点号。

2. 以汇点作为根出发, 应用连接表可生成 OTM 树:

(1) 节点符号:

(a) 源点以 \odot 表示;

(b) 树中的本征节点以 \bullet 表示, 如果它第 1 次出现在它与根之间。即使本征节点不是第 1 次出现在它与根之间, 但如果在其间有编号更大的本征节点出现, 则该本征节点也可用 \bullet 表示;

(c) 如果本征节点不是第 1 次出现在它与根之间, 而且其间又无编号更大的本征节点出现, 则该本征节点用 \otimes 表示;

(d) 包括根在内的所有其他节点用 \circ 表示。

(2) 构成 OTM 树:

从根出发, 找出以根为终点的所有点(即连接表中第 1 元素对

应于根,以后各元素所对应的节点),从根画树枝至所有这些点.然后,再从这些点按连接表继续找树枝.符号为 \otimes 或 \odot 的节点称为树叶.到这些节点后树即停止生长.对于每一非树叶的节点,再按连接表继续使树生长.一直重复,使树完全生成为止.

3. 由 OTM 树,可得出 OTM 路. OTM 路是从根(汇点)到源点的一系列支路组成.若 OTM 树中有 N 个 \odot 点,则图有 N 个 OTM 路.每个 OTM 路传输中,将有序的本征节点因子插入该本征节点所关联的两条支路间,构成传输表示式的一项.

4. 从 OTM 树中也可得出有序本征节点的节点因子.一般,有序本征节点是从小编号到大编号依次考虑.某一本征节点 n 的有序本征节点因子等于 $(I - T_n)^{-1}$. T_n 是 OTM 树中从带有“ \bullet ”符号的节点 n 到可达的带有“ \otimes ”符号的节点 n 间的传输.注意,在上述两个节点间不允许有编号更大的本征节点.如有编号较小的节点,则必须在路传输中插入该编号较小的节点的节点因子.

例 1-17. 利用上述 OTM 求图 1-72 中从节点 X_7 到 X_6 的传输.

图 1-72 的指数是 2. 选取节点 1 和 2(为方便计, X_1 和 X_2 分别用 1 和 2 表示, 以下所有节点均用其编号表示) 作为本征节点集. 首先,由图 1-72 作连接表如下:

连 接 表	
1	4, 5
2	3
3	2, 4
4	1, 7
5	1, 2
6	5
7	

利用连接表,以汇点 6 为根,作树枝 $\underline{65}$, 再从 5 出发,作树枝 $\underline{51}$, $\underline{52}$, 节点 1, 2 是从根开始第 1 次出现的本征节点,故用“ \bullet ”表

示。再分别从节点 1, 2 出发, 利用连接表生成树枝 14, 15, 及 23。从节点 4 出发, 生成树枝 41 和 47。因为本征节点 1 和 1 间的节点 4 不是本征节点, 故第 2 次出现的节点 1 用“⊗”表示。节点 7 是源点, 以“⊙”表示。树在这两个节点停止生长。对其他节点, 继续树的生长。最后, 作出 OTM 树, 如图 1-73 所示。

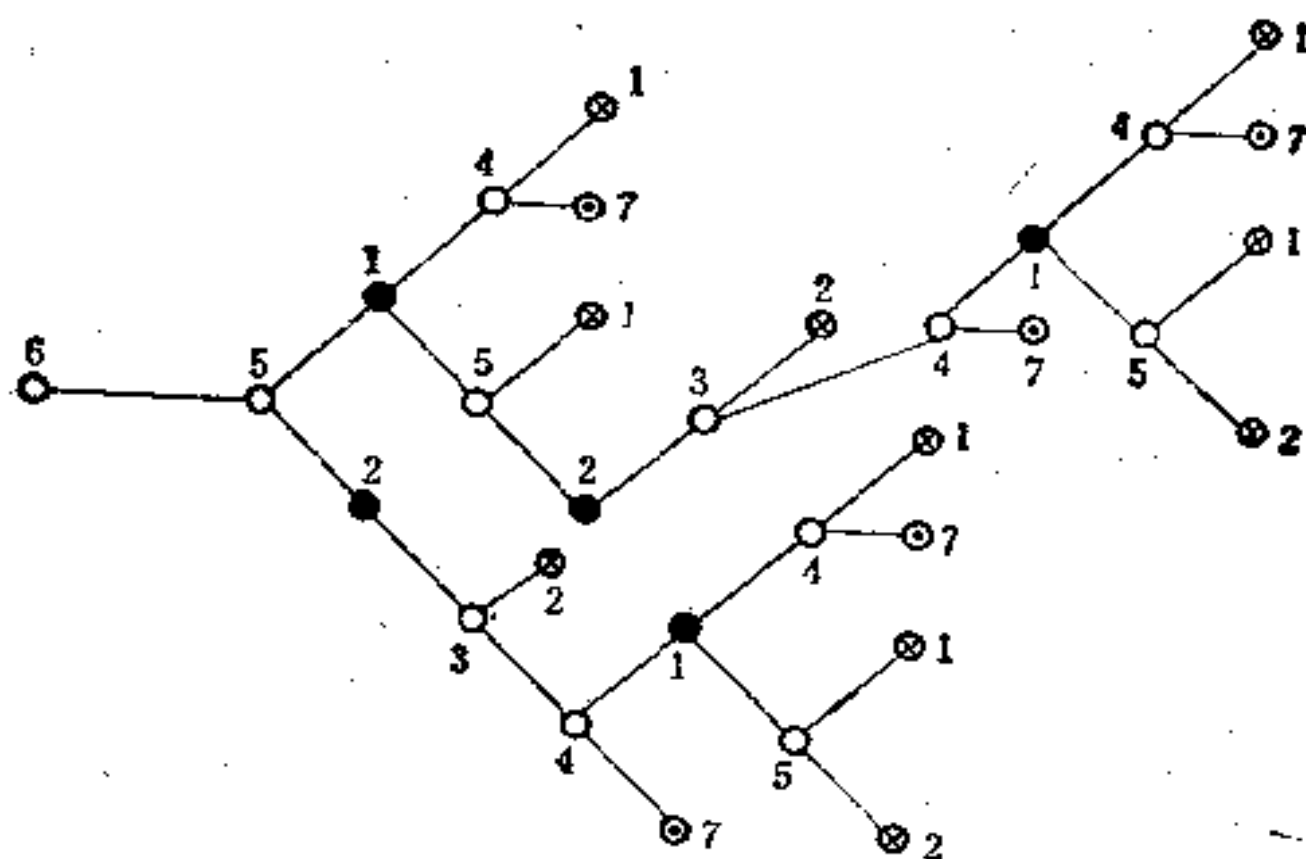


图 1-73

从图 1-73 的 OTM 树中可得到五个带“⊙”的节点, 即有五条 OTM 路, 其路传输为: (支路传输暂用支路的起点和终点表示)

$$\begin{aligned} & \underline{65} \underline{51} \underline{14} \underline{47}, \underline{65} \underline{51} \underline{15} \underline{52} \underline{23} \underline{34} \underline{41} \underline{14} \underline{47}, \\ & \underline{65} \underline{51} \underline{15} \underline{52} \underline{23} \underline{34} \underline{47}, \underline{65} \underline{52} \underline{23} \underline{34} \underline{41} \underline{14} \underline{47}, \\ & \underline{65} \underline{52} \underline{23} \underline{34} \underline{47} \end{aligned}$$

节点 1 的有序本征节点因子可由图 1-73 得出, 图中从带“●”号的节点 1 到带“⊗”号的节点 1 的传输为 14 41 和 15 51, 故节点 1 的有序本征节点因子 = $(I - \underline{14} \underline{41} - \underline{15} \underline{51})^{-1}$ 。

同理, 节点 2 的有序本征节点因子 = $[I - \underline{23} \underline{32} - \underline{23} \underline{34} \underline{41} (I - \underline{14} \underline{41} - \underline{15} \underline{51})^{-1} \underline{15} \underline{52}]^{-1}$ 。

用对应的支路传输代入上述路传输, 并考虑有序的本征节点

因子,得出从源点 7 到汇点 6 的传输

$$T = DC(I - BJ - KC)^{-1}BA + [DC(I - BJ - KC)^{-1} \cdot KG + DG] \cdot [1 - FH - FE](I - BJ - KC)^{-1}KG)^{-1}[FEA + FEJ(I - BJ - KC)^{-1}BA] \quad (1-128)$$

式(1-128)中只包括两种不同的逆矩阵。与用回环法得出的结果式(1-125)相比较,不同的逆矩阵数目少 2,证实了 OTM 中逆矩阵数目为最少的论断。

但是也应指出, OTM 中首先要决定本征节点集,对于大图来说,这并不是一件简单的工作(决定本征节点集需利用 1-10 节中所述的方法)。而回环法中尽管不同的逆矩阵不是最少,但它不需要决定本征节点集。所以目前仍得到应用。

参 考 文 献

- [1] Acar, C., Anady, F., On the Analysis of Active Networks Containing Voltage Operational and Differential Input-output Amplifiers, *PIEEE*, pp. 128—130, 1972.
- [2] Acar, C., Simple Derivation of Chen's Multiple-node Removal Algorithm, *Electronics Letters*, Vol. 9, No. 8/9, pp. 186—187, May 1973.
- [3] Ash, R., Topology and the Solution of Linear Systems, *J. Franklin Institute*, Vol. 268, pp. 453—463, 1959.
- [4] Chen, W. K., *Applied Graph Theory*, Amsterdam: North-Holland, 1976.
- [5] Cheung, L. K., and Kuh, E. S., The Bordered Triangular Matix and Minimum Essential Sets of a Digraph, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. CAS-21, pp. 633—639, Sep. 1974.
- [6] Chow, Y., and Cassagnol, E., *Linear Signal Flow Graphs and Applications*, New York: Wiley, 1962.
- [7] Coates, C. L., Flow-Graph Solutions of Linear Algebraic Equations, *IRE Trans. on Circuit Theory*, Vol. CT-6, pp. 170—187, June 1959.
- [8] Danielson, G. H., On Finding the Simple Paths and Circuits in a Graph, *IEEE Trans., on Circuit Theory*, Vol. CT-15, pp. 294—295, Sep. 1968.
- [9] Desoer, C. A., The Optimum Formula for the Gain of a Flow Graph or a Simple Derivation of Coates Formula, *PIRE*, Vol. 48, pp. 883—889, May 1960.
- [10] Dunn, W. R., and Chan S. P., Flow Graph Analysis of Linear Systems Using Remote Time-Shared Computation, *J. Franklin Institute*, Vol. 288, No. 5, pp. 337—349, Nov. 1969.
- [11] Happ, W. W., Flowgraph Techniques for Closed Systems, *IEEE Trans., on*

- Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-2, No. 3, pp. 252—264, May 1966.
- [12] Hoskins, R. F., Flow Graphs, Signal Flow Graphs, and Graph Determinants, *PIRE*, Monogr. 489E, pp. 263—269, Dec. 1961.
- [13] Kim, W. H., and Chien, R. T., Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks, Columbia University Press, 1962, Part 1.
- [14] Lempel, A., and Cederbaum, I., Minimum Feedback Arc and Vertex Sets of a Directed Graph, *IRE Trans., on Circuit Theory*, Vol. CT-13, pp. 399—403, Dec. 1966.
- [15] Larons, C. S., Flowgraphs—For the Modeling and Analysis of Linear Systems, New York: McGraw-Hill, 1962.
- [16] Mason, S. J., Feedback Theory: Some Properties of Signal Flow Graphs, *PIRE*, Vol. 41, pp. 1144—1156, 1953.
- [17] Mason, S. J., Feedback Theory: Further properties of Signal Flow Graphs, *PIRE*, Vol. 44, pp. 920—926, 1956.
- [18] Mason, S. J., and Zimmerman, H. J., Electronic Circuits, Signals, and Systems, New York: Wiley, 1960.
- [19] Mulawka, J., and Osowski, J., On a Class of Binodal Signal Flow Graphs, Bulletin De L. Academic Polonaise des Sciences, Serie des Sciences Techniques, Vol. XXIII, No. 8, pp. 693—699, 1975.
- [20] Ibid, Application of the Binodal Mason Graph to the Analysis of the Linear RC Networks with Operational Amplifiers, pp. 701—706.
- [21] Mulawka, J., By-inspection Analysis of Switched-Capacitor Networks, *Int. J. of Electronics*, Vol. 49, No. 5, pp. 359—373, 1980.
- [22] Riegler, D. E., and Lin, P. M., Matrix Signal Flow Graphs and an Optimum Topological Method for Evaluating Their Gains, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, Vol. 19, No. 5, pp. 427—435, Sep. 1972.
- [23] Robichaud, L. P. A., Boisvert, M., and Robert, J., Signal Flow Graphs and Applications, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1962.
- [24] Seshu, S., and Reed, M. B., Linear Graphs and Electrical Networks, Reading, Mass: Addison-Wesley, 1961.
- [25] 陈树柏等主编, 网络图论及其应用, 科学出版社, 1982年.
- [26] 赵永昌编著, 信号流图及其应用, 人民邮电出版社, 1975年.
- [27] 赵永昌, 关于两种节点的信号流图, 信息与控制, 1981年, 第10卷, 第6期, 第19—22页.
- [28] 赵永昌, 流图拓扑和线性方程组的解, 数学通报, No. 7, 第23—30页, 1966年.

第二章 有源网络分析

信号流图用于有源网络分析的优点是，可利用网络的拓扑性质和电路中的 Kirchhoff 定律、Ohm 定律，直接从网络作出对应的信号流图，而不需要写出网络的方程组。本章，我们首先讨论从网络作出对应的信号流图的方法。这种方法是相当简便的。但是，当对这种信号流图应用 Mason 公式写出网络的传输函数（通常是符号网络函数）时，产生了一些相消项，大大降低了计算效率。为了克服这个缺点，Mielke^[7,8] 提出了保证不出现相消项的符号网络函数的拓扑公式。这个公式对于处理结构复杂的图特别有效。本章将详细讨论它的推导过程和有关的拓扑性质，并在此基础上，提出更为简便的拓扑方法。这种方法只需搜索电压图和电流图对一棵树 T 的基本割集矩阵中的子矩阵，即可求出所有不相消的项。作为一种应用，讨论了由网络直接写出状态方程的方法。这种方法比一般的代数方法直观、简便。

本章所讨论的方法适用于任何线性有源网络的分析。

2-1 网络的直接分析

对于由 RLC 元件和独立的以及受控源组成的线性网络，不需写出网络方程，直接作出其对应的信号流图，是网络的拓扑分析中的一个重要环节。现在，我们讨论系统地构成信号流图的步骤。

首先，考虑网络仅由独立源和阻抗及导纳元件组成的简单情况，并设电压源不构成环，电流源不构成割集。先选择一棵树，使得所有电压源在树支路内，所有电流源在链支路内。然后，根据下列步骤构成信号流图。

(1) 应用 Kirchhoff 电压定律 (KVL)，用树支路电压（包括

电压源 V_E 和非电压源电压 V_T) 表示链支路电压 V_C 。

(2) 应用 Kirchhoff 电流定律 (KCL), 用链支路电流 (包括电流源 I_J 和非电流源电流 I_C) 表示树支路电流 I_T 。

(3) 应用每条支路的电压-电流关系, 对于树支路电压 V_T , 用树支路阻抗 Z_T 与电流 I_T 之积表示; 对于链支路电流 I_C , 用链支路导纳 Y_C 与电压 V_C 之积表示。

根据上述步骤构成的信号流图, 实际上以原始形式表示了 KCL, KVL 和支路特性, 故称原始信号流图。对于有 b 条支路的网络, 每条支路有一电压和一电流, 故共有 $2b$ 个变量。要解这 $2b$ 个变量, 必须有 $2b$ 个方程。对 b 条支路, 有 b 个电压-电流关系。选一条包括 n 条支路的树, 余下 $b - n = l$ 条链支路, 应用 KCL 和 KVL 可分别得到 n 和 l 个独立的方程, 故总共的方程数为 $b + n + l = 2b$, 可解出每条支路的电压和电流。实际上, 上述三个步骤就是由 $2b$ 个方程作出对应的信号流图的过程。所以, 原始信号流图又称 $2b$ 信号流图。现用一简单实例来说明按上述步骤作出原始信号流图的过程。

例 2-1. 有一网络如图 2-1 所示, 图中 V_1 为电压源, I_6 为电流源。首先, 选一棵树包括所有电压源。这里, 选取支路 1, 2, 3, 于是支路 4, 5, 6 为链支路。应用 KVL, 用树支路电压 $V_1, V_2,$

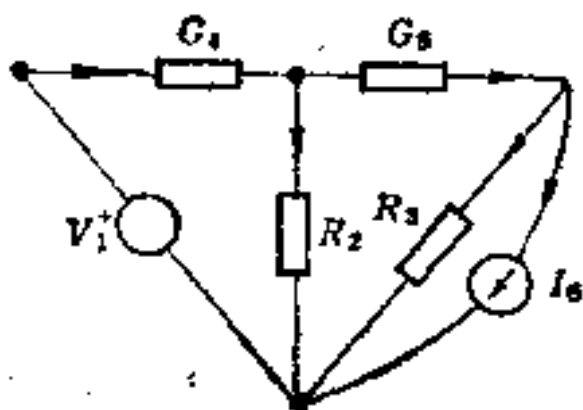


图 2-1

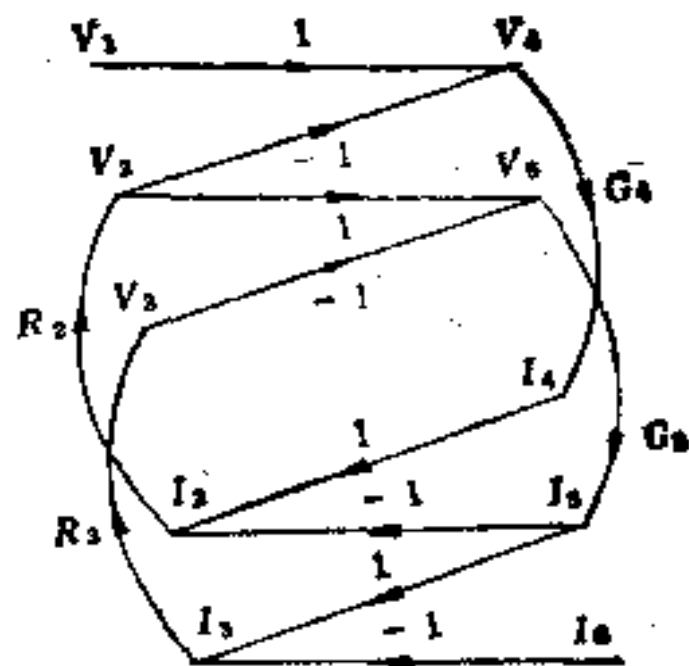


图 2-2

V_3 表示链支路电压 V_4, V_5 , 再由 KCL, 用链支路电流 I_4, I_5, I_6 表示树支路电流 I_1, I_2 . 最后, 用树支路阻抗与电流表示电压, 用链支路导纳与电压表示电流, 得出图 2-2 所示的原始信号流图.

一般地, 原始信号流图可用图 2-3 表示. 图 2-3 是矩阵信号流图. 图中矩阵 A, B 由 KVL 决定, 矩阵 C, D 由 KCL 决定, Z_T 和 Y_C 则由支路特性决定. 由原始信号流图, 利用简化规则可吸收节点 I_T 和 V_C , 得到节点数更少的紧凑信号流图, 如图 2-4 所示. 因此, 从网络直接作出紧凑信号流图的步骤是: 在选定了树以后, 应用支路特性和 KVL, 由树支路电压表示链支路电流; 应用支路特性和 KCL, 由链支路电流表示树支路电压. 例如, 在例 2-1 中, 应用这一步骤, 可得出紧凑信号流图如图 2-5. 实际上, 由图 2-2 吸收节点 V_4, V_5, I_4, I_5 也可得到图 2-5.

下面, 再考虑有控制源的情况. 仍设独立的和被控电压源不形成环, 独立的和被控电流源不形成割集. (如果不满足这种条

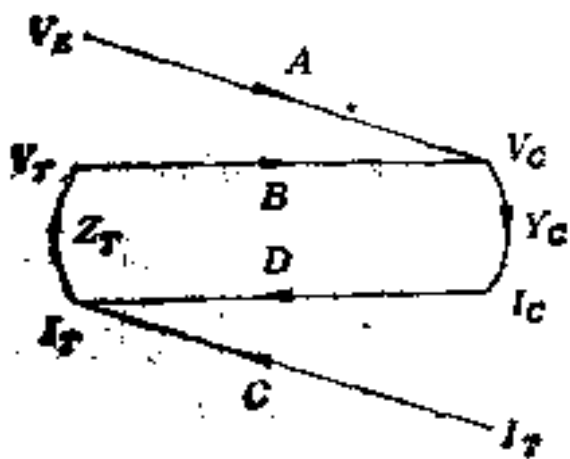


图 2-3

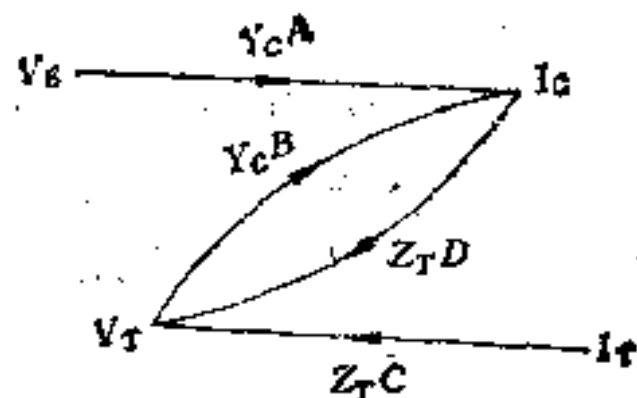


图 2-4

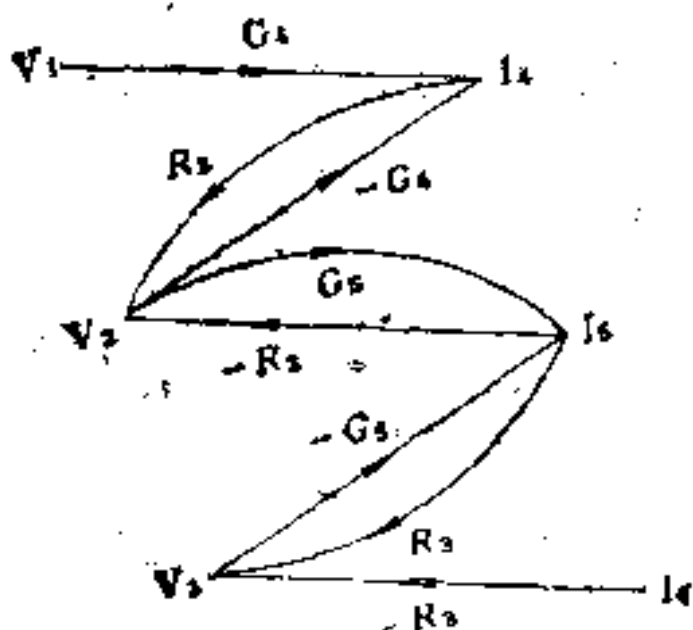


图 2-5

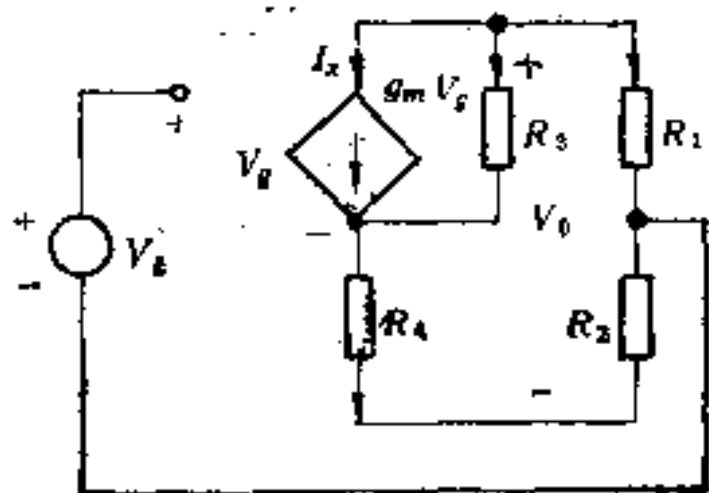


图 2-6

件,网络仍然可解,参阅[2],但在实际应用中极少碰到这种情况。)这时,原始信号流图的构成步骤如下:

(1) 暂时将所有被控源用同一类型的独立源代替,即被控源如果是电压(流)源,则用独立的电压(流)源代替。

(2) 按上述不包括被控源的网络的原始信号流图构成的步骤,先构成原始信号流图。

(3) 将所有被控源的控制条件加上。

例 2-2. 有一反馈放大器电路如图 2-6。

先取一棵树,包括电压源 V_i 及电阻支路 R_1, R_2, R_3 。这里有一被控电流源 $g_m V_g$, 暂将其作为独立电流源 I_x 考虑。于是,可得到原始信号流图(图 2-7)。再将被控电流源 $I_x = g_m V_g$ 的条件加入,从节点 V_g 到 I_x 加入一传输为 g_m 的支路(如图中虚线所示)。如果要求出放大器的电压增益 $\frac{V_o}{V_i}$, 则可由图 2-7 直接利用 Mason 增益公式或逐步化简法求出从节点 V_i 到 V_o 的传输。

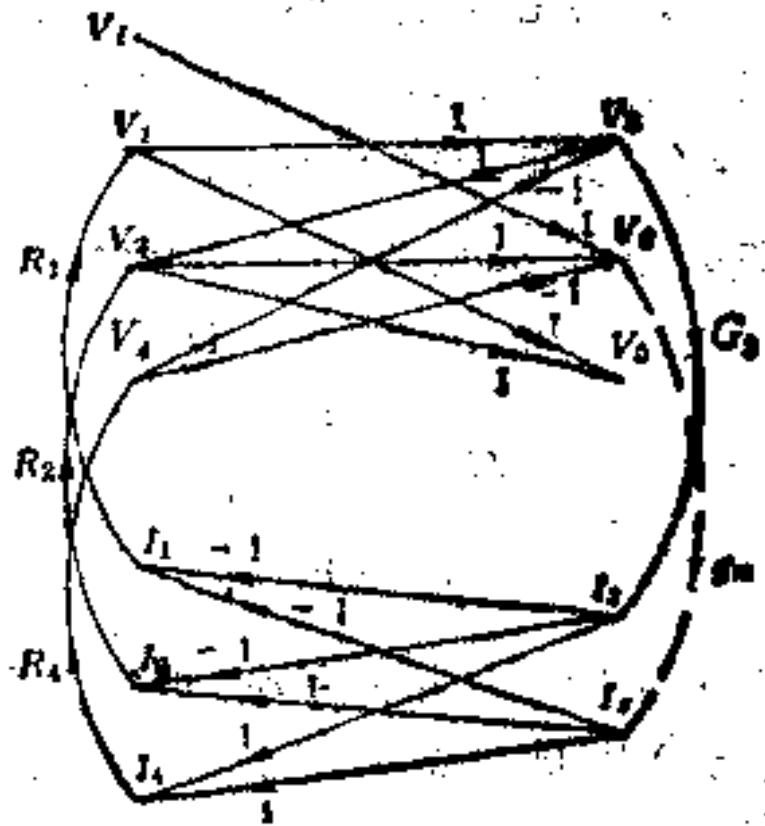


图 2-7

应该指出,根据上述步骤构成的原始信号流图或紧凑信号流图都是无自环和平行支路(即两个节点间有两条以上的支路)的。这种构成信号流图的方法的优点是不需要写出网络方程组,在符号网络函数的生成中可广泛应用。它的缺点是,对于复杂的大图,在计算图行列式的过程中会产生很多的相消项,这将使计算效率大大降低。后面,我们将分别讨论这两个问题。

2-2 符号网络函数

在线性网络中,有时支路是用变量而不是用常数表示。所谓

符号网络函数是指包括变量的网络特性(例如,电压增益、电流增益、输入阻抗、转移阻抗等等)的表示式。符号网络函数在灵敏度分析、误差控制、参数迭代,以及为更好的了解网络的特性等方面是很重要的^[2]。

近年来,关于形成符号网络函数的方法^[3,4]已有较详细的讨论。信号流图方法得到了采用,并出现了有关的计算机程序^[4]。但是,由于在图行列式和余因式的展开式中出现了相消项,使计算效率降低。现在阐述另一种形成符号网络函数的方法^[7],它保证不出现相消项。

设网络 N 是包括 RLC 和控制源的线性时不变的网络。独立源可用一个由待求的输出变量控制的被控源代替,因此,形成闭环系统。这种网络可由电压图 G_V 和电流图 G_I ^[6]拓扑表示。对于选定的树 T ,可写出下列混合方程组:

$$HX = \begin{bmatrix} -U & 0 & Z_T & 0 \\ -B_T^V & -U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -U & -S_C^I \\ 0 & Y_C & 0 & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_T \\ V_C \\ I_T \\ I_C \end{bmatrix} = 0 \quad (2-1)$$

式中 U 是单位矩阵; Z_T 是树支路阻抗矩阵; Y_C 是链支路导纳矩阵; B_T^V 是对应于电压图 G_V 的基本回路矩阵(对于树 T)中由树支路组成的子矩阵; S_C^I 是对应于电流图 G_I 的基本割集矩阵(对于树 T)中由链支路组成的子矩阵; V_T 和 V_C 分别是树支路和链支路电压矩阵; I_T 和 I_C 分别是树支路和链支路电流矩阵。

式(2-1)中 H 的第 1 行和第 4 行与 X 相乘分别表示树支路和链支路的电压-电流关系。 H 的第 2 行与 X 相乘表示 KVL。 H 的第 3 行与 X 相乘表示 KCL。实际上,式(2-1)与 2-1 节中原始信号流图(图 2-3)所表示的是同一内容。对应于式(2-1)的信号流图,称为闭环原始信号流图,并以 $F(H)$ 表示。

因此,可得到求符号网络函数的步骤如下:

(1) 将网络中的独立源用由待求的输出变量控制的被控源代替。

(2) 作出网络的电压图 G_V 和电流图 G_I , 并选树 T .

(3) 由电压图 G_V , 用树支路电压 V_T 表示链支路电压 V_C (构成基本回路矩阵); 由电流图 G_I , 用链支路电流 I_C 表示树支路电流 I_T (构成基本割集矩阵).

(4) 用树支路阻抗 Z_T 和树支路电流 I_T 之积表示树支路电压 V_T ; 用链支路导纳 Y_C 和链支路电压 V_C 之积表示链支路电流 I_C , 构成了闭环原始信号流图.

(5) 令闭环原始信号流图的图行列式等于零, 将包括待求变量的各项集项, 最后用其他变量显式地表示待求变量, 即得到所需的符号网络函数.

例 2-2. 对图 2-8 所示的网络 N , 求电流增益 $T_{ic} = I_6/I_1$.

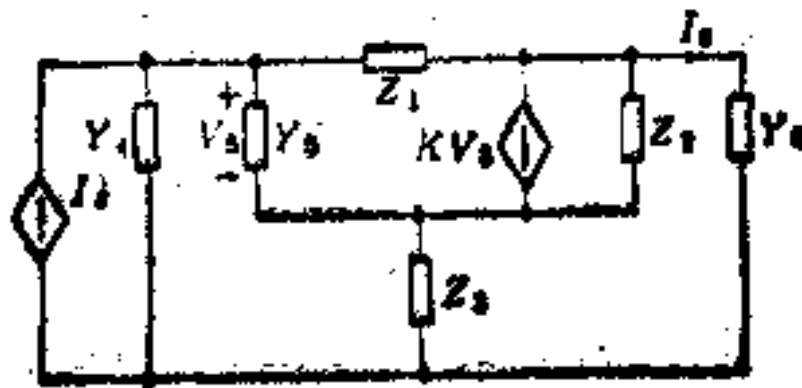


图 2-8

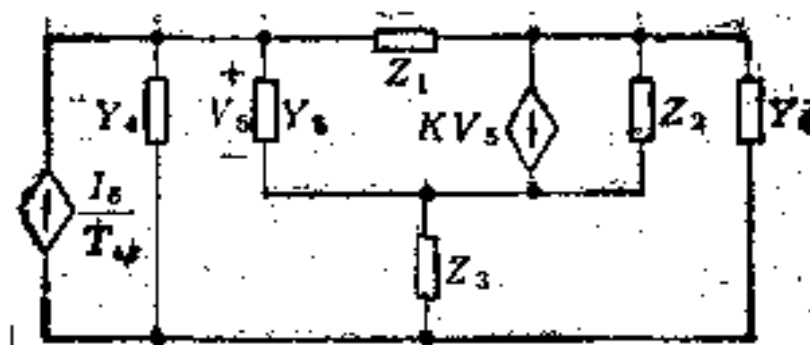


图 2-9

这里, 待求的输出变量是 $T_{ic} = I_6/I_1$. 于是将独立电流源 I_1

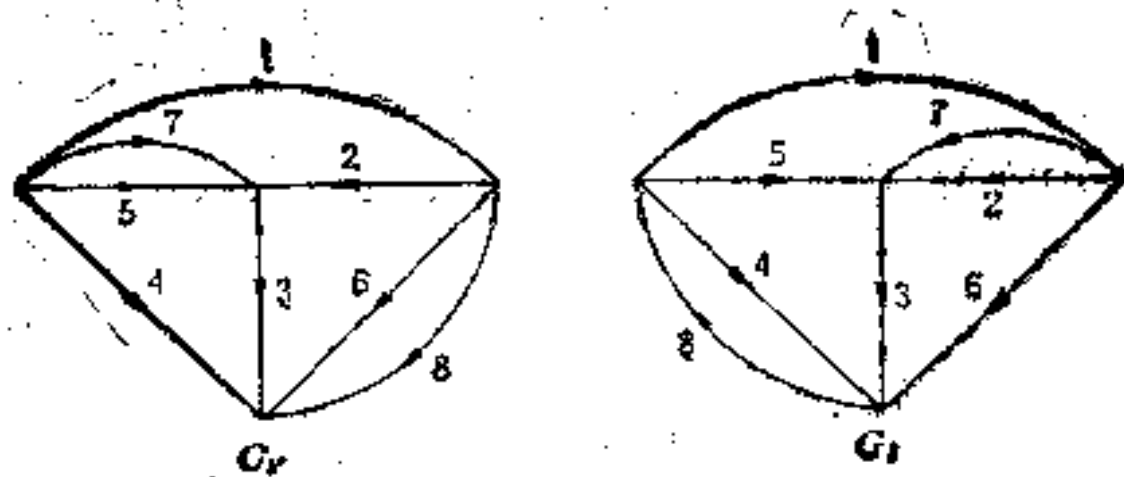


图 2-10

$V_6, V_7, V_8.$

$$V_4 = V_1 + V_2 + V_3, V_7 = V_7 = V_1 + V_2, V_6 = V_8 = V_2 + V_3 \quad (2-2)$$

由此,得出图 2-11 的上半部. 类似地,再在图 2-11 中对应于各个电压节点的下部分别画出电流节点 $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8.$ 用 I_4, I_5, I_6, I_7, I_8 分别表示 $I_1, I_2, I_3.$

$$I_1 = I_2 - I_4 - I_5, I_2 = I_3 - I_4 - I_5 - I_6 - I_7, I_3 = I_3 - I_4 - I_6 \quad (2-3)$$

由此,得出图 2-11 的下半部. 最后,将树支路阻抗和链支路导纳加入,即得闭环原始信号流图(图 2-11).

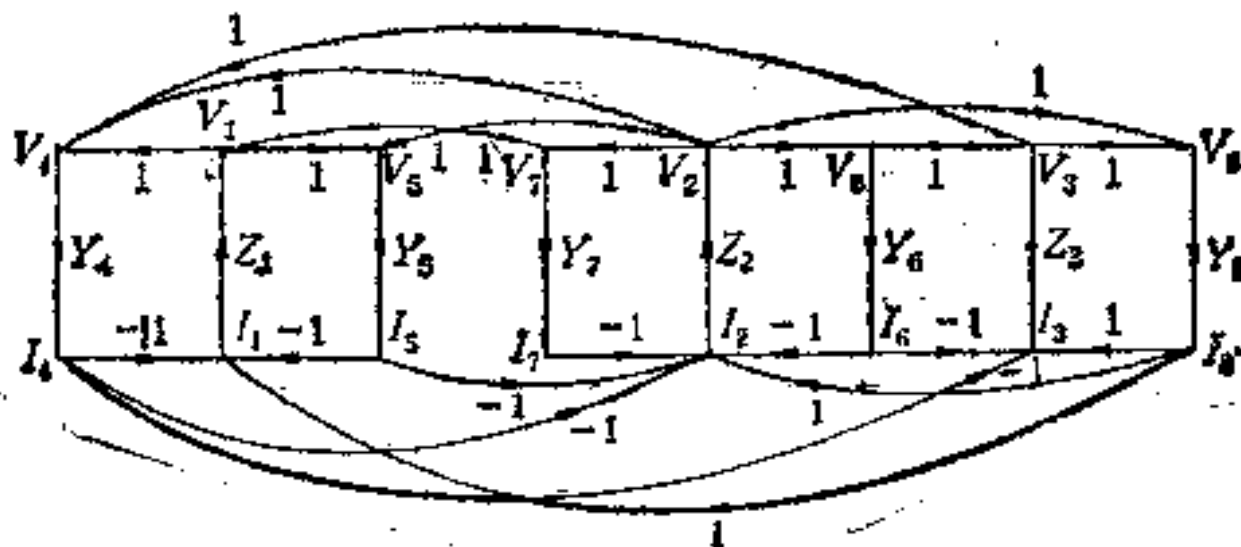


图 2-11

图 2-11 中, $Y_7 = K, Y_8 = \frac{1}{T_6} Y_6.$

实际上,对图 2-9 的网络,利用 2-1 节中所述的步骤,也可得到与图 2-11 相同的信号流图. 这时,

$$\begin{aligned}
 &HX = \begin{bmatrix}
 -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1
 \end{bmatrix} \\
 &= 0 \begin{bmatrix}
 V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 & V_8 & I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & I_6 & I_7 & I_8
 \end{bmatrix} \\
 &= 0 \begin{bmatrix}
 Z_1 & 0 & 0 \\
 0 & Z_2 & 0 \\
 0 & 0 & Z_3
 \end{bmatrix} \\
 &= 0 \begin{bmatrix}
 Y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & Y_5 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & Y_6 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & Y_7 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & Y_8
 \end{bmatrix} \\
 &= 0 \begin{bmatrix}
 -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

由图 2-11 的信号流图,写出它的图行列式 ΔH , 并令 $\Delta H = 0$, 再将 ΔH 中包括因子 $\frac{1}{T_{\omega}}$ 的各项集项,最后就得到 T_{ω} 的符号网络函数。

仔细研究图 2-11 可以看出,图行列式 ΔH 中所包括的项中,有相当多的项是互相抵消的。例如,图行列式中因子为 $Z_1 Z_2 Y_1 Y_2$ 的项数是 4。它们分别是,单环: $-(Z_1 Y_1 Z_2 Y_2)$, $-(Z_1 Y_2 Z_2 Y_1)$; 两个不接触环: $(-Z_1 Y_1)(-Z_2 Y_2)$, $(-Z_2 Y_1)(-Z_1 Y_2)$ 。上面四项两两相消。类似地,还有很多其他的相消项。这就表明,直接利用闭环原始信号流图计算图行列式相当复杂,效率不高。因此,需要找出一种不包括相消项的算法。这便是下一节将要讨论的问题。

2-3 不包括相消项的符号网络函数的拓扑计算

由图 2-11 可看出, $F(H)$ 包括下列四种支路: (1) 对应于 $-B_T^V$ 中非零元素的 B 支路; (2) 对应于 $-S_C^I$ 中非零元素的 S 支路; (3) 对应于 Z_T 中非零元素的 Z 支路; (4) 对应于 Y_C 中非零元素的 Y 支路。信号流图中的环是由上述四种支路形成的。

令 R_K 是 $F(H)$ 的第 K 个子图,它包括: r 条 Z 支路, r 条 Y 支路, $1 \leq r \leq \min(v-1, e-v+1)$, 这里 v 和 e 分别是图 G 中的节点数和支路数。

给出下列定义:

电压子图 $V(R_K)$ 。它是 $F(H)$ 的子图,包括 R_K 中的所有电压节点,以及两个端点都在 R_K 中的所有 B 支路。

电流子图 $I(R_K)$ 。它是 $F(H)$ 的子图,包括 R_K 中的所有电流节点,以及两个端点都在 R_K 中的所有 S 支路。

电压子图 $V(R_K)$ 的覆盖集 $C_V(R_K)$ 。它是覆盖 $V(R_K)$ 的所有节点的支路集合。每个节点只能由一条支路覆盖。 $N_V(R_K)$

是 $V(R_K)$ 的所有的覆盖集的数目。对电流子图 $I(R_K)$ 可类似地定义电流子图的覆盖集 $C_I(R_K)$ 和 $N_I(R_K)$ 。

参阅图 2-11, 令 R_K 是 $F(H)$ 的子图, 它包括支路 $(Z_1, Z_2, Z_3, Y_4, Y_6, Y_7)$ 。因此, 电压子图 $V(R_K)$ 包括支路 $[(V_1, V_4), (V_2, V_4), (V_3, V_4), (V_2, V_6), (V_3, V_6), (V_1, V_7), (V_2, V_7)]$ 和节点 $(V_1, V_2, V_3, V_4, V_6, V_7)$ 。 $V(R_K)$ 包括三个覆盖集 $C_V(R_K)$: $[(V_1, V_4), (V_3, V_6), (V_2, V_7)]$, $[(V_2, V_4), (V_3, V_6), (V_1, V_7)]$ 和 $[(V_3, V_4), (V_2, V_6), (V_1, V_7)]$, 故 $N_V(R_K) = 3$ 。 电流子图 $I(R_K)$ 包括支路 $[(I_4, I_1), (I_4, I_2), (I_4, I_3), (I_6, I_2), (I_6, I_3), (I_7, I_2)]$ 和节点 $(I_1, I_2, I_3, I_4, I_6, I_7)$ 。 $I(R_K)$ 只有一个覆盖集 $C_I(R_K)$: $[(I_4, I_1), (I_6, I_3), (I_7, I_2)]$, 故 $N_I(R_K) = 1$ 。

完全子图 $F(R_K, R_K)$ 。 它是由 $R_K, V(R_K), I(R_K)$ 中的所有支路构成的 $F(H)$ 的子图。 $F(R_K, R_K)$ 的覆盖集 $C(R_K, R_K)$ 是覆盖 $F(R_K, R_K)$ 中所有节点的支路集合。 $F(R_K, R_K)$ 的覆盖集的数目 $N(R_K, R_K) = N_V(R_K)N_I(R_K)$ 。

$F(R_K, R_K)$ 的环集 $L(R_K)$ 。 它是包括 $F(R_K, R_K)$ 的所有节点的不接触环集。

参阅图 2-11, $R_K = (Z_1, Z_2, Z_3, Y_4, Y_6, Y_7)$ 。 完全子图 $F(R_K, R_K)$ 将包括 $V(R_K)$ 中的 B 支路, $I(R_K)$ 中的 S 支路, R_K 中的所有 Z 支路和 Y 支路。 $F(R_K, R_K)$ 如图 2-12 所示。 $F(R_K, R_K)$ 包括三个环集:

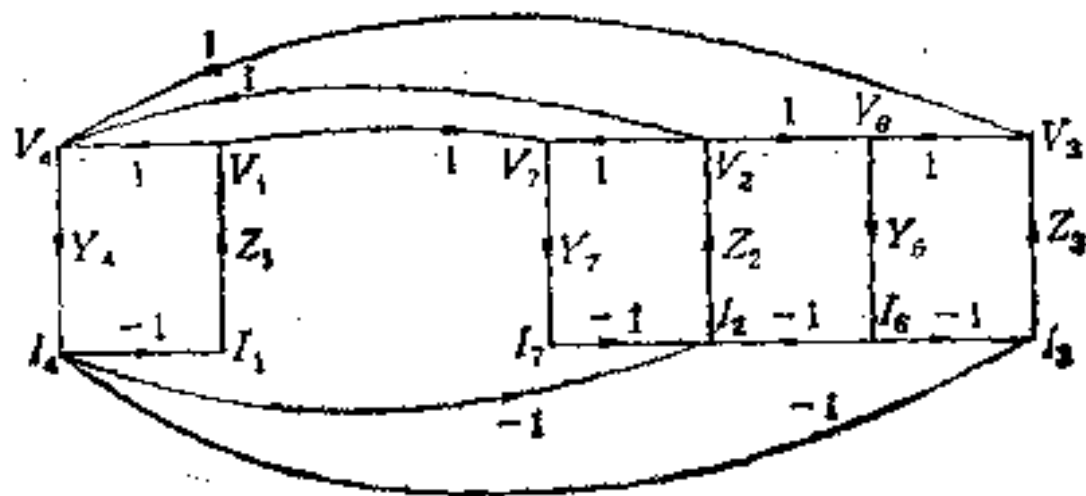


图 2-12

$$L_1(R_K) = [(V_1, V_4), Y_4, (I_4, I_1), Z_1] \\ \cup [(V_3, V_6), Y_6, (I_6, I_3), Z_3] \\ \cup [(V_2, V_7), Y_7, (I_7, I_2), Z_2];$$

$$L_2(R_K) = [(V_3, V_4), Y_4, (I_4, I_1), Z_1, \\ (V_1, V_7), Y_7, (I_7, I_2), Z_2] \\ \cup [(V_3, V_6), Y_6, (I_6, I_3), Z_3];$$

$$L_3(R_K) = [(V_3, V_4), Y_4, (I_4, I_1), Z_1, (V_1, V_7), \\ Y_7, (I_7, I_2), Z_2, (V_2, V_6), Y_6, (I_6, I_3), Z_3]$$

这里 $N(R_K, R_K) = N_V(R_K)N_I(R_K) = 3 \times 1 = 3$. 实际上, $F(R_K, R_K)$ 的覆盖集的数目就是不接触环集的数目, 因为一个覆盖集 $C_V(K)$ 和一个覆盖集 $C_I(K)$, 以及 \emptyset 组成一个不接触环集.

引理 2-1. 设 $V(R_K)$ 是 $F(H)$ 的电压子图及 $-B_K^V$ 是 $-B_T^V$ 的子矩阵, 它的行和列对应于 R_K 中的电压节点. 当且仅当 $N_V(R_K)$ 为奇时, $-B_K^V$ 才是非奇异的.

证明. $\det(-B_K^V)$ 的每一项(不为零)与 $V(R_K)$ 的覆盖集一一对应. 因为 $-B_T^V$ 是么模阵(即行列式之值为 0 或 ± 1), 所以, 只有 $\det(-B_K^V)$ 包括奇数项时, $-B_K^V$ 才是非奇异的, 也就是只有 $N_V(R_K)$ 为奇时, $-B_K^V$ 才是非奇异的.

例如, 对应于 $R_K = (Z_1, Z_2, Z_3, Y_4, Y_6, Y_7)$ 的

$$-B_K^V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

故 $\det(-B_K^V) = -1$, $-B_K^V$ 为非奇异. 这时, $N_V(R_K) = 3$. $\det(-B_K^V)$ 展开式中有 3 项不为零, 分别对应于上述的 $V(R_K)$ 的三个覆盖集.

引理 2-2. 设 $F(R_K, R_K)$ 是 $F(H)$ 的完全子图, S_K^V 和 S_K^I 分别是 $S_C^V = [-B_T^V]^T$ 和 S_C^I 的子矩阵, 它们的行和列对应于 R_K 中的支路(行对应于 Z 支路, 列对应于 Y 支路). 则:

(1) 当且仅当 $N(R_K, R_K)$ 为奇时, S_K^V 和 S_K^I 才都是非奇

异的。(2) $\det S_K^V \cdot \det S_K^I = \sum_{n=1}^{N(R_K, R_K)} (-1)^{n_u} g[L_n(R_K)]$, 式中 g

$[L_n(R_K)]$ 是 $L_n(R_K)$ 中所有 B 支路和 S 支路的支路传输之积, n_u 是 $L_n(R_K)$ 中的不接触环数。

证明. (1) 因 $N(R_K, R_K) = N_V(R_K)N_I(R_K)$, $N(R_K, R_K)$ 为奇, 必须 $N_V(R_K)$ 和 $N_I(R_K)$ 同时为奇。由引理 2-1, S_K^V 和 S_K^I 都是非奇异的 (和引理 2-1 的结果相类似, 当且仅当 $N_I(R_K)$ 为奇时, S_K^I 的子矩阵 S_K^I 才是非奇异的)。

(2) 因为 $-S_K^I = [S_{pq}]$ 及 $S_K^V = (-B_K^V)^T = [b_{ij}]$, 故

$$\det S_K^V \cdot \det S_K^I = (-1)^r \sum_{i_1, \dots, i_r} (\varepsilon_j \varepsilon_q b_{i_1, 1} \cdots b_{i_r, r} S_{1q_1} \cdots S_{r q_r}).$$

这里 ε_j 和 ε_q 分别是由 $b_{i_1, 1} \cdots b_{i_r, r}$ 和 $S_{1q_1} \cdots S_{r q_r}$ 的排列决定的符号。 $F(R_K, R_K)$ 的每个不接触环集是由 $V(R_K)$ 的一个覆盖集, $I(R_K)$ 的一个覆盖集以及支路集 R_K 组成。因此, $\det S_K^V \cdot \det S_K^I$ 展开式中每一非零项与 $F(R_K, R_K)$ 的一个不接触环集一一对应, 使得 $g[L_n(R_K)] = (b_{i_1, 1} \cdots b_{i_r, r} S_{1q_1} \cdots S_{r q_r})$ 。 $L_n(R_K)$ 中的不接触环数是 $r - x_{jq}$ 。 x_{jq} 是使 ε_j 的排列顺序与 ε_q 的排列顺序相一致所需要的角码交换次数。因为 $\varepsilon_j \varepsilon_q = (-1)^{x_{jq}}$, 故

$$\det S_K^V \cdot \det S_K^I = \sum_{n=1}^{N(R_K, R_K)} (-1)^{n_u} g[L_n(R_K)].$$

引理 2-3. 设 $S_1^V = [US_0^V]$ 和 $S_1^I = [US_0^I]$ 分别是电压图和电流图对树 T_1 的基本割集矩阵, S_K^V 和 S_K^I 分别是 S_0^V 和 S_0^I 的子矩阵, 它们的行分别对应于电压图和电流图中的支路集 E_1 , 列分别对应于电压图和电流图中的支路集 E_K 。此外, 设 $E_{1K} = T_1 - E_1$ 。则:

(1) 当且仅当 S_K^V 和 S_K^I 都是非奇异时, 则 $T_K = E_K \cup E_{1K}$ 是电压图和电流图的一棵树。

(2) 树的数目减 1 等于所有阶数 (从一到最大阶) 的 S_0^V 和 S_0^I 的非奇异子矩阵的对数。

证明. (1) 设 S_1 是 S_V^v 中对应于电压图 G_V 的任一棵树 T_K 的支路集列集. 去掉 S_V^v 中对应于 T 和 T_K 的公共支路 E_{1K} 的行, 得到的矩阵 S_1^v 是图 G'_V (G'_V 是从 G_V 中短路支路集 E_{1K} 中每条支路的两个端点, 再去掉形成的自环而得出的图) 的割集矩阵, 故 $T - E_{1K}$ 是 S_1^v 的树. S_1^v 在 S_1 中的列 S_k^v 对应于支路 $E_K = T_K - E_{1K}$. 因 E_K 是 G'_V 的树, 故 S_k^v 是非奇异的.

设 S_k^v 是 S_C^v 的任一非奇异子矩阵, E_1 和 E_K 分别是对应于 S_k^v 的行和列的支路集. 设 $T - E_1 = E_{1K}$. 将 S_V^v 中对应于 E_{1K} 的支路的列集加对应于 E_K 的列集, 形成非奇异矩阵. 故 $E_K \cup E_{1K}$ 是 G_V 的树, 令 $T_K = E_K \cup E_{1K}$, 则 T_K 是 G_V 的树.

对于 S_k^v 可类似地加以证明, 不重复.

(2) 设 S_k^v 是 S_C^v 的非奇异子矩阵. 它的行和列分别对应于支路集 E_1 和 E_K . 前面已证明, $E_K = T_K - E_{1K}$, $E_1 = T_1 - E_{1K}$. 故 $T_K = E_K \cup E_{1K}$ 对于 S_C^v 的不同子矩阵是不相同的, 但 T_K 决不能和 T 相同. 因此, S_C^v 的非奇异子矩阵数总是小于或等于 G_V 中的树数减 1.

另一方面, 设 T_K 是 G_V 的任一棵不是 T 的树, E_{1K} 是 T 和 T_K 的公共的支路集. 由 (1), S_C^v 的子矩阵 S_k^v (它的行对应于 $T - E_{1K}$, 列对应于 $T_K - E_{1K}$) 是非奇异的. 若 T'_K 是 G_V 的另一棵不是 T_1 的树, 则 S_C^v 的子矩阵 (与 E_K 和 E_1 结合) 是非奇异的, 且不等于 S_k^v . 因此, G_V 的树数减 1 小于或等于 S_C^v 的非奇异子矩阵数.

对 S_C^v 有类似的结果. 故树的数目减 1 等于所有阶数的 S_C^v 和 S_C^v 的非奇异子矩阵的对数.

引理 2-4. 设 N 是下列基本节点对方程组的系数矩阵

$$NX = \begin{bmatrix} -Y_T & 0 & U & 0 \\ -B_T^v & -U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -U & -S_C^v \\ 0 & Y_C & 0 & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_T \\ V_C \\ I_T \\ I_C \end{bmatrix} = 0 \quad (2-5)$$

则 N 的行列式

$$\Delta N = Y(T) + \sum_{K=2}^{|T|} \varepsilon_K Y(T_K) \quad (2-6)$$

$$\varepsilon_K = \det S_K^V \cdot \det S_K^I \quad (2-7)$$

式中 $Y(T_K)$ 是树 T_K 中的支路导纳之积。 S_K^V 和 S_K^I 的定义同上。 $|T|$ 是图 G 的树数。

证明。 设 $\hat{N} = \text{diag}[S_i^I Y(S_i^V)^T, U, U, U]$ ，它的划分和 N 相适应。 则存在矩阵 P 和 Q ， $\det P = \det Q = 1$ ，使得 $N = P\hat{N}Q$ 。 因此，由 Binet-Cauchy 定理

$$\Delta N = Y(T) + \sum_{K=2}^{|T|} \varepsilon_K Y(T_K)$$

和 $\varepsilon_K = \det S_{M_K}^I \cdot \det S_{M_K}^V$ 。

这里 $S_{M_K}^I$ 和 $S_{M_K}^V$ 分别是对树 T_K 的 S_i^I 和 S_i^V 的主子矩阵。 因为 $S_{M_K}^I$ 和 $S_{M_K}^V$ 分别为

$$S_{M_K}^I = \left[\begin{array}{c|c} S_K^I & 0 \\ \hline S_H^I & U \end{array} \right] \text{ 和 } S_{M_K}^V = \left[\begin{array}{c|c} S_K^V & 0 \\ \hline S_H^V & U \end{array} \right] \quad (2-8)$$

故 $\det S_{M_K}^I \cdot \det S_{M_K}^V = \det S_K^I \cdot \det S_K^V$ 。

利用上面的引理，可得出无相消项的 ΔH 的拓扑公式。

定理 2-1。 设 $F(H)$ 是对应于式(2-4)的原始信号流图。 则

$$\Delta H = 1 + \sum_{K=1}^{|T|-1} \varepsilon_K f(R_K) \quad (2-9)$$

$$\varepsilon_K = \sum_{\alpha=1}^{N(R_K, R_K)} (-1)^{\alpha} g[L_{\alpha}(R_K)] \quad (2-10)$$

式中 $|T|$ 是图 G 的树数， $f(R_K)$ 是 R_K 中的支路阻抗和导纳之积。

证明。 设 $P = [Z_T, U, U, U]$ ，它的元素的划分和 N 相适应。 则 $H = PN$ 。 由引理 2-4，

$$\begin{aligned} \Delta H &= \det P \cdot \Delta N = \det Z_T \cdot Y(T) + \sum \varepsilon_K \cdot [\det Z_T \cdot Y(T_K)] \\ &= 1 + \sum_{K=1}^{|T|-1} \varepsilon_K \cdot [\det Z_T \cdot Y(T_K)] \end{aligned} \quad (2-11)$$

由引理 2-3, $T \cap T_K = E_{1K}$, 故

$$\det Z_T \cdot Y(T_K) = Z(E_1) \cdot Y(E_K) \quad (2-12)$$

式中 $Z(E_1)$ 是支路集 E_1 中的支路阻抗之积; $Y(E_K)$ 是支路集 E_K 中的支路导纳之积.

式(2-12)代入式(2-11), 有

$$\Delta H = 1 + \sum_{K=1}^{|\Gamma|-1} \epsilon_K \cdot Z(E_1) \cdot Y(E_K) \quad (2-13)$$

因为 $E_1 \cup E_K = R_K$, 故 $Z(E_1) \cdot Y(E_K) = f(R_K)$. 式(2-13)变成:

$$\Delta H = 1 + \sum_{K=1}^{|\Gamma|-1} \epsilon_K f(R_K)$$

$$\text{再由引理 2-2, } \det S_K^V \cdot \det S_K^I = \sum_{u=1}^{N(R_K, R_K)} (-1)^{\epsilon_u} \cdot g[L_u(R_K)],$$

故定理证毕.

定理 2-1 表明了行列式 ΔH 的拓扑计算方法. 首先, 列出所有完全子图 $F(R_K, R_K)$, 并决定每个子图的覆盖集 $N(R_K, R_K)$ 的数目. 如果 $N(R_K, R_K)$ 为奇数, 则 $f(R_K)$ 是非相消项, 需要进一步决定 $f(R_K)$ 的符号. 利用式(2-10), 找出 $F(R_K, R_K)$ 的所有不接触环集 $L_u(R_K)$, $u = 1, 2, \dots, N(R_K, R_K)$, 并求出 $L_u(R_K)$ 中所包括的 B 支路和 S 支路的支路传输之积 $g[L_u(R_K)]$, $u = 1, 2, \dots, N(R_K, R_K)$, 然后将 $N(R_K, R_K)$ 项相加作为 $f(R_K)$ 的符号. 类似地, 对所有 $F(R_K, R_K)$ 进行计算, 并将计算结果相加后代入式(2-9)即得出 ΔH .

与对闭环信号流图利用式(1-42)求图行列式的方法相比, 式(2-9), (2-10)的优点是它对 $F(H)$ 的子图搜索不接触环集, 而不是对 $F(H)$ 搜索不接触环集, 所以处理的图的规模小得多. 此外, $F(H)$ 的子图的不接触环集是由 $V(R_K)$ 的覆盖集, $I(R_K)$ 的覆盖集和 R_K 的支路集组成. 这些子图可分别处理, 相当简便. 再则, 对每个子图 $F(R_K, R_K)$, 如果 $N(R_K, R_K)$ 为偶, 则对应的 $f(R_K)$ 必为零, 根本不需要进一步计算. 但如果利用式(1-42),

则必须先列出 $N(R_K, R_K)$ 项, 其中 $\frac{N(R_K, R_K)}{2}$ 项均为 $f(R_K)$, 另外的 $\frac{N(R_K, R_K)}{2}$ 项均为 $-f(R_K)$. 在化简过程中才能相消.

仍以 $R_K = (Z_1, Z_2, Z_3, Y_4, Y_6, Y_7)$ 的子图 $F(R_K, R_K)$ 为例. 前面已得出, $N_V(R_K) = 3, N_I(R_K) = 1$, 故 $N(R_K, R_K) = N_V(R_K)N_I(R_K) = 3$. 因此, $f(R_K) = Z_1Z_2Z_3Y_4Y_6Y_7$ 是 ΔH 展开式中的非相消项. 由式(2-10)求该项的符号:

$$\epsilon_K = \sum_{n=1}^3 (-1)^{n \cdot g[L_n(R_K)]} \quad (2-14)$$

图 2-12 中的三个不接触环集 $L_1(R_K), L_2(R_K)$ 和 $L_3(R_K)$ 在前面已列出: $n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1$,

$$g[L_1(R_K)] = (1)(-1)(1)(-1)(1)(-1) = -1,$$

$$g[L_2(R_K)] = (1)(-1)(1)(-1)(1)(-1) = -1,$$

$$g[L_3(R_K)] = (1)(-1)(1)(-1)(1)(-1) = -1,$$

代入式(2-14)得出

$$\epsilon_K = (-1)^3(-1) + (-1)^2(-1) + (-1)^1(-1) = 1.$$

如果 $R_K = (Z_1, Z_2, Z_3, Y_4, Y_5, Y_6)$, 则 $N_V(R_K) = 3, N_I(R_K) = 4$, 故 $N(R_K, R_K) = 3 \times 4 = 12$. 因此, $f(R_K) = Z_1Z_2Z_3Y_4Y_5Y_6$ 是相消项, 不必计算它的符号. 但在用式(1-42)计算时, $f(R_K)$ 将在式中出现 12 项, 6 项以正号出现, 6 项以负号出现.

依此类推, 当所有可能的 R_K 搜索完毕后, 计算结果如表 2-1 所示.

由表 2-1 可看出, 图 2-11 的信号流图中共有 42 个完全子图, 其中只有 25 个子图有奇数个覆盖集. 结果, 应用式(2-9)得出 26 个非相消项, 而应用式(1-42)会得到 102 项. 显然, 式(2-9)要简便得多. 特别是对于大图更能充分显示它的优越性.

令 $\Delta H = 0$, 并将包括因子 $Y_6 = \frac{1}{T_w} Y_6$ 的项予以集项, 于是

表 2-1. $F(H)$ 的完全子图

K	$f(R_K)$	$N(R_K, R_K)$	θ_K	K	$f(R_K)$	$N(R_K, R_K)$	θ_K
1	$Z_1 Y_4$	1	+1	22	$Z_1 Z_3 Y_5 Y_6$	1	+1
2	$Z_1 Y_5$	1	+1	23	$Z_1 Z_3 Y_5 Y_7$	1	+1
3	$Z_2 Y_4$	1	+1	24	$Z_2 Z_3 Y_4 Y_8$	1	+1
4	$Z_2 Y_5$	1	+1	25	$Z_2 Z_3 Y_4 Y_9$	4	-
5	$Z_2 Y_6$	1	+1	26	$Z_2 Z_3 Y_4 Y_{10}$	4	-
6	$Z_2 Y_7$	1	+1	27	$Z_2 Z_3 Y_5 Y_6$	1	+1
7	$Z_2 Y_8$	1	-1	28	$Z_2 Z_3 Y_5 Y_7$	1	+1
8	$Z_3 Y_4$	1	+1	29	$Z_2 Z_3 Y_4 Y_7$	1	+1
9	$Z_3 Y_6$	1	+1	30	$Z_2 Z_3 Y_4 Y_7$	1	+1
10	$Z_3 Y_8$	1	-1	31	$Z_2 Z_3 Y_4 Y_8$	4	-
11	$Z_1 Z_2 Y_4 Y_5$	4	-	32	$Z_2 Z_3 Y_5 Y_6$	1	+1
12	$Z_1 Z_2 Y_4 Y_6$	1	+1	33	$Z_1 Z_2 Z_3 Y_4 Y_5 Y_6$	9	+1
13	$Z_1 Z_2 Y_4 Y_7$	2	-	34	$Z_1 Z_2 Z_3 Y_4 Y_5 Y_7$	2	-
14	$Z_1 Z_2 Y_4 Y_8$	2	-	35	$Z_1 Z_2 Z_3 Y_4 Y_5 Y_8$	12	-
15	$Z_1 Z_2 Y_5 Y_6$	1	+1	36	$Z_1 Z_2 Z_3 Y_4 Y_5 Y_8$	8	-
16	$Z_1 Z_2 Y_5 Y_7$	2	-	37	$Z_1 Z_2 Z_3 Y_4 Y_5 Y_9$	6	-
17	$Z_1 Z_2 Y_5 Y_8$	2	-	38	$Z_1 Z_2 Z_3 Y_5 Y_6 Y_7$	2	-
18	$Z_1 Z_2 Y_5 Y_9$	1	+1	39	$Z_1 Z_2 Z_3 Y_5 Y_6 Y_8$	6	-
19	$Z_1 Z_3 Y_4 Y_5$	1	+1	40	$Z_1 Z_2 Z_3 Y_4 Y_6 Y_7$	3	+1
20	$Z_1 Z_3 Y_4 Y_6$	1	+1	41	$Z_1 Z_2 Z_3 Y_5 Y_7 Y_8$	2	-
21	$Z_1 Z_3 Y_4 Y_8$	2	-	42	$Z_1 Z_2 Z_3 Y_6 Y_7 Y_8$	2	-

$$\begin{aligned}
 & Y_8(Z_2 + Z_3 - Z_1 Z_2 Y_7 - Z_1 Z_3 Y_5 - Z_2 Z_3 Y_5 - Z_2 Z_3 Y_7) \\
 &= 1 + Z_1 Y_4 + Z_1 Y_5 + Z_2 Y_4 + Z_2 Y_5 + Z_2 Y_6 + Z_2 Y_7 \\
 &+ Z_3 Y_4 + Z_3 Y_6 + Z_1 Z_2 Y_4 Y_5 + Z_1 Z_2 Y_5 Y_6 + Z_1 Z_3 Y_4 Y_5 \\
 &+ Z_1 Z_3 Y_4 Y_6 + Z_1 Z_3 Y_5 Y_6 + Z_2 Z_3 Y_4 Y_7 + Z_2 Z_3 Y_5 Y_6 \\
 &+ Z_2 Z_3 Y_4 Y_7 + Z_2 Z_3 Y_6 Y_7 + Z_1 Z_2 Z_3 Y_4 Y_5 Y_6 \\
 &+ Z_1 Z_2 Z_3 Y_4 Y_6 Y_7
 \end{aligned} \tag{2-15}$$

最后, 得出电流增益 T_{6c} 的符号网络函数:

$$\begin{aligned}
 T_{6c} = & Y_8(Z_2 + Z_3 - Z_1 Z_2 Y_7 - Z_1 Z_3 Y_5 - Z_2 Z_3 Y_5 - Z_2 Z_3 Y_7) / \\
 & (1 + Z_1 Y_4 + Z_1 Y_5 + Z_2 Y_4 + Z_2 Y_5 + Z_2 Y_6 + Z_2 Y_7 \\
 & + Z_3 Y_4 + Z_3 Y_6 + Z_1 Z_2 Y_4 Y_5 + Z_1 Z_2 Y_5 Y_6 + Z_1 Z_3 Y_4 Y_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Z_1 Z_3 Y_4 Y_6 + Z_1 Z_3 Y_5 Y_6 + Z_2 Z_3 Y_4 Y_5 + Z_2 Z_3 Y_5 Y_6 \\
& + Z_2 Z_3 Y_4 Y_7 + Z_2 Z_3 Y_6 Y_7 + Z_1 Z_2 Z_3 Y_4 Y_5 Y_6 \\
& + Z_1 Z_2 Z_3 Y_4 Y_6 Y_7) \quad (2-16)
\end{aligned}$$

以上讨论了从闭环信号流图求图行列式 ΔH 的拓扑方法. 它首先要列出所有的完全子图 $F(R_K, R_K)$, 然后决定相应的覆盖集的数目 $N(R_K, R_K)$. 如果 $N(R_K, R_K)$ 为奇数, 还需要进一步找出 $F(R_K, R_K)$ 的所有不接触环集 $L_u(R_K), u = 1, 2, \dots, N(R_K, R_K)$. 这个过程也是相当麻烦的. 下面, 在式(2-13)的基础上提出另一种计算方法. 由式(2-13):

$$\Delta H = 1 + \sum_{K=1}^{|\mathcal{T}|-1} (\det S_K^V \cdot \det S_K^I) \cdot Z(E_1) \cdot Y(E_K) \quad (2-17)$$

式中 S_K^V 和 S_K^I 的行和列分别对应于支路集 E_1 和 E_K . 由引理 2-3, 若 S_K^V 和 S_K^I 都是非奇异的, 则必有一棵树 $T_K = E_K \cup E_{1K}$ 存在, 使 $E_1 \cup E_{1K} = T$. 故每一不为零的 $\det S_K^V \cdot \det S_K^I$, 对应于一棵树. $\det S_K^V$ 和 $\det S_K^I$ 中的项数分别是 $N_V(R_K)$ 和 $N_I(R_K)$. 因为 S_K^V 和 S_K^I 都是么模矩阵, 故 $\det S_K^V$ 或 $\det S_K^I$ 中如有偶数项, 则 S_K^V 或 S_K^I 一定是奇异的. 这等效于用 $N(R_K, R_K)$ 的奇偶来判断是否为相消项. 因此, 我们可简单地搜索 S_K^V 和 S_K^I 的各阶 (从 1 阶到 $\min(\nu-1, e-\nu+1)$) 对应的子矩阵 S_K^V 和 S_K^I , 并将它们的行列式相乘. 如 $\det S_K^V$ 和 $\det S_K^I$ 都不为零, 则取 S_K^V 和 S_K^I 的行所对应的支路集 E_1 中阻抗之积 $Z(E_1)$ 与它们的列所对应的支路集 E_K 中导纳之积 $Y(E_K)$ 相乘, 其符号为 $\det S_K^V \cdot \det S_K^I$. 这构成了 ΔH 中的一项. 当 S_K^V 和 S_K^I 的所有最高阶子矩阵搜索完毕后, 将所有不为零的项代入式(2-17), 即求出 ΔH . 这样, 就不需要找出每个 $F(R_K, R_K)$ 的所有不接触环集, 再由不接触环集之和决定每项的符号.

例如, 对图 2-9 的实例, 由电压图 G_V 和电流图 G_I (图 2-10) 可写出 $S_i^V = [US_c^V]$ 和 $S_i^I = [US_c^I]$ (对 $T = 1, 2, 3$) 的 S_c^V 和 S_c^I 如下:

$$S_C^V = \begin{matrix} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \quad (2-18)$$

$$S_C^I = \begin{matrix} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix}$$

现求 ΔH 中的一项 $Z_1 Z_2 Z_3 Y_4 Y_5 Y_6$ 。取对应于行的支路集 (1, 2, 3) 和对应于列的支路集 (4, 5, 6) 构成子矩阵

$$S_K^V = \begin{matrix} & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \text{ 和 } S_K^I = \begin{matrix} & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2-19)$$

得出 $\det S_K^V = \det S_K^I = 1$ ，故 $Z_1 Z_2 Z_3 Y_4 Y_5 Y_6$ 为 ΔH 中的一项。这与表 2-1 中的结果一致。

类似地，求 $Z_1 Z_2 Z_3 Y_4 Y_5 Y_8$ ：

$$S_K^V = \begin{matrix} & 4 & 5 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad S_K^I = \begin{matrix} & 4 & 5 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2-20)$$

得出 $\det S_K^V \cdot \det S_K^I = 1 \times 0 = 0$ ，故 $Z_1 Z_2 Z_3 Y_4 Y_5 Y_8$ 是相消项。 $\det S_K^V$ 包括 2 项， $\det S_K^I$ 包括 4 项， $\det S_K^V \cdot \det S_K^I$ 共包括 8 项。表 2-1 中有同样结果。

在计算 $\det S_K^V$ 和 $\det S_K^I$ 时，如其中之一为零，则另一个行列式不必计算。此外，利用么模矩阵和稀疏矩阵(对于处理大图，往往满足稀疏性)的性质，可以简化行列式的计算。

2-4 状态方程的建立

状态变量方法在近代系统理论中起着重要的作用，利用它可

得到系统的动态性能。根据 Laplace 变换方法，状态变量法以线性代数方程组的形式表示网络方程。要求得描述系统动态性能的时域解，必须进行 Laplace 反变换，这在计算上通常是困难的。作为另一种方案，我们可以在时域中构成以一阶微分方程组表示的网络方程。它的优点是一阶微分方程组的求解在数学上是方便的；而且，这种表示方式很容易推广到时变系统和非线性系统。所以，它得到了广泛的应用。

本节仅讨论状态变量方法中的一阶微分方程组(即状态方程)的建立问题。要建立状态方程，首先要选择状态变量。如果使所有的支路电流和电压的瞬时值作为网络的状态，则知道所有这些电流和电压的瞬时值就决定了瞬时状态。但是，要决定瞬时状态，并不需要知道所有电流和电压的瞬时值，因为它们并非都是独立的。例如，电阻上电压的瞬时值可从通过它的电流的瞬值得出。问题是要取多少支路电压和电流，使得它们的瞬时值完全足以决定网络的瞬时状态。在网络中满足上述要求的最少支路变量组合称为完全的状态变量组。通常，完全的状态变量组并不是唯一的。在很多情况下，取电容电压和电感电流作为网络的完全状态变量组。

现在，阐述状态方程建立的拓扑方法，即利用信号流图直接从网络写出状态方程。先假定：网络中没有只由电感和电流源形成的割集和只由电容和电压源形成的回路。于是，可得出由给定的 RLC 有源网络写出状态方程的步骤如下：

(1) 从给定的网络中选一棵树，使得所有电容和电压源包括在树中，而所有电感和电流源包括在链中，电阻可以任意地包括在树或链中。在选定了树以后，除了应用 2-1 节中的步骤(1)和(2)(即用树支路电压表示链支路电压，用链支路电流表示树支路电流)外，对于电阻支路，仍可应用 2-1 节中(3)所述的表示方式；对于电容支路，用它的电流表示它的电压的导数，即 $\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} I_C$ ；

对于电感支路，用它的电压表示它的电流的导数，即 $(dI_L/dt) = (1/L)V_L$ 。因此，可得到下列矩阵方程组：

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (V_C) \\ \frac{d}{dt} (I_L) \\ I_C \\ V_L \\ I_{R(t)} \\ V_{R(t)} \\ V_{R(t)} \\ I_{R(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{12} \\ B_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{12} & 0 \\ 0 & S_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{22} \\ B_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{(t)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \\ I_C \\ V_L \\ -I_{R(t)} \\ V_{R(t)} \\ V_{R(t)} \\ I_{R(t)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_{13} \\ 0 \\ B_{23} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_{13} \\ 0 \\ S_{23} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I_s \quad (2-21)$$

式中 V 和 I 是电压和电流的列矩阵。 V_s 和 I_s 分别为电压源和电流源。 $V_{R(t)}$ 和 $I_{R(t)}$ 分别为树支路电阻上的电压和电流。 $V_{R(t)}$ 和 $I_{R(t)}$ 分别为链支路电阻上的电压和电流。

矩阵方程组(2-21)的对应信号流图如图 2-13 所示。

(2) 每个元件的电压和电流(电压源的电流和电流源的电压除外),以及电感电流的导数和电容电压的导数分别用节点表示。

(3) 对应于树(链)支路电阻的电流(压)节点用一条支路接到该电阻的电压(流)节点,方向向着电压(流)节点。支路传输是 R (G)。

(4) 用链电流表示树电流,得到了矩阵 S 的元素。用树电压表示链电压,得到了矩阵 B 的元素。

(5) 树电容电流(链电感电压)的每个节点,用一条支路[向着电压(流)导数节点]接到同一元件的电压(流)导数节点,其支路

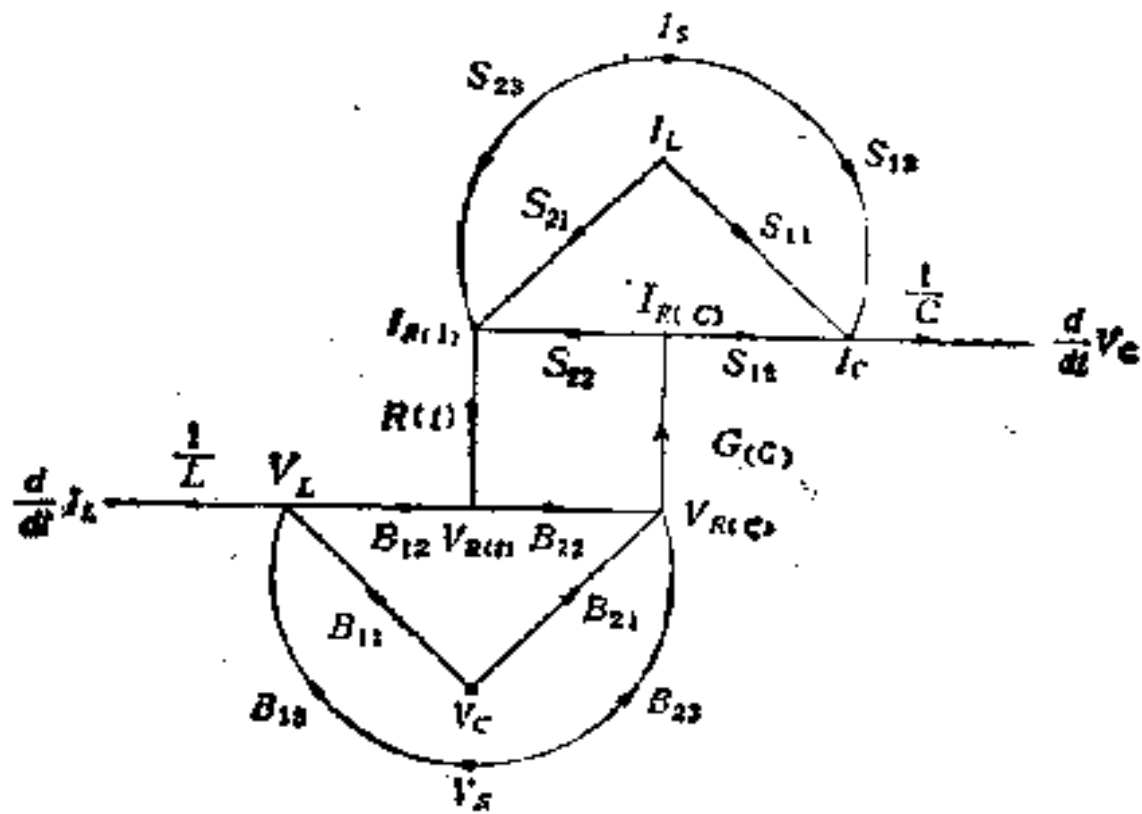


图 2-13

传输等于 $\frac{1}{C} \left(\frac{1}{L} \right)$.

如网络中有被控源,需加入下列步骤:

(6) 首先,将被控源看作独立源,然后,用一条向着独立源的支路接到对应于控制源的节点,支路传输等于控制系数.

(7) 求状态方程

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2-22)$$

的系数矩阵 A 和 B .

设 G 表示按上述步骤得出的信号流图, S_A, S'_A, S_B 分别对应于状态变量 (链电感电流和树电容电压), 状态变量的导数和独立变量的节点. 在图 G 中, 因为对应于状态变量和独立变量的节点是源节点, 对应于状态变量的导数的节点是汇节点, 从节点 $j \in S_A$ 到节点 $i \in S'_A$ 的传输是式(2-22)中矩阵 A 的第 i 行、第 j 列的元素 a_{ij} . 应用 Mason 增益公式(1-50), 可求得

$$a_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_K P_K \Delta_K, \quad i \in S'_A, j \in S_A \quad (2-23)$$

式(2-22)中矩阵 B 的第 i 行、第 j 列的元素 b_{ij} 可以类似地决定:

$$b_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_K P_K \Delta_K, \quad i \in S'_A, j \in S_B \quad (2-24)$$

式(2-23)和(2-24)中的 P_K 是从节点 j 到节点 i 的第 K 条路的路传输, Δ_K 是不接触该路径的图行列式。

在给定的 RLC 网络中, 如果有只由电容和电压源组成的回路和只由电感和电流源组成的割集, 则所选取的树应包括所有的电压源和尽可能多的电容, 而在链中应包括所有的电流源和尽可能多的电感。在作出图 G 以得到下列状态方程时还必须考虑步骤 8。

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + Bu(t) + C \frac{d}{dt} u(t) \quad (2-25)$$

(8) 对于只由电容和电压源组成的回路 (只由电感和电流源组成的割集):

链(树)中的电容(电感)的电压(电流)导数和电流(电压), 以及树(链)中的源电压(电流)导数用节点表示。链(树)中的电容(电感)电压(电流)导数节点用一条支路接到(向着)同一电容的电流(电压)节点。支路传输等于 $C(L)$ 。树(链)中的电源和电容(电感)的电压(电流)导数节点用一条支路接到链电容(树电感)的电压(电流)导数节点, 方向向着后者。根据回路(割集)中的电压(电流)参考方向, 支路传输可取 $+1$ 或 -1 。

现用两个实例说明建立状态方程的步骤。

例 2-3. 求图 2-14 所示网络的状态方程。

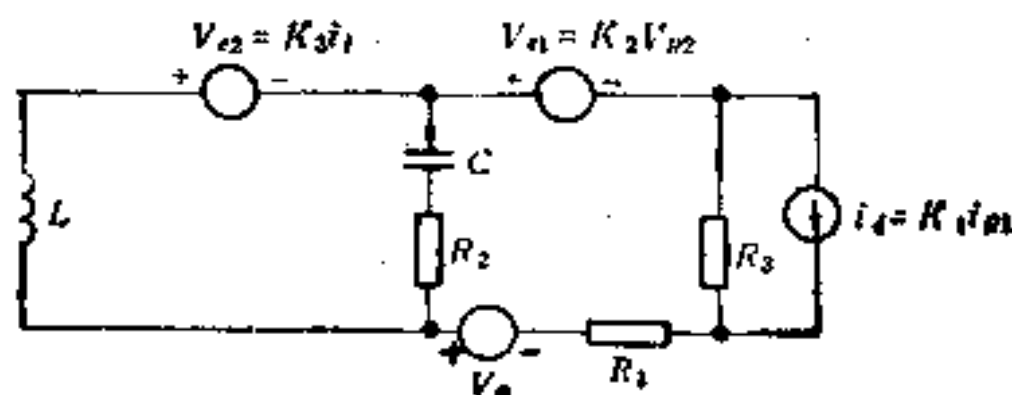


图 2-14

网络中包括一个独立的电压源和三个被控源。先选择一棵树

包括独立的电压源 V_s ，被控电压源 V_{e1}, V_{e2} ，以及电容 C ，电阻 R_2, R_3 ，如图中粗线所示。按上述步骤(2)~(5)，可得到信号流图 G (图 2-15)。图 2-15 中，虚线所示为被控源。现在需求出式(2-22)中的矩阵 A 和 B 。这里 $x(t) = [x_1, x_2]^T = [I_L(t), V_C(t)]^T$ 。 a_{11} 是图 2-15 中从源点 I_L 到汇点 $\frac{dI_L}{dt}$ 的传输。由图 2-15 可得出，图行列式

$$\Delta = 1 + \frac{R_2}{R_1}(1 - K_2) + \frac{R_3}{R_1}(1 - K_1) \quad (2-26)$$

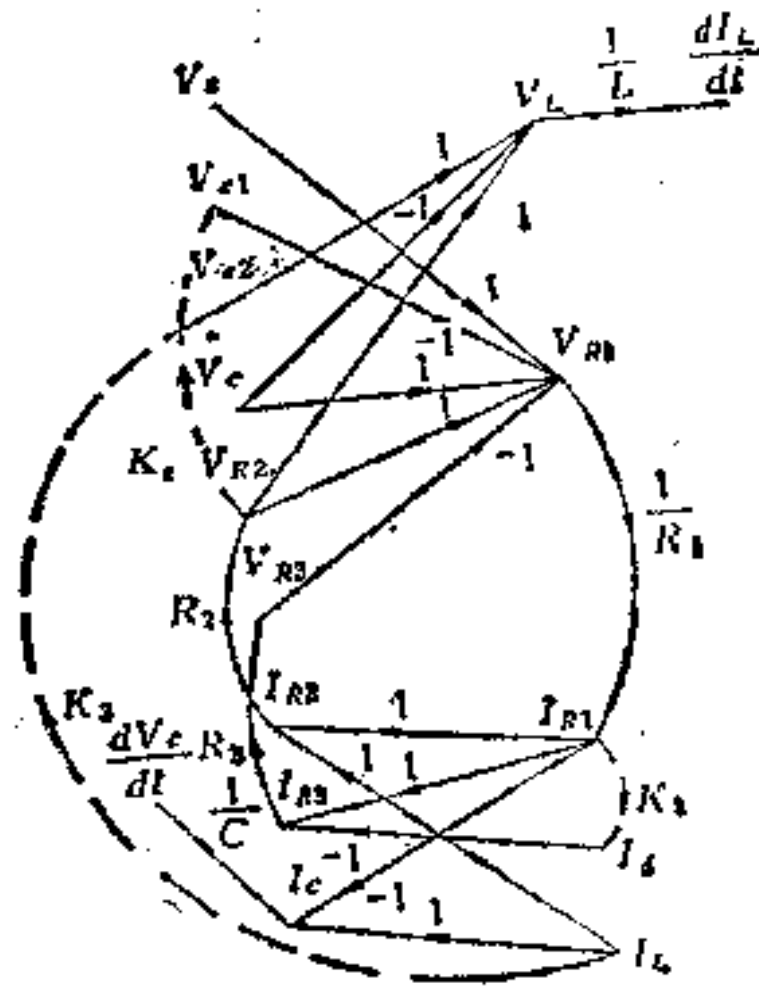


图 2-15

从 I_L 到 $\frac{dI_C}{dt}$ 有两条路，其路传输为

$$-\frac{K_3}{L} \cdot \Delta, \quad -\frac{R_2}{L} \left[1 + \frac{R_3}{R_1}(1 - K_1) \right] \quad (2-27)$$

所以，

$$a_{11} = -\frac{K_3}{L} - \frac{R_2}{\Delta L} \left[1 + \frac{R_3}{R_1}(1 - K_1) \right] \quad (2-28)$$

类似地，可求得从源点 V_C 到汇点 $\frac{dI_L}{dt}$ 的传输

$$a_{12} = -\frac{1}{L} + \frac{R_2}{\Delta R_1 L} \quad (2-29)$$

从源点 I_L 到汇点 $\frac{dV_C}{dt}$ 的传输

$$a_{21} = \frac{1}{C} - \frac{R_2}{\Delta R_1 C} (1 - K_2) \quad (2-30)$$

从源点 V_C 到汇点 $\frac{dV_C}{dt}$ 的传输

$$a_{22} = -\frac{1}{\Delta R_1 C} \quad (2-31)$$

从源点 V_s 到汇点 $\frac{d}{dt} I_L$ 的传输

$$b_{11} = \frac{R_2}{\Delta R_1 L} \quad (2-32)$$

从源点 V_s 到汇点 $\frac{d}{dt} V_C$ 的传输

$$b_{21} = -\frac{1}{\Delta R_1 C} \quad (2-33)$$

将式(2-28)到(2-33)代入式(2-22),得到网络的状态方程

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} I_L \\ \frac{d}{dt} V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K_3}{L} - \frac{R_2}{\Delta L} \left[1 + \frac{R_3}{R_1} (1 - K_1) \right] - \frac{1}{L} + \frac{R_2}{\Delta R_1 L} \\ \frac{1}{C} - \frac{R_2}{\Delta R_1 C} (1 - K_2) & -\frac{1}{\Delta R_1 C} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{\Delta R_1 L} \\ 1 \\ -\frac{1}{\Delta R_1 C} \end{bmatrix} V_s \quad (2-34)$$

例 2-4. 求图 2-16 所示网络的状态方程。

这个网络中包括一个独立的电压源 V_s 和三个被控源。网络中电压源 V_s 和电容 C_3, C_4 形成了回路,故需考虑步骤(8)。这时,状态方程具有式(2-25)的形式。首先,选取由电压源 V_s ,被控电压源 V_{d1} , 电容 C_4 和电阻 R_1 组成的树(如粗线所示)。由上

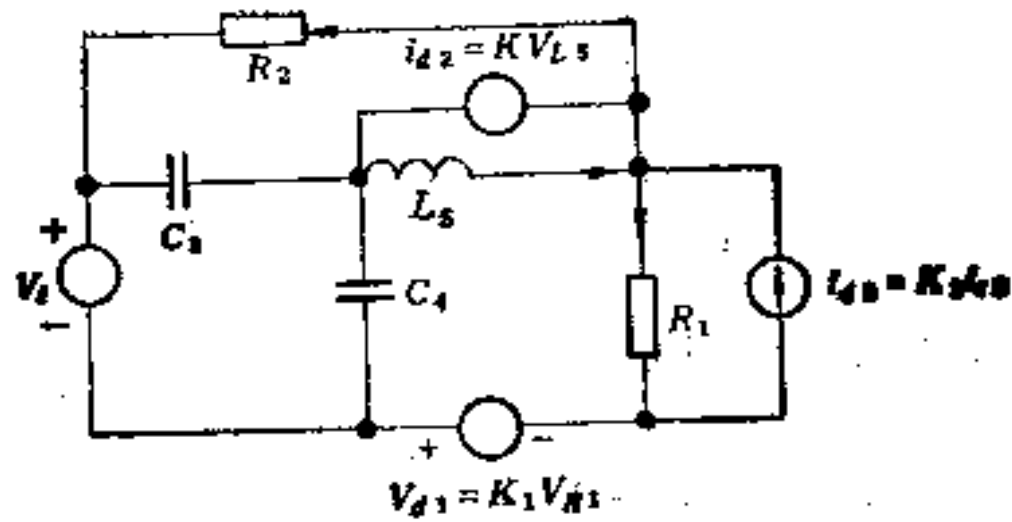


图 2-16

述步骤(2)~(8),可得出网络的信号流图 G , 如图 2-17 所示。状态变量 $x(t) = [x_1 x_2]^T = [V_{C4}(t) I_{L5}(t)]^T$ 。

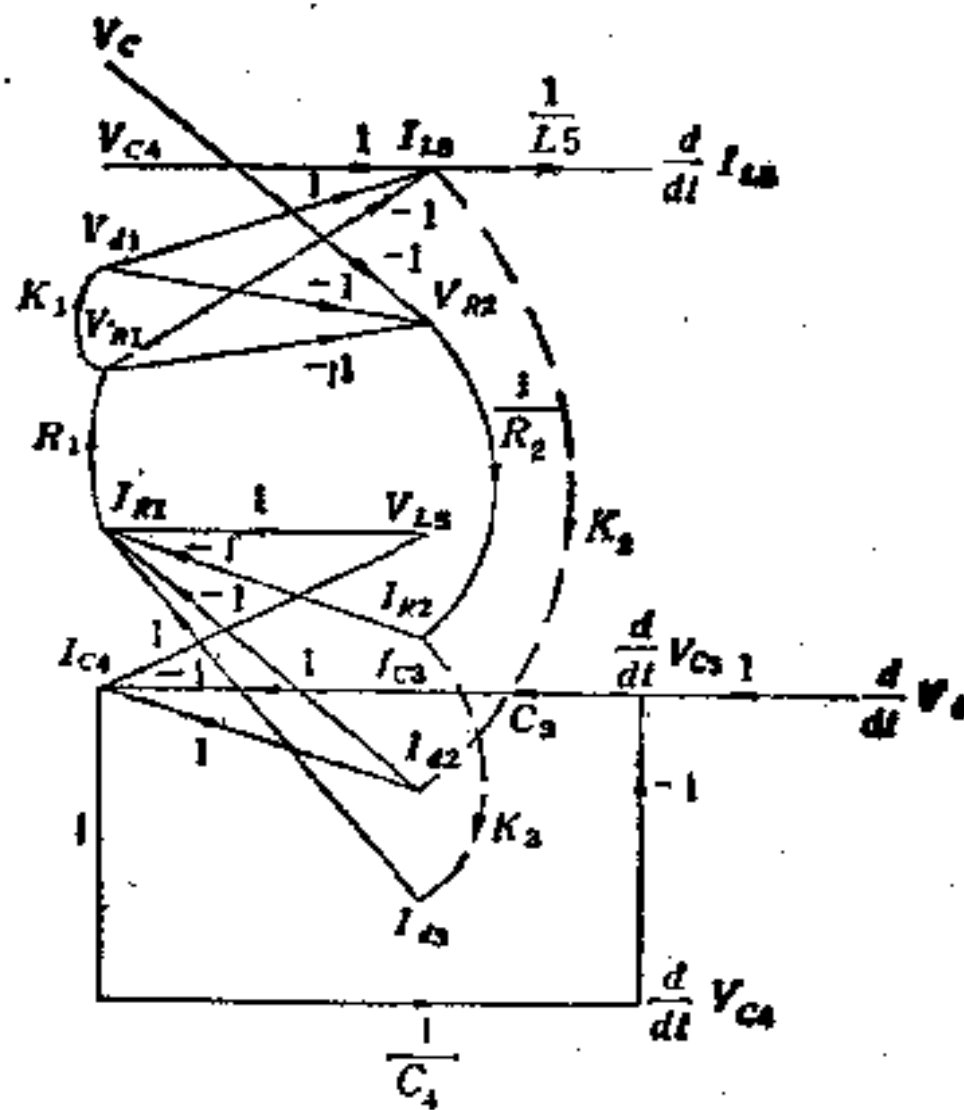


图 2-17

由图 2-17, 可求得图行列式

$$\Delta = \left(1 + \frac{C_3}{C_4}\right) \left[1 + R_1 K_2 (K_1 - 1) + \frac{R_1}{R_2} (1 - K_1)\right] + K_3 R_1 (K_1 - 1) K_2 \frac{C_3}{C_4} \quad (2-35)$$

从源点 V_{c_1} 到汇点 $\frac{d}{dt} V_{c_1}$ 的传输

$$a_{11} = \frac{1}{\Delta C_4} \frac{K_2}{C_4} \left[1 + \frac{R_1}{R_2} (1 - K_1) \right] \quad (2-36)$$

从源点 I_L 到汇点 $\frac{d}{dt} V_{c_1}$ 的传输

$$a_{12} = \frac{-1}{\Delta C_4} \left[1 + K_2 R_1 (K_1 - 1) + \frac{R_1}{R_2} (1 - K_1) - R_1 (K_1 - 1) K_2 \right] \quad (2-37)$$

从源点 V_{c_1} 到汇点 $\frac{d}{dt} I_L$ 的传输

$$a_{21} = \frac{1}{\Delta L_3} \left(1 + \frac{C_3}{C_4} \right) \left[1 + \frac{R_1}{R_2} (1 - K_1) \right] \quad (2-38)$$

从源点 I_L 到汇点 $\frac{d}{dt} I_L$ 的传输

$$a_{22} = \frac{1}{\Delta L_3} \left[\frac{1}{C_4} C_3 K_3 R_1 (K_1 - 1) - R_1 (K_1 - 1) \left(1 + \frac{C_3}{C_4} \right) \right] \quad (2-39)$$

从源点 V_i 到汇点 $\frac{d}{dt} V_{c_1}$ 的传输

$$b_{11} = \frac{1}{\Delta R_2 C_4} R_1 (K_1 - 1) K_2 \quad (2-40)$$

从源点 V_i 到汇点 $\frac{d}{dt} I_L$ 的传输

$$b_{21} = \frac{1}{\Delta L_3 R_2} R_1 (K_1 - 1) \left(1 + \frac{C_3}{C_4} \right) \quad (2-41)$$

从源点 $\frac{d}{dt} V_i$ 到汇点 $\frac{d}{dt} V_{c_1}$ 的传输

$$c_{11} = \frac{1}{\Delta C_4} \frac{C_3}{C_4} \left[(1 + R_1 K_2 (K_1 - 1) + \frac{R_1}{R_2} (1 - K_1) + R_1 K_3 K_2 (K_1 - 1)) \right] \quad (2-42)$$

从源点 $\frac{d}{dt} V_i$ 到汇点 $\frac{d}{dt} I_L$ 的传输

$$c_{21} = \frac{1}{\Delta L_3} C_3 R_1 K_3 (K_1 - 1) \quad (2-43)$$

将式(2-35)~(2-43)代入式(2-25)即为所求的状态方程。这里 $u(t) = V_i$ 。

参 考 文 献

- [1] Acar, C., Formulation of the State Equations by Signal Flow Graphs, *Electronics Letters*, Vol. 6, No. 3, pp. 82—84, 1970.
- [2] Chua, L. O., and Lin, P. M., Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques, Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1975.
- [3] Lin, P. M., A Survey of Applications of Symbolic Network Functions, *IEEE Trans., on Circuit Theory*, Vol. CT-20, pp. 732—737, Nov. 1973.
- [4] Lin, P. M., and Alderson, G. E., Computer Generation of Symbolic Network Function—A New Theory and Implementation, *IEEE Trans., on Circuit Theory*, Vol. CT-20, pp. 48—56, Jan. 1973.
- [5] Mason, S. J., and Zimmerman, H. J., *Electronic Circuits, Signals, and Systems*, New York: Wiley, 1960.
- [6] Mayeda, W., *Graph Theory*, New York: Wiley-Interscience, 1972.
- [7] Mielke, R. R., A New Signal Flowgraph Formulation of Symbolic Network Functions, *IEEE Trans., on Circuits and Systems*, Vol. CAS-25, No. 6, pp. 334—339, 1978.
- [8] Mielke, R. R., New Signal Flow Graph Topological Formula for Linear Active Networks, *J. Franklin Institute*, Vol. 305, No. 3, pp. 143—158, 1978.
- [9] Mielke, R. R., and Brown, D. P., Generation of Noncancelling Terms in Flow Graph Topological Formulas, *Proc. of 1975 Midwest Symposium on Circuits and Systems*, pp. 490—494.

第三章 有源网络综合

随着近代集成电路技术的不断发展,电子设备的小型化是一个很重要的课题。特别是用带有运算放大器的有源 RC 电路来实现,是目前引起广泛注意的问题。

由于信号流图是数学模型和实际的物理系统间的媒介,所以它在有源网络综合中起着很重要的作用。具体地说,电路的传输函数与信号流图间有着——对应关系,而后者与实际电路间也有着——对应关系。正是利用了这些对应性质来实现有源网络综合的。

本章首先对于用经典方法设计的 LC 电路,讨论了求得其对应的有源 RC 电路的方法(包括电路参数的计算)。其次,讨论了给定的传输函数的有源电路实现问题。分两种途径来考虑,一种途径是根据给定的传输函数选取某种特定的电路,然后用信号流图方法写出电路的传输函数,并将其系数与给定的传输函数的系数相比较,在考虑物理实现条件后求出电路参数;另一种途径是用信号流图表示给定的传输函数,再用对应的有源电路实现信号流图中的支路。

用信号流图方法进行有源网络综合是一种灵活而简便的方法。但是,如何更有效、可靠、高性能、节省地实现这一目标,仍然是一个值得进一步研究的问题。

3-1 LC 电路的信号流图表示

用有源电路实现 LC 电路可以使电路集成化,减轻电子设备的重量,这是一项很有实用价值的工作。要用相应的有源电路代替 LC 电路,粗略地说,有两个步骤:第一步是用信号流图将 LC

电路表示成便于用有源电路(阻容的)实现的形式;第二步是根据 LC 电路对应的信号流图构成有源电路。下面,首先讨论 LC 元件的信号流图。

串联电感(图 3-1)。电感 L 上的电压-电流关系可由下列方程描述:

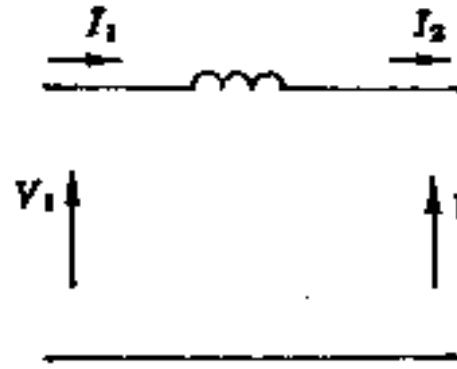


图 3-1

$$I_1 = I_2 = \frac{V_1 - V_2}{sL} \quad (3-1)$$

式中 $s = j\omega$ 。

如果将电压 V_1 和 V_2 作为自变量,电流 I_1 和 I_2 作为因变量,则式(3-1)可用图 3-2(a) 所示的信号流图表示。以后,如无特殊说明,传输为 1 的支路在图中均省去。图 3-2 中只有一条对应于电感 L 的积分支路。这种信号流图是模拟串联电感的唯一的信号流图。但在必要时,所有电流和电压的极性可以改变。例如,可将式(3-1)写成

$$-I_1 = -I_2 = V_2 - V_1/sL \quad (3-2)$$

与式(3-2)对应的信号流图如图 3-2(b) 所示。

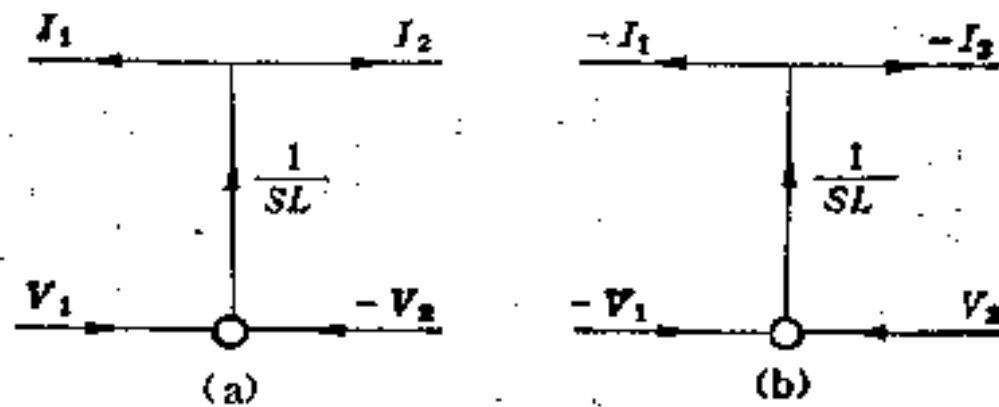


图 3-2

为了方便后面的讨论,引进相加节点的概念。在图 3-2(a),

(b) 中, 图下端用空心圆表示相加节点, 积分器的输入信号在相加节点相加。信号流图的左端口称为端口 1, 右端口称为端口 2, 上述信号流图和其他信号流图相连时, 其左侧的信号流图的端口 2 必须是电流为源点, 电压为汇点, 右侧的信号流图的端口 1 也必须是电流为源点, 电压为汇点¹⁾。

并联电容 (图 3-3), 电容 C 上的电压-电流关系可由下列方程描述:

$$V_1 - V_2 = (I_1 - I_2) / sC \quad (3-3)$$

将电流 I_1 和 I_2 作为自变量, 电压 V_1 和 V_2 作为因变量, 可得到相应的信号流图如图 3-4 所示。

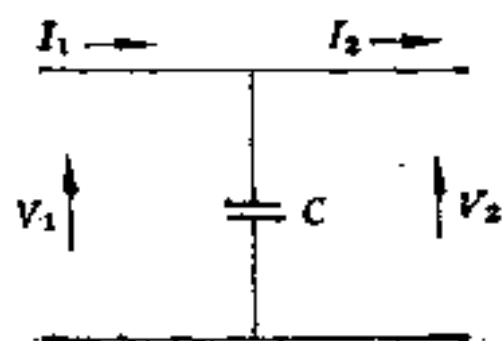


图 3-3

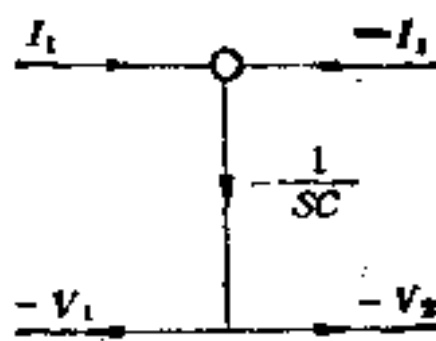


图 3-4

在上述串联电感的信号流图中, 积分支路的传输取正号。这里, 并联电容的积分支路取负号。下面将看出, 这种符号规定可减少有源 RC 电路模拟时所需的运算放大器的数量。此外, 按这样的符号规定, 并构成模拟 LC 电路负荷的负反馈环, 使得开环传输系数总是负的, 可以增加有源电路的稳定度。换句话说, 利用这

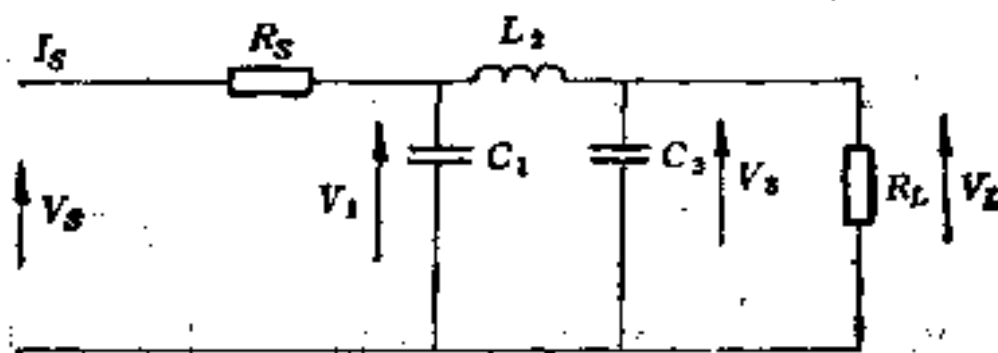


图 3-5

1) 关于信号流图的连接规则, 可参阅第一章文献[26]中第二章。

—符号规定,就没有必要检查有源电路中每个负反馈环的稳定度。

例 3-1. 作出下列由串联电感和并联电容构成的三阶 LC 低通滤波器(图 3-5)的信号流图。

先讨论信号源内阻 R_s 和负荷电阻 R_L 的信号流图。 在信号源侧

$$I_s = (V_s - V_1)/R_s \quad (3-4)$$

在负荷侧

$$I_L = V_L/R_L \quad (3-5)$$

与式(3-4)和式(3-5)对应的信号流图分别如图 3-6 和图 3-7 所示。

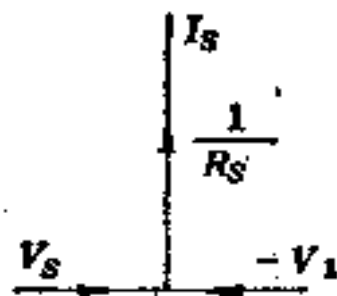


图 3-6

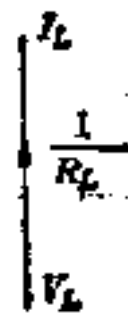


图 3-7

下面,将 R, L, C 各个元件的对应信号流图按它们在电路中的相对位置列出(图 3-8)。

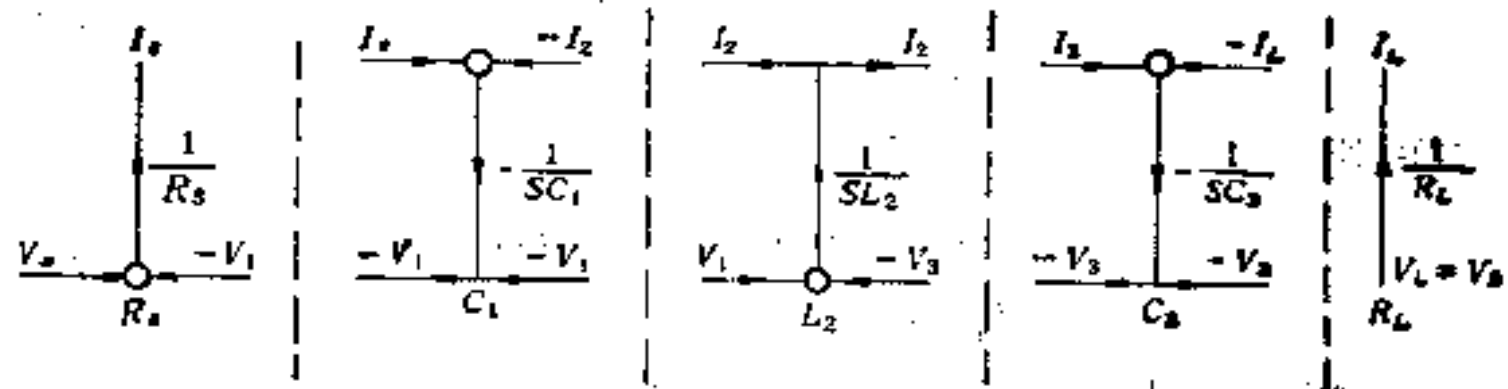


图 3-8

现在,要检查图 3-8 中与各个元件对应的信号流图是否可以连接。 C_1 和 L_2 所对应的两个信号流图是不能直接连接的,因为 C_1 的图的源点为 $-I_2$,而 L_2 的图的汇点为 I_2 。因此,需要改变 L_2 的图的所有电流和电压的符号(即 $I_2, I_3, V_2, -V_3$ 分别变为 $-I_2, -I_3, -V_2, V_3$)。改变后, C_1 的图和 L_2 的图可以连

接,但 L_2 和 C_3 的图则不能连接. 于是,再改变 C_3 的图的所有电流和电压的符号. 这时, L_2 , C_3 和 R_L 的图可以连接,如图 3-9 所示.

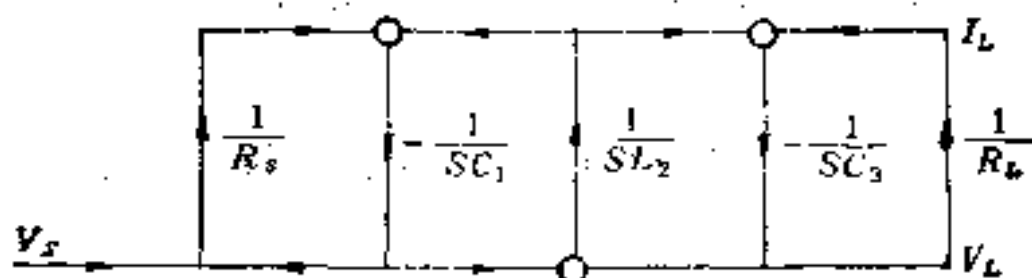


图 3-9

图 3-9 化简后得到图 3-10.

并联电感 (图 3-11). 和上面讨论的串联电感和并联电容的信号流图不一样,它有两种可能的信号流图表示. 对应于方程组

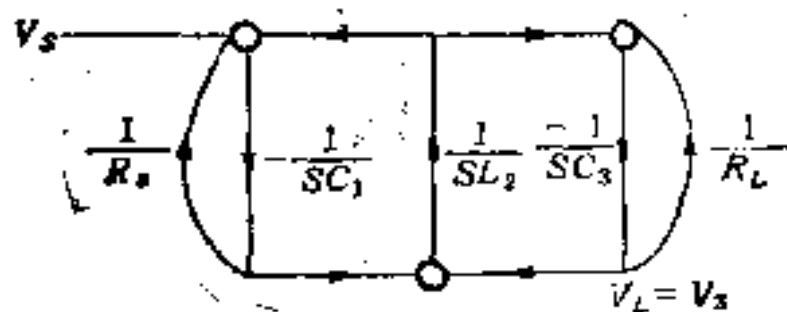


图 3-10

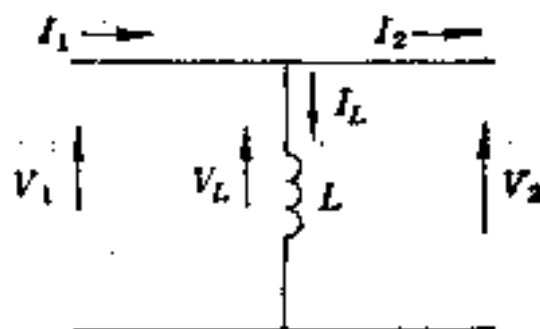


图 3-11

$$I_1 = V_1/sL + I_2 \quad (3-6)$$

$$V_2 = V_1$$

和方程组

$$-I_2 = -I_1 + V_1/sL \quad (3-7)$$

$$V_1 = V_2$$

的信号流图分别如图 3-12 和图 3-13 所示.

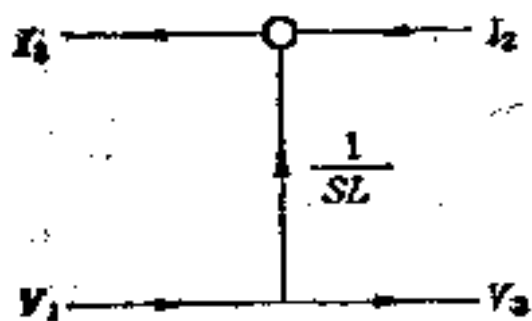


图 3-12

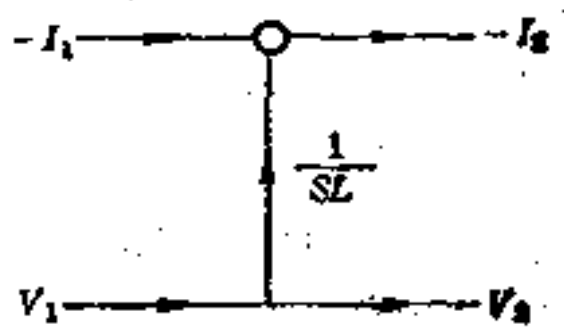


图 3-13

在模拟 LC 电路时，选用哪种信号流图取决于连接时相邻的信号流图的方向。为反映选择的自由，可省去图中与电流、电压节点关联的支路的方向(图3-14(a))。并联支路电感的信号流图中，相加节点在积分支路的输出端，这在实际实现相应的有源电路时产生一定的困难，因为不可能利用积分器的运算放大器的输入端进行信号的相加。但是，推迟信号的相加点可以解决这个困难。将两个相加的支路延长到信号流图中最近的相邻相加点上(以后在实例中将经常用到这种方法)。于是，图3-14(a)可表示成图3-14(b)的形式。图中去掉了积分器输出端的相加节点。电流 I_L

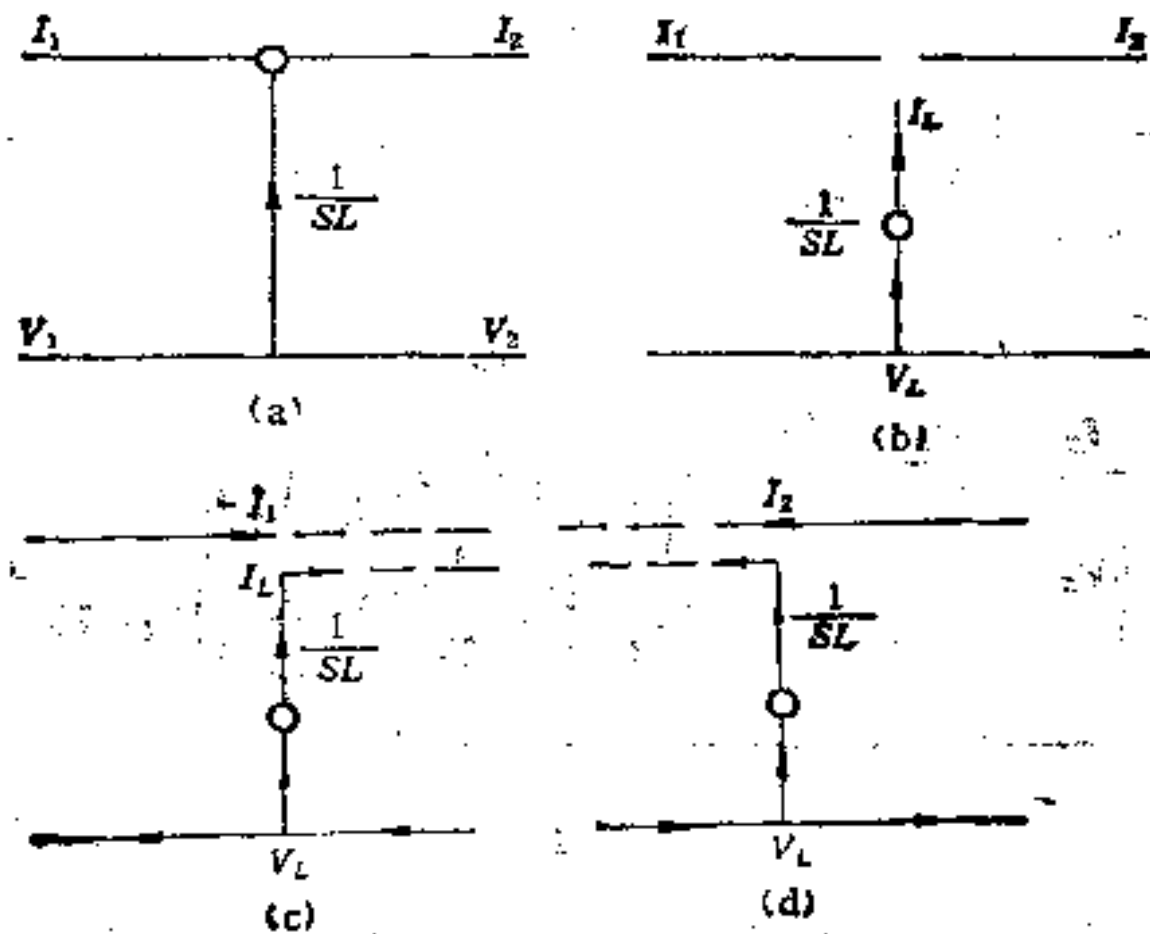


图 3-14

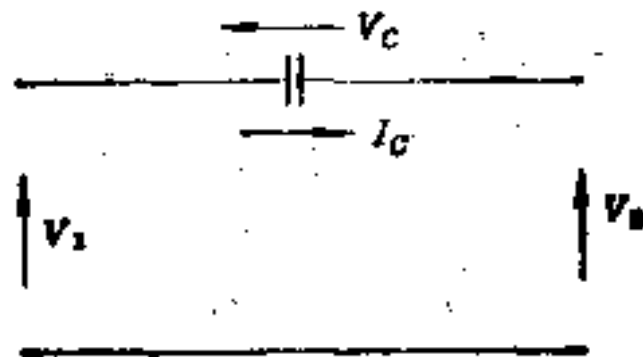


图 3-15

将在最近的相邻信号流图的相加节点与电流 I_1 (或 I_2) 相加. 图 3-14(c), (d) 分别表示 I_L 与 I_1 和 I_2 相加的情况.

串联电容(图 3-15). 类似地, 对于串联电容, 可用图 3-16 表示.

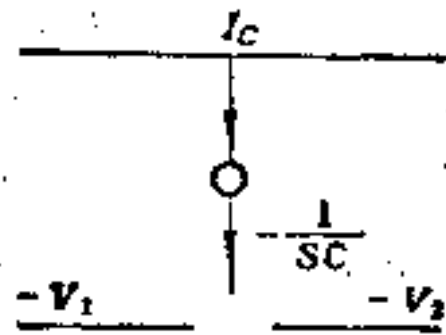


图 3-16

例 3-2. 利用并联电感和串联电容的信号流图求图 3-17 所示的 LC 滤波器的信号流图.

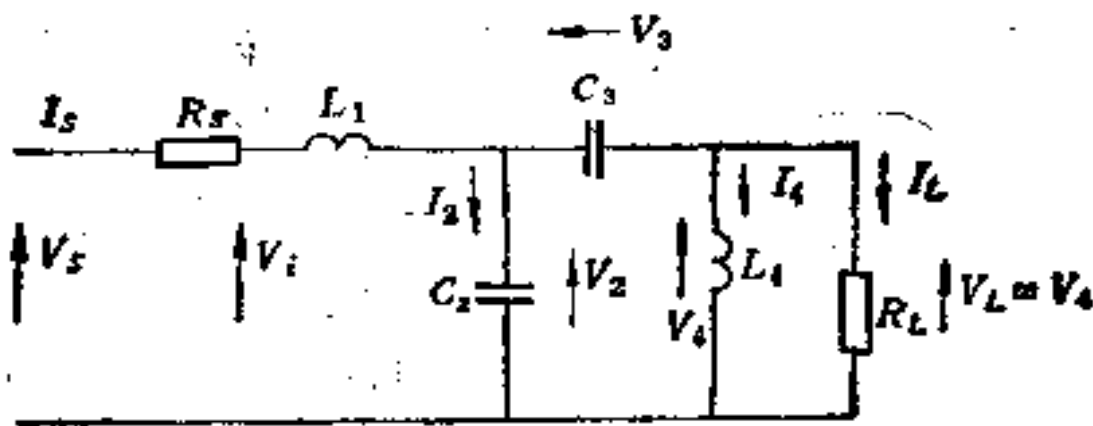


图 3-17

先表示各个元件的信号流图(图 3-18(a)). 在图 3-18(a)中, 根据 C_2 的图的方向, 选取 C_3 的信号流图, 再由 C_3 的信号流图选取 L_2 的信号流图. 然后, 将图 3-18(a) 中各个元件的信号流图连接起来, 并消去节点 S , 得出图 3-18(b). 再将从节点 $-I_L$ 和 4 出发的支路延长到节点 2 和 3 相加, 从节点 $-V_2$ 和 3 出发的支路延长到节点 4 和 5 相加, 如图 3-18(c).

由于 $V_i = V_L$, 及 $-I_3 = -(I_L + I_4)$, 将节点 4 和 5 合并, 并将并联支路传输相加后化简, 得出图 3-18(d).

并联的串联电感和电容(图 3-19)由方程组

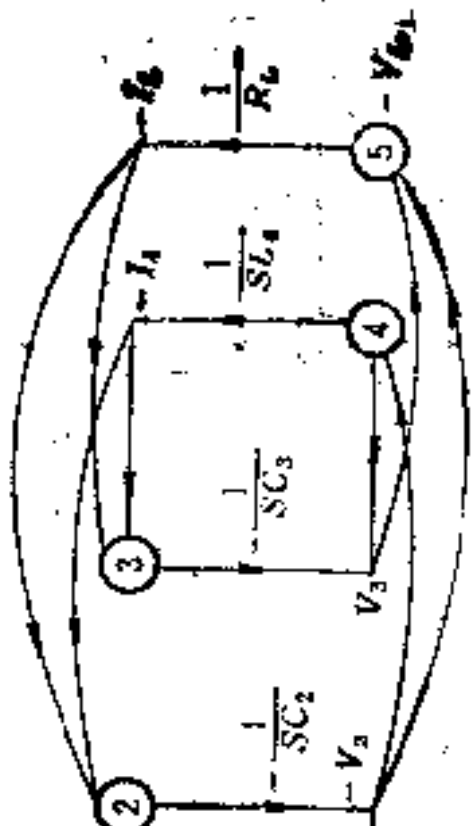
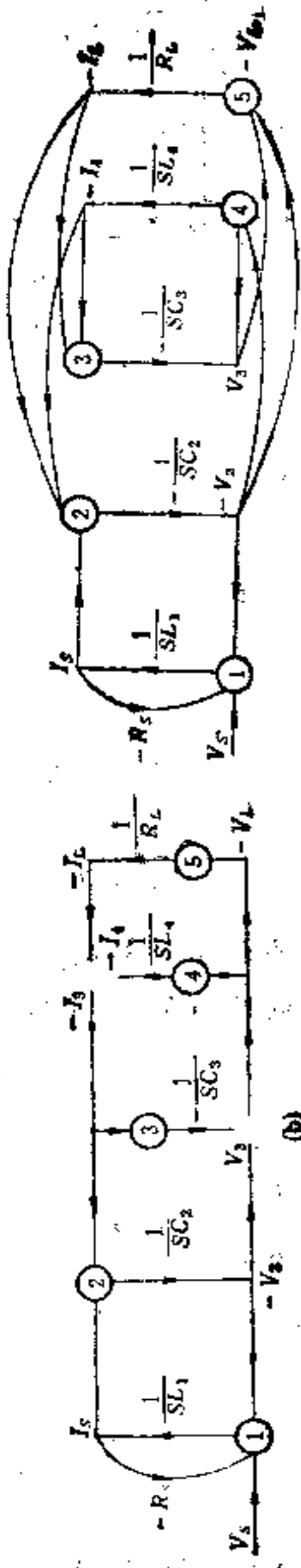
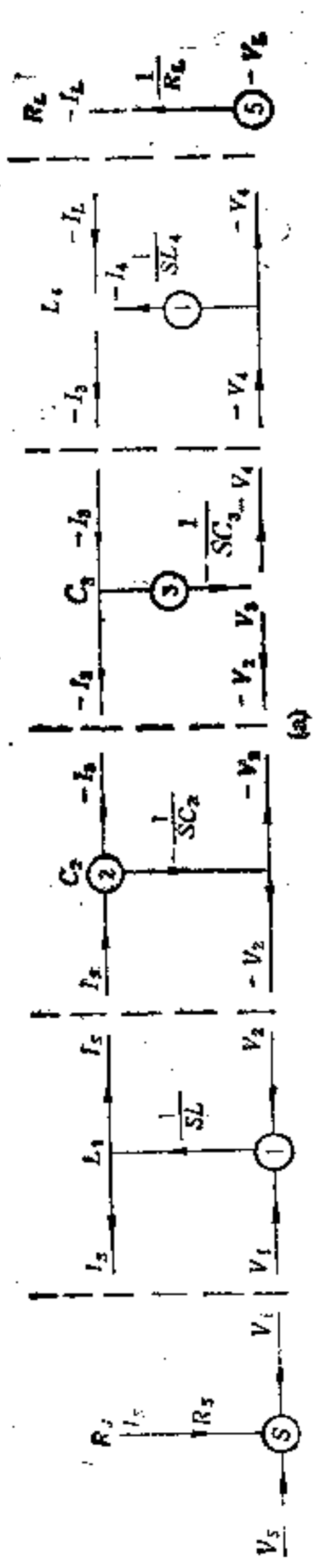
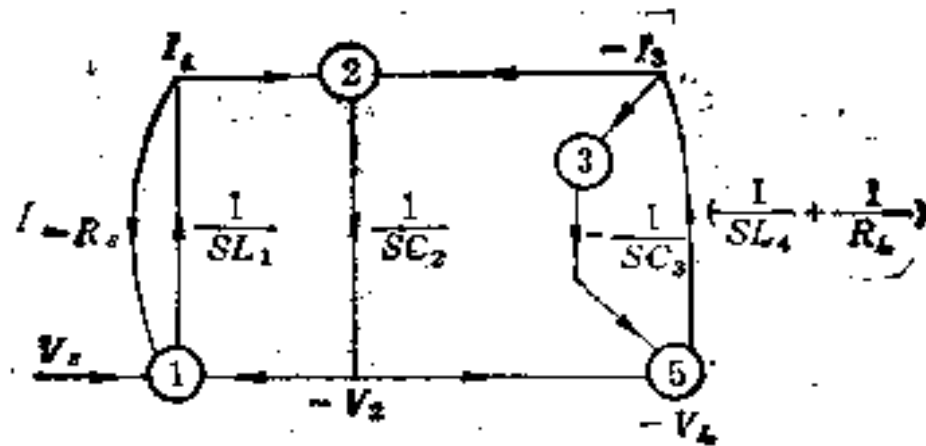


图 3-18



(d)

图 3-18 (续)

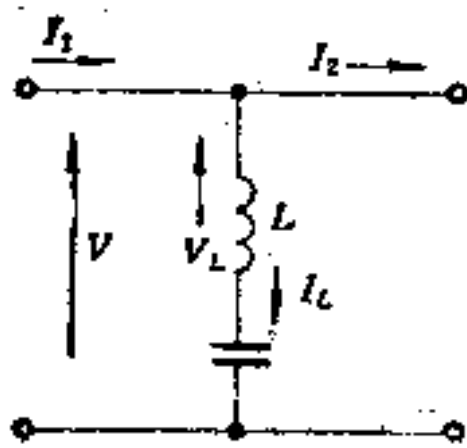


图 3-19

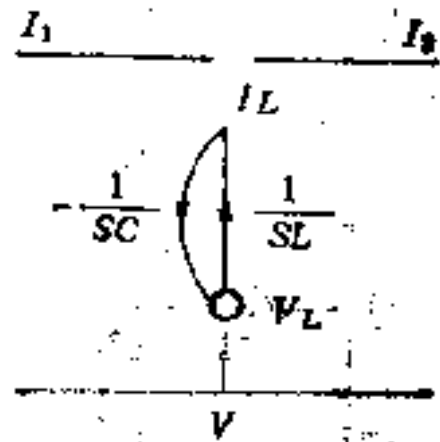


图 3-20

$$I_L = V_L \cdot \frac{1}{sL}$$

$$V_L = V - I_L \cdot \frac{1}{sC}$$

(3-8)

可得对应的信号流图如图 3-20。

串联的并联电感和电容 (图 3-21)，对应的信号流图如图 3-22。

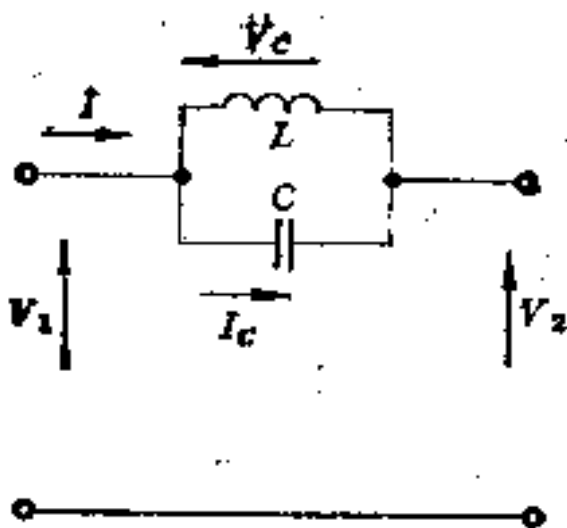


图 3-21

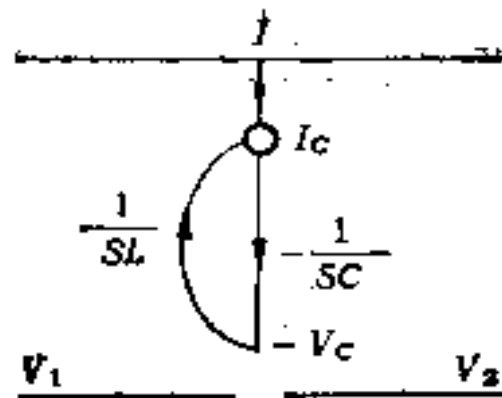


图 3-22

上面得出了六种基本的 LC 元件的信号流图。将这些信号

流图按它们所对应的元件在电路中的连接顺序同样地连接起来，即得到整个电路的信号流图。在以上讨论的实例中，各个信号流图连接时没有遇到什么困难。但是，如果相邻的信号流图的相互连接的端口具有相对着的方向，连接就发生了困难。例如，椭圆型滤波器实现中用到的一个典型节（图 3-23 (a)）就发生这种情况。在图 3-23 (b) 中表示出各节所对应的信号流图。由图 3-23 (b) 可看出，在图的连接处，电流是汇点，而电压是源点，具有相同的方向，故不能连接。为了克服这一困难，应在上述两个信号流图间接

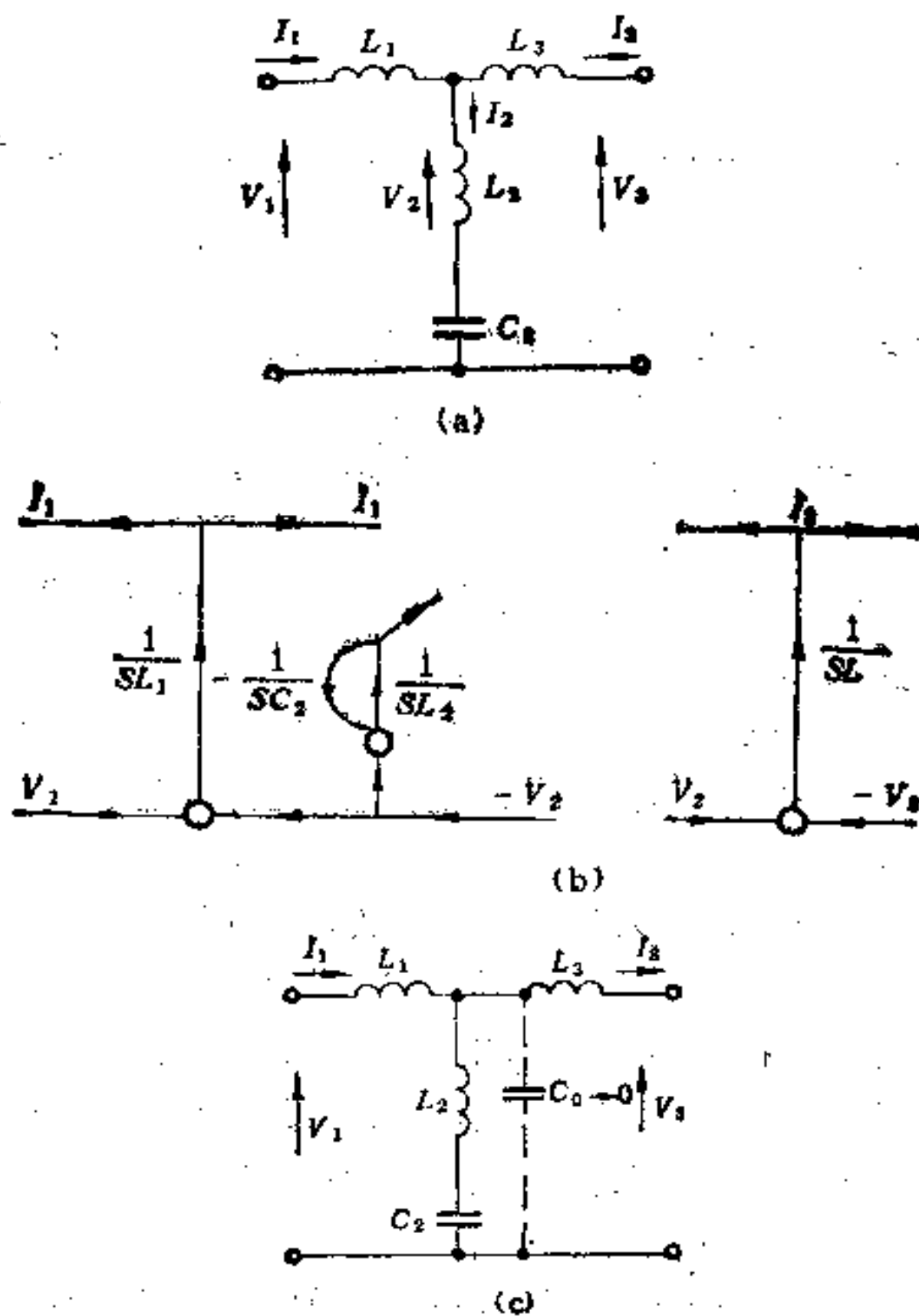


图 3-23

人匹配节。该匹配节应该是电流为源点，而电压为汇点。我们自然地会想到，并联电容的信号流图具有这样的性质(图 3-4)。接入这种信号流图就相当于在电路中接入附加的并联电容 C_0 (如图 3-23(c))。为了不改变电路的传输函数，电容 C_0 应该很小(理想情况应为零)。该电容对应的信号流图是传输是无穷大的积分支路(图 3-24)。图 3-25 表示接入匹配节后的信号流图。

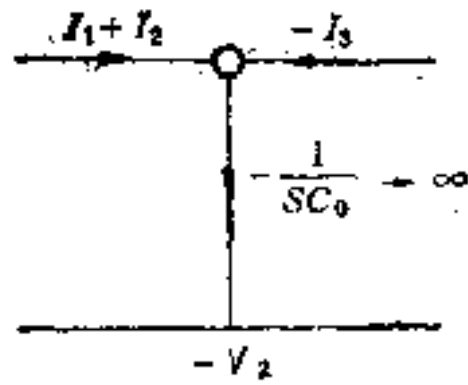


图 3-24

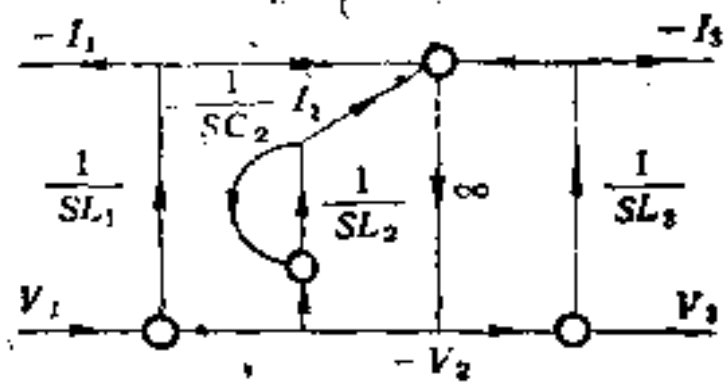


图 3-25

应该指出，当 LC 电路中含有 T 型电感节(上面的电路就属于这种情况)或 Π 型电容节时，就会发生信号流图连接的困难。对于 Π 型电容节，需在电路中串接入附加电感 $L_0 \rightarrow 0$ ，克服信号流图连接中的困难。

在讨论各种基本的 LC 节的基础上，可将构成 LC 电路的信号流图的步骤总结如下：

(1) 画出 LC 电路图，并用符号表示出它的所有元件。

(2) 检查电路中是否存在 T 型电感节或 Π 型电容节。对于每一 T 型电感节，在串臂中接入附加电感 $L_0 (L_0 \rightarrow 0)$ 。对于每一 Π 型电容节，在并臂中接入附加电容 $C_0 (C_0 \rightarrow 0)$ 。

(3) 按在电路中的顺序，画出各节对应的信号流图(表 3-1)，并标出电路的输入端和输出端电压、电流变量 I_s, V_s, I_L, V_L 。

(4) 根据相邻节的信号流图的水平支路的方向，决定节 3~6 (如果电路中有这样的节)的信号流图的水平支路的方向。

(5) 连接各节信号流图如下：

每一条水平的出支路延长，并和最近的相加节点连接。此后，图中只剩下节 3~6 的信号流图的垂直出支路(如果有这样的节)

表 3-1

节号	电路	信号流图	节号	电路	信号流图
1			5		
2			6		
3			7		
4			8		

尚未连接。每条这样的出支路再与最邻近的相加节点连接。

(6) 用相应于信号源内阻的支路，将节点 V_1 和 I_s 连接起来。支路传输为 $-R_s$ (从 I_s 到 V_1) 或 $1/R_s$ (从 V_1 到 I_s)。类似地，用负荷电阻 R_L 将 I_L 和 V_L 连接起来。

(7) 输入信号 V_s 在输入端接到相加节点 V_1 或 I_s (由图中可清楚看出)。如果 V_s 接到 V_1 ，则该支路的传输

K = 有源电路的传输系数 / LC 电路的传输系数

如果 V_s 接到 I_s ，则该支路的传输为 K/R_s 。

(8) 消去多余的节点，得出最后的信号流图。

例 3-3. 求图 3-26 所示的六阶低通滤波器的信号流图

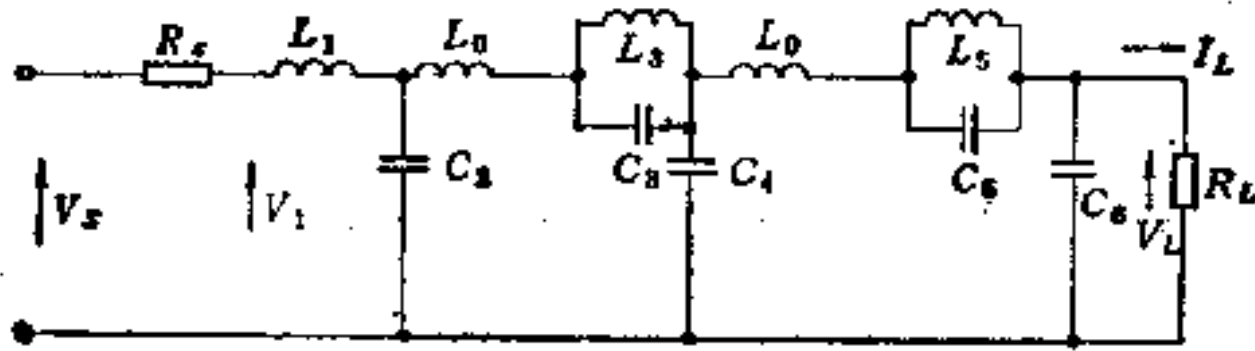


图 3-26

由图 3-26 可见， C_2, C_3, C_4 和 C_4, C_5, C_6 构成了两个 Π 型电容节，故在电路中的串臂上接入两只电感 L_0 。按电路中的顺序，分别画出各节的信号流图(图 3-27)。

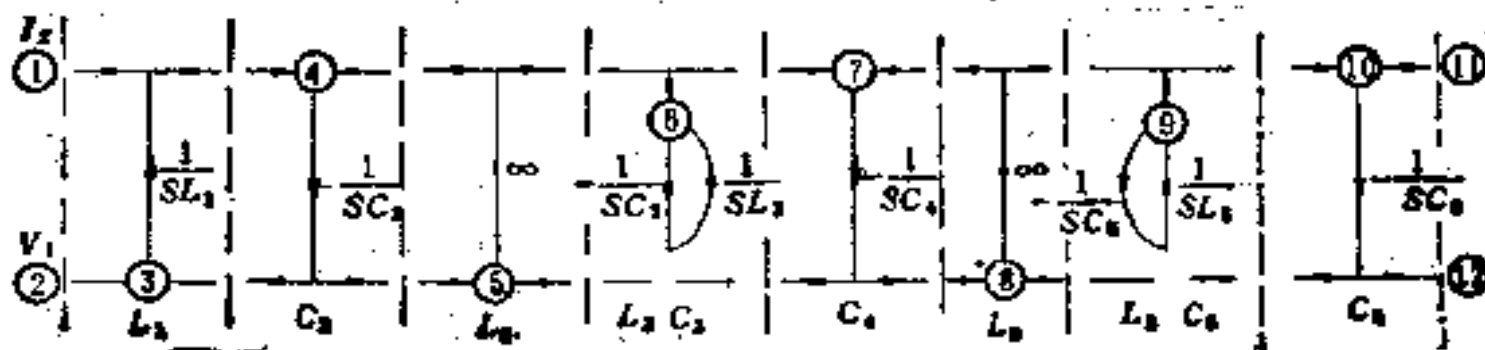


图 3-27

将各节的信号流图按步骤(5)的方法连接起来。再考虑信号源的内阻和负荷的连接。对信号源内阻 R_s ，应接入 I_s 到 V_1 的支路，其传输为 $-R_s$ 。对负荷电阻 R_L ，应接入 V_L 到 I_L 的支

路,其传输为 $\frac{1}{R_L}$ 。节点 V_s 有一支路接到 V_1 , 该支路的传输为 K 。因此,得出图 3-28 所示的信号流图。

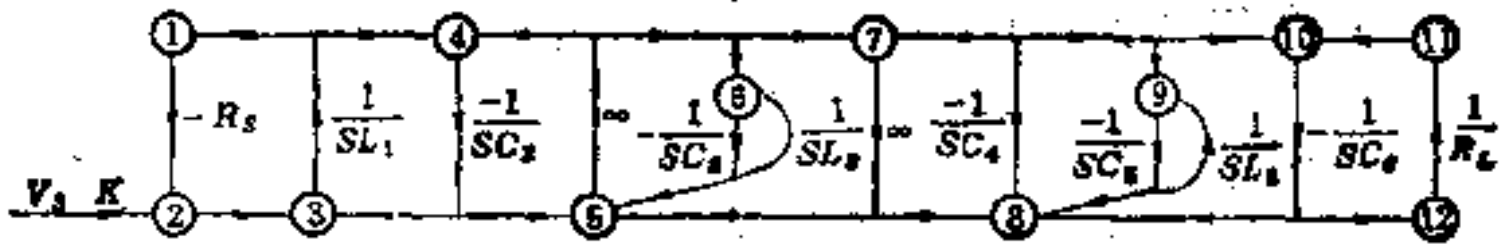


图 3-28

消去节点 1,2 和 11, 12 后,得出最终的信号流图(图 3-29)。

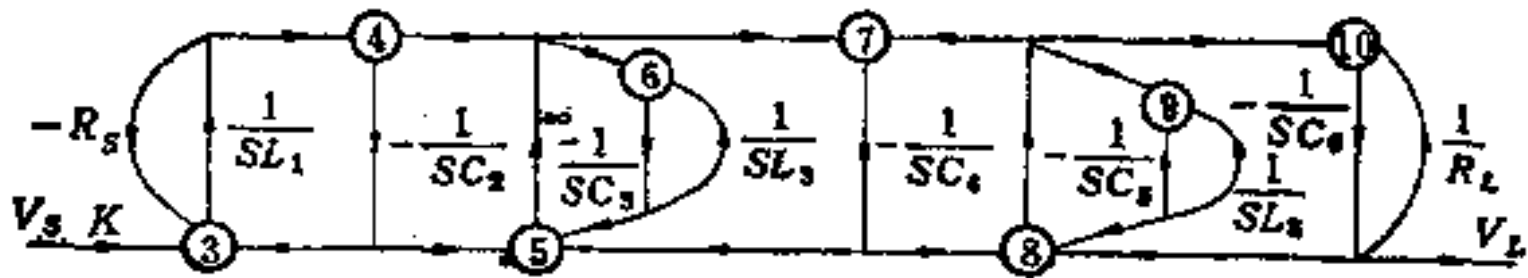


图 3-29

构成 LC 电路的信号流图,只是 LC 电路的有源实现的第一步。信号流图起着桥梁的作用。下一步需要用具体的有源电路来实现信号流图中各个部分的传输,并算出有源电路的参数。

3-2 有源 RC 电路的实现和参数计算

现在要根据 LC 电路的信号流图构成具体的有源 RC 电路,然后再计算电路参数。

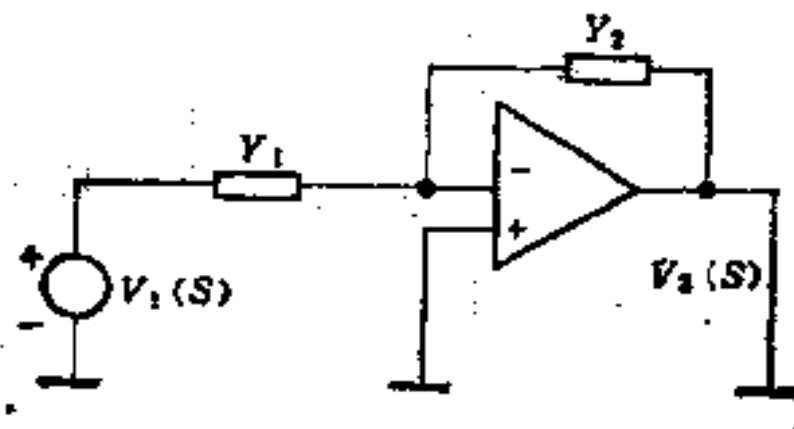


图 3-30

首先,讨论 RC 有源电路设计中用得最广泛的反相运算放大器(图 3-30)。

该电路的传输函数

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{Y_1}{Y_2} \quad (3-9)$$

在式(3-9)中,若

(1) $Y_1 = KG_1$, $Y_2 = G_2$ (K 为实数)(图 3-31),则

$$H(s) = -K \quad \left(K = \frac{G_1}{G_2} \right) \quad (3-10)$$

这就是理想反相放大器。若 $K = 1$, 则为反相器。

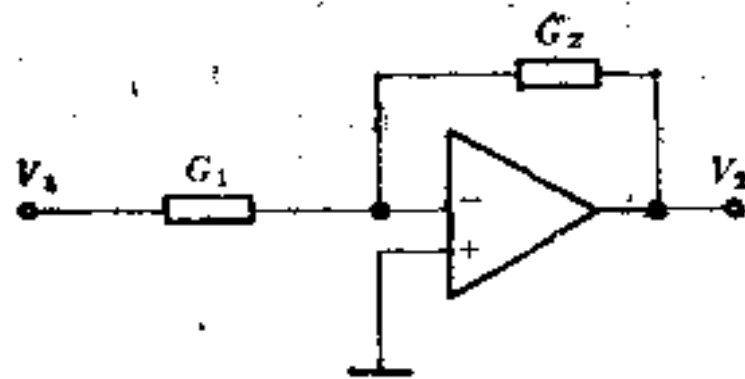


图 3-31

(2) $Y_1 = G_1$, $Y_2 = sC_2$ 和 $T = \frac{C_2}{G_1}$ (图 3-32), 则

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{1}{sT} \quad (3-11)$$

即

$$V_2(t) = -\frac{1}{T} \int_{-\infty}^t V_1(t) dt \quad (3-12)$$

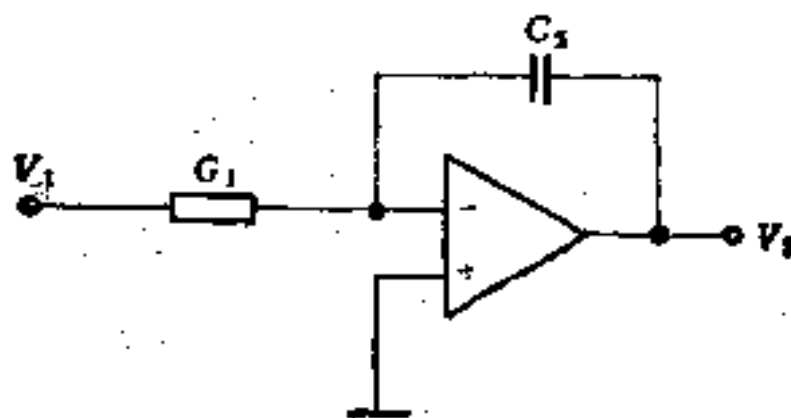


图 3-32

这就是反相积分器的电路。它是有源实现中用得最多的基本电

路。

(3) $Y_1 = sC_1$, $Y_2 = G_2$ 和 $T = \frac{C_1}{G_2}$ (图 3-33), 则

$$H(s) = -sT \quad (3-13)$$

即

$$V_2(t) = -T \frac{dV_1(t)}{dt} \quad (3-14)$$

这是反相微分器的电路。

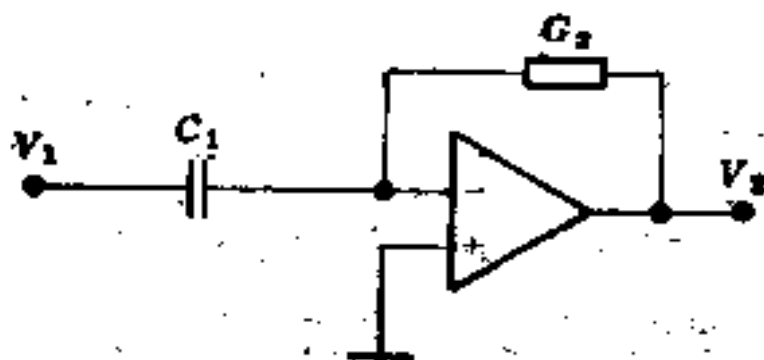


图 3-33

积分器不仅可用于积分, 而且可用于信号的相加。在其输入端连接的电阻数目, 就是相加的信号数目。一般地, 同时实现 n 个信号相加的积分器电路如图 3-34 所示。

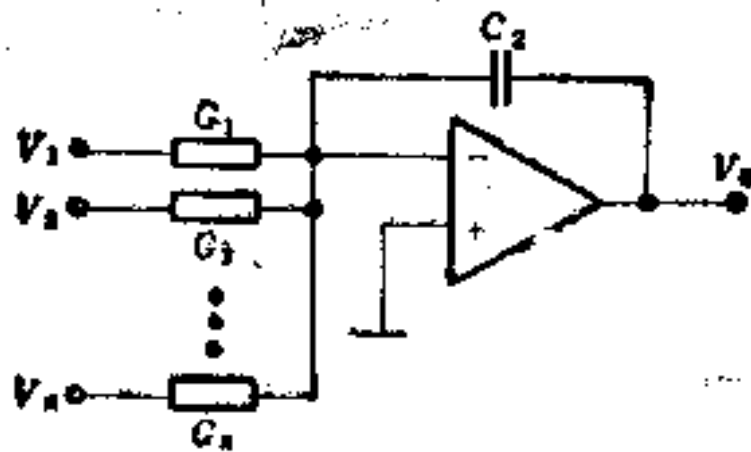


图 3-34

这时,

$$V_0 = -\frac{1}{sC_2} (V_1G_1 + V_2G_2 + \dots + V_nG_n) \quad (3-15)$$

对应于负荷电阻和信号源内阻的图中的支路(例如, 图 3-29 中的支路 $1/R_L$ 和 R_s), 其传输是与频率无关的, 因此可用无源电阻实现, 再将其与积分器合并。如果负反馈环包括传输系数与

频率无关的支路和反相的积分支路（例如，图 3-29 中的环 $-1/sC_1R_L$ ），则可利用图 3-35 的电路实现。如果反馈环中包括不反相的积分支路（例如，图 3-29 中的环 $-1/sL_1R_S$ ），则可利用图 3-36 的电路实现。

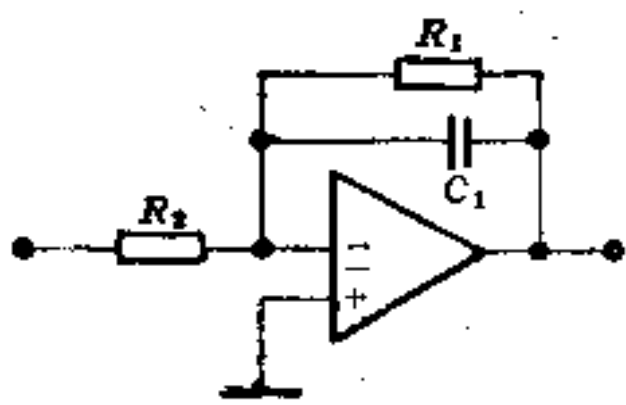


图 3-35

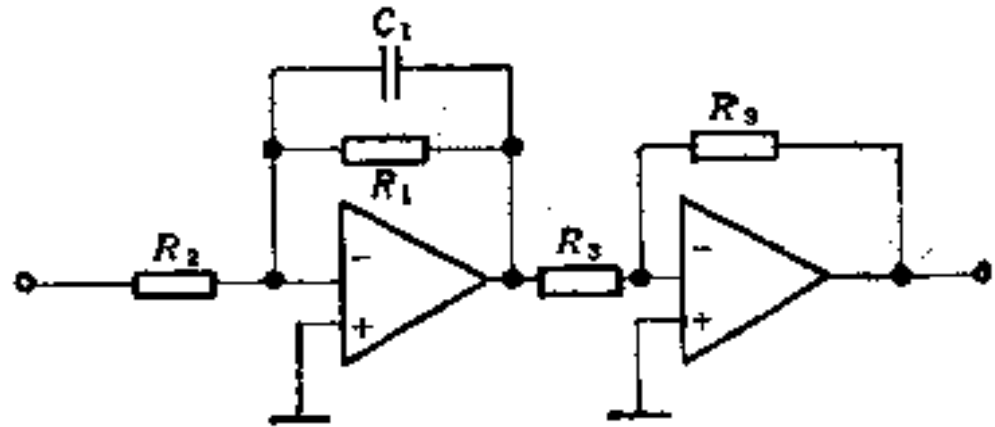


图 3-36

对于匹配节 L_1 和 C_1 ，可分别用图 3-37 和图 3-38 的电路实现。它们实际上是时间常数为零的积分器。

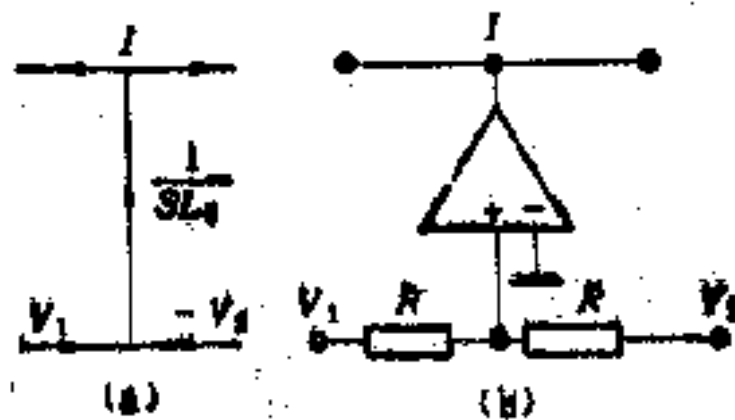


图 3-37

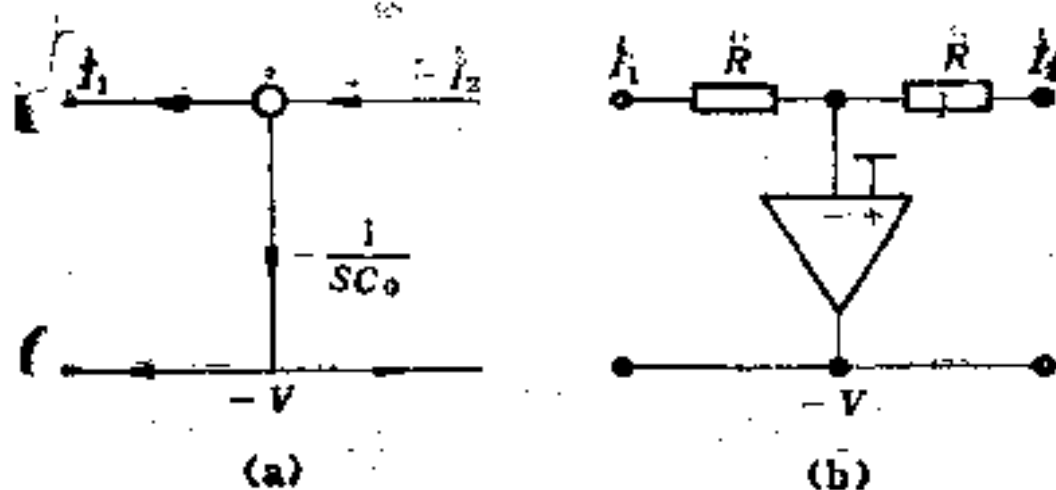


图 3-38

利用上述的一些基本有源电路，我们可将 LC 电路的信号流图中的支路一一对应地应用有源电路实现。这样，就构成了 LC

电路的有源模拟电路。最后,需要计算有源电路的参数。

从 LC 电路的信号流图中可看出,其中包括三种负反馈环:

(1) 由两个积分支路构成的环。环传输等于 $-1/s^2LC$, L 和 C 分别是电感和电容值。

(2) 环传输等于 $-R/sL$ 或 $-1/sCR$ 的负荷环, R 是信号源内阻或负荷电阻。

(3) 包括匹配节的环。环传输是 $-1/s^2L_0C$ 或 $-1/s^2C_0L$, 这里 $L_0, C_0 \rightarrow 0$ 。

在有源电路实现后,不难从图中找出上述各种反馈环。计算有源电路元件参数的基本思想是使信号流图中每个环的传输与对应的有源电路的每个环的传输相等。因为信号流图的环传输是已知的(它取决于 LC 电路的参数),故计算关系式可表示成线性方程组。其中的未知数是有源电路的参数。为了便于计算包括匹配节的环,可采用这样的假定:每个匹配节的运算放大器中有一个积分电容 C_i ($C_i \rightarrow 0$)。这样,就可以写出包括匹配节在内的环传输,并使对应的环传输相等的方程。消去 L_i, C_i 和 C_i 后,可减少方程组中的方程数。

通常,方程组中的方程数要比待求的元件参数的数目少得多。因此,某些参数可以事先选取以保证有源电路达到所需的性能。然后,解方程组以求得其余的参数。例如,可选取电路参数以保证最大的动态范围。在两个积分器组成的环中,当每个积分器的时间常数相等时,可达到接近最优值的解。在具有匹配节的环中,应使积分器的时间常数尽可能地大,以保证匹配节产生的寄生效应减到最小。其他的选择自由度,例如可选取所有电容值相等,并方便制造。

现用一具体实例说明由 LC 电路实现有源 RC 电路的过程。

例 3-4. 有下列八阶带通滤波器。它的通带是 1 至 1.4 千赫。通带内的不均匀性是 0.4 分贝。滤波器的电路如图 3-39 (a)。其元件值如下:

$$R_s = 1 \text{ 欧}, R_L = 1.888 \text{ 欧};$$

$L_1 = 0.626$ 毫亨, $L_2 = 6.379 \cdot 10^{-2}$ 毫亨, $L_3 = 0.2313$ 毫亨, $L_7 = 5.471 \cdot 10^{-2}$ 毫亨;

$C_2 = 29.49$ 微法, $C_3 = 1268.7$ 微法, $C_4 = 361.8$ 微法, $C_5 = 35.75$ 微法, $C_6 = 37.99$ 微法, $C_8 = 314.1$ 微法.

求此 LC 电路的有源电路, 并决定电路参数.

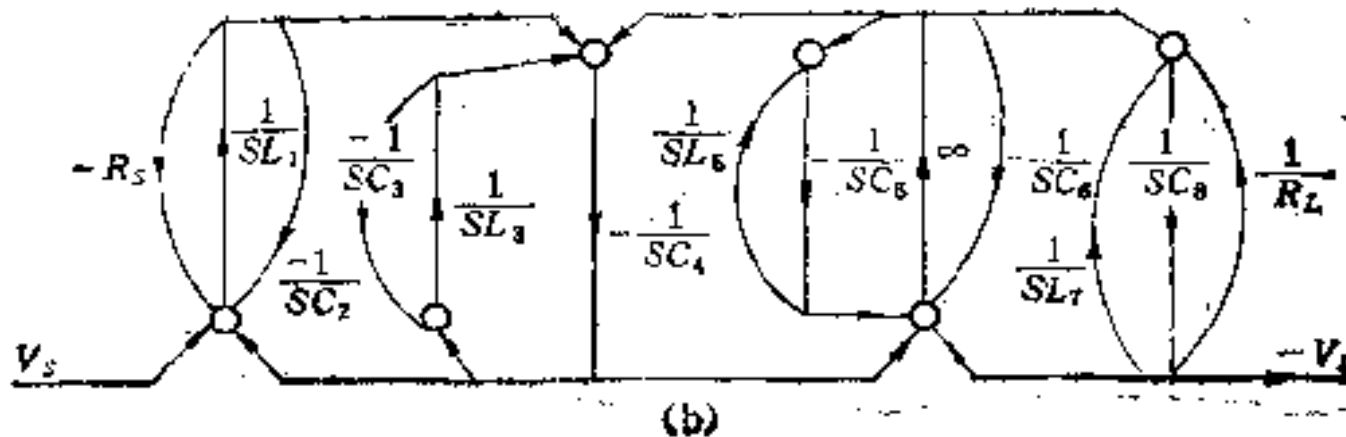
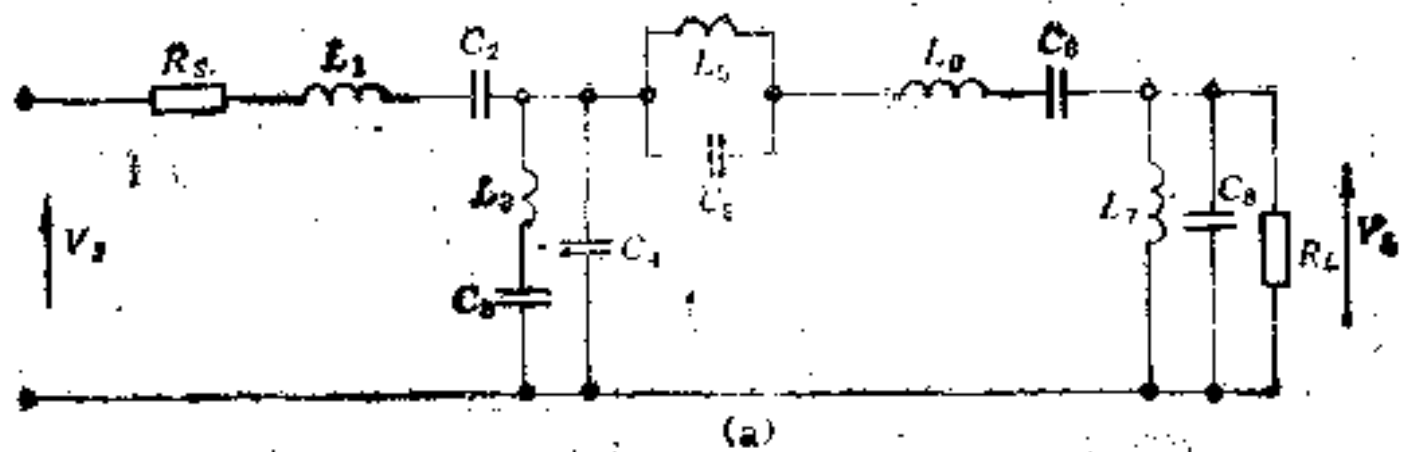
首先, 要用信号流图表示图 3-39(a) 的 LC 电路. 这在 3-1 节中已有详细叙述. 因为电路中出现了 Π 型电容节, 故需加入匹配节 L_1 . LC 电路的对应信号流图如图 3-39(b) 所示. 信号流图中的支路有这样几种情况: $-\frac{1}{sC}$ 的支路可用图 3-32 的积分器

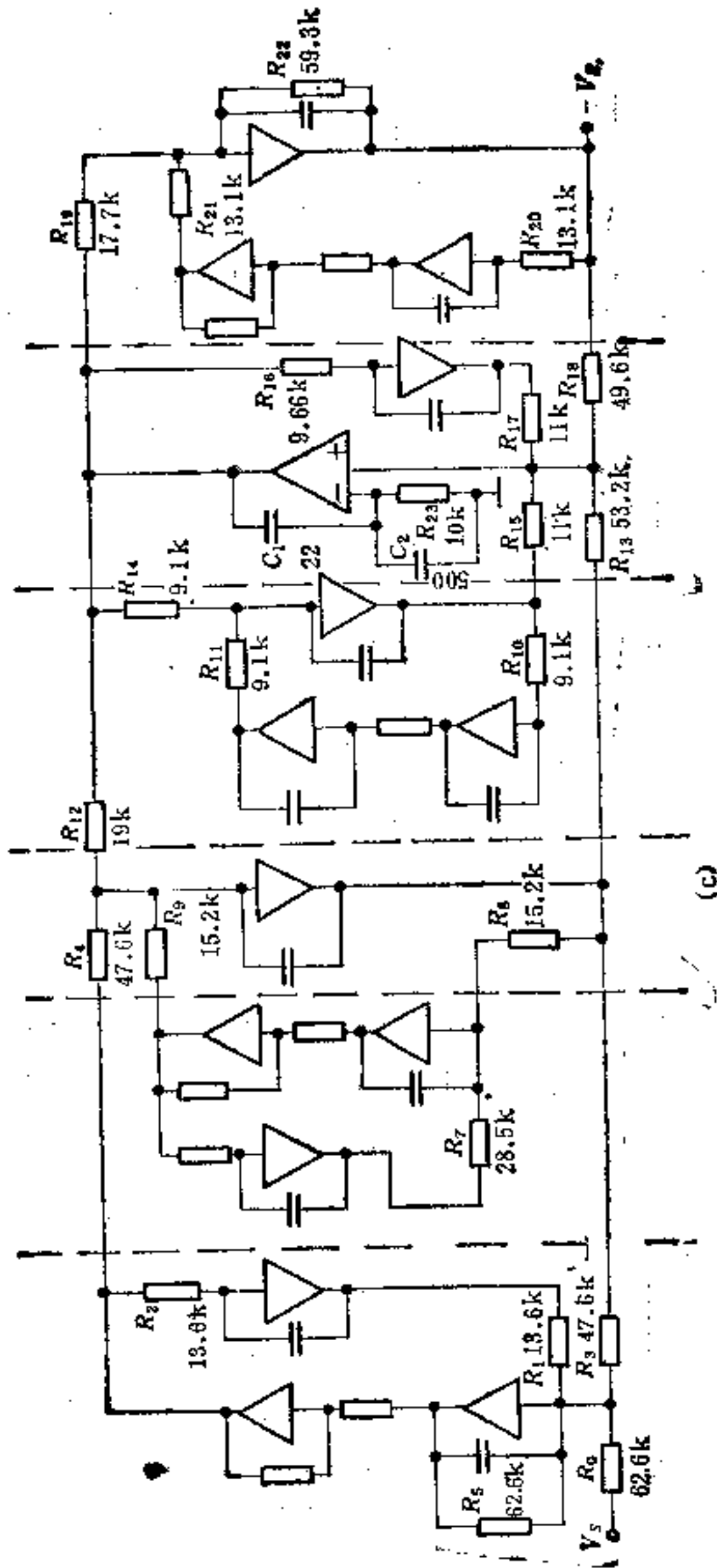
模拟; $\frac{1}{sL}$ 的支路可用积分器和反相器 (图 3-32) 的级联模拟;

$\frac{-1}{sC_3}$ 和 $\frac{1}{R_L}$ 构成的环用图 3-35 的电路模拟; $\frac{1}{sL_1}$ 和 $-R_s$ 构成

的环用图 3-36 的电路模拟; 匹配节 L_1 用图 3-37 (b) 的电路模拟. 将图 3-39(b) 中各支路用对应的有源电路模拟后得到图 3-39(c).

现使图 3-39 (c) 中两个积分器组成的环的环传输分别与图





电容单位为 0.01 皮法
电阻单位为 千欧

图 3-39

3-39(b) 中信号流图的对应的环传输相等, 得出下列方程: (所有积分器电容取相同数值, $C = 10000$ 皮法)

$$R_1 = R_2 = \frac{\sqrt{L_1 C_2}}{C} = 13.59 \text{ 千欧};$$

$$R_3 = R_4 = \frac{\sqrt{L_1 C_1}}{C} = 47.59 \text{ 千欧};$$

$$R_6 = R_7 = \frac{\sqrt{L_3 C_3}}{C} = 28.45 \text{ 千欧};$$

$$R_8 = R_9 = \frac{\sqrt{L_3 C_4}}{C} = 15.19 \text{ 千欧};$$

$$R_{10} = R_{11} = \frac{\sqrt{L_5 C_5}}{C} = 9.09 \text{ 千欧};$$

$$R_{20} = R_{21} = \frac{\sqrt{L_7 C_3}}{C} = 13.11 \text{ 千欧}.$$

对于信号源环和负荷环, 分别有

$$R_5 = \frac{L_1}{C R_5} = 62.6 \text{ 千欧}; \quad R_{22} = \frac{C_8 R_L}{C} = 59.3 \text{ 千欧}.$$

为了求通过匹配节 L_0 的反馈环中的电阻, 设匹配运算放大器中有反馈电容器 C_r , 于是, 对包括匹配节在内的四个环, 得出

$$R_{12} C R_{13} C_r = C_4 L_0, \quad R_{14} C R_{15} C_r = C_5 L_0, \quad (3-16)$$

$$R_{16} C R_{17} C_r = C_6 L_0, \quad R_{18} C R_{19} C_r = C_8 L_0$$

式(3-16)经简单变换后, 消去 C_r 和 L_0 , 得出

$$\frac{R_{12} R_{13}}{R_{14} R_{15}} = \frac{C_4}{C}, \quad \frac{R_{12} R_{13}}{R_{16} R_{17}} = \frac{C_4}{C_6}, \quad \frac{R_{12} R_{13}}{R_{18} R_{19}} = \frac{C_4}{C_8} \quad (3-17)$$

式(3-17)给定了电阻 $R_{12} \sim R_{19}$ 间的关系. 因为 8 个未知数只有 3 个方程, 故可选定其中 5 个电阻值决定其余 3 个电阻值. 具体数值见图 3-39(c). 应指出, 匹配节运算放大器电路中的 C_1 , C_2 和 R_{23} 是为了防止该放大器自激而接入的校正回路.

3-3 LC 电路的无电容模拟

前面讨论的 LC 电路的有源实现,是用 R , C 和运算放大器实现的,现在我们讨论只由电阻和运算放大器组成的“无电容”电路模拟 LC 电路。这种电路在集成电路中占有重要的地位,它的特点是利用内部校正的运算放大器作为积分器。

有内部校正的运算放大器的增益系数的频率特性,在频带 $\sigma < \omega \leq \omega_c$ (σ 为运算放大器的第一个极点频率, ω_c 为单位增益的频率)内可用下式很好地逼近:

$$A(s) \approx \pm B/s = 1/s\tau' \quad (3-18)$$

式中 B 是单位增益频率的增益面积, $\tau' = \frac{1}{B}$ 。这里“+”号对应于信号源接到非反相的输入端,“—”号对应于信号源接到反相的输入端。

因此,在上述频带内可利用运算放大器作为积分器。该积分器的等效时间常数是 τ' 。但是,直接应用这种积分器是有限制的,因为由增益面积决定的 τ' 对于大多数集成运算放大器是固定不变的。

为了改变等效的时间常数,需在运算放大器输入端接以系数 $\alpha < 1$ 的电阻分压器,如图 3-40 所示。这种电路的传输函数:

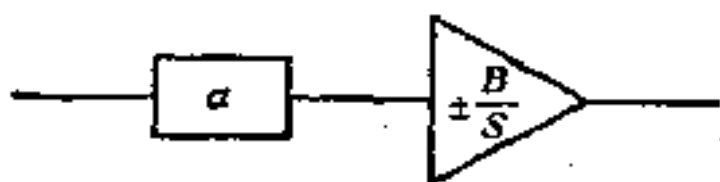


图 3-40

$$T(s) = \pm \alpha A(s) \approx \pm 1/s\tau_c \quad (3-19)$$

式中 $\tau_c = 1/B\alpha$ 是等效的时间常数。

因此,可将图 3-40 的电路看成是时间常数为 τ_c 的积分器。

表 3-2

节号	信号流图	实现	节号	信号流图	实现
1			5		
2			6		
3			7		
4			8		

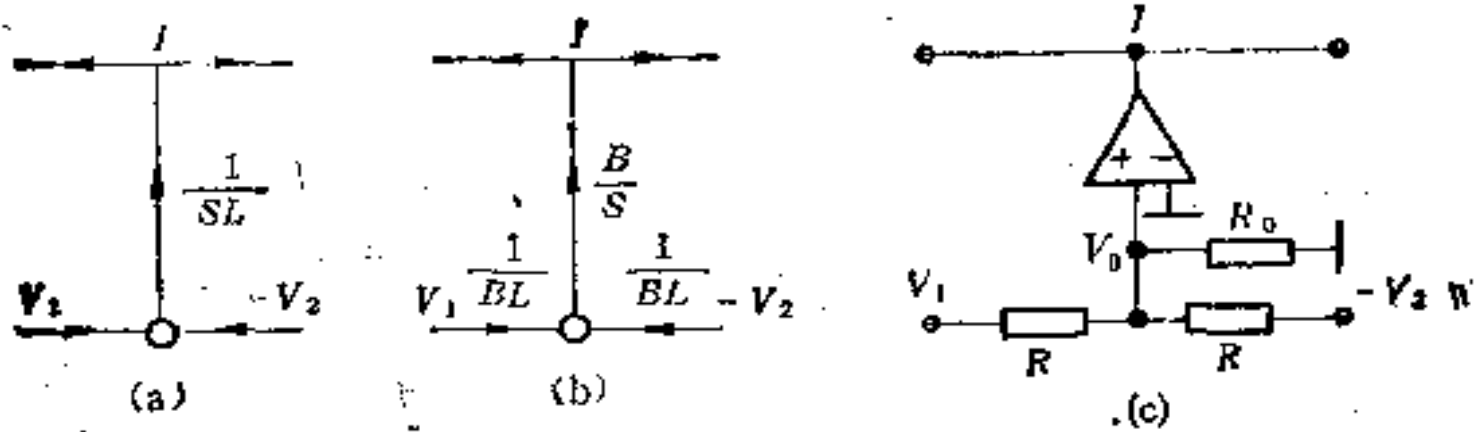


图 3-41

现在需将表 3-2 所示的各节的信号流图变为便于用图 3-40 的电路实现的形式。先讨论串联电感，其余的可类似地得出。串联电感的信号流图如图 3-41(a)。以 B/s 代替 $1/sL$ ，再在下部两条支路中将传输从 1 变为 B/s ，则可保持从源点到汇点的传输不变。因此，得出图 3-41(b) 的等效信号流图。后者可利用图 3-41(c) 的电路实现。假定，电阻 R_0, R 比运算放大器的输入阻抗小得多，于是，分压系数

$$\alpha = \frac{V_0}{V_1} = \frac{V_0}{V_2} = \frac{1}{2 + R/R_0} \quad (3-20)$$

因为

$$\alpha = \frac{1}{BL} \quad (3-21)$$

故

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{\alpha} - 2 = BL - 2 \quad (3-22)$$

当 $R_0 \rightarrow \infty$ 时，图 3-41(c) 的电路的最小等效时间常数

$$\tau_{e \cdot \min} = 2/B$$

应指出，在运算放大器输入端接入电阻加法器导致被放大的信号降低，因而减小了可能发生的非线性畸变。

其余各节的对应的信号流图可类似地得出，如表 3-2 所示。

对于各节的电阻比值 R/R_0 和 R_1/R_0 ，可按下列式计算：

节 1, 5, $R/R_0 = BL - 2$ ，节 3, 6, $R_1/R_0 = BL - 1$

节 2, 6, $R/R_0 = BC - 2$ ，节 4, 5, $R_1/R_0 = BC - 1$

$$(3-23)$$

上述关系是在 R_i, R_o 比运算放大器的输入阻抗小得多时才是正确的。

如果匹配节的时间常数 τ_0 比各基本节中最小的时间常数 τ_{\min} 小得多时, 则它对整个电路特性的影响可以忽略, 即

$$\tau_0 \ll \tau_{\min} \quad (3-24)$$

式中 $\tau_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} \{\tau_{ci}\}$, n 是节数。

对于包括模拟负荷电阻 R_L 或信号源内阻 R_s 的支路的环, 可以有下列两种形式(图 3-42(a), (b)). 其中, 对应于电阻 R_L 或 R_s 的支路传输为 β 或 $-\beta$. 通常 $|\alpha\beta| < 1$. 因此, 整个反馈环可用包括电阻负反馈的一个运算放大器实现. 其电路分别如图 3-43(a) 和 (b) 所示。

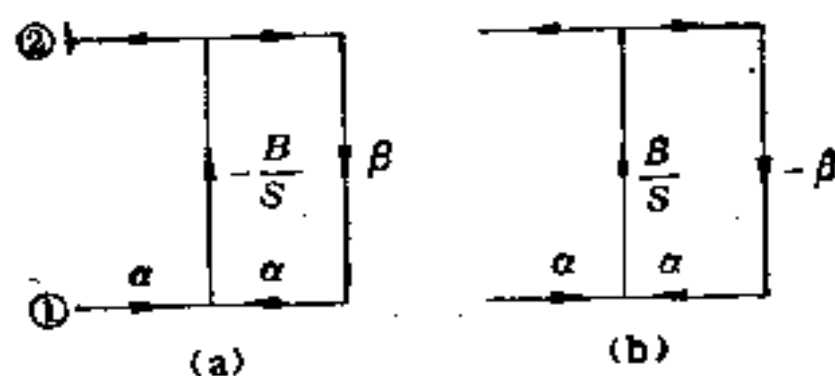


图 3-42

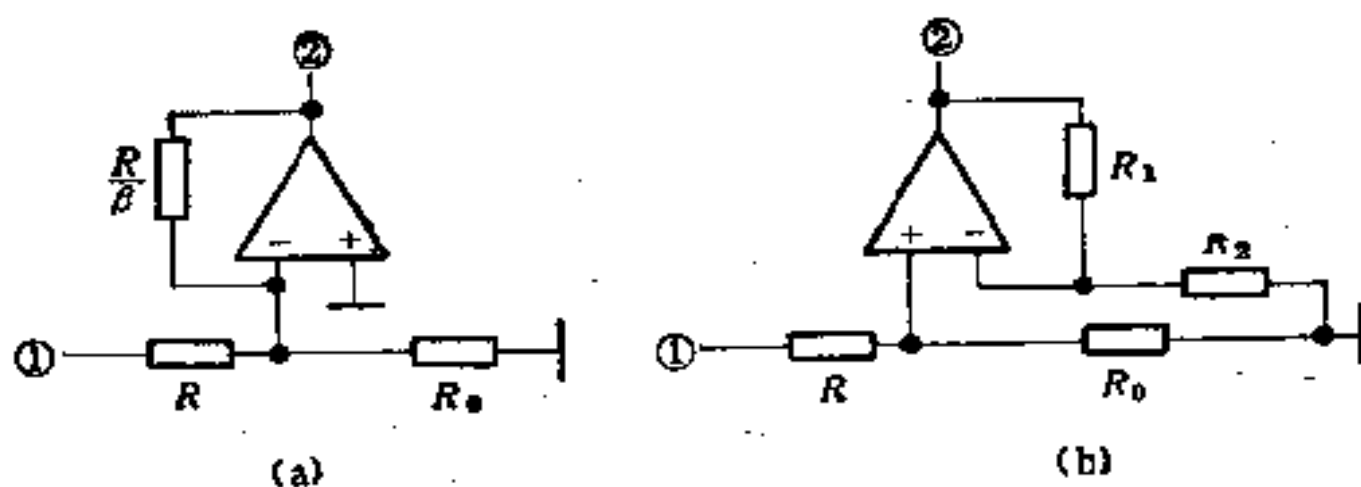


图 3-43

对于图 3-43(a) 的电路:

$$R/R_o = 1/\alpha - (1 + \beta) \quad (3-25)$$

对于图 3-43(b) 的电路:

$$R_1/R_2 = 1/(\alpha\beta) - 1 \quad (3-26)$$

例 3-5. 作为一个简单实例, 求出图 3-44 所示的并联 LC 回路(带有信号源内阻 R_s 和负荷电阻 R_L) 的无电容模拟电路。

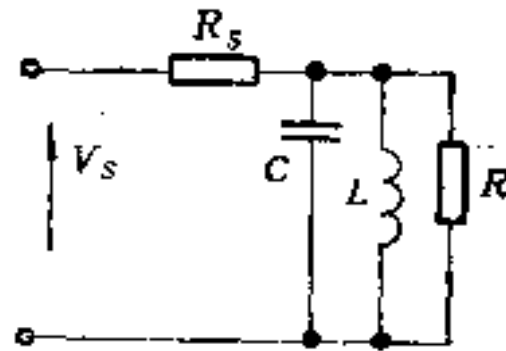


图 3-44

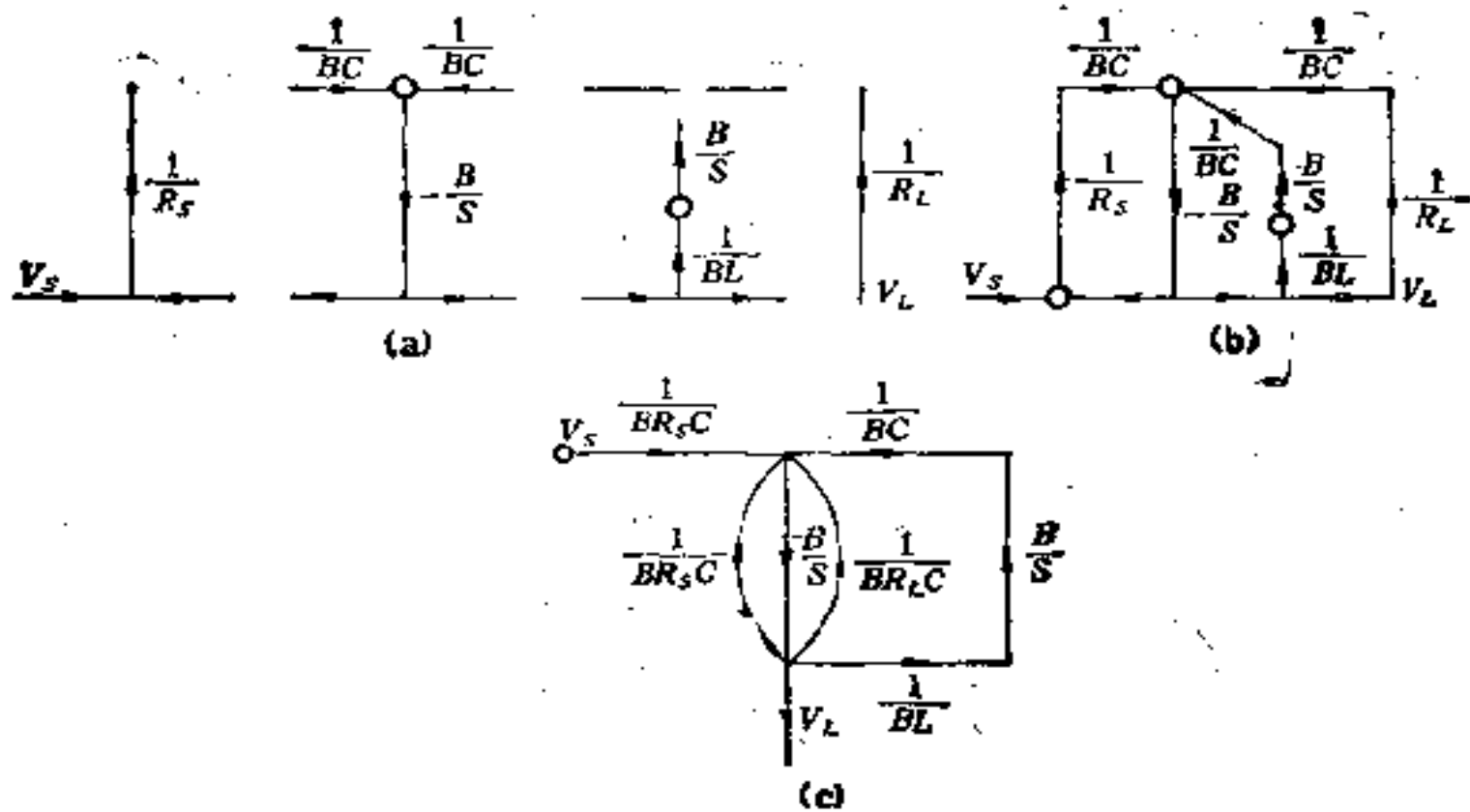


图 3-45

先按表 3-2 作出 C 和 L 的信号流图, 同时, 将对应于信号源 R_s 和负荷电阻 R_L 的信号流图一起作出, 如图 3-45(a)。消去节点 1 并化简后, 得出图 3-45(c)。由图 3-45(c), 得到无电容模拟电路如图 3-46。

例 3-6. 有一低通滤波器如图 3-47 所示。 求出它的无电容有源电路。

图 3-47 的电路参数如下:

$L_1 = 0.142$ 毫亨, $L_2 = 0.127$ 毫亨, $L_3 = 0.160$ 毫亨;

$C_1 = 248$ 微法, $C_2 = 124$ 微法, $C_3 = 236$ 微法, $C_4 = 62.7$

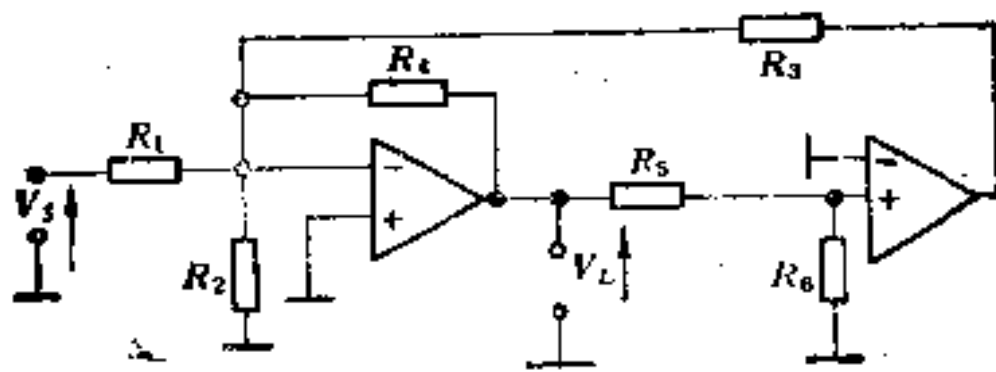


图 3-46

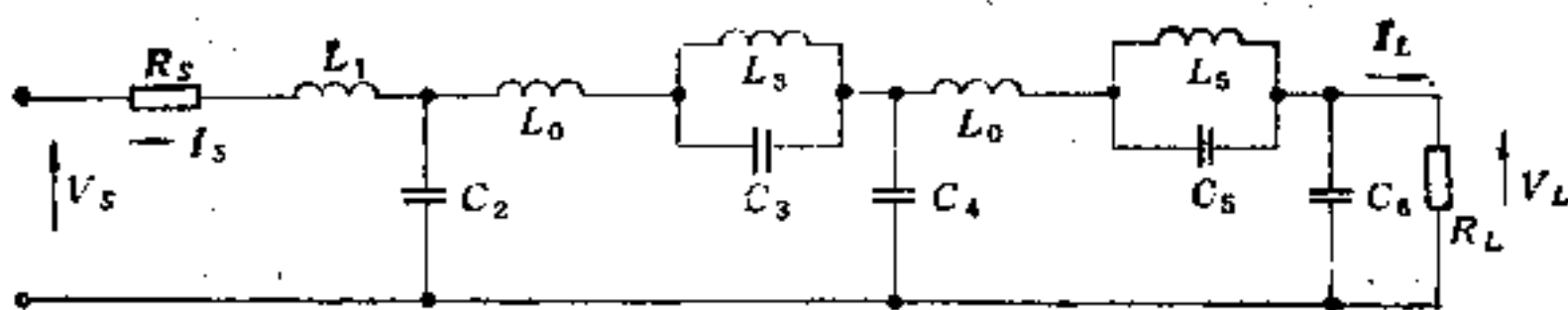


图 3-47

微法， $C_6 = 162$ 微法；

$R_s = 0.667$ 欧， $R_L = 1$ 欧。

按表 3-2 求得各节的对应信号流图如图 3-48(a)。按 3-1 节的步骤(5)所述原则将各节的信号流图连接起来得到图 3-48(b)。后者和图 3-29 在结构上是相同的，因为它们对应于同一 LC 电路。

利用表 3-2 和图 3-43 可得出有源电路(图 3-49)。

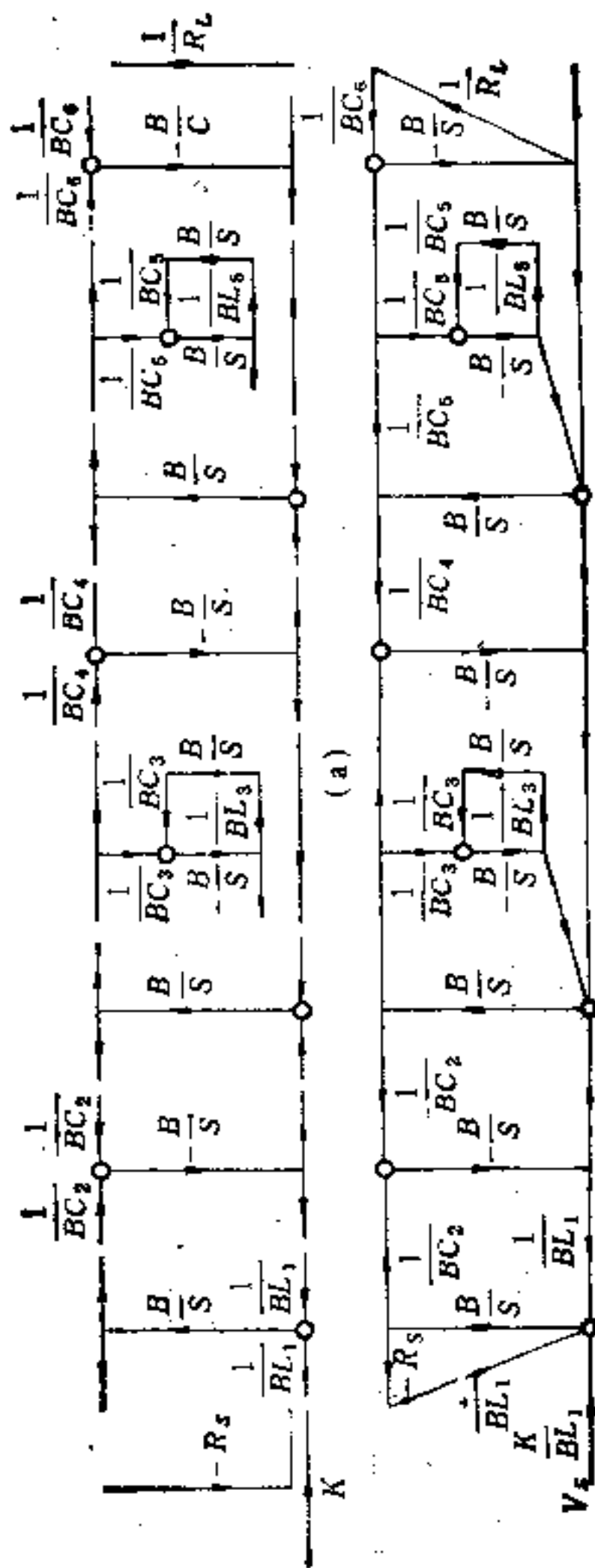
用于构成上述电路的运算放大器的数据： $B = 2\pi \cdot 10^6$ 弧度，输入阻抗为 2 兆欧。匹配节的时间常数 $= 3/B = 0.477 \times 10^{-6}$ 秒，比基本节的最小的时间常数低两个数量级。

选取电阻 $R_1, R_2, R_6, R_{13}, R_{16}, R_{17}, R_{23}, R_{27}, R_{28}$ 等于 100 欧， $R_3, R_{10}, R_{11}, R_{20}, R_{21}, R_{22}$ 等于 1 千欧， $k = 1.66$ ；

由式(3-23)，可得

$$R_7 = R_8 = R_6 \times (BC_2 - 2) = 100 \times (2\pi \times 10^6 \times 248 \times 10^{-6} - 2) \approx 155 \text{ 千欧}$$

$$R_{18} = R_{19} = R_{17} \times (BC_4 - 2) = 100 \times (2\pi \times 10^6 \times 236 \times 10^{-6} - 2) \approx 148 \text{ 千欧}$$



(a) (b)
图 3-48

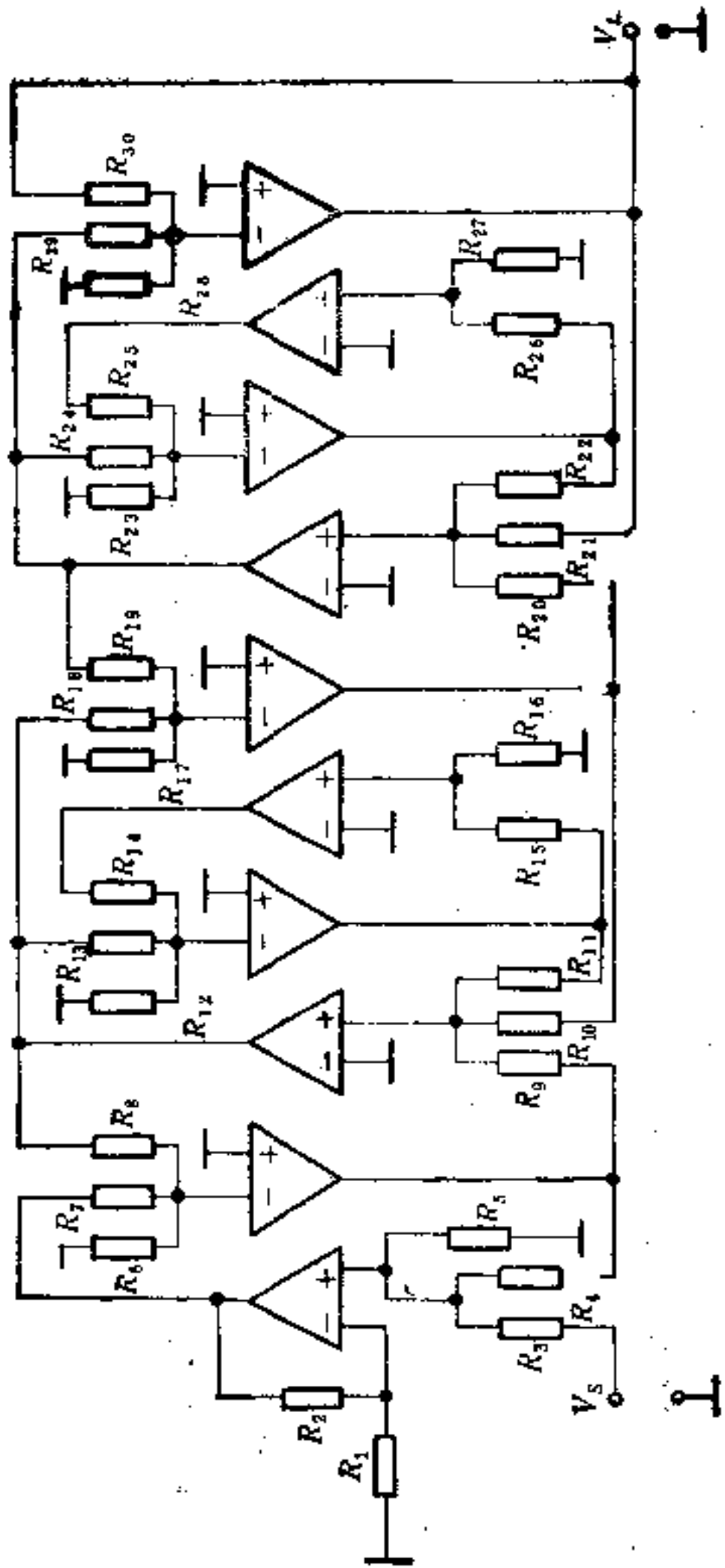


图 3-49

$$R_{13} = R_{14} = R_{12} \times (BC_3 - 2) = 100 \\ \times (2\pi \times 10^6 \times 124 \times 10^{-6} - 2) \approx 77.9 \text{ 千欧}$$

$$R_{15} = R_{16} \times (BL_3 - 1) = 100 \times (2\pi \times 10^6 \\ \times 0.127 \times 10^{-3} - 1) \approx 79.7 \text{ 千欧}$$

$$R_{24} = R_{25} = R_{23} \times (BC_5 - 2) = 100 \times (2\pi \times 10^6 \\ \times 62.7 \times 10^{-6} - 2) \approx 39.4 \text{ 千欧}$$

$$R_{26} = R_{27} \times (BL_5 - 1) = 100 \times (2\pi \times 10^6 \\ \times 0.160 \times 10^{-3} - 1) \approx 100.5 \text{ 千欧}$$

由式(3-25):

$$R_{29} = R_{30} = R_{28} \times \left[\frac{1}{\alpha} - (1 + \beta) \right] = 100 \times (BC_6 - 2) \\ = 100 \times (2\pi \times 10^6 \times 162 \times 10^{-6} - 2) \approx 101.7 \text{ 千欧,}$$

$$R_4 = R_5 \times \left[\frac{1}{\alpha} - (1 + \beta) \right] = 100 \times (BL_1 - 1.667)$$

$$= 100 \times (2\pi \times 10^6 \times 142 \times 10^{-3}) \approx 89.2 \text{ 千欧,}$$

$$R_3 = 89.2/1.6 \approx 53.7 \text{ 千欧,}$$

由式(3-26):

$$R_2 = R_1 \times \left(\frac{1}{\alpha\beta} - 1 \right) = 100 \times \left(\frac{2\pi \times 10^6 \times 142 \times 10^{-3}}{0.667} - 1 \right)$$

$$\approx 133.7 \text{ 千欧.}$$

3-4 传输函数的有源实现(一)

前面三节所讨论的是从给定的 LC 电路出发来实现有源 RC 或 R 电路。现在，我们将讨论从给定的电路传输函数来实现有源 RC 电路。至于如何逼近电路特性以求得传输函数的问题，这里不加讨论。

根据给定的传输函数实现有源 RC 电路，可以有两种途径。一种途径是由给定的传输函数选取某种结构的有源电路，然后用信号流图方法写出该电路的传输函数，并将其系数与给定的传输函

数的系数相比较,再考虑物理实现条件等以求得电路的参数。另一种途径是用信号流图表示给定的传输函数,再用对应的有源电路实现信号流图的支路。本节和下一节将分别讨论这两种途径。

给定电路的传输函数

$$T(s) = T_g = \frac{a_n s^n + \dots + a_k s^k}{b_m s^m + \dots + b_1 s + 1} \quad (3-27)$$

$$\text{对于低通滤波器, } T_{Lf} = T_g |_{m > n > k = 0} \quad (3-28)$$

$$\text{对于带通滤波器, } T_{bf} = T_g |_{m > n > k > 0} \quad (3-29)$$

$$\text{对于高通滤波器, } T_{hf} = T_g |_{m = n > k > 0} \quad (3-30)$$

如果我们已选定了电路的结构来实现上面的传输函数,对该电路进行拓扑分析可写出它的传输函数

$$T_p = \frac{f_n s^n + \dots + f_k s^k}{\varphi_m s^m + \dots + \varphi_1 s + 1} \quad (3-31)$$

式中 $f_i (i = n, \dots, k) = f_i(C_1, \dots, C_l; G_1, \dots, G_r; K_1, \dots, K_q)$; l 是电容器数; r 是电阻数; q 是运算放大器数;

$$\varphi_i = \varphi_i(C_1, \dots, C_l; G_1, \dots, G_r; K_1, \dots, K_q).$$

f_i 和 φ_i 都是电路元件数值的函数。

因为选定的电路要实现给定的传输函数 T_g , 必须有 $T_g = T_p$ 。所以,两个函数的对应系数应相等。于是,有下列方程组:

$$\begin{aligned} f_n(l, r, q) &= a_n; \\ \dots\dots\dots \\ f_k(l, r, q) &= a_k; \\ \varphi_1(l, r, q) &= b_1; \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_m(l, r, q) &= b_m \end{aligned} \quad (3-32)$$

显然,要解出方程组 (3-32), 方程数和待求的变量数必须相等。例如,对低通滤波器式(3-28), 应有

$$l + r + q = m + n + 1 \quad (3-33)$$

对带通滤波器, 有

$$l + r + q = m + (n - k + 1) \quad (3-34)$$

对高通滤波器,有

$$l + r + q = m + (m - k + 1) \quad (3-35)$$

在实际情况下,由于待求的变量数 $(l + r + q)$ 远比方程组中的方程数大得多,因此,式(3-33)、(3-34)和(3-35)是很难成立的。这样,方程组(3-32)的解可以有无限多,但是这样也带来了一定的方便,在设计中有相当的选择自由度。例如,要使电容器的品种减少,可选取某些电容的数值相等。

其次,还要考虑到物理实现条件。例如,电阻和电容数值都要是正的,即

$$C, G > 0 \quad (3-36)$$

此外,也应当考虑到电路的稳定条件。

例 3-7. 给定传输函数

$$T_F(s) = \frac{a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + 1} \quad (3-37)$$

选定二阶有源 RC 电路如图 3-50。

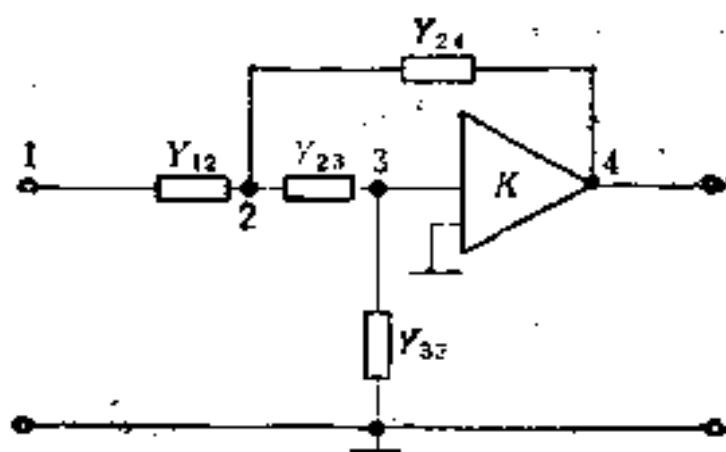


图 3-50

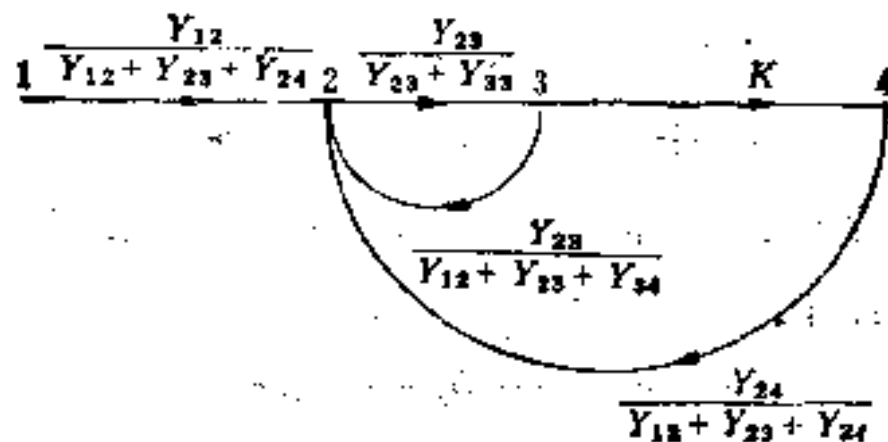


图 3-51

图 3-50 的电路所对应的信号流图,如图 3-51 所示。

由图 3-51,可写出从节点 1 到节点 4 的传输

$$T_u = \frac{kY_{12}Y_{23}}{Y_{12}Y_{23} + Y_{12}Y_{33} + Y_{23}Y_{33} + Y_{24}Y_{33} + (1-k)Y_{23}Y_{24}} \quad (3-38)$$

设 $Y_{12} = n$, $Y_{23} = 1$, $Y_{24} = s$, $Y_{33} = ms$, 电路如图 3-52 所示。

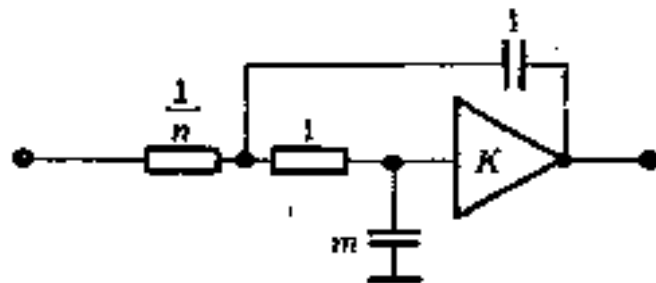


图 3-52

将 Y_{12} , Y_{23} , Y_{24} , Y_{33} 代入式(3-38),经整理后可得

$$T_u = \frac{k}{m/n s^2 + [m(n+1)/n + (1-k)]s + 1} \quad (3-39)$$

因 $T_s = T_u$, 所以它们的分子和分母中对应的系数应相等,于是

$$\begin{aligned} a_0 &= k, \\ b_2 &= m/n, \\ b_1 &= m(n+1)/n + (1-k) \end{aligned} \quad (3-40)$$

解方程组(3-40),得出

$$\begin{aligned} k &= a_0 \\ m &= a_1 + b_1 - b_2 - 1 \\ n &= (a_0 + b_1 - b_2 - 1)/b_2 \end{aligned} \quad (3-41)$$

考虑到物理实现条件等,有下列条件:

$$\begin{aligned} -b_1/2b_2 &> 0 \\ a_0 + b_1 - b_2 - 1 &> 0 \\ (a_0 + b_1 - b_2 - 1)b_2 &> 0 \end{aligned} \quad (3-42)$$

第一个不等式考虑了有源电路的稳定性,第二和第三个不等式是元件值为正的条件。由式(3-42),有

$$\begin{aligned} a_0 + b_1 - b_2 - 1 &> 0 \\ b_2 &> 0 \\ b_1 &> 0 \end{aligned} \quad (3-43)$$

表 3-3

顺序号	传输	电路	元件值	物理实现条件
1	$\frac{a_0}{b_2s^2 + b_1s + 1}$		$k = a_0$ $m = a_0 + b_1 - b_2 - 1$ $n = (a_0 + b_1 - b_2 - 1)/b_2$	$a_0 + b_1 - b_2 - 1 > 0$ $b_2 > 0$ $b_1 > 0$
2	$\frac{a_2s^2}{b_2s^2 + b_1s + 1}$		$k = a_2/b_2$ $m = b_2/(b_1 - b_2 - 1 + a_2/b_2)$ $n = 1/(b_1 - b_2 - 1 + a_2/b_2)$	$b_1 - b_2 - 1 + a_2/b_2 > 0$ $b_1 > 0$ $b_2 > 0$
3	$\frac{a_1s}{b_2s^2 + b_1s + 1}$		$k = a_1/(b_1 - 1 - b_2 - a_1)$ $m = b_1 - 1 - b_2 - a_1$ $n = (b_1 - 1 - b_2 - a_1)/(b_1 + a_1)$	$b_1 - 1 - b_2 - a_1 > 0$ $b_1 + a_1 > 0$ $b_2 > 0$ $b_1 > 0$

由式(3-43)可决定有源 RC 电路的物理实现的范围。
 对其他两种电路用同样方法得到类似的结果,如表 3-3 所示。
 例 3-8, 四阶有源 RC 电路的实现。给定四阶传输函数

$$T_g(s) = \frac{a_4 s^4}{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + 1} \quad (3-44)$$

为了实现式(3-44),可利用图 3-53 所示的电路结构。

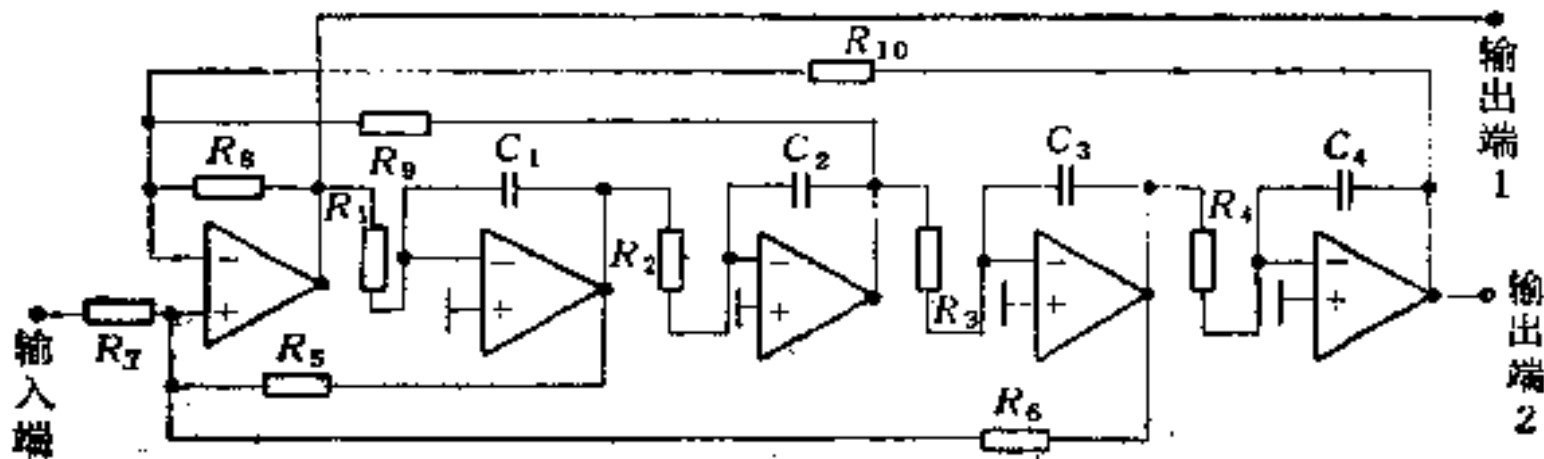


图 3-53

与图 3-53 对应的信号流图如图 3-54 所示。

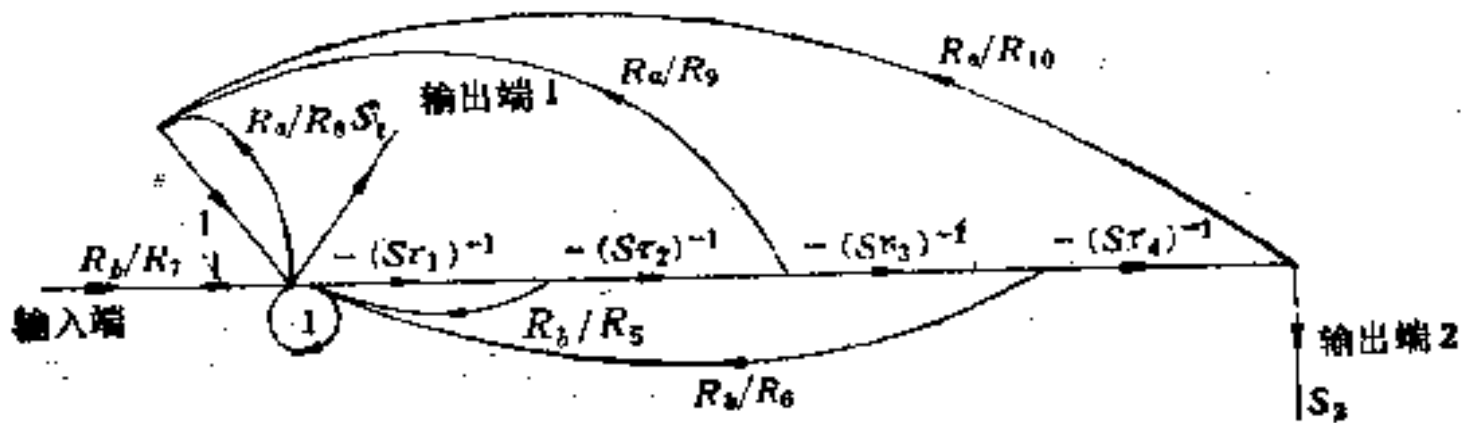


图 3-54

图 3-54 中, $\tau_1 = R_1 C_1$, $\tau_2 = R_2 C_2$, $\tau_3 = R_3 C_3$, $\tau_4 = R_4 C_4$,
 $\frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}$.

用 Mason 增益公式,求得图 3-54 中从输入端 0 至输出端 S_1 的传输:

$$T_{S_1,0} = \left\{ \left(\frac{R_b}{R_8} \frac{R_{10}}{R_7} \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \right) s^4 \right\} / \left\{ \left(\frac{R_{10}}{R_7} \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \right) s^4 \right. \\ \left. + \left(\frac{R_{10}}{R_5} \frac{R_b}{R_6} \tau_2 \tau_3 \tau_4 \right) s^3 + \left(\frac{R_{10}}{R_2} \tau_3 \tau_4 \right) s^2 + \left(\frac{R_{10}}{R_6} \frac{R_b}{R_9} \tau_1 \right) s + 1 \right\} \quad (3-45)$$

由 $T_s = T_{s,0}$, 于是有

$$\begin{aligned} \frac{R_b}{R_c} \frac{R_{10}}{R_7} x_1 x_2 x_3 x_4 &= a_4 \\ \frac{R_{10}}{R_c} x_1 x_2 x_3 x_4 &= b_4 \\ \frac{R_{10}}{R_5} \frac{R_b}{R_c} x_2 x_3 x_4 &= b_3 \\ \frac{R_{10}}{R_9} x_3 x_4 &= b_2 \\ \frac{R_{10}}{R_6} \cdot \frac{R_b}{R_c} x_4 &= b_1 \end{aligned} \quad (3-46)$$

式中 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ 取标称形式:

$$x_1 = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad x_2 = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \quad x_3 = \frac{\tau_3}{\tau_0}, \quad x_4 = \frac{\tau_4}{\tau_0}$$

τ_0 是频率轴的刻度。

没有附加条件的方程组(3-46)不可能唯一地决定元件值, 但它可以一次近似地估计用图 3-53 的电路物理实现式(3-44)的传输函数的范围, 传输函数物理实现的范围可用下列不等式描述:

$$a_4 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b_3 > 0, \quad b_4 > 0 \quad (3-47)$$

如果不满足式(3-47), 则式(3-46)的解没有物理意义。如果在式(3-46)上再加入积分器的时间常数相等的条件 ($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_0$), 则有

$$\begin{aligned} \frac{R_b}{R_c} \frac{R_{10}}{R_7} &= \frac{a_4}{x_0^4} \\ \frac{R_{10}}{R_c} &= \frac{b_4}{x_0^4} \\ \frac{R_{10}}{R_5} \frac{R_b}{R_c} &= \frac{b_3}{x_0^3} \\ \frac{R_{10}}{R_9} &= \frac{b_2}{x_0^2} \\ \frac{R_{10}}{R_6} \frac{R_b}{R_c} &= \frac{b_1}{x_0} \end{aligned} \quad (3-48)$$

由式(3-48)可写出下列方程:

$$x_0^4 - b_1 x_0^3 + b_2 x_0^2 - b_3 x_0 + b_4 = a_4 \quad (3-49)$$

它是式(3-44)物理实现的范围。如果使所有反馈环的电阻值相等 ($R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = R_9 = R_{10}$), 则可得出方程组的解:

$$x_4 = b_1, \quad x_3 = b_2/b_1, \quad x_2 = b_3/b_2, \quad x_1 = b_4/b_3 \quad (3-50)$$

上面讨论了高通滤波器的有源电路实现。现在讨论低通滤波器的实现。给定四阶传输函数

$$T_g(s) = \frac{a_0}{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + 1} \quad (3-51)$$

利用图 3-53 的电路从输出端 2 取出信号, 即可实现传输函数(3-51)。由图 3-54 可写出从输入端 0 至输出端 S_2 的传输:

$$T_{s,0} = \left\{ \frac{R_{10}}{R_7} \cdot \frac{R_b}{R_a} \right\} / \left\{ \left(\frac{R_{10}}{R_8} \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \right) s^4 + \left(\frac{R_{10}}{R_5} \frac{R_b}{R_a} \tau_2 \tau_3 \tau_4 \right) s^3 + \left(\frac{R_{10}}{R_9} \tau_3 \tau_4 \right) s^2 + \left(\frac{R_{10}}{R_6} \cdot \frac{R_b}{R_a} \tau_4 \right) s + 1 \right\} \quad (3-52)$$

由 $T_g = T_{s,0}$ 有

$$\begin{aligned} \frac{R_{10}}{R_7} \cdot \frac{R_b}{R_a} &= a_0, \\ \frac{R_{10}}{R_8} x_1 x_2 x_3 x_4 &= b_4, \\ \frac{R_{10}}{R_5} \frac{R_b}{R_a} x_2 x_3 x_4 &= b_3, \\ \frac{R_{10}}{R_9} x_3 x_4 &= b_2, \\ \frac{R_{10}}{R_6} \frac{R_b}{R_a} x_4 &= b_1 \end{aligned} \quad (3-53)$$

由方程组(3-53)并设 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_0$, 可得出下列条件:

$$(1 - a_0) x_0^4 - b_1 x_0^3 + b_2 x_0^2 - b_3 x_0 + b_4 = 0 \quad (3-54)$$

式(3-54)决定了利用图 3-53 物理实现式(3-52)的范围。它的正实数解(对 x_4)就是方程组(3-53)的解。如果电阻 $R_5 = R_6 =$

$R_7 = R_8 = R_9 = R_{10}$, 则式(3-53)的解为

$$x_1 = b_4/b_3, x_2 = b_3/b_2, x_3 = b_2/b_1, x_4 = b_1 \quad (3-55)$$

实际上,式(3-48)和式(3-53)的解只是积分器的时间常数.知道时间常数后,还不能单值地决定相应的电阻和电容($R_1C_1, R_2C_2, R_3C_3, R_4C_4$). 解的这种非单值性也不一定是个缺点. 它给我们在选取电阻和电容时以一定的自由度,例如,如果必须最大限度地降低 RC 有源电路的输入和输出阻抗对传输函数的影响,需使

$$R_{10} \gg (R_1, R_2, R_3, R_4) \gg R_{out} \quad (3-56)$$

如果满足

$$(C_1, C_2, C_3, C_4) \gg C_{in}, C_{out} \quad (C_{in} \text{ 和 } C_{out} \text{ 分别是运算放大器的输入和输出电容}) \quad (3-57)$$

则 C_{in} 和 C_{out} 对传输的影响也可忽略.

3-5 传输函数的有源实现(二)

本节讨论传输函数有源实现的拓扑方法,将分两步进行. 第一步是由给定的传输函数找出对应的信号流图实现. 第二步是根据得出的信号流图求得对应的有源电路. 在实现过程中,信号流图起着桥梁作用.

3-5-1 传输函数的拓扑实现

首先,讨论给定的传输函数的拓扑实现,即用信号流图表示给定的传输函数. 对于给定的传输函数,可以有各种不同的拓扑实现. 但是,长期以来,还无一个普遍的方法能得到所有可能的实现. 最近,林本铭提出了一个取得给定的传输函数的所有可能实现的方法^[6],解决了给定传输函数的所有可能拓扑实现.

为确定起见,讨论单输入、单输出的线性连续系统. 其传递函数

$$H(s) = \frac{Y}{V} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}, m \leq n \quad (3-58)$$

所谓 $H(s)$ 的典型实现是指对应于 $H(s)$ 的信号流图 G 满足下列条件(以下将典型实现简写为实现):

- (1) G 只有一个源点 V 和一个汇点 Y .
- (2) 每个系数 $a_i (i = 0, 1, \dots, m)$ 和 $b_j (j = 0, 1, \dots, n-1)$ 只能作为支路传输在 G 中出现 1 次(符号可为正或负).
- (3) Laplace 变换的变量 s 在 G 中只能以 $1/s$ 的形式出现 n 次.
- (4) G 以最少的支路实现 $H(s)$.

将式(3-58)的分子和分母同时除以 s^n , 并以 p 代替 $1/s$, 则有

$$H(p) = N(p)/D(p) \quad (3-59, a)$$

式中

$$N(p) = a_m p^{n-m} + a_{m-1} p^{n-m+1} + \dots + a_1 p^{n-1} + a_0 p^n \quad (3-59, b)$$

$$D(p) = 1 + b_{n-1} p + b_{n-2} p^2 + \dots + b_0 p^n \quad (3-59, c)$$

为了用信号流图实现 $H(p)$, 要利用 Mason 增益公式的基本性质. 对于分母 $D(p)$ 中的任一项 $b_{n-k} p^k$ 来说, 它对应于一个有向环. 该环中共有 $(k+1)$ 条支路. 其中一条支路的传输为 $-b_{n-k}$, 其余 k 条支路的传输均为 p . 由式(3-59,c)可知, 最多有 n 个这样的有向环. 每个环中分别包括一条传输为 b_0, b_1, \dots, b_{n-1} 的支路. 而且, 这 n 个环中的任何两个环都应该是互相接触的. 否则, 将出现一些包括 $b_k b_s \dots (k, s = 1, 2, \dots, n, k \neq s)$ 乘积的项. 由式(3-59,c)可知, 这是不允许的. 由 1-10 节关于图的指数的定义可知, 图的指数一定为 1. 也就是说, 在实现 $H(p)$ 的信号流图 G 中, 至少可以找到一个节点, 该节点分裂后将断开图中所有的环. 这就是 $H(p)$ 的拓扑实现的出发点.

因此, $D(p)$ 应为下列形式:

$$D(p) = 1 - (L_1 + L_2 + \dots + L_n) \quad (3-60)$$

式中 L_1, L_2, \dots, L_n 为 n 个相互接触的一阶环的传输, 它们分别为 $b_{n-1} p, b_{n-2} p^2, \dots, b_0 p^n$.

因为系数 a_k 只出现在分子 $N(p)$ 中, 故包括传输为 a_k 的支路不能出现在环中, 只能包括在从源点 V 到汇点 Y 的路上. 而且,

每条这样的路必须接触所有的环，否则， $N(p)$ 中将出现乘积为 $a_k b_i$ 形式的项。这也是不允许的。

因此， $N(p)$ 应为下列形式：

$$N(p) = p_1 + p_2 + \dots + p_m \quad (3-61)$$

式中 p_1, p_2, \dots, p_m 分别为从源点 V 到汇点 Y 的 m 条路的传输。它们分别为 $a_m p^{n-m}, a_{m-1} p^{n-m-1}, \dots, a_0 p$ 。

下面分别讨论 $D(p)$ 和 $N(p)$ 的实现。

1. $D(p)$ 的实现

$D(p)$ 中除 1 外有 n 项，对应于 n 个环（其长度分别为 $2, 3, \dots, n+1$ ）。要使这 n 个环互相接触，长度为 2 的环（即传输为 $-b_{n-1} p$ 的环）起着重要的作用。我们称它为核心环。核心环的两个节点分别用 R 和 L 表示。为确定每条传输为 $-b_{n-k}$ 的支路的起点，将图中的节点从右向左以从 1 开始的整数加以编号（图 3-55）。

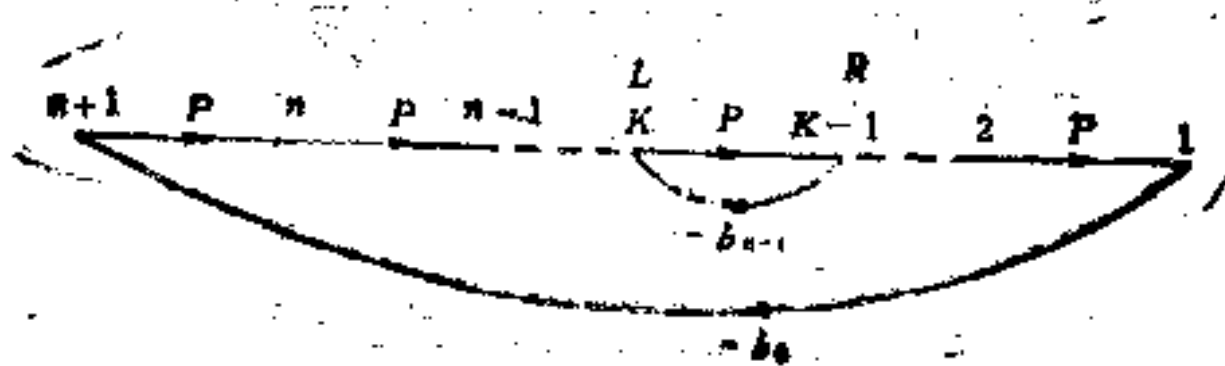


图 3-55

因为满足实现条件的信号流图一定是指数为 1 的图，因此，一定属于下列三种类型之一：

- (1) L 和 R 同时是指数节点，简称 A 型图。
- (2) L 是指数节点， R 不是，简称 B 型图。
- (3) R 是指数节点， L 不是，简称 C 型图。

例如，图 3-56 所示的 $n = 3$ 时 $D(p)$ 的六种实现中，(a)，(b)，(e)，(f) 属于 A 型，(c) 属于 C 型，(d) 属于 B 型。

为了表示 $D(p)$ 的某种实现，分别用 n 个整数表示支路 $-b_{n-1}$ ， $-b_{n-2}$ ， \dots ， $-b_0$ 的起点的位置。因此， $D(p)$ 的每种实现可用下列整数列表示：

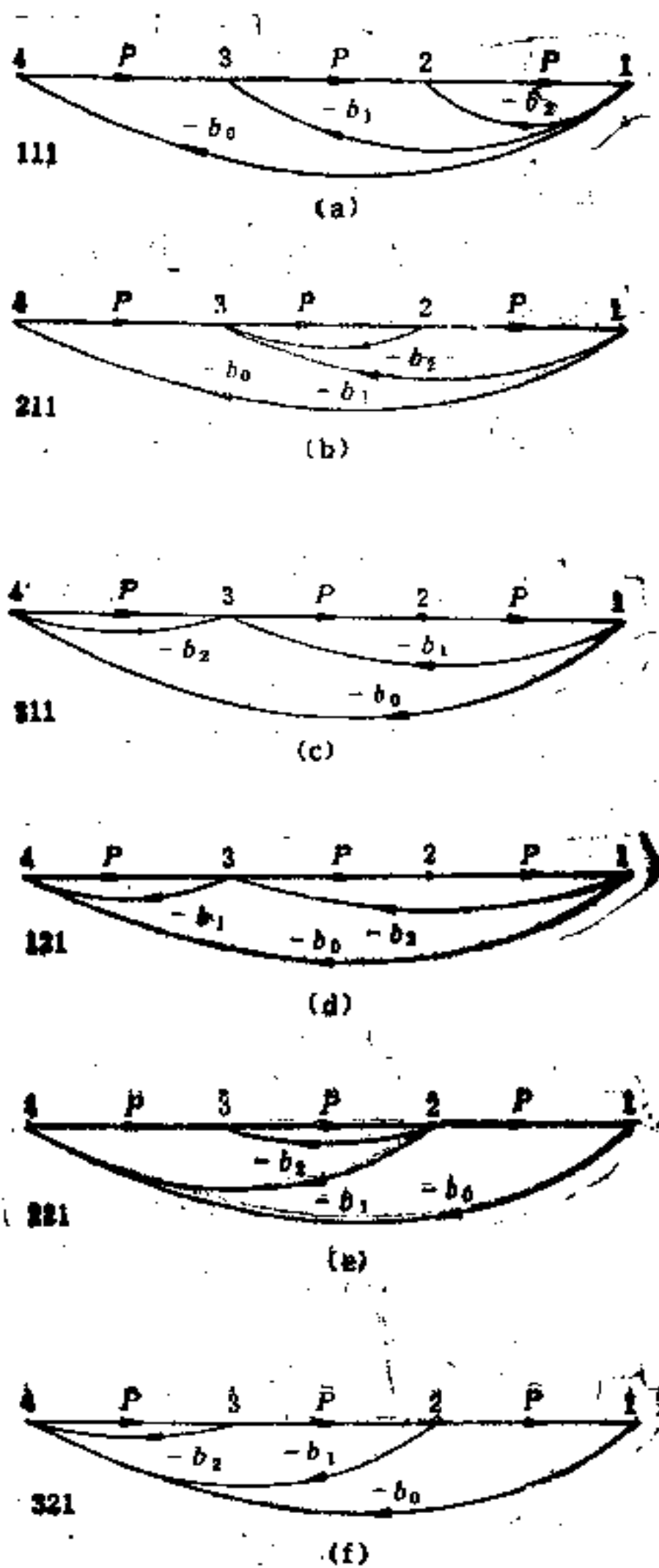


图 3-56

$$M_1 M_2 \cdots M_k \cdots M_{n-1} M_n$$

式中 M_k 表示支路 $-b_{n-k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 的起点号码。 M_1 是支路 $-b_{n-1}$ 的起点号码, 即 R_n 。

图 3-56 中的 6 个图可用 1, 2, 3 中的数码表示在图中。

对于给定的 $R (R = 1, 2, \dots, n)$, $M_k (k = 2, 3, \dots, n)$ 的可能取值与图的类型有关:

对于 A 型图, M_k 可从 $\text{Max}(1, R + 1 - k)$ 变到 $\text{Min}(R, n + 1 - k)$ 。

对于 B 型图, 若 $n + 1 - k \geq L = R + 1$, 则 $M_k = R + 1$, 否则 $M_k = \phi$ (空集)。

对于 C 型图, 若 $R - k \geq 1$, 则 $M_k = R - k$, 否则 $M_k = \phi$ (空集)。

关于 $D(p)$ 的实现, 有下列基本性质:

性质 1. 对于 $D(p)$ 的任一种实现, 各种不同的 $M_k (k = 2, 3, \dots, n)$ 只能从

- (1) A 型图中取不同的组合。
- (2) A 型图和 B 型图中取不同的组合。
- (3) A 型图和 C 型图中取不同的组合。

这是很明显的, 因为上述三种情况都导致实现后的图一定是指数为 1 的。但若从 A, B, C 型图中取不同的组合, 将导致图的指数为 2。

性质 2. 某一给定的 $M_1 = j$ 所产生的 $M_2 \cdots M_n$ 与 $M_1 = n - j + 1$ 所产生的 $M_2 \cdots M_n$ 间一一对应, 即:

(1) 对于 A 型图, $M_1 = j$ 时的 M_s 与 $M_1 = n - j + 1$ 时的 $M_s (s = 2, \dots, n)$ 中的节点数相等。

(2) $M_1 = j$ 的 B 型图 (C 型图) 中的 M_s 与 $M_1 = n - j + 1$ 的 C 型图 (B 型图) 中的 $M_s (s = 2, \dots, n)$ 的节点数相等。

将 $R = j$ 和 $R = n - j + 1$ 代入 B 型图和 C 型图中的 M_k 的表示式, 不难证明性质 2。

性质 3. 当 n 为奇数, 则 $M_1 = R = \frac{n+1}{2}$ 时 B 型图中的 M_s 与 C 型图中的 $M_s (s = 2, 3, \dots, n)$ 对应地相等。

将 $R = \frac{n+1}{2}$ 分别代入 B 型图和 C 型图中 M_k 非空的条件, 有

$$n+1-k \geq \frac{n+1}{2} - 1 \quad (3-62, a)$$

及

$$\frac{n+1}{2} - k \geq 1 \quad (3-62, b)$$

由式 (3-62, a) 和 (3-62, b) 的等价性证实了性质 3.

性质 4. 当 $M_1 = R = 1$ 或 2 时, C 型图恒为空图.

这是因为, $R = 1$ 或 2 时, $R - k \geq 1 (k \geq 2)$ 总不能成立.

性质 5. 当 $M_1 = k$ 时, A 型图中 $M_2, M_3, \dots, M_{k-1}, M_k, \dots, M_{n-k}, M_{n-k+1}, \dots, M_n$ 所包括的节点数如下:

$$\begin{array}{ccccccc} M_2 & M_3 & \dots & M_{k-1} & M_k & \dots & M_{n-k} & M_{n-k+1} & \dots & M_n \\ 2 & 3 & \dots & k-1 & k & \dots & k & k & \dots & 1 \end{array}$$

将 $R = k$ 和 $k = 2, 3, \dots, n$ 代入 A 型图中 M_k 的表示式即得出上述结果.

于是, 由性质 1, 2, 3, 4, 5, 可得出 $D(\rho)$ 的全部实现数 N_c 如下:

(1) 当 n 为偶时:

$$\begin{aligned} N_c &= 2 \times \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (k+1)! (k+1)^{n-k-1} + 2 \times \sum_{k=3}^{\frac{n}{2}} k! \\ &\times \left\{ \frac{k!}{2} [k^{n-2k+1} + (k+1)^{n-2k+1}] - k^{n-2k+1} (k-1)! \right\} \quad (3-63, a) \end{aligned}$$

(2) 当 n 为奇时:

$$\begin{aligned} N_c &= 2 \times \sum_{k=1}^{\frac{(n-1)}{2}} (k+1)! (k+1)^{n-k-1} + 2 \times \sum_{k=3}^{(n-1)/2} k! \\ &\times \left\{ \frac{k!}{2} [k^{n-2k+1} + (k+1)^{n-2k+1}] - k^{n-2k+1} (k-1)! \right\} \\ &+ \left[\frac{(n-1)!}{2} \right] \cdot \frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{(n+1)}{2} \quad (3-63, b) \end{aligned}$$

将 $n = 4, 5, 6, 7, 8 \dots$, 分别代入式 (3-63, a) 和式 (3-63, b) 可得

n	4	5	6	7	8	...
N_c	20	76	320	1504	7760	...

2. $N(p)$ 的实现

由式 (3-59, b) 可知, 从源点 V 到汇点 Y 的每条路对应于一项 $a_k p^{n-k}$. 这条路包括传输为 a_k 的支路和传输为 p 的 $(n-k)$ 条支路. 而且, 这条路必须通过节点 L , 或节点 R , 或节点 L 和 R . 因此, 得到两种实现 $N(p)$ 的方法:

(1) 所有传输为 a_k 的支路的起点在源点 V , 其终点在集合 $(n+1, n, n-1, \dots, L, R)$ 中. 汇点 Y 通过传输为 1 的支路接到节点 Y' . Y' 在集合 $(L, R, \dots, 2, 1)$ 中, 不能在 a_k 的终点的左边.

(2) 所有传输为 a_k 的支路终点在汇点 Y , 其起点在集合 $(L, R, \dots, 2, 1)$ 中. 源点 V 通过传输为 1 的支路接到节点 V' . V' 在集合 $(n+1, n, n-1, \dots, L, R)$ 中, 不能在 a_k 的起点的右边.

所有支路 a_k 的位置完全由节点 Y' 或 V' 的位置所决定. 因此, $N(p)$ 的实现可由符号 $Y'M$ 或 $V'M$ 描述. 这里 M 表示 Y' 或 V' 的位置. 将 $Y'M$ 或 $V'M$ 加到 $D(p)$ 的数列上即构成 $H(p)$ 的实现. $N(p)$ 的全部实现数只与 R 或 L 有关, 即只取决于 $D(p)$ 中的 M_1 . 也就是说, 对同样的 M_1 , $N(p)$ 的全部实现数相同.

为一般性, 不妨设分子的最高阶数为 M_N [在式 (3-59, b) 中为 n] 和最低阶数为 m_N [在式 (3-59, b) 中为 $n-m$].

因此, 对应于 $N(p)$ 的实现方法 (1), Y' 的可行点集从 $Y'_1 = \text{Max}(R - m_N, 1)$ 到 $Y'_2 = \text{Min}(L, n + 1 - M_N)$. 若 $Y'_1 > Y'_2$, 则 Y' 为空集.

对应于 $N(p)$ 的实现方法 (2), V' 的可行点集从 $V'_1 = \text{Max}(R, M_N + 1)$ 到 $V'_2 = \text{Min}(n + 1, m_N + L)$. 若 $V'_1 > V'_2$, 则

V' 为空集.

例如, 考虑传输函数

$$\frac{Y}{V} = H(p) = \frac{a_2 p + a_1 p^2}{1 + b_2 p + b_1 p^2 + b_0 p^3} \quad (3-64)$$

这里 $M_N = 2, m_N = 1, n = 3$. 故在

$R = 1$ 时, $Y'_1 = 1, Y'_2 = 2; V'_1 = 3, V'_2 = 3$.

$R = 2$ 时, $Y'_1 = 1, Y'_2 = 2; V'_1 = 3, V'_2 = 4$.

$R = 3$ 时, $Y'_1 = 1, Y'_2 = 2; V'_1 = 3, V'_2 = 4$.

而 $R = 1, 2, 3$ 时, $D(p)$ 的实现数均为 2. 故 $H(p)$ 的全部实现数 $= (2 \times 3) + (2 \times 4) + (2 \times 3) = 20$ 种. 其具体方式为

111Y'1, 111Y'2, 111V'3, 121Y'1, 121Y'2, 121V'3.

211Y'1, 211Y'2, 211V'3, 211V'4, 221Y'1, 221Y'2,

221V'3, 221V'4.

311Y'2, 311V'3, 311V'4, 321Y'2, 321V'3, 321V'4.

其中两种实现如图 3-57.

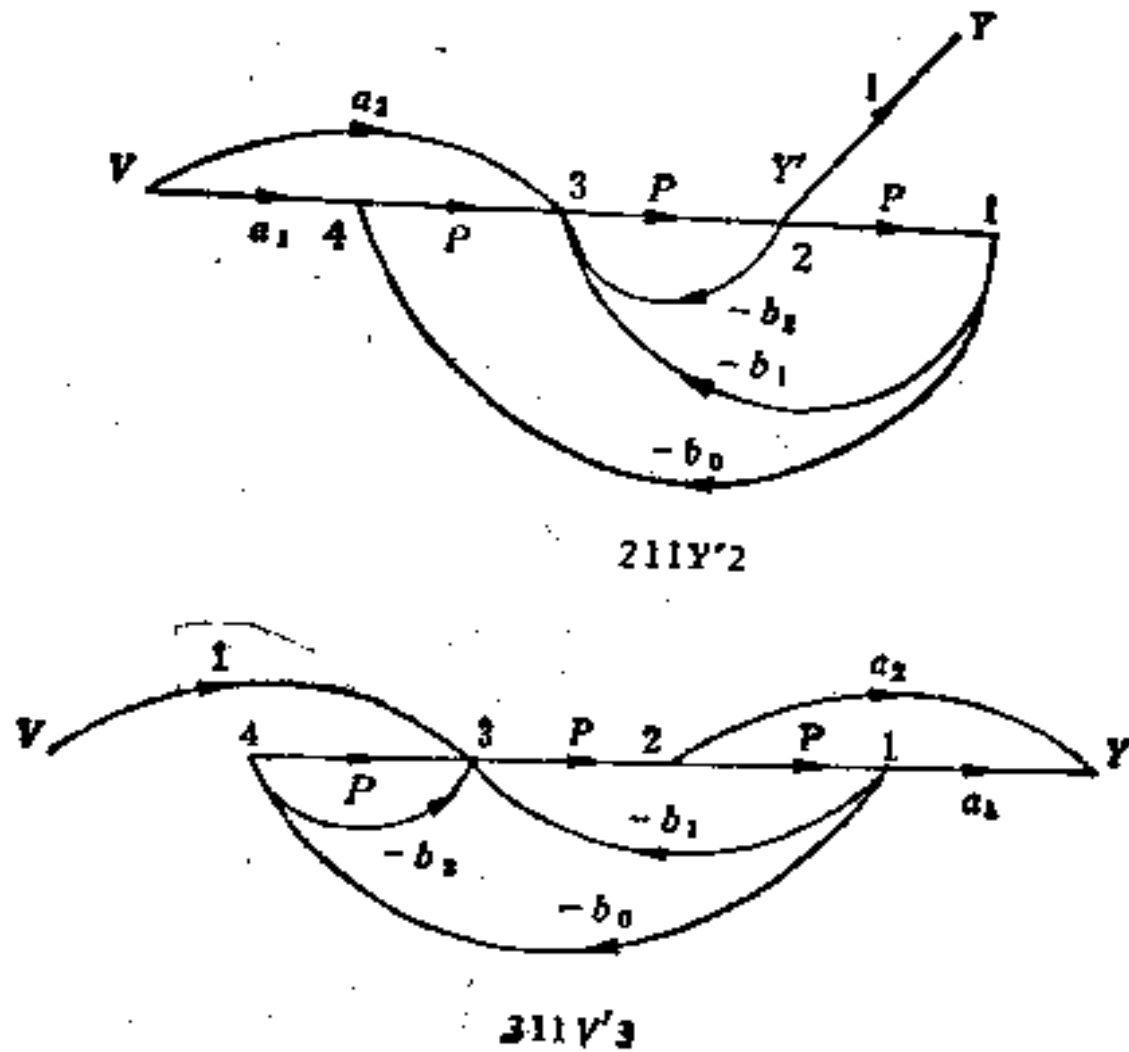


图 3-57

3. 实现 $H(p)$ 的算法

由 $D(p)$ 和 $N(p)$ 的实现方法可知,当 $D(p)$ 的最高阶数 n 已知后,对于 $R = 1, 2, \dots, n$, $D(p)$ 总是可以实现的,但 $N(p)$ 则不一定能实现. 因此,对于不同的 $R = 1, 2, \dots, n$, 先决定 $N(p)$ 能否实现. 当 $N(p)$ 能实现时,找出它的全部实现数 $R_N(R)$. 然后再找出 $D(p)$ 的全部实现数 $R_D(R)$, 则 $H(p)$ 的全部实现数 $R[H(p)] = \sum_R R_N(R) \cdot R_D(R)$, \sum 表示对 $N(p)$ 的所有可行的 R 求和. 这样可避免搜索那些对 $H(p)$ 无贡献的 $D(p)$, 减少计算量. 算法步骤如下:

第 1 步. $R \leftarrow 0$.

第 2 步. $R \leftarrow R + 1$. 计算 $N(p)$ 的可行点集 Y'_1, Y'_2 及 V'_1, V'_2 . 如果 $Y'_1 > Y'_2$, 则 Y' 为空集. 如果 $V'_1 > V'_2$, 则 V' 为空集. 如果 Y' 和 V' 同时为空集, 则转第 4 步. 否则, 转第 3 步.

第 3 步. 对上述 R , 分别对 A、B、C 型图取 $M_k (k = 2, 3, \dots, n)$. 然后, 按性质 1 取各种组合, 即得到对应于该 R 的 $D(p)$.

第 4 步. 如果 $R < n$, 则转第 2 步. 否则, 算法结束.

例如, 求式(3-59)中 $m = n - 1$ 时 $H(p)$ 的实现.

这时, $N(p)$ 的最高阶数 $M_N = n$, 最低阶数 $m_N = 1$.

$R = 1$ 时, $Y'_1 = 1, Y'_2 = 1; V'_1 = n + 1, V'_2 = 3$, 故 V' 为空集.

$R = 2$ 时, $Y'_1 = 1, Y'_2 = 1; V'_1 = n + 1, V'_2 = 4$, 故 V' 为空集.

$R = 3, \dots, n - 2$ 时, Y' 和 V' 均为空集.

$R = n - 1$ 时, $Y'_1 = n - 2, Y'_2 = 1$, 故 Y' 为空集, $V'_1 = n + 1, V'_2 = n + 1$.

$R = n$ 时, $Y'_1 = n - 1, Y'_2 = 1$, 故 Y' 为空集, $V'_1 = n + 1, V'_2 = n + 1$.

故对 $N(p)$, 只有 $R = 1, 2, n - 1$ 和 n 是可行的. 于是, 分别在 $R = 1, 2, n - 1$ 和 n 时求得 $D(p)$ 的实现. 由于 $R =$

1, 2, $n-1$ 和 n 时 $N(p)$ 的实现数均为 1. 故 $H(p)$ 的全部实现数 $= \sum_R R_N(R) \cdot R_D(N) = 1 \times (2)!(2)^{n-3} + 1 \times (3)!(3)^{n-4} + 1 \times (3)!(3)^{n-4} + 1 \times (2)!(2)^{n-3} = 2 \times (2^{n-2} + 2 \times 3^{n-3})$.

其中两种实现如图 3-58 所示.

现讨论式(3-59)中 $n = m$ 的情况. 这时, $M_N = n, m_N = 0$. 故只有 $R = 1$ 和 $R = n$ 是可行的. $R = 1$ 时, Y' 为 1, V' 为空

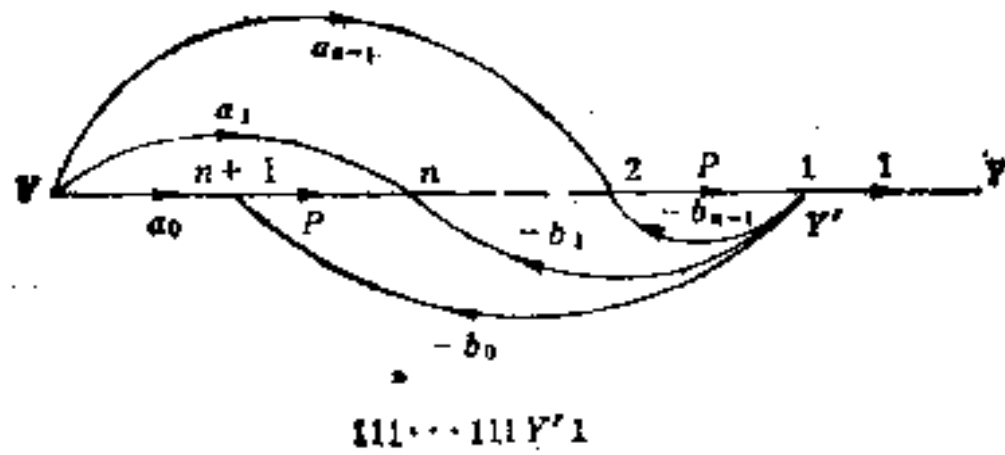
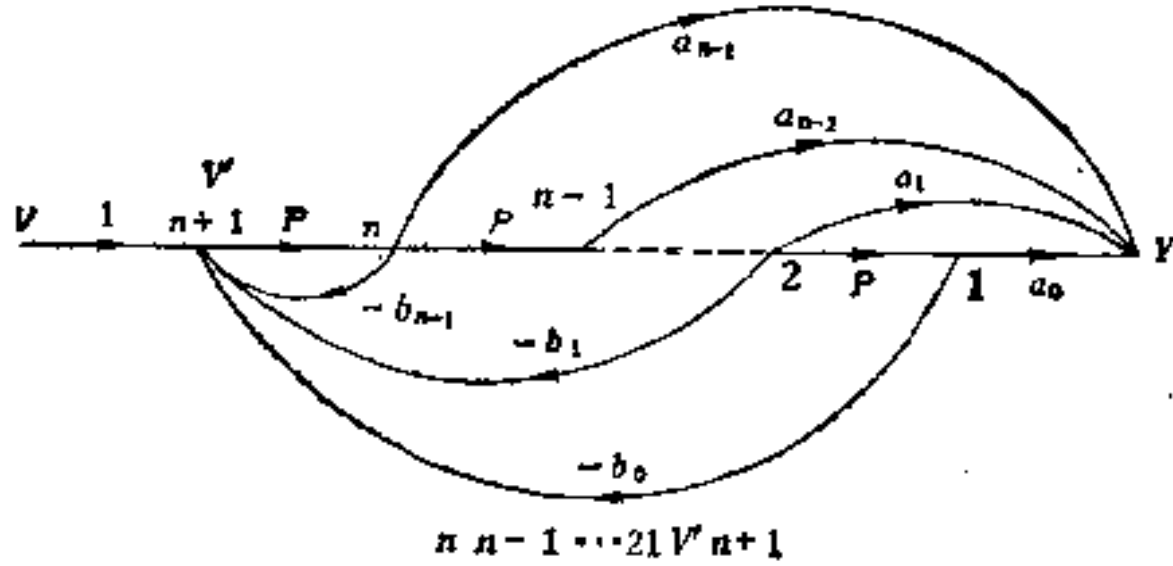


图 3-58

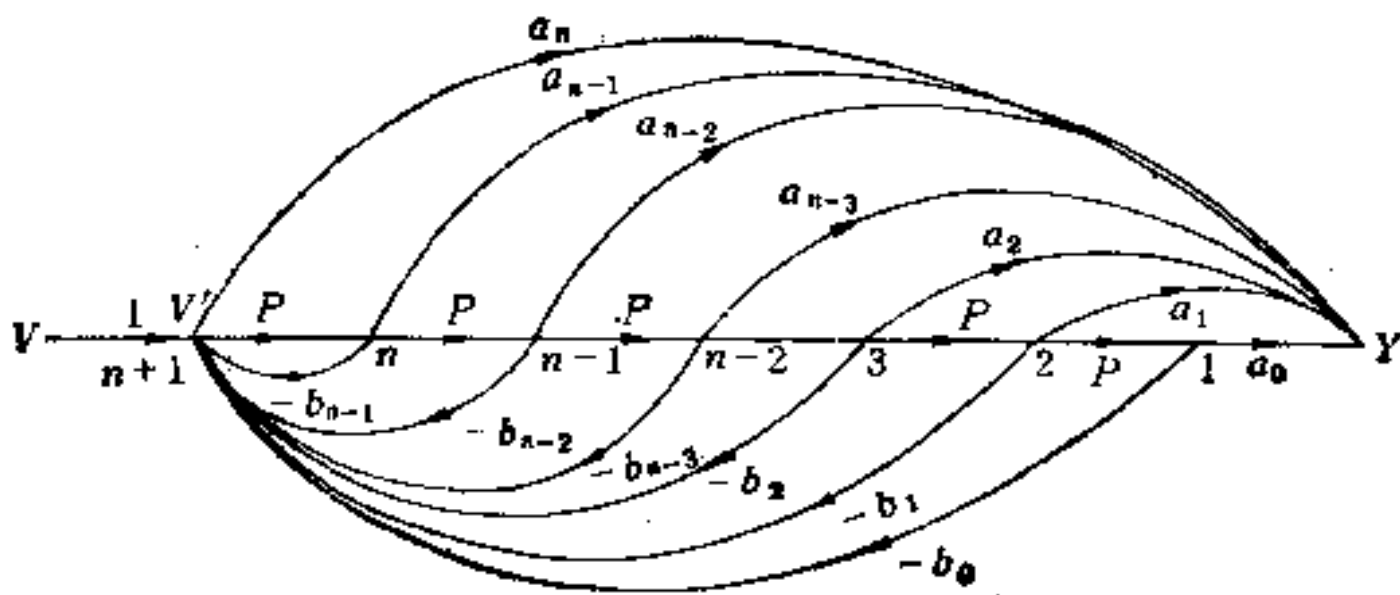


图 3-59

集. $R = n$ 时, Y' 为空集, V' 为 $n + 1$. 故 $H(p)$ 的全部实现数为 $2 \times (2!)2^{n-3}$. 其中的一种实现 $n n - 1 \cdots 2, 1 V' n + 1$ 如图 3-59 所示.

当 $n = 4$ 时, $H(p)$ 的可能实现数 $= 2 \times (2!)2^{4-3} = 8$. 具体

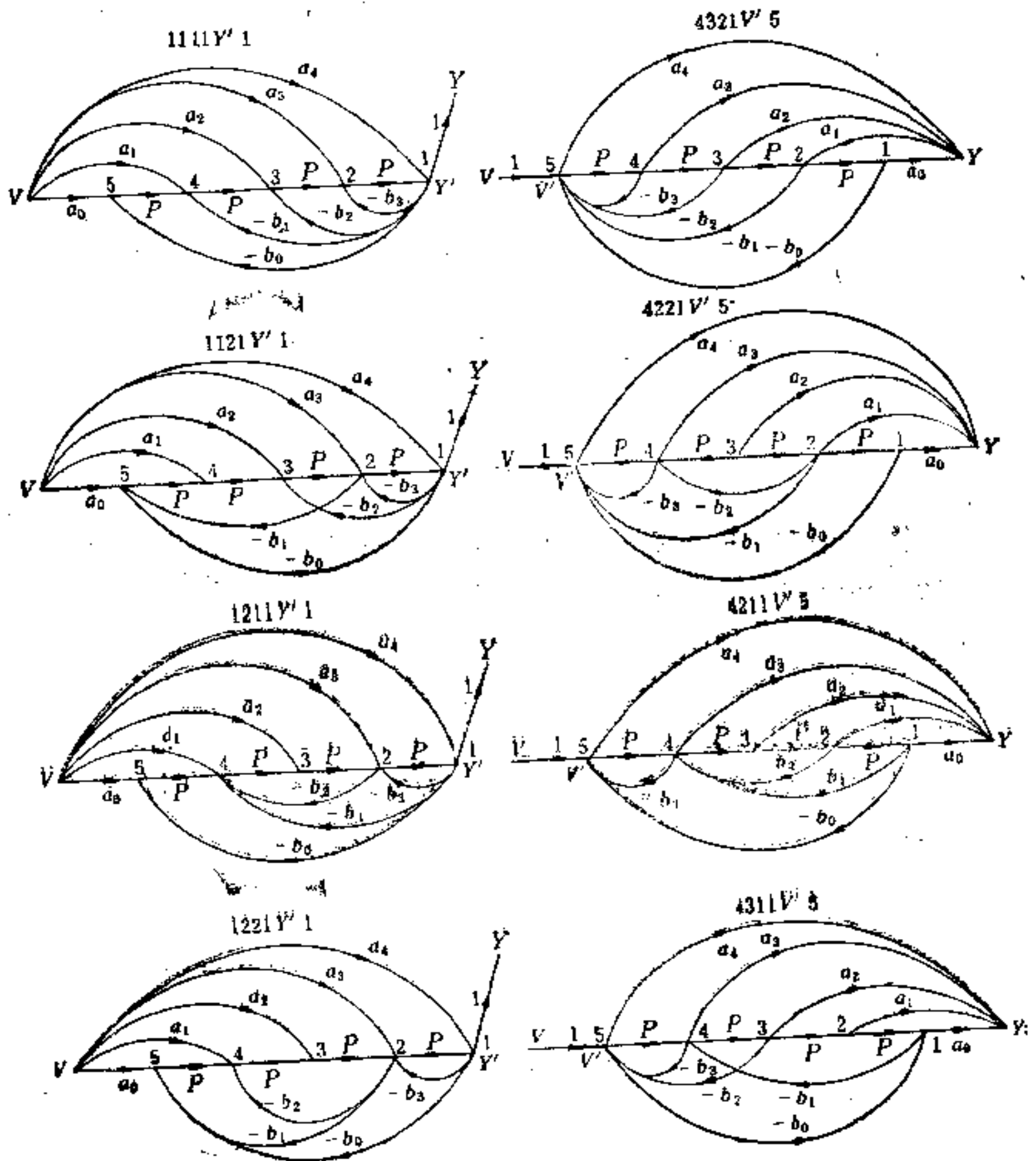


图 3-60

的实现形式如图 3-60 所示。

当 $n = 2$ 时

$$H(p) = \frac{a_2 + a_1 p + a_0 p^2}{1 + b_1 p + b_0 p^2} \quad (3-65)$$

式(3-65)的 $H(p)$ 称为双二次传输函数。与它对应的一种信号流图如图 3-61 所示。这种信号流图称为双二次直接形式的信号流图。由后者实现的有源电路称为双二次节。双二次节在有源电路实现中起着很重要的作用。下面将详细讨论它。

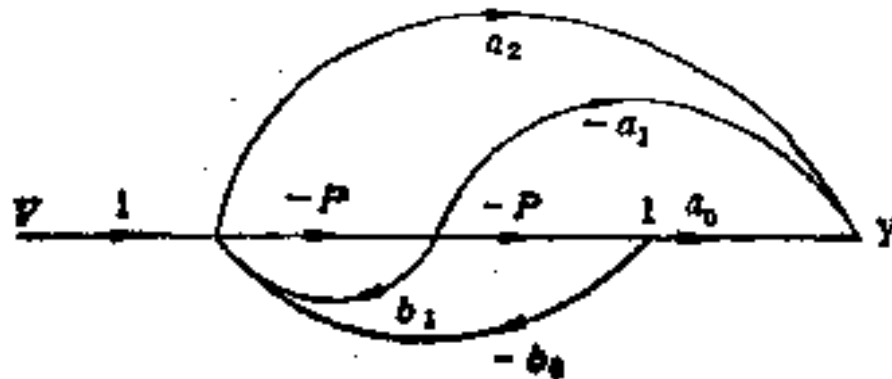


图 3-61

图 3-61 中,每条支路传输由原来的 p 变为 $-p$, 故相应的 a, b 支路传输的符号也有所变化。这只是为了具体实现的方便。图的拓扑结构并没有什么变化。

这里所提出的算法可以无重复、无遗漏地产生任意 $H(p)$ 的全部实现,虽然讨论是对线性连续系统进行的。上述结果可直接推广到线性离散系统,仅需用 $H(z)$ 代替 $H(p)$, 用 $1/z$ 代替 $1/s - p$ 即可。

3-5-2 信号流图的有源电路实现

现在,将讨论传输函数有源实现的第二步,即从信号流图找出对应的有源电路。它的基本思想是应用有源部件与信号流图的支路传输的对应性,用一些有源部件代替信号流图的对应支路,并将这些有源部件连接起来即构成有源电路。为此,需要提出一些基本部件和它们对应的信号流图,以便实际应用。这些有源部件是由运算放大器构成的。同时假设,运算放大器都是理想的,即增益

为无限大,输入阻抗为无限大,输出阻抗为零。下面,列出一些常用的基本电路和它们对应的信号流图(图3-62)。对应的条件是电路的传输函数和信号流图的传输相等。

图3-62中,(a)是反相放大器($K=1$ 时即为反相器),(b)是反相积分器,(c)是有损耗的积分器,(d)是同时实现相加运算的反相积分器,(e)是反相微分器,(f)是减小微分器的高频增益的电路,(g)是实现双线性传输函数的电路,(h)是反相加法器电路。

现在,利用图3-62中的一些基本部件来实现上面的信号流图。例如,实现图3-59的信号流图需用的基本部件是积分器、反相器和加法器。因为图3-62(b)是反相积分器电路,要实现支路传输 $p = \frac{1}{s}$,需要用反相积分器加一反相器。实现图3-59的有

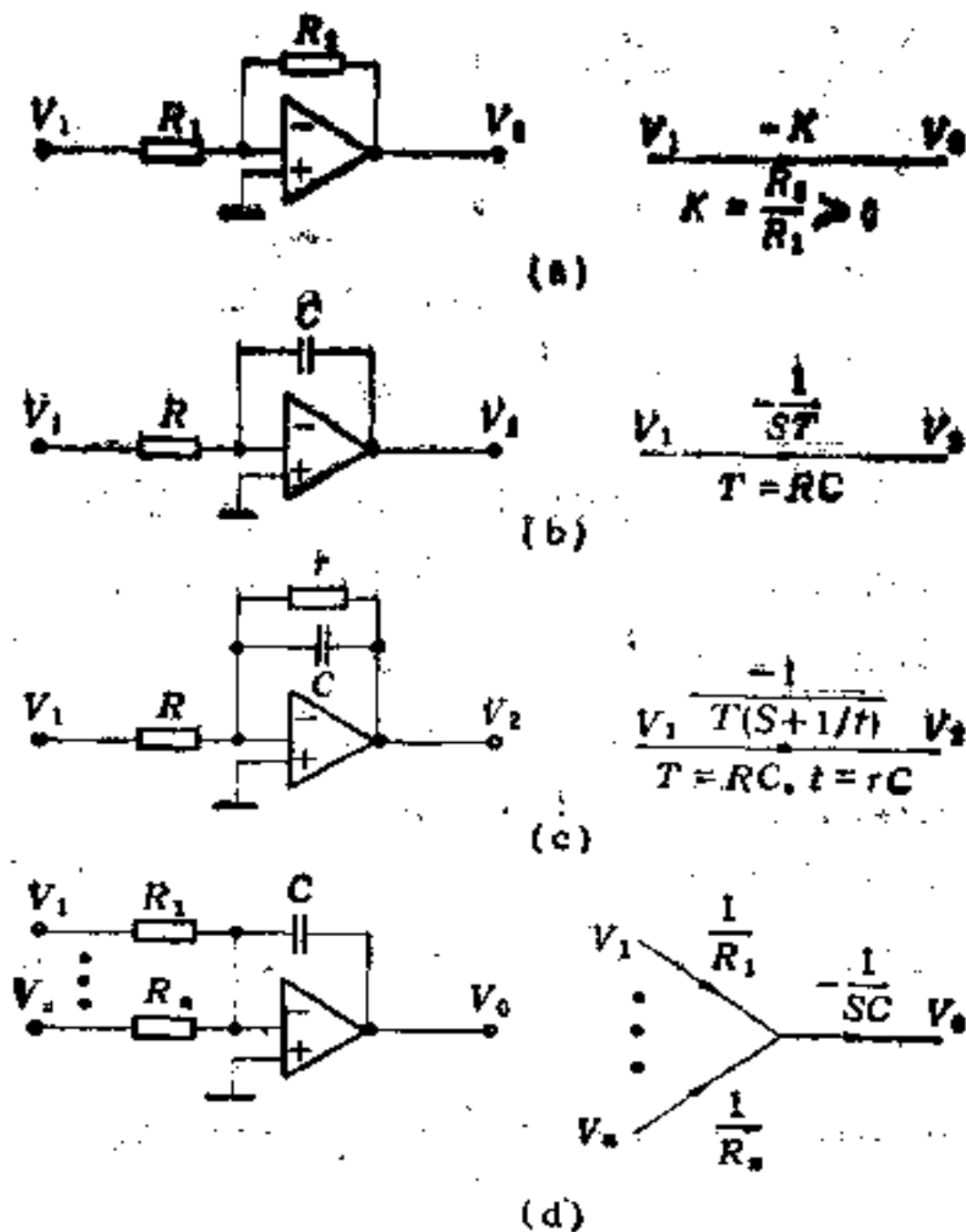


图3-62

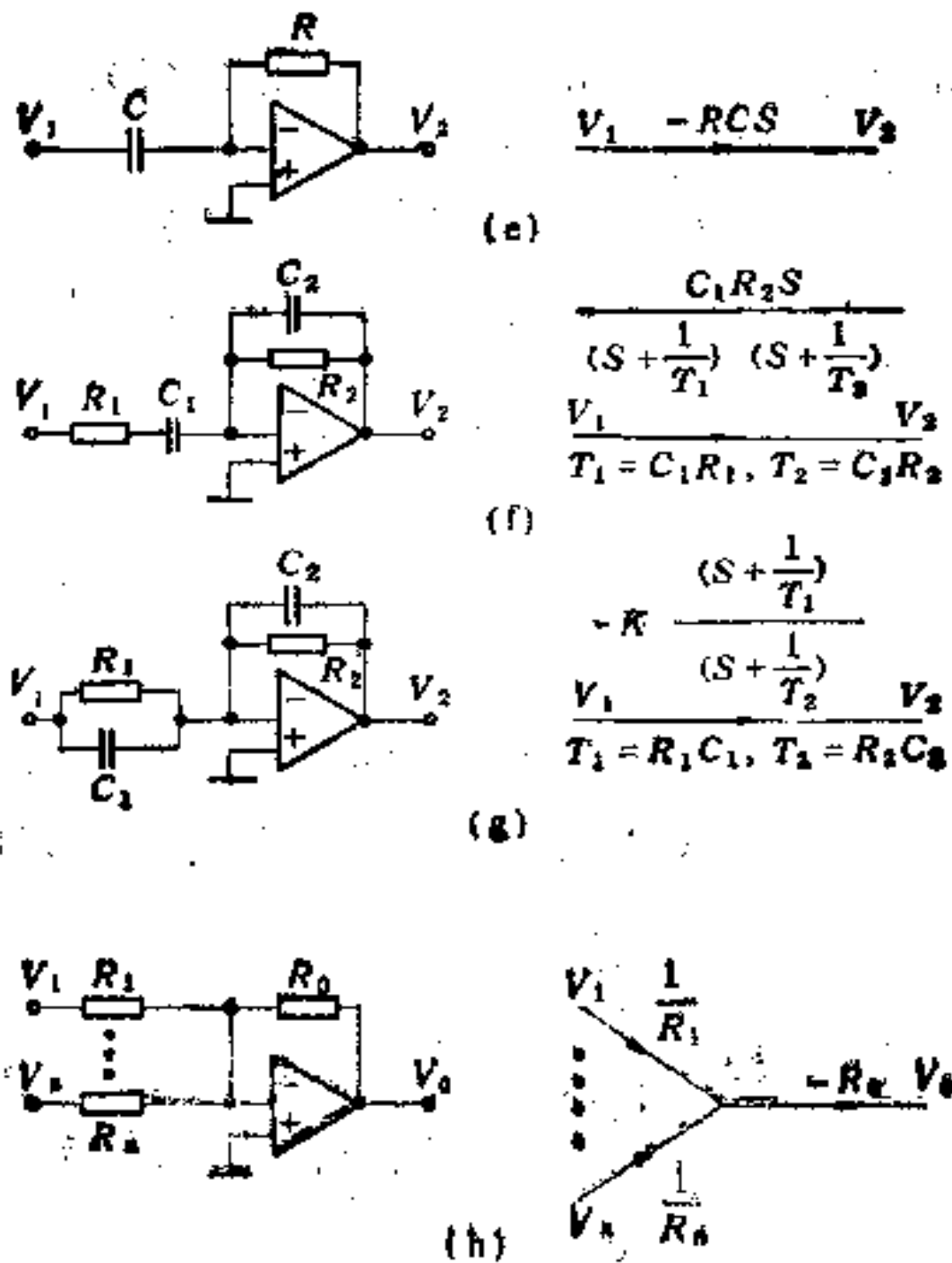


图 3-62(续)

源电路如图 3-63 所示。电路的输入端和输出端各有一加法器和反相器。输入端的反相器用于输入信号的反相，在相加后又有一次反相，以保证至第一个积分器的信号为正。输出端的反相器是为了将加法器输出端的信号反相，抵消了加法器的反相作用。图 3-63 的电路中，共应用了 $2n + 4$ 个运算放大器。

从节省元件(主要是运算放大器)的观点看， $H(p)$ 的典型实现并不是最佳的。例如，对于 $m = n$ ，式(3-58)可用图 3-64 的信号流图表示。

$$\text{在图 3-64 中, } \tau_0 = a_0, \tau_1 = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_0}{1}, \dots, \tau_n = \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}.$$

不难证明，由 Mason 增益公式求源点 V 至汇点 Y 的传输并经化简

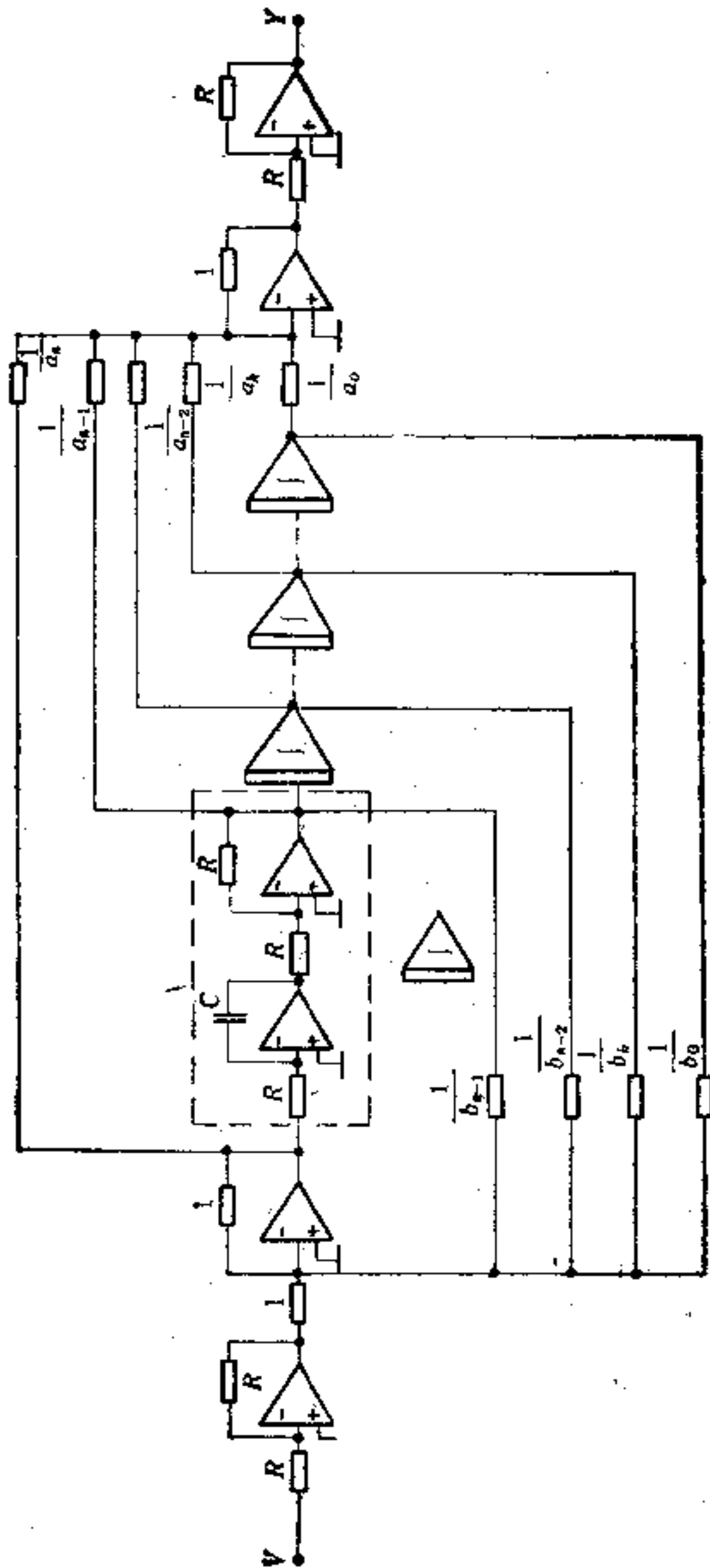


图 3-63

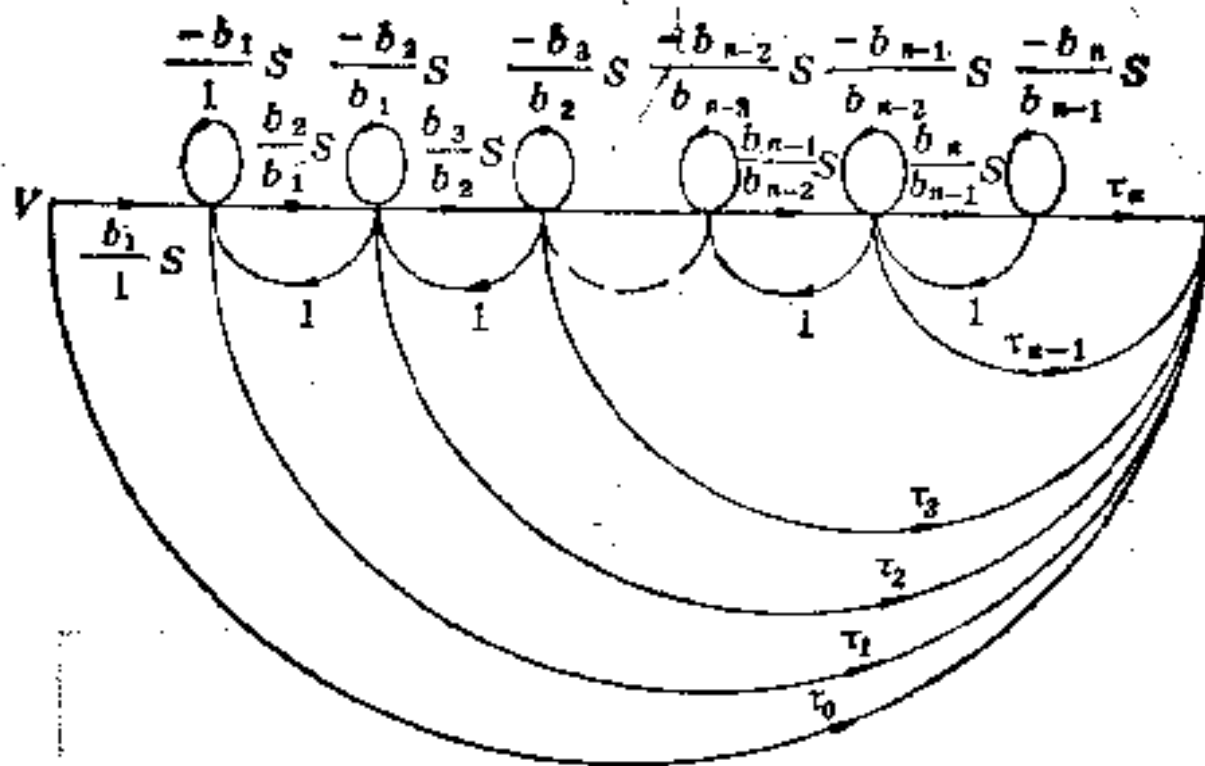


图 3-64

后,即得到式(3-58) ($m = n$ 的情况)。

要用有源电路实现图 3-64,需研究其中一个典型部分 (图 3-65)的实现。图 3-65 可等效地变换成图 3-66(a) 的形式。图 3-66(a) 所对应的有源电路如图 3-66(b)。因此,得到对应于图 3-64 的有源电路如图 3-67 所示。

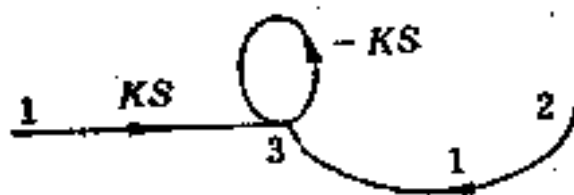


图 3-65

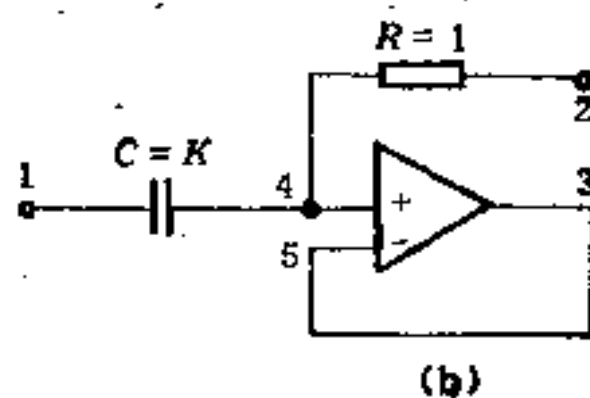
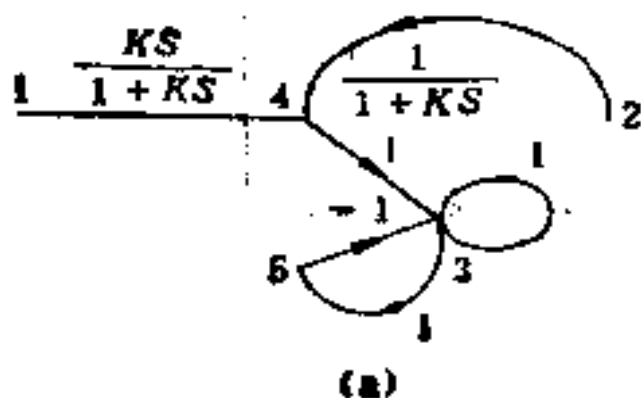


图 3-66

图 3-67 与图 3-63 实现同一传输函数,但它要简单得多,只需要 $n + 2$ 个运算放大器。

对于同一传输函数，可以用各种不同的有源电路实现。决定电路选择的主要判据是电路的灵敏度性能，也就是电路元件参数（例如，RC 元件参数，运算放大器的开环增益 A_0 和增益带宽乘积 B 等）的变化对电路性能的影响。显然，我们要选择参数变化影响较小（也就是灵敏度较低）的电路。从这个观点看，用上述直接形式的结构来实现高阶传输函数是不利的，因为对应的有源电路的性能对元件参数的变化很灵敏（随阶数 n 的增加而迅速增加）^[2]。因此，目前上述电路很少采用。解决这个问题的途径是，首先将高阶传输函数化成一些双二次传输函数之积，即

$$T(s) = \prod_{b=1}^{n/2} T_b(s) = \prod_{b=1}^{n/2} \frac{a_{2b}s^2 + a_{1b}s + a_{0b}}{b_{2b}s^2 + b_{1b}s + b_{0b}} \quad (3-66)$$

当 n 为奇时，要包括一个一阶函数。

由式(3-66)，可得到图 3-68 所示的级联结构。于是，我们

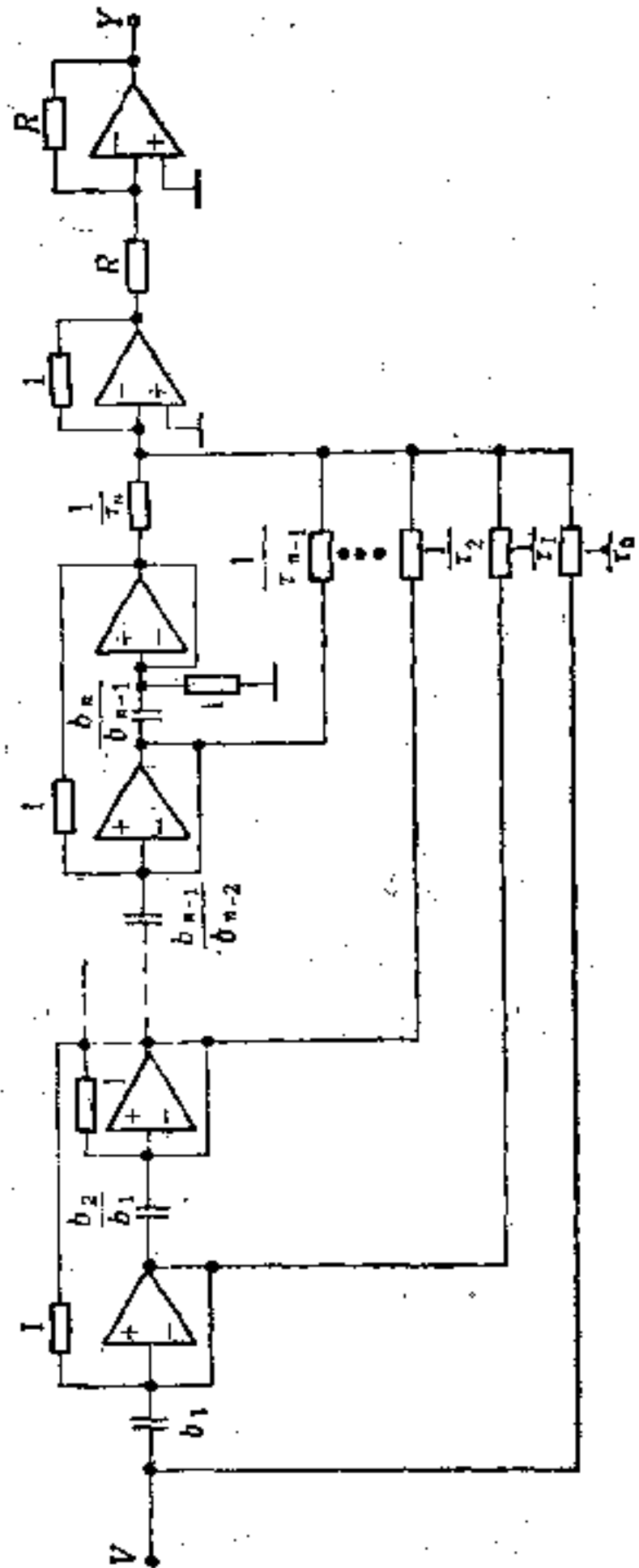


图 3-67

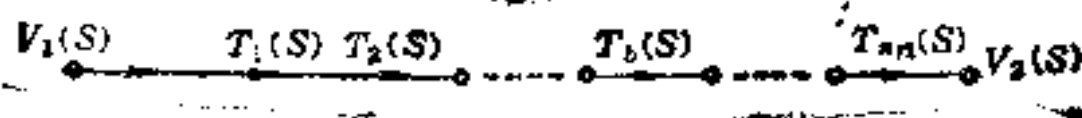


图 3-68

只要分别实现每个双二次传输函数，然后将它们直接连接起来即可实现整个传输函数。由于双二次传输函数所对应的结构（二阶节）具有很低的输出阻抗和很高的输入阻抗，故它们直接连接不会产生问题。这个实现给定传输函数的级联结构是非常简便的，因此目前得到广泛的应用。下面，详细讨论二阶节的实现。

由下列方程定义低通（LP）、带通（BP）和高通（HP）二次函数如下：

$$T(s) = \frac{H_0 s^x}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}, \quad (3-67)$$

式中 H_0 是常数。当 $x = 0$ 时， $T(s)$ 为 LP 函数， $x = 1$ 时为 BP 函数， $x = 2$ 时为 HP 函数。

下面是三种常用的二阶节的结构。

1. LBI/DF 二阶节结构

顾名思义，这种结构所对应的双二次传输函数 $T_b(s)$ 的分子多项式是低通函数 LP，带通函数 BP 和输入函数 $V_1(s)$ 之和，而分母则是直接形的。LBI/DF 二阶节的信号流图如图 3-69。

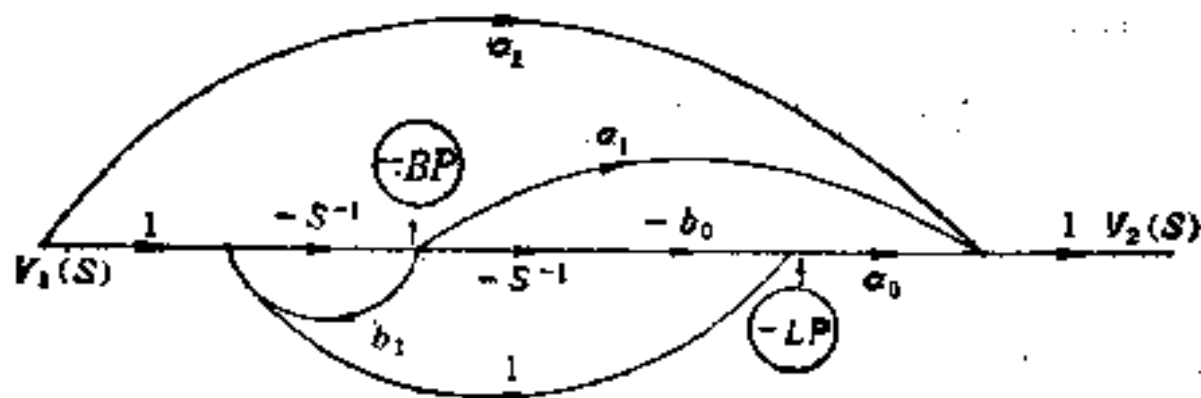


图 3-69

支路 α_2 , α_1 , α_0 是用于将输入 $-BP$ 和 $-LP$ 相加的。由图 3-69:

$$V_2(s) = \alpha_2 V_1(s) + \alpha_1 \left[\frac{-s V_1(s)}{s^2 + b_1 s + b_0} \right] + \alpha_0 \left[\frac{-b_0 V_1(s)}{s^2 + b_1 s + b_0} \right] \quad (3-68)$$

及

$$T_b(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\alpha_2 s^2 + (\alpha_2 b_1 - \alpha_1) s + (\alpha_2 - \alpha_0) b_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (3-69)$$

比较式(3-69)和式(3-65)的分子,有下列关系:

$$\begin{aligned} a_2 &= \alpha_2 \\ a_1 &= \alpha_2 b_1 - \alpha_1 \\ a_0 &= (\alpha_2 - \alpha_0) b_0 \end{aligned} \quad (3-70)$$

对于某一给定的 b_0, b_1 , 可选择 α_0, α_1 和 α_2 以实现给定的 a_0, a_1, a_2 .

2. BHI/DF 二阶节结构

这种结构所对应的双二次传输函数 $T_b(s)$ 的分子多项式是带通函数 BP, 低通函数 HP 和输入函数 $V_1(s)$ 之和, 而分母是直接形的。其信号流图如图 3-70 所示。

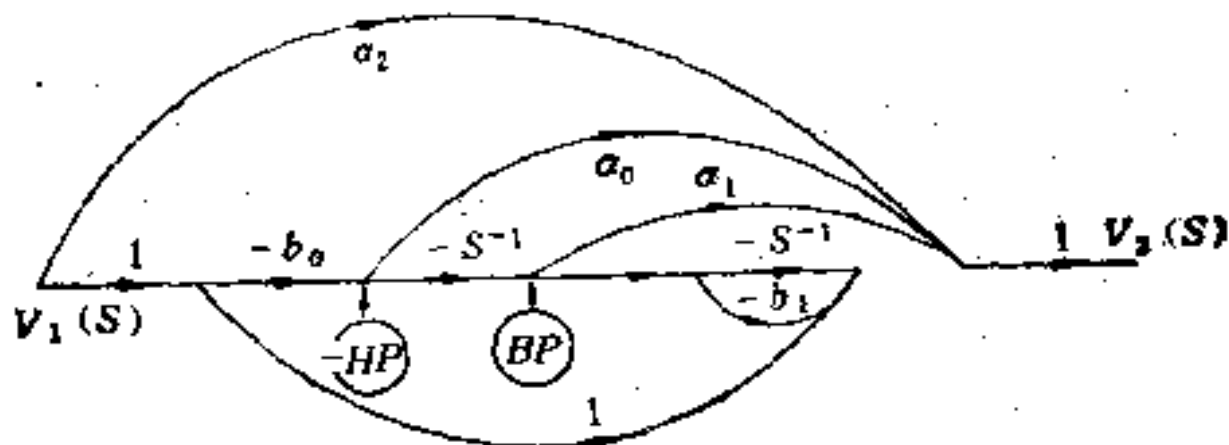


图 3-70

由图 3-70:

$$T_b(s) = V_2(s)/V_1(s) = \frac{(\alpha_2 - \alpha_0 b_0)s^2 + (\alpha_2 b_1 b_0 + \alpha_1 b_0)s + \alpha_2 b_0}{s^2 + b_1 b_0 s + b_0} \quad (3-71)$$

比较式(3-71)和式(3-65)的分子,有下列关系:

$$\begin{aligned} a_2 &= \alpha_2 - \alpha_0 b_0 \\ a_1 &= \alpha_2 b_1 b_0 - \alpha_1 b_0 \\ a_0 &= \alpha_2 b_0 \end{aligned} \quad (3-72)$$

3. MI/DF 二阶节结构

这种结构的特点是,分子多项式应用多输入路径代替单一的输出相加节点。其信号流图如图 3-71 所示。由图 3-71:

$$T_b(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\alpha_2 s^2 + (\alpha_3 - \alpha_2 b_0)s + \alpha_1 b_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (3-73)$$

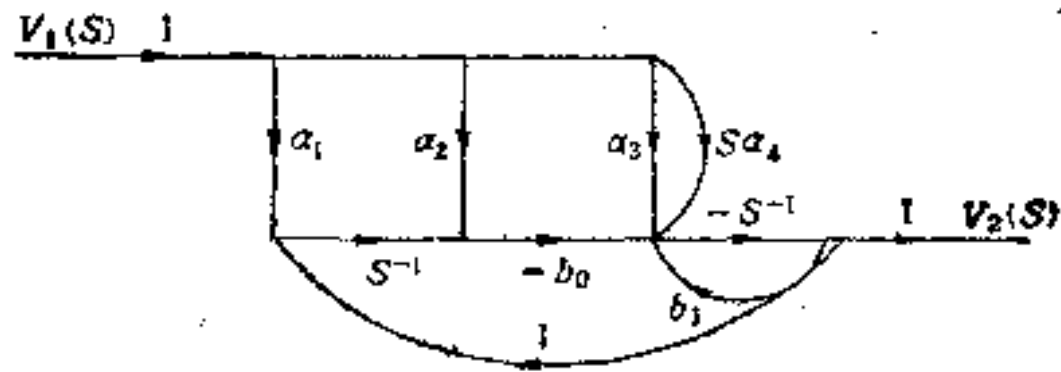


图 3-71

比较式(3-73)和式(3-65)的分子,可得

$$\begin{aligned} a_2 &= -\alpha_1 \\ a_1 &= \alpha_2 b_0 - \alpha_3 \\ a_0 &= -\alpha_1 b_0 \end{aligned} \quad (3-74)$$

现在,分别讨论上述三种结构的电路实现和元件的计算。双二次传输函数(3-65)可以写成用极点对的 Q 因子 Q_p ,零点对的 Q 因子 Q_z ,极点和零点的自然频率 ω_p 和 ω_z 表示的形式:

$$T_b(s) = H_0 \frac{s^2 + \left(\frac{\omega_z}{Q_z}\right)s + \omega_z^2}{s^2 + \left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)s + \omega_p^2} \quad (3-75)$$

式中 H_0 是增益系数。

比较式(3-65)和式(3-75),得出系数间的关系:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_z}{Q_z} &= \frac{a_1}{a_2}, & \frac{\omega_p}{Q_p} &= b_1 \\ \omega_z^2 &= \frac{a_0}{a_2}, & \omega_p^2 &= b_0, & H_0 &= a_1 \end{aligned} \quad (3-76)$$

(1) 图 3-69(LBI/DF 二阶节结构)所对应的电路如图 3-72 所示。

由图 3-72,可得出下列关系:

$$V_2 = -R_0(V_1/Q_p R_1 + V_{-BP}\alpha_1/R_1 + V_{LP}\alpha_0/R_1) \quad (3-77)$$

$$V_{-BP} = \frac{-1}{\frac{1}{Q_p R} + sC} (V_1/Q_p R + (-V_{LP})/R) \quad (3-78)$$

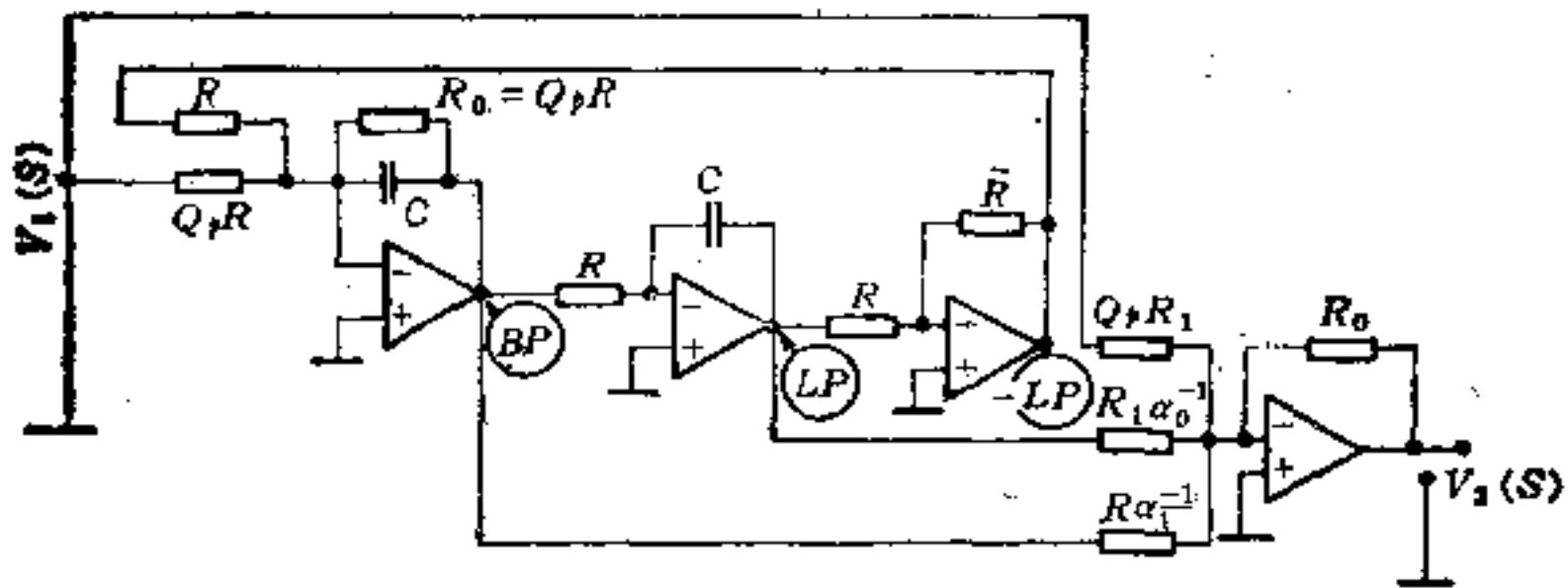


图 3-72

$$V_{LP} = -\frac{1}{sRC} V_{-BP} \quad (3-79)$$

由式(3-79), (3-78)和(3-77), 经整理化简后可得

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{R_1}{R_1 Q_p} \left[\frac{s^2 + \frac{(1 - \alpha_1 Q_p)}{RC Q_p} s + \frac{(1 + \alpha_1)}{R^2 C^2}}{s^2 + \frac{1}{RC Q_p} s + \frac{1}{R^2 C^2}} \right] \quad (3-80)$$

将式(3-80)与式(3-75)比较, 可得出求电路元件数值的设计公式:

$$RC = \frac{1}{\omega_p} \quad (3-81)$$

$$R_Q = Q_p R \quad (3-82)$$

$$R_1 \alpha_0^{-1} = \left[\left(\frac{\omega_z}{\omega_p} \right)^2 - 1 \right]^{-1} R_1 \quad (3-83)$$

$$R_1 \alpha_1^{-1} = \left[1 - \frac{Q_p \omega_z}{Q_z \omega_p} \right]^{-1} Q_p R_1 \quad (3-84)$$

$$R_0 = -H_0 Q_p R_1 \quad (3-85)$$

当传输函数给定后, ω_p , Q_p , ω_z , Q_z , H_0 即给定, 再选择 R 和 R_1 的数值, 即可求出电路中的所有电阻和电容数值。应指出, 若 $\omega_p > \omega_z$, 则 $R_1 \alpha_0^{-1}$ 为负。为避免发生这种情况, 可将电阻 $R_1 \alpha_0^{-1}$ 接到图 3-72 中 $(-LP)$ 输出端。一般情况下, $Q_p \omega_z <$

$Q_p \omega_p$, 所以 $R_1 \alpha_1^{-1}$ 总是正值.

例 3-9. 设计 $-LBI/DF$ 二阶节结构的有源电路. 传输函数的系数给定如下:

$$H_0 = 0.1, \omega_p = 10^4 \text{ 弧度/秒}, \omega_z = 2 \times 10^4 \text{ 弧度/秒}, Q_z = \infty, Q_p = 10.$$

若给定式 (3-65) 中的系数 a_0, a_1, a_2 和 b_0, b_1 . 可利用式

(3-76) 求出 $\omega_p, \omega_z, \frac{\omega_z}{Q_z}$ 及 $\frac{\omega_p}{Q_p}$.

选取 $R = 10$ 千欧, $R_1 = 10$ 千欧. 由式 (3-81), 可求出:

$$C = \frac{1}{R\omega_p} = 10 \text{ 皮法}$$

由式 (3-85):

$$R_0 = 10 \text{ 千欧}$$

由式 (3-83) 和 (3-84), 可分别求出:

$$R_1 \alpha_0^{-1} = 3.3 \text{ 千欧}, R_1 \alpha_1^{-1} = 100 \text{ 千欧}.$$

(2) 图 3-70 (BHI/DF 二阶节结构) 所对应的电路如图 3-73 所示.

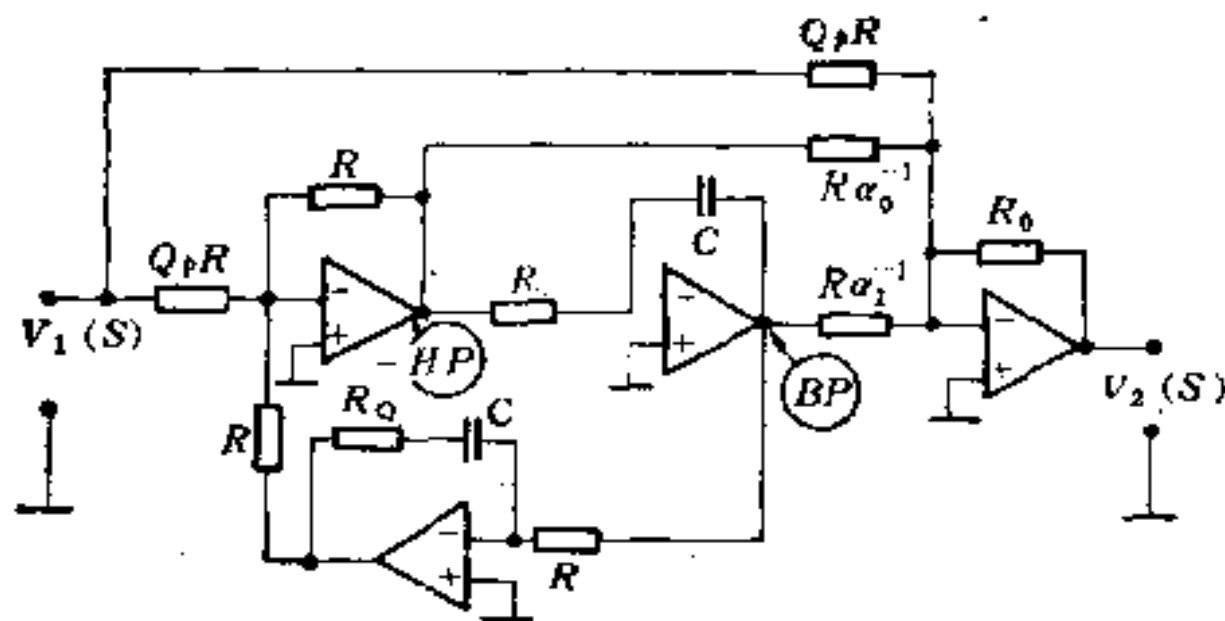


图 3-73

在图 3-73 中用一串联电阻 (与积分电容 C 串联) 来实现图 3-70 中的支路 $-b_{10}$. 由图 3-73 可得出传输函数 (经化简整理后):

$$T_b(s) = \frac{R_0}{Q_p R} \left[\frac{(1 - \alpha_0)s^2 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{Q_p}\right)\omega_p s + \omega_p^2}{s^2 + \left(\frac{1}{Q_p}\right)\omega_p s + \omega_p^2} \right] \quad (3-86)$$

式中 $\omega_p = 1/CR$ 。

比较式(3-75)和式(3-86)的分子的系数可得

$$H_0 = \frac{R_0(\alpha_0 - 1)}{Q_p R} \quad (3-87)$$

$$Q_z = \left(\frac{1}{Q_p} + \alpha_1\right)^{-1} \frac{\omega_p}{\omega_z} \quad (3-88)$$

和

$$\omega_z^2 = (1 - \alpha_0)^{-1} \omega_p^2 \quad (3-89)$$

由式(3-87), (3-88)和(3-89), 可得出求元件数值的设计公式:

$$R_0 = \frac{R}{Q_p} \quad (3-90)$$

$$R\alpha_1^{-1} = R \left[\frac{\omega_p}{Q_z \omega_z} - \frac{1}{Q_p} \right]^{-1} \quad (3-91)$$

$$R\alpha_0^{-1} = R \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_z}\right)^2 \right]^{-1} \quad (3-92)$$

$$R_0 = -R \left[\frac{H_0 Q_p \omega_z^2}{\omega_p^2} \right] \quad (3-93)$$

若 $Q_z \omega_z > Q_p \omega_p$, 则 $R\alpha_1^{-1}$ 为负; 若 $\omega_p > \omega_z$, 则 $R\alpha_0^{-1}$ 为负; 若 $H_0 > 0$, 则 R_0 为负。在这些情况下应接入反相器。

例 3-10. 重复例 3-9 的数据, $H_0 = -0.1$. 利用 BHI/DF 电路实现给定的传输函数。

将 $R = 10$ 千欧, $\omega_p = 10^4$ 弧度/秒, $Q_p = 10$, $Q_z = \infty$, $\omega_z = 2 \times 10^4$ 弧度/秒, $H_0 = -0.1$ 代入式(3-90)~(3-93), 得出

$$C = 10 \text{ 皮法}, R_0 = 1 \text{ 千欧}, R\alpha_1^{-1} = -100 \text{ 千欧},$$

$$R\alpha_0^{-1} = 13333.3 \text{ 欧}, R_0 = 40 \text{ 千欧}$$

因为 $R\alpha_1^{-1}$ 是负值,故应在图 3-73 中 (BP) 后面加入反相器。

(3) 图 3-71 (MI/DF 二阶节结构) 所对应的电路如图 3-74 所示。

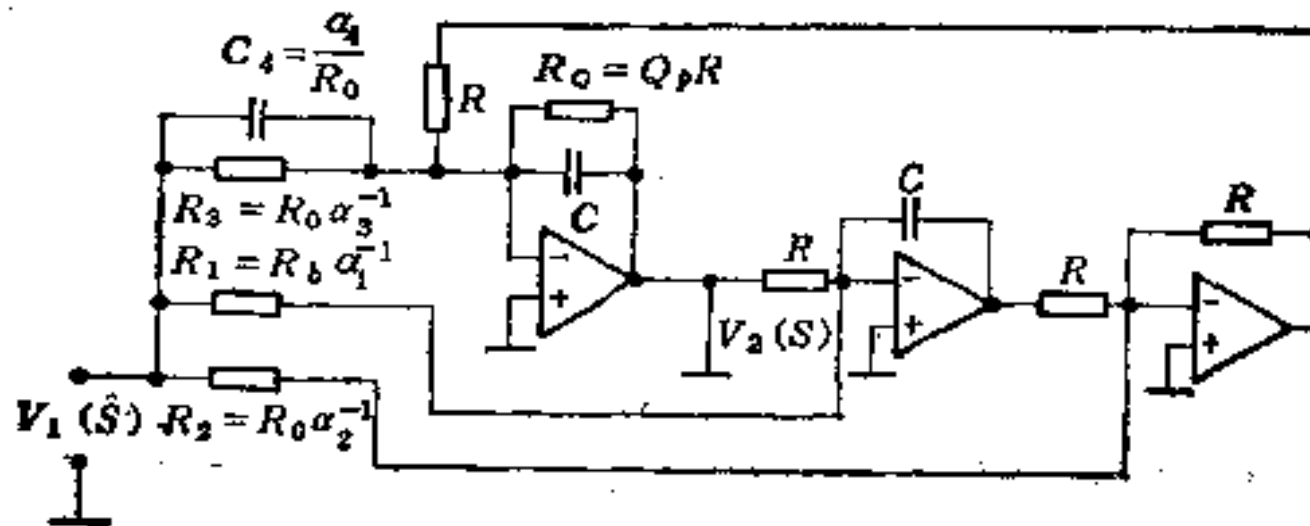


图 3-74

由图 3-74 可写出电路的传输函数:

$$T_b(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \left(-\frac{\alpha_4 \omega_p R}{R_0} \right) \times \frac{s^2 + \frac{1}{\alpha_4} (\alpha_3 - \alpha_2) s + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_4} \right) \omega_p}{s^2 + \left(\frac{\omega_p}{Q_p} \right) s + \omega_p^2} \quad (3-94)$$

式中 $\frac{1}{\omega_p} = RC$, $R_0 = RQ_p$.

比较式(3-75)与式(3-94),可得

$$H_0 = -\alpha_4 \omega_p \left(\frac{R}{R_0} \right) \quad (3-95)$$

$$\frac{\omega_z}{Q_z} = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_4} \quad (3-96)$$

$$\omega_z^2 = \frac{\alpha_1 \omega_p}{\alpha_4} \quad (3-97)$$

由式(3-95)~(3-97),得出计算元件参数的方程如下:

$$RC = \frac{1}{\omega_p} \text{ (可选择 } R \text{ 求 } C, \text{ 或选择 } C \text{ 求 } R) \quad (3-98)$$

$$R_0 = Q_p R \quad (3-99)$$

$$C_1 = -H_1 C \quad (3-100)$$

$$R_1 = R_0 \alpha_1^{-1} = \omega_p / \omega_z^2 C_1 \quad (3-101)$$

所以,若 $Q_z < 0$, 选择 $\alpha_2 = 0$, 则

$$R_2 = \infty, R_3 = R_0 \alpha_2^{-1}, R_4 = -Q_z / \omega_z C_1 \quad (3-102)$$

若 $Q_z > 0$, 选择 $\alpha_2 = 0$, 则

$$R_2 = \infty, R_3 = R_0 \alpha_2^{-1}, R_4 = Q_z / \omega_z C_1 \quad (3-103)$$

若 $Q_z = \infty$, 选择 $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$,

$$R_2 = R_3 = \infty \quad (3-104)$$

例 3-11. 重复例 3-9 的数据, 求 MI/DF 电路的数据。

选取 $R = 10$ 千欧, 故 $C = 10$ 皮法, $R_0 = 100$ 千欧。

由式(3-100), 得 $C = 1$ 皮法。

由式(3-101), 得 $R_1 = 25$ 千欧。由式(3-104), 因 $Q_z = \infty$, 故 $R_2 = R_3 = \infty$ 。

参 考 文 献

- [1] Brackett, P. O., and Sedra, A. S., Direct Signal Flow Graph Simulation of LC Ladder Networks with Application to Active Filter Design, *IEEE Trans., on Circuits and Systems*, Vol. CAS-23, pp. 61—67, Feb. 1976.
- [2] Bruton, L. T., RC Active Circuits: Theory and Design. Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1980.
- [3] Haritantis, I., Signal Flow Graph Approach to Active RC Simulation of LC Ladder Filters, *Int. J. Electronics*, Vol. 47, No. 5, pp. 475—482, 1979.
- [4] Haritantis, I., Active Filters: Combined Wave Active Filters and SFG Techniques, *Int. J. Electronics*, Vol. 55, No. 2, pp. 285—290, 1983.
- [5] Li, M. K., Li, C. W., and Cho, K. C., On the Synthesis of Second-Order Active R Filters, *Int. J. Electronics*, Vol. 47, No. 5, pp. 483—489, 1979.
- [6] Lin, P. M., Topological Realization of Transfer Functions in Canonical Forms, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-30, Noll, pp. 1104—1106, 1985.
- [7] Moschytz, G., Linear Integrated Networks Design, New York: Van Nostrand Reinhold, 1975.

- [8] Mulawka J., Generation of Active RC Filters: Signal Flow Graph Approach. *J. Franklin Institute*, Vol. 310, No. 4/5, pp. 215—232, 1980.
- [9] Sedra, A. S., and Brackett, P. O., Filter Theory and Design: Active and Passive, Portland, Oreg: Matrix, 1978.
- [10] Zhao, Y. C., Lin, Y. X., A Note on the Topological Realization of Transfer Functions in Canonical Forms, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-32, No. 3, pp. 240—247, 1987.

第四章 灵 敏 度

灵敏度是研究系统中的参数变化对整个系统特性影响大小的一个测度。它在系统的研究中占有很重要的地位。对于系统中的各个元件，设计时可根据它的参数变化对系统特性的影响程度决定对它的要求。

本章首先讨论灵敏度的基本定义，以及有助于进一步研究的一些性质。由于本章的讨论是基于拓扑方法，即信号流图方法，所以建立了灵敏度的信号流图模型。在此基础上，很方便地得到了反馈理论中有关灵敏度与回归差的一些定理。为了分析一般的系统，详细推导出了计算灵敏度的拓扑公式。很多现有的一些结果（例如，灵敏度与回归差间的关系）可作为它的特殊情况来处理。利用这个拓扑公式，从结构（分层）观点，进行了灵敏度的分析。由于系统中各个参数的灵敏度不完全是独立的，我们只需要计算其中独立的灵敏度，其余的则可用前者的线性组合简单地算出。这就需要借助于灵敏度图这个有用的工具。此外，当参数变化较大时，要精确计算系统特性的变化，就应考虑到一阶以上的灵敏度（高阶灵敏度）。高阶灵敏度的拓扑计算是一阶灵敏度的推广。当参数变化很大时，要用到大变化灵敏度的模型计算系统特性的变化。总之，在给定系统的信号流图基础上，利用本章讨论的方法可以方便地进行参数的灵敏度分析和计算整个系统特性的变化。

4-1 灵敏度和它的一些性质

灵敏度是系统特性的变化对引起这种变化的系统中某一元件的参数变化之比。它表征了系统中不同元件的参数变化对系统特性的影响程度。

对于某一系统 S , 它的特性 T 是系统中某一元件参数 x_i 的函数, 即 $T(x_i)$. 由于某种原因, 参数 x_i 变化至 $x_i + \Delta x_i$. 设 $T(x_i)$ 和 $T(x_i + \Delta x_i)$ 是解析函数, 则由 Taylor 级数, 有下列关系式:

$$\Delta T = T(x_i + \Delta x_i) - T(x_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n T(x_i) (\Delta x_i)^n}{n! \partial x_i^n} \quad (4-1)$$

式 (4-1) 表示了 x_i 变化 Δx_i 所产生的 T 的对应变化 ΔT .

由式 (4-1):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T} &= \left(\frac{x_i \partial T}{T \partial x_i} \right) \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x_i^2 \partial^2 T}{T \partial x_i^2} \right) \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2 + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left(\frac{x_i^n \partial^n T}{T \partial x_i^n} \right) \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^n + \dots \end{aligned} \quad (4-2)$$

若 $\frac{\partial T}{\partial x_i} \neq 0$, 则

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta T}{T} \right) = \left(\frac{x_i \partial T}{T \partial x_i} \right) \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right) \quad (4-3)$$

于是, 定义式 (4-3) 中的 $\left(\frac{x_i}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$ 为系统特性 T 对于参数 x_i 的标称灵敏度, 并以 $S_{x_i}^T$ 表示. $S_{x_i}^T$ 是系统特性 T 变化的百分数与引起这种变化的系统参数 x_i 的变化的百分数之比, 即

$$S_{x_i}^T = \frac{x_i \partial T}{T \partial x_i} = \frac{\partial(\ln T)}{\partial(\ln x_i)} \quad (4-4)$$

$\frac{\partial T}{\partial x_i}$ 称为 T 对 x_i 的非标称灵敏度.

对于任意小的变化 Δx_i , 有下列近似关系:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx S_{x_i}^T \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right) \quad (4-5)$$

因此, $S_{x_i}^T$ 已知后, 即可由 $\frac{\Delta x_i}{x_i}$ 求出 $\frac{\Delta T}{T}$. 应指出, 当 Δx_i 不是很

小, 以致 $\left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2$, $\left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^3$, \dots 不能忽略时, 不能应用式 (4-5) 计算

$\frac{\Delta T}{T}$.

例 4-1. 给定

$$T = S^2 + x_1^2 S + 1 \quad (4-6)$$

计算 $S = 2$, $x_1 = 1$ 时由于 x_1 变化 0.01 而引起的 T 的变化的百分数 $\frac{\Delta T}{T}$.

由式 (4-4), 求得

$$S_{x_1}^T = \frac{2x_1^2 S}{S^2 + x_1^2 S + 1} \quad (4-7)$$

由式 (4-5):

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{100} \times \frac{2x_1^2 S}{S^2 + x_1^2 S + 1} \quad (4-8)$$

当 $S = 2$, $x_1 = 1$ 时, 式 (4-8) 的数值:

$$\left. \frac{\Delta T}{T} \right|_{S=2, x_1=1} \approx \frac{1}{100} \left[\frac{(2)(2)}{4 + 2 + 1} \right] = \frac{4}{700} \quad (4-9)$$

$\frac{\Delta T}{T}$ 的正确数值是

$$T|_{S=2, x_1=1} = 4 + 2 + 1 = 7 \quad (4-10)$$

$$T|_{S=2, x_1=1.01} = 4 + 2 \times 1.0201 + 1 = 7.0402 \quad (4-11)$$

故

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{7.0402 - 7}{7} = \frac{4.02}{7} \quad (4-12)$$

由式 (4-9) 与式 (4-12) 可知, 式 (4-9) 的结果比正确值小 $\frac{0.02}{7}$. 这是由于舍去了二阶项 $\frac{1}{2!} \frac{x_i}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2$ 所造成的.

由灵敏度的定义式 (4-4), 不难得到下列计算灵敏度时常用到的几个基本规则:

(1) T 的指数性质:

若 $T = T^n$, 由式 (4-4),

$$S_{x_i}^{T^n} = \frac{\partial(\ln T^n)}{\partial(\ln x_i)} = n S_{x_i}^T \quad (4-13)$$

(2) T 的逆性质:

式 (4-13) 中, 若 $n = -1$, 则

$$S_{x_i}^{T^{-1}} = -S_{x_i}^T \quad (4-14)$$

(3) T 的相加性质:

若 $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$, 则

$$S_{x_i}^{T_1+T_2+\cdots+T_n} = \frac{T_1 S_{x_i}^{T_1} + T_2 S_{x_i}^{T_2} + \cdots + T_n S_{x_i}^{T_n}}{T_1 + T_2 + \cdots + T_n} \quad (4-15)$$

(4) T 的相乘性质:

若 $T = T_1 T_2 \cdots T_n$, 则

$$\begin{aligned} S_{x_i}^{T_1 T_2 \cdots T_n} &= \frac{x_i}{T_1 T_2 \cdots T_n} \left(T_2 T_3 \cdots T_n \frac{\partial T_1}{\partial x_i} + T_1 T_3 \cdots T_n \right. \\ &\quad \times \frac{\partial T_2}{\partial x_i} + \cdots + T_1 T_2 \cdots T_{n-1} \frac{\partial T_n}{\partial x_i} \left. \right) \\ &= S_{x_i}^{T_1} + S_{x_i}^{T_2} + \cdots + S_{x_i}^{T_n} \end{aligned} \quad (4-16)$$

(5) T 的常量性质:

若 $T = kT$, 则

$$S_{x_i}^{kT} = \frac{x_i}{kT} \frac{\partial kT}{\partial x_i} = S_{x_i}^T \quad (4-17)$$

(6) T 的链性质:

若 $T = T[g_1(x_i), g_2(x_i), \cdots, g_n(x_i)]$, 则

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial g_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$$

故

$$\begin{aligned} S_{x_i}^T &= \frac{x_i \partial T}{T \partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{x_i}{T} \frac{\partial T}{\partial g_j} \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{g_j}{T} \frac{\partial T}{\partial g_j} \right) \left(\frac{x_i}{g_j} \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n S_{g_j}^T \cdot S_{x_i}^{g_j} \end{aligned} \quad (4-18)$$

(7) T 的相除性质:

若 $T = \frac{N}{D}$, 则

$$\begin{aligned} S_{x_i}^T &= \frac{x_i}{N/D} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{N}{D} \right) = \frac{x_i D}{N} \cdot \frac{1}{D^2} \left(D \frac{\partial N}{\partial x_i} - N \frac{\partial D}{\partial x_i} \right) \\ &= S_{x_i}^D - S_{x_i}^N \end{aligned} \quad (4-19)$$

利用上面的规则,可以方便地计算复杂函数的灵敏度。

例 4-2. 给定 $T = \left(2x_1S^2 + \frac{S}{x_1x_2} + x_1^3\right)^{-1/4} \cdot \sin x_1$, 求 $S_{x_1}^T$.

直接利用式 (4-4) 计算 $S_{x_1}^T$ 是相当麻烦的。先利用规则 (4),

设 $T_1 = \left(2x_1S^2 + \frac{S}{x_1x_2} + x_1^3\right)^{-1/4} = P^{-1/4}$, $T_2 = \sin x_1$, 于是

$$S_{x_1}^T = S_{x_1}^{T_1} + S_{x_1}^{T_2} \quad (4-20)$$

求 $S_{x_1}^{T_1}$ 时,可利用规则(1),得出

$$S_{x_1}^{T_1} = -\frac{1}{4} \cdot S_{x_1}^P = -\frac{1}{4} \frac{2x_1S^2 - \frac{S}{x_1x_2} + 3x_1^3}{\left(2x_1S^2 + \frac{S}{x_1x_2} + x_1^3\right)} \quad (4-21)$$

又

$$S_{x_1}^{T_2} = \frac{x_1}{\sin x_1} \frac{\partial \sin x_1}{\partial x_1} = x_1 \cos x_1 \quad (4-22)$$

将式 (4-21) 和(4-22)代入式 (4-20), 得出

$$S_{x_1}^T = -\frac{2x_1S^2 - \frac{S}{x_1x_2} + 3x_1^3}{4\left(2x_1S^2 + \frac{S}{x_1x_2} + x_1^3\right)} + x_1 \cos x_1 \quad (4-23)$$

4-2 多参数灵敏度

上一节讨论了系统中某一参数变化时对系统性能产生的影响。在实际系统中,必须考虑多个参数同时发生变化的情况。这就需要以上单参数变化的讨论推广到多参数,设有 n 个参数 $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ 。它们分别在标称值基础上产生微小的相对变

化 $\frac{\Delta x_1}{x_1}, \frac{\Delta x_2}{x_2}, \dots, \frac{\Delta x_i}{x_i}, \dots, \frac{\Delta x_n}{x_n}$, 于是系统特性的变化

$$\Delta T = T(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n + \Delta x_n) - T(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial x_k} \Delta x_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\Delta x_j \cdot \Delta x_k}{2!} + \dots \quad (4-24)$$

在一次近似情况下(只考虑一阶扰动),有

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \sum_{k=1}^n S_{x_k}^T \frac{\Delta x_k}{x_k} \quad (4-25)$$

如果

$$\frac{\Delta x_1}{x_1} = \frac{\Delta x_2}{x_2} = \dots = \frac{\Delta x_n}{x_n} = \varepsilon \quad (4-26)$$

则

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \varepsilon \sum_{k=1}^n S_{x_k}^T \quad (4-27)$$

$\sum_{k=1}^n S_{x_k}^T$ 称为多参数灵敏度。它是各个参数的灵敏度之和。在考虑多参数变化对系统性能的影响时需用到它。

设 T 为包括四种控制源(压控压源 VCVS, 流控流源 ICIS, 流控压源 ICVS 和压控流源 VCIS) 和 R, L, C 的网络函数, 即 $T(R_i, L_i, C_i, \mu_i, \alpha_i, \tau_i, g_i, s)$ 。 $\mu_i, \alpha_i, \tau_i, g_i$ 分别为上述控制源的控制系数, s 为复频率。若将每个元件的阻抗级提高一个数量 a , 则:

$$T(R_i, L_i, C_i, \mu_i, \alpha_i, \tau_i, g_i, s) = T\left(aR_i, aL_i, \frac{C_i}{a}, \mu_i, \alpha_i, a\tau_i, \frac{g_i}{a}, s\right) f(a) \quad (4-28)$$

式中

$$f(a) = \begin{cases} a, & \text{若 } T \text{ 为策动点阻抗函数} \\ \frac{1}{a}, & \text{若 } T \text{ 为策动点导纳函数} \\ 1, & \text{若 } T \text{ 为电压或电流比传输函数} \end{cases}$$

式(4-28)对 a 微分, 有

$$\left(\sum_R R_i \frac{\partial T}{\partial R_i} + \sum_L L_i \frac{\partial T}{\partial L_i} - \sum_C \frac{C_i}{a^2} \frac{\partial T}{\partial C_i} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\text{ICVS}} r_i \frac{\partial T}{\partial r_i} - \sum_{\text{VCIS}} \frac{g_i}{a^2} \frac{\partial T}{\partial g_i} \Big|_{(a=R_i, L_i, C_i, \mu_i, \alpha_i, r_i, g_i, s)} \\
 & = \frac{\partial f(a)}{\partial a} T(R_i, L_i, C_i, \mu_i, \alpha_i, r_i, g_i, s) \quad (4-29)
 \end{aligned}$$

对式(4-29)两端除以 T , 并令 $a = 1$, 则有

$$\begin{aligned}
 & \sum_R S_{R_i}^T + \sum_L S_{L_i}^T - \sum_C S_{C_i}^T + \sum_{\text{ICVS}} S_{r_i}^T - \sum_{\text{VCIS}} S_{g_i}^T \\
 & = \frac{\partial f(a)}{\partial a} \Big|_{a=1} \quad (4-30)
 \end{aligned}$$

式中

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a} = \begin{cases} 1, & \text{若 } T \text{ 为策动点阻抗函数} \\ -1, & \text{若 } T \text{ 为策动点导纳函数} \\ 0, & \text{若 } T \text{ 为电压或电流比传输函数} \end{cases}$$

对于包括运算放大器(看作为 VCVS)的 RC 有源电路的电压传输函数, 式(4-30)简化为

$$\sum_R S_{R_i}^T - \sum_C S_{C_i}^T = 0 \quad (4-31)$$

式(4-30)和式(4-31)称为多参数灵敏度的不变性。它们表明, 对于一个给定的网络函数, 所有多参数灵敏度的代数和(VCVS 和 ICIS 的参数灵敏度不考虑)是一常数。

由式(4-31)可看出, 若所有电阻和电容变化有相同的百分数, 符号相反, 则 T 不变。这就是为什么在有源 RC 电路的设计中

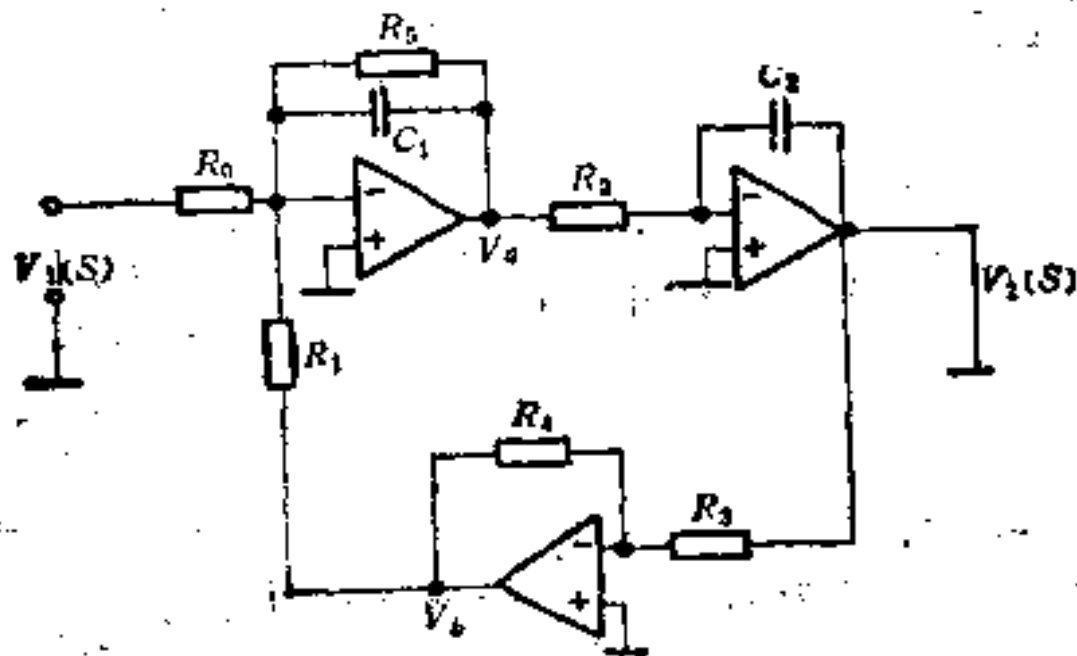


图 4-1

对电阻和电容用同样温度系数的材料(温度系数的符号相反)的原因。

例 4-3. 图 4-1 是一个两积分器环的低通二阶节。

由图 4-1, 可写出下列方程组:

$$V_2 = \frac{-1}{\frac{1}{R_3} + C_1 S} (V_1/R_0 + V_3/R_1) \quad (4-32)$$

$$V_3 = V_2 \cdot \frac{-1}{SR_2 C_2} \quad (4-33)$$

$$V_3 = \frac{-R_4}{R_3} V_2 \quad (4-34)$$

与式 (4-32) ~ (4-34) 对应的信号流图如图 4-2。

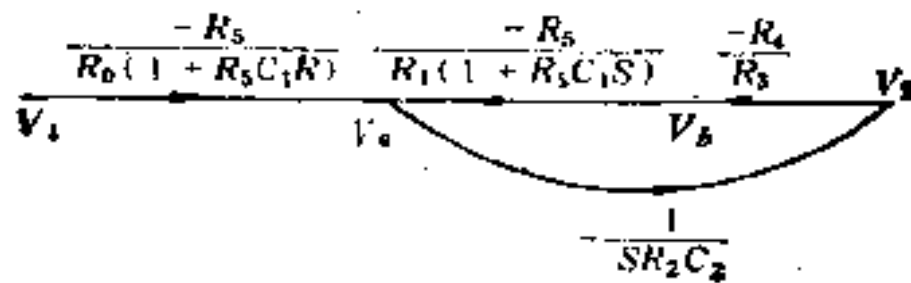


图 4-2

因此,

$$T(S) = \frac{V_2(S)}{V_1(S)} = \frac{R_4}{1 + \frac{R_0 R_2 C_2 (1 + R_5 C_1 S) S}{R_1 R_3}} = \left(\frac{1}{R_0 R_1 C_1 C_2} \right) \left[\frac{1}{S^2 + S \left(\frac{1}{R_5 C_1} \right) + \left(\frac{R_4}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} \right)} \right] \quad (4-35)$$

令

$$\frac{1}{R_0 R_1 C_1 C_2} = A, \quad \frac{1}{S^2 + S \left(\frac{1}{R_5 C_1} \right) + \left(\frac{R_4}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} \right)} = B \quad (4-36)$$

于是,按灵敏度的定义式 (4-4), 可得

$$S_{R_0}^T = \frac{R_0}{T} \cdot B \cdot \frac{-1}{R_1^2} = \frac{B}{T} \cdot \frac{-1}{R_0 R_1 C_1 C_2} \quad (4-37)$$

$$S_{R_1}^T = \frac{R_1}{T} \left[A \cdot \frac{(-R_4/R_2 R_3 C_1 C_2)(1/R_1^2)}{B^2} + B \cdot \left(\frac{1}{R_2 C_1 C_2} \right) \left(\frac{-1}{R_1^2} \right) \right] \\ = \frac{1}{T} \left[\frac{A}{B^2} \cdot \left(\frac{-R_4}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} \right) - B \cdot \frac{1}{R_0 R_1 C_1 C_2} \right] \quad (4-38)$$

$$S_{R_2}^T = \frac{R_2}{T} \left(A \cdot \frac{1}{B^2} \right) \left(- \frac{R_4}{R_1 R_3 C_1 C_2} \cdot \frac{1}{R_2^2} \right) \\ = \frac{-A}{T B^2} \left(\frac{R_4}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} \right) \quad (4-39)$$

$$S_{R_3}^T = \frac{R_3}{T} \left(A \cdot \frac{1}{B^2} \right) \left(- \frac{R_4}{R_1 R_2 C_1 C_2} \cdot \frac{1}{R_3^2} \right) \\ = \frac{-A}{T B^2} \left(\frac{R_4}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} \right) \quad (4-40)$$

$$S_{R_4}^T = \frac{R_4}{T} \cdot \frac{A}{B^2} \cdot \frac{1}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} \quad (4-41)$$

$$S_{R_5}^T = \frac{R_5}{T} \cdot \frac{A}{B^2} \cdot \frac{-S}{C_1 R_5} = \frac{A}{T B^2} \cdot \frac{-S}{R_5 C_1} \quad (4-42)$$

$$S_{C_1}^T = \frac{C_1}{T} \left[\frac{A}{B^2} \left(\frac{-S}{R_5 C_1^2} - \frac{R_4}{R_1 R_2 R_3 C_1^2 C_2} \right) + B \cdot \frac{1}{R_0 R_1 C_1^2 C_2} \right] \\ = \frac{1}{T} \left[\frac{A}{B^2} \left(\frac{-S}{R_5 C_1} - \frac{R_4}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} \right) + B \cdot \frac{1}{R_0 R_1 C_1 C_2} \right] \quad (4-43)$$

$$S_{C_2}^T = \frac{1}{T} \left[\frac{A}{B^2} \left(\frac{-R_4}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} \right) + \frac{-B}{R_0 R_1 C_1 C_2} \right] \quad (4-44)$$

将式(4-37)~(4-42)右端相加,式(4-43),(4-44)右端相加,不难看出:

$$\sum_{i=0}^5 S_{R_i}^T = \sum_{i=1}^2 S_{C_i}^T$$

这证实了式(4-31)的正确性。

4-3 灵敏度及其有关定理

上节中,我们按灵敏度的定义,先求出系统的传输函数,然后再将传输函数进行微分求出灵敏度。从例 4-1 中可看出,这个计算过程是相当麻烦的。现在,我们要讨论求灵敏度的拓扑方法,也就是从信号流图的结构直接求出灵敏度。

设系统中某一参数 x 是需要讨论的参数。在图 4-3 所示的信号流图中, x 出现在图的唯一的支路中。由图 4-3,可求得从源点 x_1 到汇点 x_0 的传输

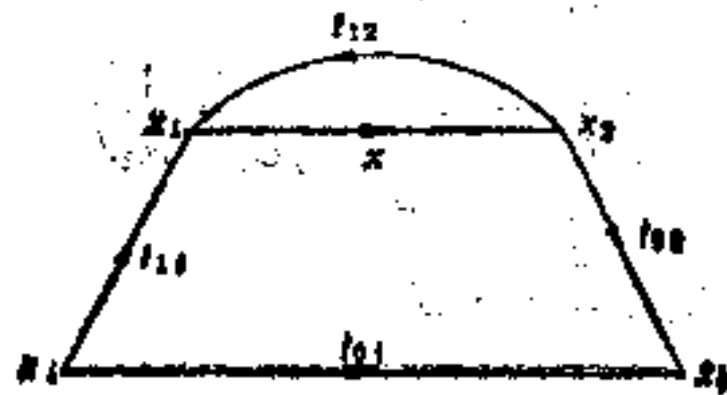


图 4-3

$$T = \frac{x_0}{x_1} = t_{01} + \frac{t_{12}t_{00}}{1 - t_{12}x} \quad (4-45)$$

由式(4-4), T 对 x 的灵敏度

$$\begin{aligned} S_x^T &= \frac{x}{T} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{x}{T} \frac{\partial}{\partial x} \left(t_{01} + \frac{t_{12}t_{00}}{1 - t_{12}x} \right) \\ &= \frac{x}{T} \frac{t_{12}t_{00}}{(1 - x t_{12})^2} \end{aligned} \quad (4-46)$$

在 1-9 节中,曾定义了节点的回归差 = 1 - 节点的环传输。对于支路,可以定义支路的回归差 = 1 - 支路的环传输。支路的环传输是这样定义的: 将支路分解为两个级联的支路,使级联支路的传输之积等于原支路的传输。通常是使一条支路的传输为 1,另一条支路的传输等于原支路的传输。由于一条支路分解为两条支路,形成一个人度和出度均为 1 的内节点。原支路的环传输就是该内节点的环传输。因此,图 4-3 中支路 x 的回归差

$$F_x = 1 - xt_{12} \quad (4-47)$$

由式(4-45),

$$t_{11}xt_{02} = (1 - t_{12}x)(T - t_{01}) = F_x(T - t_{01}) \quad (4-48)$$

将式(4-47), (4-48)代入式(4-46)中,有

$$S_x^T = \frac{F_x(T - t_{01})}{T \cdot F_x^2} = \frac{1}{F_x} \left(1 - \frac{t_{01}}{T}\right) \quad (4-49)$$

式(4-49)指出,系统特性 T 对某一参数 x 的灵敏度与该参数在信号流图中所对应的支路的回归差成反比关系。当信号流图的直接传输 t_{01} 为零时,式(4-49)简化为

$$S_x^T = \frac{1}{F_x} \quad (4-50)$$

该式表明了,当图中的直接传输为零时,某参数的灵敏度等于该参数所对应的支路的回归差的倒数。

例 4-4. 求图 2-6 的反馈放大器的电压增益 $\frac{V_0}{V_i}$ 对压控流源的控制系数 g_m 的灵敏度 $S_{g_m}^{V_0/V_i}$ 。

现将该放大器电路所对应的信号流图(图 2-7)重画出来(图 4-4)。 g_m 在图 4-4 中是唯一的支路,故可利用式(4-49)求 $S_{g_m}^{V_0/V_i}$ 。由图 4-4 可看出,从 V_i 到 V_0 的直接传输(当支路 g_m 断开时)为零,故 $t_{01} = 0$, 于是可利用式(4-50)求 $S_{g_m}^{V_0/V_i}$ 。由图 4-4, 有

$$\begin{aligned} F_{g_m} &= 1 - [g_m/1 + G_3(R_1 \\ &\quad + R_2 + R_4)] \\ &\quad \cdot (-R_2 - R_4) \\ &= 1 + [g_m/1 + G_3(R_1 \\ &\quad + R_2 + R_4)] \\ &\quad \times (R_2 + R_4) \quad (4-51) \end{aligned}$$

故

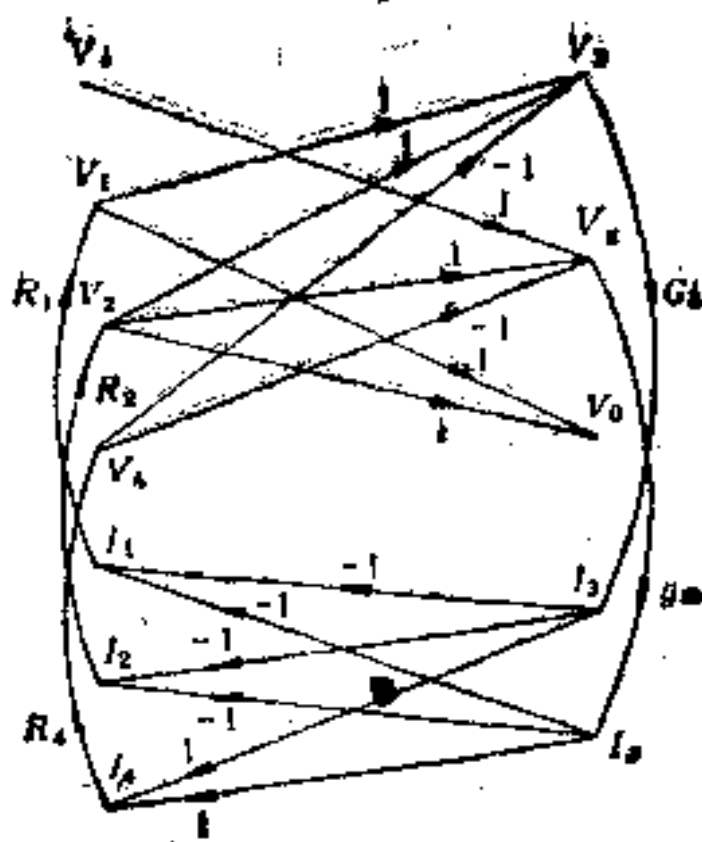


图 4-4

$$S_{g_m}^{V_o/V_i} = \frac{1}{F_{g_m}} = \frac{1 + G_3(R_1 + R_2 + R_4)}{1 + G_3(R_1 + R_2 + R_4) + g_m(R_2 + R_4)} \quad (4-52)$$

例 4-5. 图 4-5 表示 n 个级联的反馈放大器电路。每一级包括 m 个放大器。第 j 级的增益

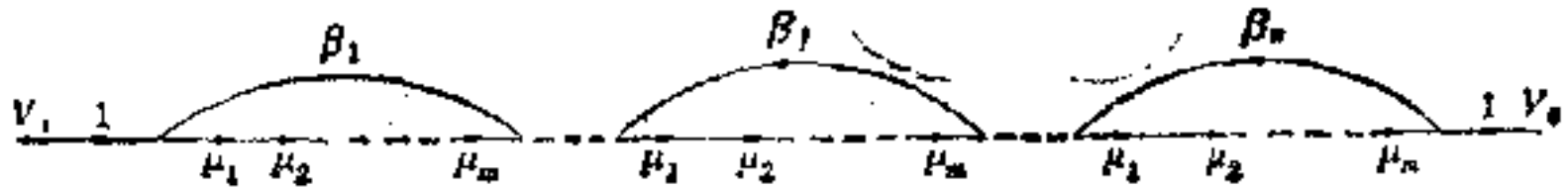


图 4-5

$$T_j = \frac{\prod_{i=1}^m \mu_i}{1 - \beta_j \prod_{i=1}^m \mu_i} \quad (4-53)$$

整个放大器的增益

$$T_0 = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\prod_{i=1}^m \mu_i}{1 - \beta_j \prod_{i=1}^m \mu_i} \right) \quad (4-54)$$

因为 μ_i 断开后直接传输为零, 故由式 (4-50);

$$S_{\mu_i}^{T_j} = \frac{1}{1 - \beta_j \prod_{i=1}^m \mu_i} \quad (4-55)$$

故

$$S_{\mu_i}^{T_0} = \sum_{j=1}^n S_{\mu_i}^{T_j} \quad (4-56)$$

若 $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_i = \dots = \mu_m = \mu$ 及 $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \beta$, 则

$$T_0 = \left(\frac{\mu^{mn}}{1 - \beta \mu^m} \right) \quad (4-57)$$

$$S_{\mu_i}^{T_0} = \frac{mn}{1 - \beta \mu^m} \quad (4-58)$$

当 mn 固定时, T_0 对 μ 的灵敏度将随 m 的增加而减小。在

$n = 1$ 时,灵敏度达到最小。所以,从灵敏度的角度来看,反馈放大器的设计以采用大环反馈为好。

例 4-4 和例 4-5 都是在图 4-6 的直接传输为零的情况下计算灵敏度的。这时灵敏度的计算简化为求支路的回归差问题。当直接传输不为零时,需利用式 (4-49) 进行计算。现在要进一步阐述该式的拓扑意义。为此,需要引入零输出回归差的定义。前面所定义的支路 x 的回归差是在源点信号为零的条件下计算的。这实际上是零输入回归差。零输出回归差是在调整源点的输入信号使汇点的输出信号为零的条件下算出的支路的回归差。如图 4-6, x_0 为零的条件是

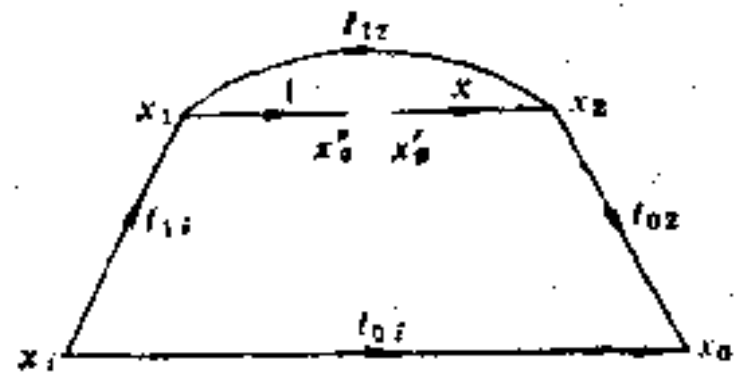


图 4-6

$$x_0 = x_1 t_{01} + x_2 t_{02} = 0 \quad (4-59)$$

从 (4-59) 式可求出使输出信号 x_0 为零所需的输入信号 x_i :

$$x_i = \frac{-x_2 t_{02}}{t_{01}} \quad (x'_2 = 1) \quad (4-60)$$

因此,节点 x'_2 的回归信号

$$x''_2 = x'_2 x_2 t_{12} + x_i t_{11} \quad (4-61)$$

所以,

$$\frac{x''_2}{x'_2} = x_2 t_{12} + \frac{x_i}{x'_2} t_{11} = x_2 t_{12} + x_1 t_{11} \quad (4-62)$$

于是,支路 x 的零输出回归差

$$F_{x(x_0)} = 1 - \frac{x''_2}{x'_2} = 1 - (x_2 t_{12} - x_1 t_{11}) \quad (4-63)$$

由式 (4-45) 和 (4-47), 可得

$$\frac{F_{x(x_0)}}{F_x} = 1 + \frac{T - t_{01}}{t_{01}} = \frac{T}{t_{01}} \quad (4-64)$$

即零输出回归差与回归差之比等于图中从源点到汇点的传输与直接传输之比。应该指出,零输出回归差只有在直接传输不为零时才有意义。否则,零输出回归差是没有意义的。将式 (4-64) 代入

式(4-49), 即得下列定理。

定理 4-1. 灵敏度等于回归差的倒数与零回归差的倒数之差。即

$$S_x^T = \frac{1}{F_x} - \frac{1}{F_{x(x_0)}} \quad (4-65)$$

式(4-65)是在直接传输不为零时计算灵敏度的拓扑公式。我们只需要从信号流图中分别算出支路 x 的回归差和零输出回归差即可求出灵敏度。

例 4-6. 求图 2-6 的反馈放大器的电压增益 $T = \frac{V_0}{V_i}$ 对电导 G_3 的灵敏度 $S_{G_3}^T$ 。

由图 4-4 可看出, 支路 G_3 断开后, 从源点 V_i 到汇点 V_0 的直接传输不为零。所以, 应由式(4-65)计算 $S_{G_3}^T$ 。

首先, 需算出支路 G_3 的回归差。由图 4-7, 求支路 G_3 分解后加在节点 x'_0 的单位信号在节点 x''_0 产生的回归信号:

$$\begin{aligned} x''_0 &= \frac{G_3}{[1 + g_m(R_2 + R_4)]} \{-R_1[1 + g_m(R_2 + R_4)] \\ &\quad - R_2(1 + g_m R_4) - R_4(Hg_m R_2) + (-R_2)(g_m) \\ &\quad (-R_1 - R_4) + (-R_4)(g_m)(-R_1 - R_2)\} \\ &= \frac{-G_3}{[1 + g_m(R_2 + R_4)]} (R_1 + R_2 + R_4) \end{aligned} \quad (4-66)$$

因此, 回归差

$$F_{G_3} = 1 + \frac{G_3}{[1 + g_m(R_2 + R_4)]} (R_1 + R_2 + R_4) \quad (4-67)$$

求零输出回归差 $F_{G_3(x_0)}$, 需求出支路 G_3 断开后从源点 V_i 到汇点 V_0 的直接传输

$$t_{0i} = \frac{-g_m(R_1 + R_2)}{[1 + g_m(R_2 + R_4)]} \quad (4-68)$$

由于节点 x'_0 到汇点 V_0 的传输

$$t_{0i}' = \frac{-1}{[1 + g_m(R_2 + R_4)]} G_3(R_1 + R_2) \quad (4-69)$$

故可求出使输出信号为零的输入信号:

$$V_i \cdot \frac{-g_m(R_1 + R_2)}{[1 + g_m(R_2 + R_4)]} - \frac{G_3}{[1 + g_m(R_2 + R_4)]} \times (R_1 + R_2) = 0 \quad (4-70)$$

由式(4-70)求出

$$V_i = \frac{-G_3}{g_m} \quad (4-71)$$

从源点 V_i 到节点 x''_0 的传输

$$t_{ai} = \frac{-g_m(R_1 + R_2 + R_4)}{[1 + g_m(R_2 + R_4)]} \quad (4-72)$$

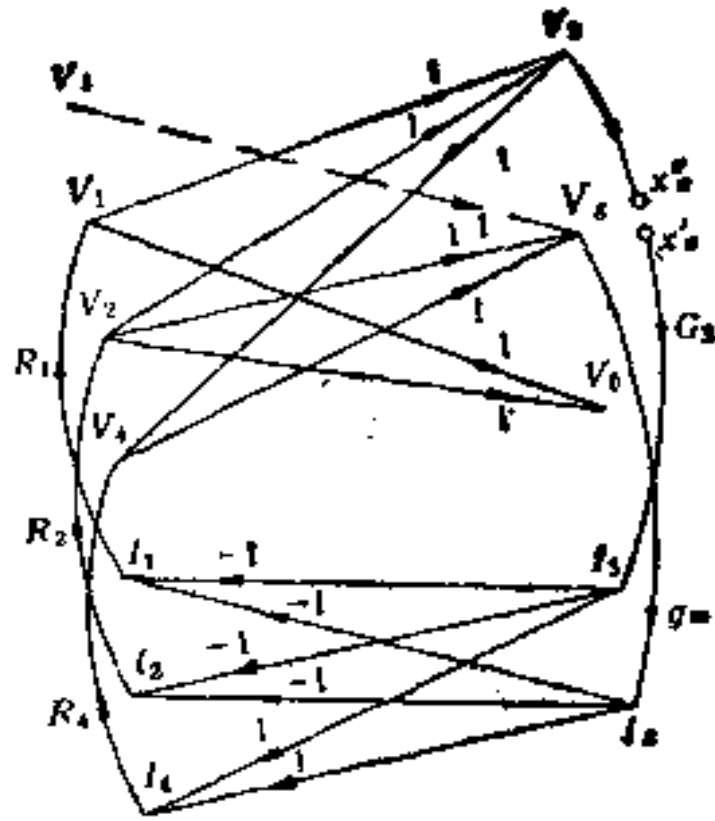


图 4-7

因此,由于源点信号在 x''_0 产生的信号为

$$V_i \cdot t_{ai} = \frac{G_3(R_1 + R_2 + R_4)}{[1 + g_m(R_2 + R_4)]} \quad (4-73)$$

于是,零输出回归差

$$F_{G_3(x_0)} = F_{G_3} - \frac{G_3(R_1 + R_2 + R_4)}{[1 + g_m(R_2 + R_4)]} \quad (4-74)$$

将式(4-67), (4-74)代入式(4-65):

$$S_{G_3}^T = \frac{1}{F_{G_3}} - \frac{1}{F_{G_3(x_0)}} = \frac{[1 + g_m(R_2 + R_4)]}{[1 + g_m(R_2 + R_4)] + G_3(R_1 + R_2 + R_4)} - \frac{[1 + g_m(R_2 + R_4)]}{[1 + g_m(R_2 + R_4)] + G_3(R_1 + R_2 + R_4) - G_3(R_1 + R_2 + R_4)} = \frac{-G_3(R_1 + R_2 + R_4)}{1 + g_m(R_2 + R_4) + G_3(R_1 + R_2 + R_4)} \quad (4-75)$$

上面讨论的回归差是在参考值为零的情况下算出的。如果选取一个使图中从源点 x_i 到汇点 x_0 的传输为零的特定值 x_r 作为参考值,并使 $x = x_r + x'$, 则支路 x' 的灵敏度称为相对灵敏度(图 1-8)。

由灵敏度的公式可写出:

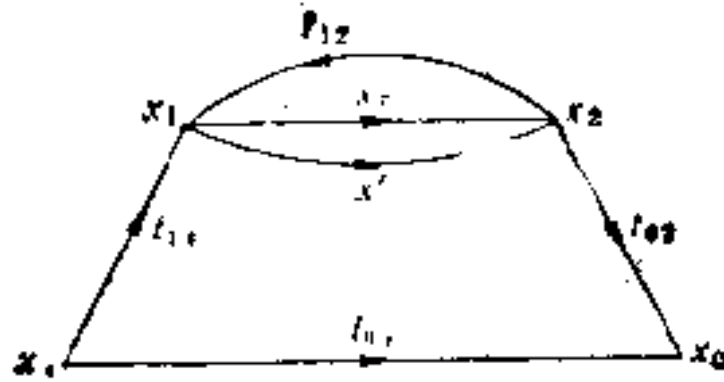


图 4-8

$$S_x^T = \frac{1}{F_{x'}} \left(1 - \frac{l'_{0i}}{T} \right) \quad (4-76)$$

式中 $T = l_{0i} + \frac{l_{1i}x'l_{02}}{1 - xl_{12}}$, l'_{0i} 是 x' 断开后 (即 $x = x_r$ 时) 从 x_i 到 x_0 的传输, 即 $l'_{0i} = T_{x=x_0}$.

因为 $l'_{0i} = 0$, 故

$$S_x^T = \frac{1}{F_{x'}} (1 - 0) = \frac{1}{F_{x'}} \quad (4-77)$$

对于灵敏度与相对灵敏度, 有下列定理:

定理 4-2. 灵敏度与相对灵敏度之比等于某参数的额定值与额定值和参考值之差之比, 即

$$\frac{S_x^T}{S_{x'}} = \frac{x}{x'} \quad (4-78)$$

证明. 由定义

$$\begin{aligned} S_x^T &= \frac{x'}{T} \frac{dT}{dx'} = \frac{x'}{T} \frac{d}{dx'} \left[l_{0i} + \frac{l_{1i}(x_r + x')l_{02}}{1 - (x_r + x')l_{12}} \right] \\ &= \frac{x'}{T} \left[\frac{(1 - xl_{12})l_{1i}l_{02} + l_{1i}xl_{02}l_{12}}{(1 - xl_{12})^2} \right] \\ &= \frac{x'}{T} \frac{l_{1i}l_{02}}{(1 - xl_{12})^2} \end{aligned} \quad (4-79)$$

因为

$$S_{x'}^T = \frac{x}{T} \cdot \frac{l_{1i} \cdot l_{02}}{(1 - xl_{12})^2} \quad (4-80)$$

式 (4-80) 与式 (4-79) 相除, 得出式 (4-78).

有时, 直接求 S_x^T 不方便, 可先求出 x_r 及 $S_{x'}^T$, 再利用式 (4-78)

求出 S_x^T .

因为 $x = x_r$ 时,

$$T = t_{0i} + \frac{t_{1i} x_r t_{02}}{1 - x_r t_{12}} = 0 \quad (4-81)$$

故

$$x_r = \frac{-t_{0i}}{t_{1i} t_{02} - t_{12} t_{0i}} \quad (4-82)$$

由式(4-76)可知,要计算 $S_{x'}^T$, 需要算出 $F_{x'}$. 由图 4-8 可写出:

$$F_{x'} = 1 - \frac{x' t_{12}}{1 - x_r t_{12}} = \frac{1 - x t_{12}}{1 - x_r t_{12}} = \frac{F_x}{F_{x(x=x_r)}} \quad (4-83)$$

式(4-83)就是 Bode 得出的关于参考值不为零的回归差的定理. 用文字表达如下:

定理 4-3. 某一元件以任意值为参考值的回归差, 等于以零为参考时的两个回归差之比. 分子中的回归差是在元件值为额定值时算出, 分母中的回归差是在元件值为参考值时算出.

例 4-7. 求图 2-6 的反馈放大器的电压增益 $T = \frac{V_0}{V_i}$ 对电阻 R_1 的灵敏度 $S_{R_1}^T$. 我们不直接求 $S_{R_1}^T$, 而是先计算 $S_{R_1}^T (R_1' = R_1 - R_{1r})$, 再应用式(4-78)计算 $S_{R_1}^T$. 为此, 先由式(4-82)求出 R_{1r} . 参阅图 4-4:

$$t_{1i} \text{ (从源点 } V_i \text{ 到节点 } I_1 \text{ 的传输)} = g_m \{ (-1)[1 + G_3(R_2 + R_4)] + R_2 G_3 + R_4 G_3 \} / \Delta = \frac{-g_m}{\Delta} \quad (4-84)$$

$$t_{02} \text{ (从节点 } V_1 \text{ 到汇点 } V_0 \text{ 的传输)} = \frac{G_3}{\Delta} [(-R_2)(1 + g_m R_4) + g_m R_2 R_4] = \frac{-G_3 R_2}{\Delta} \quad (4-85)$$

$$t_{12} \text{ (从节点 } V_1 \text{ 到节点 } I_1 \text{ 的传输)} = \frac{G_3}{\Delta} \{ (-1)[1 + g_m(R_2 + R_4)] + g_m R_2 + g_m R_4 \} = \frac{-G_3}{\Delta} \quad (4-86)$$

$$t_{01} (R_1 \text{ 断开后从源点 } V_1 \text{ 到汇点 } V_0 \text{ 的直接传输}) = \frac{-g_m R_2}{\Delta} \quad (4-87)$$

$$\Delta (R_1 \text{ 断开后的图行列式}) = 1 + G_3(R_2 + R_4) + g_m(R_2 + R_4)$$

将式(4-84)~(4-88)代入式(4-82)可求得 $x_2 = R_{12} = -R_2$, 于是 $x' = R_1 = R_1 + R_2$. 故

$$S_{R_1}^T = S_{R'}^T = \frac{1}{F_{R'}} = \frac{1}{1 + \frac{G_3(R_2 + R_4)}{1 + G_3 R_4 + g_m(R_2 + R_4)}} = \frac{1 + G_3 R_4 + g_m(R_2 + R_4)}{\Delta}$$

利用式(4-78), 得出

$$S_{R_1}^T = \frac{1}{F_{R_1}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1 + G_3 R_4 + g_m(R_2 + R_4)}{\Delta} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (4-88)$$

本节, 利用回归差的概念得到了求灵敏度的拓扑方法。这种方法有着相当的局限性: 首先, $S_{R'}^T$ 中的 $*$ 在信号流图中一定只能出现在唯一的支路中。其次, 该支路的传输一定是 $*$, 不能是 $*$ 的任何函数。对于很多实际问题, 参数 $*$ 常出现在很多支路中, 而且支路传输可以是 $*$ 的任意函数。这样, 上述方法就无法应用。这就需要有一个更普遍的计算灵敏度的拓扑方法。

4-4 计算灵敏度的拓扑公式

本节, 我们将导出利用信号流图求灵敏度的拓扑公式, 已有的一些结果将作为它的特殊形式。

1. 求灵敏度的信号流图模型

在实际情况下, 用信号流图求系统特性 T (它是信号流图中从源点到汇点的传输) 对某一系统参数 $*$ 的灵敏度 $S_{R'}^T$ 时, 常遇到的情况是多输入支路, 且一些输入支路和中间支路(起点不是源点的

支路)的传输均为 x 的非线性函数。针对这种情况,采用下列信号流图来计算灵敏度。图中共有 $p+2$ 个节点(1个源点,1个汇点和 p 个内节点), $h+q+1$ 条支路(从源点到 p 个内节点共有 h 条支路, p 个内节点相互间有 q 条支路,节点 p 有 1 条传输为 1 的支路至汇点)。

节点编号: 源点为 0, 内节点为 $1, 2, \dots, p$; 汇点为 $p+1$ 。

支路编号: 从源点至内节点的支路为 $1, 2, \dots, h$; 中间节点相互间的支路为 $h+1, h+2, \dots, h+q$; 输出支路为 $h+q+1$ 。

按 1-5 节中汇总矩阵和分支矩阵的定义,在上述信号流图模型下,描述 q 条支路进入 p 个节点的汇总矩阵

$$S_1 = \begin{bmatrix} S_{1, h+1} & \dots & S_{1, h+q} \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{p, h+1} & \dots & S_{p, h+q} \end{bmatrix} \quad (4-89)$$

描述 h 条支路从源点进入 p 个内节点的汇总矩阵

$$S_2 = \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{1h} \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{p1} & \dots & S_{ph} \end{bmatrix} \quad (4-90)$$

这里

$$S_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果节点 } i \text{ 是支路 } j \text{ 的终点} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, h+q \quad (4-91)$$

因任一条支路只能有一个终点,故 S_1 或 S_2 中每列只能有 1 个元素为 1, 其余均为零。

描述 q 条支路从 p 个节点出来的分支矩阵

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{h+11} & \dots & b_{h+1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{h+q1} & \dots & b_{h+qp} \end{bmatrix} \quad (4-92)$$

描述输出支路从 p 个节点出来的分支矩阵

$$B_2 = [b_{h+q+11} \dots b_{h+q+1p}] \quad (4-93)$$

这里

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果节点 } j \text{ 是支路 } i \text{ 的起点} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$i = h + 1, h + 2, \dots, h + q + 1; j = 1, 2, \dots, p \quad (4-94)$$

现规定输出支路从最后的内节点 p 出来, 故

$$B_2 = [0 \quad \overbrace{0 \cdots 0}^{p-1} \quad 1] \quad (4-95)$$

因任一支路只能有一个起点, 故 B_1 或 B_2 中每行只能有一个元素为 1, 其余均为零。

输入矩阵

$$U = [\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_h]^T u \quad (4-96)$$

式中 X 为源点信号, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h$ 分别为从源点至内节点的 h 条支路的支路传输。

于是, 内节点信号

$$N = [n_1 n_2 \cdots n_p]^T = [S_1 S_2] \begin{bmatrix} V \\ U \end{bmatrix} \quad (4-97)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} N \quad (4-98)$$

式中 $X = [X_1 \cdots X_q]^T$ 为支路起点信号, $V = [V_1 \cdots V_q]^T$ 为支路终点信号; Y 为汇点信号。

对于 q 条中间支路, 有

$$V = \text{diag}(\theta_{h+1} \cdots \theta_{h+q}) X = \theta X \quad (4-99)$$

式中 $\text{diag}(\theta_{h+1} \cdots \theta_{h+q})$ 为 q 阶对角阵, 其中 $\theta_{h+1}, \dots, \theta_{h+q}$ 分别为 q 条中间支路的支路传输。

因此有

$$X = B_1 (I - S_1 \theta B_1)^{-1} S_1 U \quad (4-100)$$

$$Y = B_2 (I - S_1 \theta B_1)^{-1} S_2 U \quad (4-101)$$

$$T = Y/u = B_2 (I - S_1 \theta B_1)^{-1} S_2 \varphi \quad (4-102)$$

式中 I 为 p 阶单位阵。

现用带“ \wedge ”的符号表示反向信号流图 (即将原信号流图中所

有支路反向,但每条支路的传输不变)的对应矩阵 (注意 $\hat{\theta} = \theta$), 于是支路起点信号 \hat{V} 和汇点信号 \hat{U} 分别为:

$$\hat{V} = \hat{B}_1(I - \hat{S}_1\theta\hat{B}_1)^{-1}\hat{S}_2\hat{V} \quad (4-103)$$

$$\hat{U} = \hat{B}_2(I - \hat{S}_1\theta\hat{B}_1)^{-1}\hat{S}_2\hat{V} \quad (4-104)$$

按照信号流图和反向信号流图的相互关系,显然有下列结果:

$$\hat{B}_1 = S_1^T, \hat{B}_2 = S_2^T, \hat{S}_1 = B_1^T, \hat{S}_2 = B_2^T \quad (4-105)$$

式中 $S_1^T, S_2^T, B_1^T, B_2^T$ 分别为 S_1, S_2, B_1 和 B_2 的转置矩阵.

2. 灵敏度的矩阵表示

由信号流图的 Tellegen 定理^[8],有

$$\hat{V}Y + \sum_{i=h+1}^{h+q} \hat{X}_i X_i = \hat{U}U + \sum_{i=h+1}^{h+q} \hat{V}_i V_i \quad (4-106)$$

故

$$\hat{V}dY + \sum_{i=h+1}^{h+q} \hat{X}_i dX_i = \hat{U}dU + \sum_{i=h+1}^{h+q} \hat{V}_i dV_i \quad (4-107)$$

因为 $V_i = \theta_i X_i$, 故

$$\begin{aligned} dV_i &= \frac{\partial(\theta_i X_i)}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial(\theta_i X_i)}{\partial x} dx \\ &= \theta_i dX_i + X_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x} dx, \quad \theta_i(x) \in \omega \end{aligned} \quad (4-108)$$

$$dV_i = \theta_i dX_i, \quad \theta_i \notin \omega \quad (4-109)$$

式中 ω 为支路传输 θ_i 是 x 的函数的中间支路的集合.

对于反向信号流图,有

$$\hat{X}_i = \hat{\theta}_i \hat{V}_i = \theta_i \hat{V}_i \quad (4-110)$$

将式 (4-108)~(4-110) 代入式 (4-107), 可得

$$\hat{V}dY = \hat{U}dU + \sum_{\theta_i \in \omega} \hat{V}_i \cdot \frac{\partial \theta_i(x)}{\partial x} \cdot dx \cdot X_i \quad (4-111)$$

在反向信号流图中,令 $\hat{V} = 1$ (这时的反向信号流图称为伴随信号流图), 则式 (4-111) 变为

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dU}{dx} \hat{U} + \sum_{\theta_i \in \omega} X_i \frac{\partial \theta_i(x)}{\partial x} \hat{V}_i \quad (4-112)$$

因为

$$dU_i = u \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} dx, \quad \varphi_i(x) \in \phi \quad (4-113)$$

式中 ϕ 为支路传输 φ_i 是 x 的函数的从源点至内节点的支路集合。

将式 (4-100), (4-103), (4-104) 代入式 (4-112), 有

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} = & u \sum_{\varphi_i \in \phi} \left\{ \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} [\hat{B}_2(I - \hat{S}_1 \theta \hat{B}_1)^{-1} \hat{S}_2]_i \right\} \\ & + u \sum_{\theta_{i+h} \in \psi} \left\{ [B_1(I - S_1 \theta B_1)^{-1} S_2 U]_i \cdot \frac{\partial \theta_{i+h}(x)}{\partial x} \right. \\ & \left. \cdot [\hat{B}_1(I - \hat{S}_1 \theta \hat{B}_1)^{-1} \hat{S}_2]_i \right\} \end{aligned} \quad (4-114)$$

将式 (4-105) 代入式 (4-114), 可消去伴随信号流图的有关矩阵, 并注意到 $T = \frac{Y}{u}$, 可得出

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} = & \sum_{\varphi_i \in \phi} \left\{ \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \cdot [S_2^T \cdot (I - B_1^T \theta S_1^T)^{-1} B_2^T]_i \right\} \\ & + \sum_{\theta_{i+h} \in \psi} \left\{ [B_1(I - S_1 \theta B_1)^{-1} S_2 U]_i \frac{\partial \theta_{i+h}(x)}{\partial x} \right. \\ & \left. \cdot [S_1^T (I - B_1^T \theta S_1^T)^{-1} B_2^T]_i \right\} \end{aligned} \quad (4-115)$$

为了进一步说明式 (4-108) 的拓扑意义, 需要讨论 $(I - S_1 \theta B_1)^{-1}$ 和 $(I - B_1^T \theta S_1^T)^{-1}$ 。

令 $S_1 \theta B_1 = R = [r_{ij}]$, 则

$$r_{ij} = \begin{cases} \theta_{i+h}, & \text{若支路 } i+h (i=1, 2, \dots, q) \text{ 从节点 } j \text{ 至 } i \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

设

$$M = (I - R)^{-1} = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{p1} & \dots & m_{pp} \end{bmatrix} \quad (4-116)$$

则

$$m_{ij} = A_{ij}(|I - R|)/|I - R| \quad (4-117)$$

式中 $A_{ji}(|I - R|)$ 为行列式 $|I - R|$ 的第 j 行、第 i 列的代数余因式。

由1-6节中的讨论可知, $A_{ji}(|I - R|)$ 是所有从节点 j 到节点 i 的路传输与对应的不接触该路的图行列式之积之和, $A_{ii} \times (|I - R|)$ 是除去节点 i 所关联的支路后的图行列式, 因此, $m_{ij} = A_{ji}(|I - R|)/|I - R|$ 表示从节点 j 至节点 i 的传输, $m_{ii} = A_{ii}(|I - R|)/|I - R|$ 表示除去节点 i 所关联的支路的图行列式与图行列式 $|I - R|$ 之比, 不难证明:

$$(I - B_1^T \theta S_1^T)^{-1} = (I - R^T)^{-1} = M^T \quad (4-118)$$

3. 拓扑公式

将式(4-118)代入式(4-115), 并考虑矩阵运算后, 可得出

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= \sum_{\varphi_i \in \psi} \left\{ \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} [S_2^T M^T B_1^T]_i \right\} \\ &\quad + \sum_{\theta_{i+h} \in \omega} \left\{ [B_1 M S_2 U]_i \frac{\partial \theta_{i+h}(x)}{\partial x} \cdot [S_1^T M^T B_1^T]_i \right\} \\ &= \sum_{\varphi_i \in \psi} \left\{ \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} m_{pi'} [(S_2)_{i'i} = 1] \right\} \\ &\quad + \sum_{\theta_{i+h} \in \omega} \left\{ \sum_{g=1}^h m_{wg'} \cdot [(B_1)_{iw} = 1, \right. \\ &\quad \left. (S_2)_{g'g} = 1] \varphi_g \cdot \frac{\partial \theta_{i+h}(x)}{\partial x} \cdot m_{pt} [(S_1)_{ti} = 1] \right\} \quad (4-119) \end{aligned}$$

式中 $m_{pi'} [(S_2)_{i'i} = 1]$ 为 M 的第 p 行、第 i' 列的元素; i' 为 S_2 的第 i 列(对应于输入支路 i) 为 1 的元素所对应的行号, 即输入支路 i 的终点是节点 i' , 故 $m_{pi'} [(S_2)_{i'i} = 1]$ 是从输入支路 i 的终点 i' 至节点 p (节点 p 实际上是汇点, 因为汇点 $p+1$ 只有唯一的一条支路从节点 p 来) 的传输; $m_{pt} [(S_1)_{ti} = 1]$ 为 M 的第 p 行、第 t 列的元素; t 为 S_1 的第 i 列(对应于中间支路 $i+h$) 为 1 的元素所对应的行号, 即中间支路 $i+h$ 的终点是节点 t , 故 $m_{pt} [(S_1)_{ti} = 1]$ 是从中间支路 $i+h$ 的终点 t 至节点 p 的传输; $m_{wg'} [(B_1)_{iw} = 1, (S_2)_{g'g} = 1]$ 为 M 的第 w 行、第 g' 列的元素, w 为 B_1 的第 i 行

(对应于中间支路 $i+h$) 为 1 的元素所对应的列号, 即中间支路 $i+h$ 的起点是 w , g' 为 S_2 的第 g 列(对应于输入支路 g) 为 1 的元素所对应的行号, 即输入支路 g 的终点是节点 g' , 故 $m_{wg'} \times [(B_1)_{iw} = 1, (S_2)_{g'g} = 1] \varphi_g$ 为输入支路 g 的终点 g' 至中间支路 $i+h$ 的起点 w 的传输; $\sum_{g=1}^h m_{wg'} [(B_1)_{iw} = 1, (S_2)_{g'g} = 1] \varphi_g$ 为输入支路 g 的支路增益 φ_g 与该支路终点 g' 至中间支路 $i+h$ 的起点 w 之积之和(共 h 项); 即从源点经 h 条输入支路至中间支路 $i+h$ 的起点 w 的传输。

于是, 式 (4-119) 可进一步简化为

$$\frac{dT}{dx} = \sum_{\varphi_i \in \psi} \left[\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} t_{pi'} \right] + \sum_{\theta_{i+h} \in \omega} \left[t_{w0} \cdot \frac{\partial \theta_{i+h}(x)}{\partial x} \cdot t_{pt} \right] \quad (4-120)$$

式中 $t_{pi'}$ 为从输入支路 $\varphi_i(x)$ 的终点 i' 至节点 p 的传输; t_{w0} 为从源点 0 至中间支路 $\theta_{i+h}(x)$ 的起点 w 的传输; t_{pt} 为从 θ_{i+h} 的终点 t 至节点 p 的传输; $\sum_{\varphi_i \in \psi}$ 表示对所有支路传输为 x 函数的输入支路

φ_i 求和; $\sum_{\theta_{i+h} \in \omega}$ 表示对所有支路传输为 x 函数的中间支路求和。

式 (4-120) 可写成更普遍的形式:

$$\frac{dT}{dx} = \sum_{\theta} t_{w0} \cdot \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \cdot t_{pt} \quad (4-121)$$

式中 $\theta(x)$ 是支路传输为 x 的函数的支路。支路的起点是 w , 终点是 t 。 \sum_{θ} 表示对所有支路传输为 x 的函数的支路求和。

显然, 式 (4-121) 包括了式 (4-120) 的情况在内。如果 $\theta(x)$ 是从源点出发的支路, 则 $t_{w0} = 1$ 。因为除掉源点所关联的支路后的图行列式仍旧是原来的图行列式。这时, $t_{w0} \cdot \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \cdot t_{pt}$ 即变为 $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} t_{pi'}$ 。如果 $\theta(x)$ 是连接在汇点的支路, 则同样地有 $t_{pt} =$

1, 于是 $t_{u0} \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \cdot t_{pt}$ 变为 $t_{u0} \cdot \frac{\partial \theta(x)}{\partial x}$. 如果 $\theta(x)$ 是接在源点和汇点间的支路, 则 $t_{u0} \cdot \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \cdot t_{pt}$ 简单地成为 $\frac{\partial \theta(x)}{\partial x}$. 因此, 式(4-121)是普遍的形式. 这样, 求灵敏度的问题就简化为求出从源点至支路 $\theta(x)$ 起点的传输, $\theta(x)$ 对 x 的偏微商, 以及从支路 $\theta(x)$ 终点至汇点的传输, 并将三者相乘; 然后对所有这样的支路取上述三项之积, 将这些乘积相加.

求出 $\frac{dT}{dx}$ 后, 利用 $S_x^T = \frac{x}{T} \frac{dT}{dx}$ 不难得到 S_x^T .

很清楚, 4-3 节中利用回归差计算灵敏度的式(4-50)是式(4-121)的特殊情况. 若图中只有一条支路为 x 的函数, 且该支路的传输为 1, 则式(4-121)简化为

$$\frac{dT}{dx} = t_{u0} \cdot t_{pt} \quad (4-122)$$

将式(4-45)两端对 x 微分, 可得出与式(4-122)相同的结果. 注意, 式(4-122)中的 t_{u0} , t_{pt} 分别等于式(4-45)中的 t_{11} 和 t_{02} .

例 4-8. 求图 4-9 所示的晶体管反馈放大器的输入阻抗 $Z_{in} = \frac{V_1}{i_1}$ 对负荷阻抗 Z_L 的灵敏度 $S_{Z_L}^{Z_{in}}$.

图 4-9 的电路的等效电路如图 4-10 所示 (参数 h_{re} 忽略不

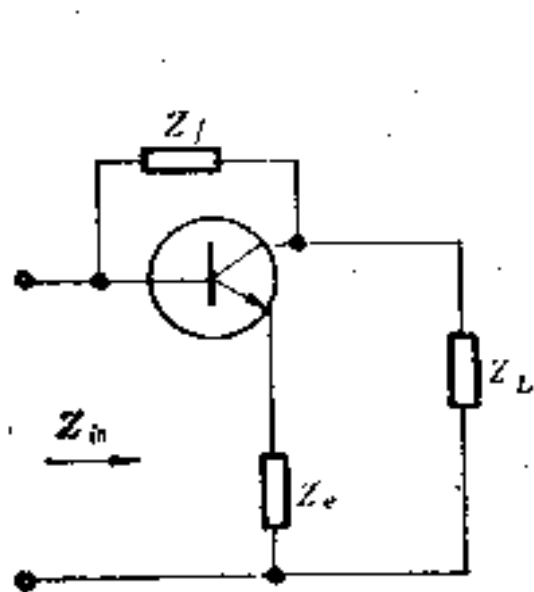


图 4-9

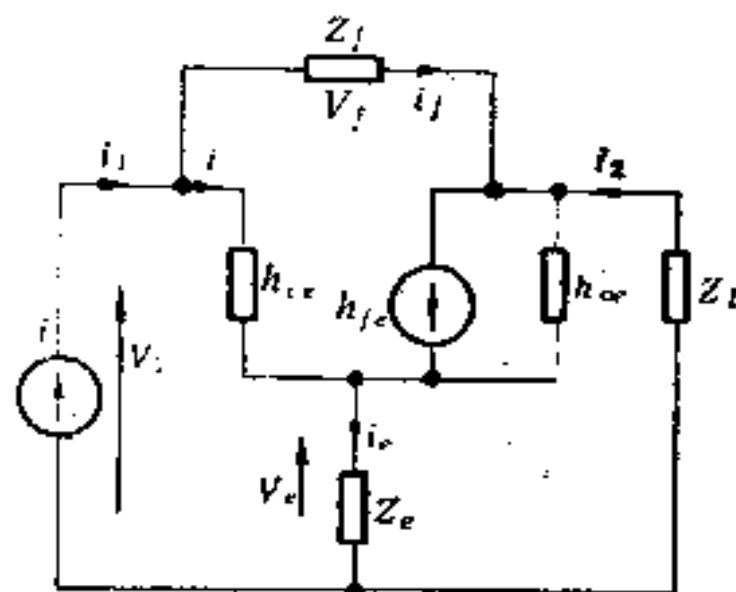


图 4-10

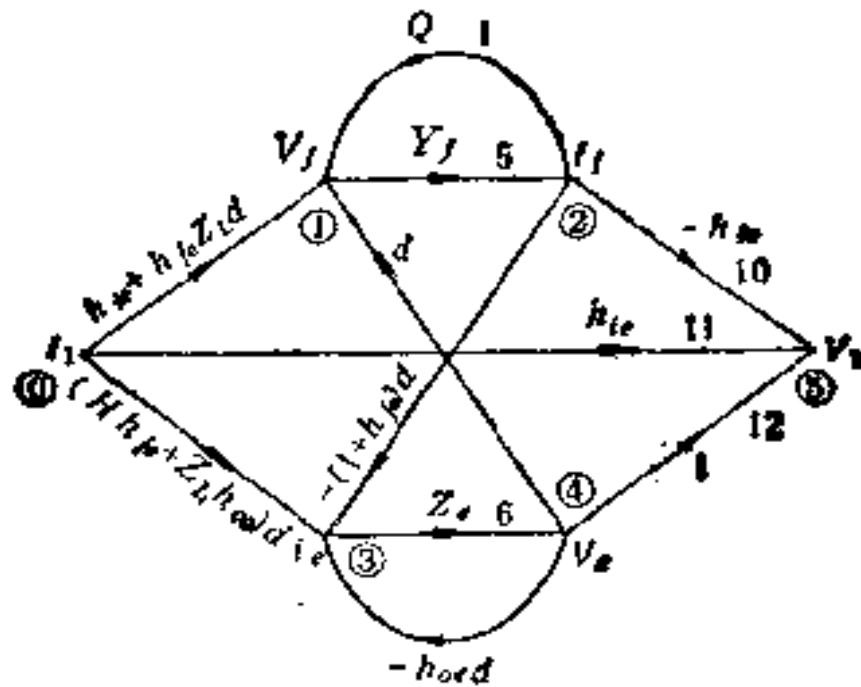


图 4-11

计)。

该电路的方程组所对应的信号流图如图 4-11⁽¹⁰⁾。

图 4-11 中, $Q = - \left[h_{ie} + \frac{Z_L(1+h_{fe})}{1+Z_L h_{oe}} \right]$, $d = \frac{1}{1+Z_L h_{oe}}$ 。

支路的编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12。节点的编号为 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥。由图 4-11 可知, 支路 1, 3, 4, 7, 8, 9 的支路传输都是 Z_L 的函数, 而且是非线性函数。于是, 得出

$$\left. \begin{aligned}
 \theta_1 &= h_{ie} + h_{fe} Z_L d, & \frac{\partial \theta_1}{\partial Z_L} &= \frac{h_{fe}}{(1+Z_L h_{oe})^2}, & t_{01} &= 1, \\
 t_{21} &= -y_f [(1+h_{fe})d Z_e + h_{ie}(1+Z_e h_{oe} d)] / \Delta; \\
 \theta_3 &= (1+h_{fe} + Z_L h_{oe})d, & \frac{\partial \theta_3}{\partial Z_L} &= \frac{-h_{oe} h_{fe}}{(1+Z_L h_{oe})^2}, \\
 t_{03} &= 1, & t_{33} &= Z_e [1 - y_f (Q + h_{ie} d)] / \Delta; \\
 \theta_4 &= Q, & \frac{\partial \theta_4}{\partial Z_L} &= -\frac{1+h_{fe}}{(1+Z_L h_{oe})^2}, \\
 t_{20} &= [y_f (h_{ie} + h_{fe} Z_L d)(1+Z_e h_{oe} d) + (1+h_{fe} \\
 &\quad + Z_L h_{oe})d Z_e d y_f] / \Delta; \\
 \theta_7 &= -h_{oe} d, & \frac{\partial \theta_7}{\partial Z_L} &= \frac{h_{oe}^2}{(1+Z_L h_{oe})^2}, \\
 t_{40} &= [(1+h_{fe} + Z_L h_{oe})d Z_e (1 - Q y_f) + (h_{ie} \\
 &\quad + h_{fe} Z_L d) y_f (-1 - h_{fe})d Z_e] / \Delta;
 \end{aligned} \right\} (4-123)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_8 &= d, \quad \frac{\partial \theta_8}{\partial Z_L} = \frac{-h_{oc}}{(1 + Z_L h_{oc})^2}; \\ \theta_9 &= -(1 + h_{fc})d, \quad \frac{\partial \theta_9}{\partial Z_L} = \frac{(1 + h_{fc})h_{oc}}{(1 + Z_L h_{oc})^2}. \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} Z_{in} &= \frac{1}{\Delta} [(h_{ie} + h_{fc}Z_L d)y_f(-h_{ie})(1 + Z_c h_{oc}d) \\ &\quad + (1 + h_{fc} + Z_L h_{oc})dZ_2(1 - Qy_f) + (h_{ie} \\ &\quad + h_{fc}Z_L d)y_f(-1 - h_{fc})dZ_c + (1 + h_{fc} \\ &\quad + Z_L h_{oc})dZ_c d y_f(-h_{ie})] \end{aligned} \quad (4-124)$$

$$\Delta = 1 - Qy_f(1 + h_{oc}dZ_c) + Z_c d [h_{oc} + y_f(1 + h_{fc})d] \quad (4-125)$$

由式(4-121), 有

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{in}}{dZ_L} &= \frac{\partial \theta_1}{\partial Z_L} \cdot t_{31} + \frac{\partial \theta_3}{\partial Z_L} \cdot t_{33} + t_{20} \cdot \frac{\partial \theta_4}{\partial Z_L} \cdot t_{51} + t_{40} \frac{\partial \theta_7}{\partial Z_L} \\ &\quad \cdot t_{53} + t_{40} \frac{\partial \theta_8}{\partial Z_L} \cdot t_{51} + t_{20} \frac{\partial \theta_9}{\partial Z_L} \cdot t_{53} \end{aligned} \quad (4-126)$$

利用[14]中的数据: $h_{ie} = 1500$ 欧, $h_{re} = 10^{-3}$, $h_{fc} = 60$, $h_{oc} = 60 \times 10^{-5}$ 姆, $Z_L = 1000$ 欧, $Z_c = 100$ 欧, $y_f = 10^{-5}$ 姆, 代入式(4-123)~(4-126)中, 可算出

$$S_{Z_L}^{Z_{in}} = \frac{Z_L}{Z_{in}} \frac{dZ_{in}}{dZ_L} \approx -0.3 \quad (4-127)$$

负号表明, Z_L 增加时, Z_{in} 减小; Z_L 减小时, Z_{in} 增加。

例 4-9. 求图 2-6 所示的反馈放大器电路的电压增益 $\frac{V_o}{V_i}$ 对电导 G_3 的灵敏度 $S_{G_3}^{V_o/V_i}$ 。

在例 4-6 中曾利用分别求 G_3 的零回归差和零输出回归差计算过 $S_{G_3}^{V_o/V_i}$ 。这里, 由式(4-121), 得出

$$\frac{d(V_o/V_i)}{dG_3} = t_{3i} \cdot \frac{\partial G_3}{\partial G_3} \cdot t_{o3} = t_{3i} \cdot t_{o3} \quad (4-128)$$

式中 t_{3i} 是从源点 V_i 到支路 G_3 的起点 V_3 的传输; t_{o3} 是从支路 G_3 的终点 I_3 到汇点 V_o 的传输(参阅图 4-4)。

因此，灵敏度的计算就归结于求信号流图中两对节点间的传输。由图 4-4，得出

$$t_{3i} = \frac{1}{\Delta} [-g_m(R_1 + R_2 + R_4)] \quad (4-129)$$

$$t_{03} = \frac{-1}{\Delta} (R_1 + R_2) \quad (4-130)$$

$$V_o/V_i = \frac{-1}{\Delta} g_m(R_1 + R_2) \quad (4-131)$$

式中

$$\Delta = 1 + G_3(R_1 + R_2 + R_3) + g_m(R_2 + R_4) \quad (4-132)$$

因此，灵敏度

$$\begin{aligned} S_{G_3}^{V_o/V_i} &= \frac{G_3}{-\frac{1}{\Delta} g_m(R_1 + R_2)} \cdot \frac{1}{\Delta} [-g_m(R_1 + R_2 + R_4)] \\ &\quad \cdot \frac{-1}{\Delta} (R_1 + R_2) = -\frac{G_3(R_1 + R_2 + R_3)}{\Delta} \\ &= \frac{-G_3(R_1 + R_2 + R_4)}{1 + g_m(R_2 + R_4) + G_3(R_1 + R_2 + R_4)} \quad (4-133) \end{aligned}$$

这与 4-3 节中用回归差方法得出的结果相同(参阅式(4-75))。但是，式(4-121)具有更普遍的意义。它将灵敏度的计算归结于求信号流图中一些节点对间的传输。我们可利用 Mason 增益公式直接在原图上进行计算。

4-5 灵敏度的结构分析

求灵敏度的拓扑公式(4-121)表明了一个很有用的性质。它是灵敏度的结构分析的基础。从式(4-121)可看出，求灵敏度的问题实际上是找出所有包括传输作为 x 的函数的支路在内的从源点到汇点的路。如果某一传输为 x 的函数的支路不在源点到汇点的路上，则该支路对灵敏度的贡献为零，可不加考虑。下面，我们将根据这一性质从结构观点来讨论参数变化对系统特性的影响。

首先,给出下列几个定义.

强连通图. 一个有向图 D 中,如果任两个节点间至少有一条有向路,则该图称为强连通图.例如,图4-12(a)是强连通图,而4-12(b)则不是.

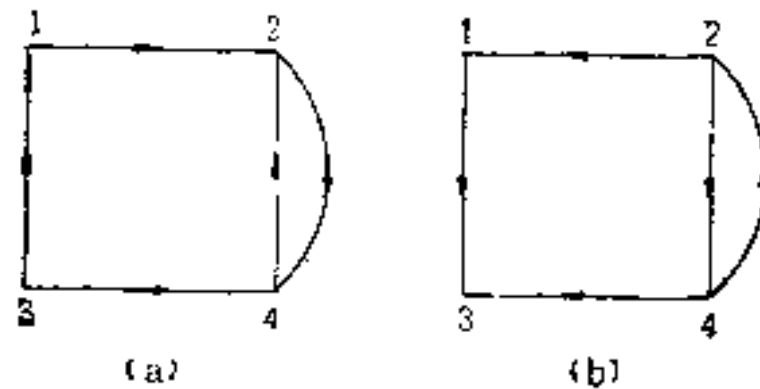


图 4-12

收缩图. 对于有向图 D ,其中每个强连通子图用一个节点表示,其余的支路仍保持不变,这样得出的图称为有向图 D 的收缩图.例如,图4-13(a)的有向图 D 的对应收缩图如4-13(b)所示.图4-13(a)中有三个强连通子图,分别用三个节点表示.收缩图中每个节点旁的括弧内的号码表示它所包括的图 D 中节点号码.显然,对于无环图来说,收缩图就是原来的图,因为图中没有环.有环图经过收缩后的收缩图是无环图.无环图实际上是递阶的图.递阶的意思是:图中的点是有上、下级之分的.无环图中任何两个节点 i 和 j ,如果从节点 i 到节点 j 能找到一条有向路,则称节点 i 是 j 的上级节点,而节点 j 是节点 i 的下级节点.上、下级关系是相对而言的.

如果将每个强连通子图看作一个子系统,则收缩图表示子系统间的连接情况.于是,子系统间也存在着上、下级的关系.因此,对于用信号流图描述的系统,可以先找出信号流图的收缩图,其中每个节点对应于一个子系统.子系统中每个节点所对应的变量就是信号流图中从源点到该节点的传输.前面已指出,如果某一支路不在从源点到该节点的路上,则该支路传输的变化,不影响该节点所对应的变量.显然,下级节点所表示的子系统中任一支路或上级节点接到下级节点的支路一定不在源点到上级节点的路

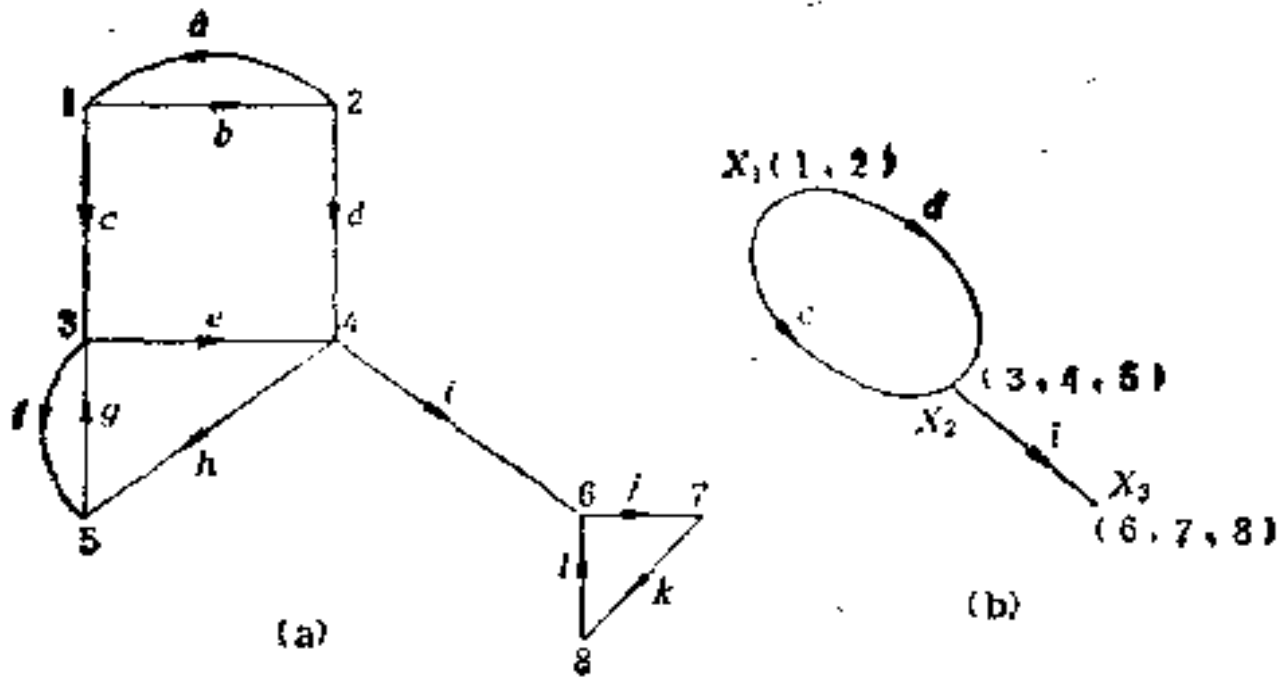


图 4-13

上。所以，它们的传输的变化一定不影响上级节点所对应的那些变量。于是，可得出系统中支路传输变化的传播规则：

(1) 子系统中任一支路传输的变化，将引起该子系统中所有节点所对应的变量发生变化。

(2) 下级子系统中任一支路传输或上级子系统接到下级子系统的任一支路传输的变化，将不影响上级子系统所对应的变量。

上面的规则，使我们可从结构观点进行灵敏度的分析。这在

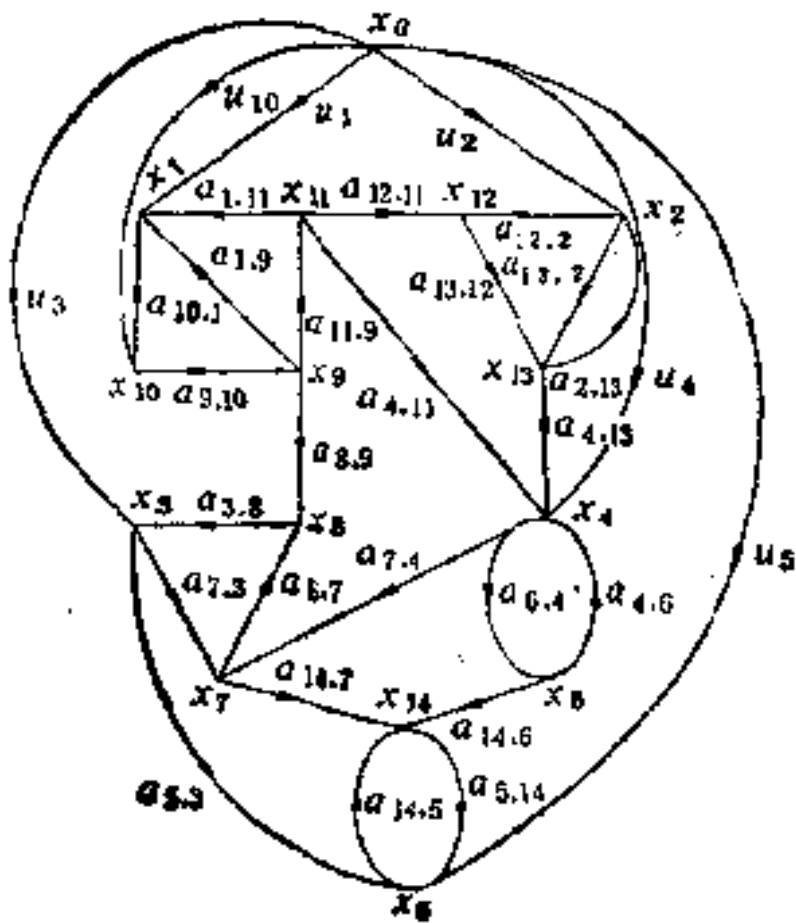


图 4-14

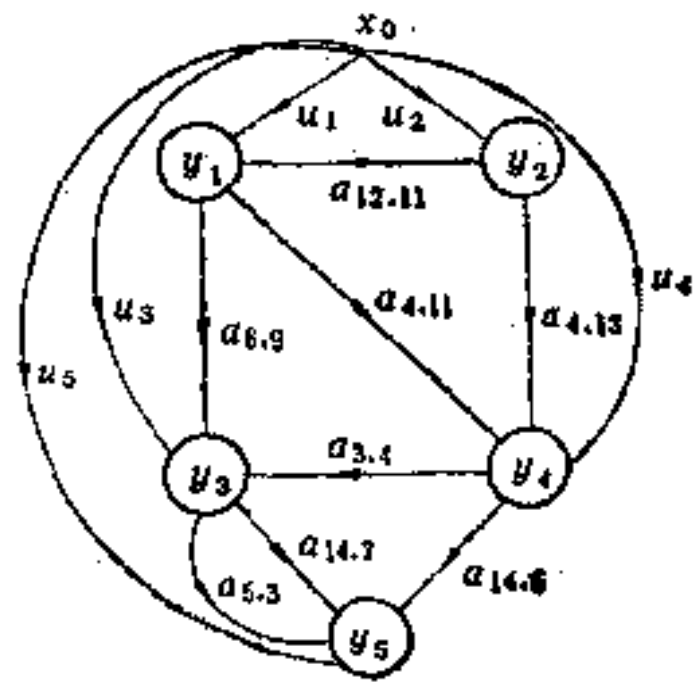


图 4-15

进行系统分析时，可以清楚地看出那些参数的变化对系统性能有影响。

例 4-10. 图 4-14 是描述某一系统的信号流图。

图 4-14 的收缩图如图 4-15 所示。图 4-15 中， Y_1 代表节点 x_1, x_9, x_{10}, x_{11} 组成的强连通子图， Y_2 代表节点 x_2, x_{12}, x_{13} 组成的强连通子图， Y_3 代表节点 x_3, x_7, x_8 组成的强连通子图， Y_4 代表节点 x_4, x_6 组成的强连通子图， Y_5 代表节点 x_5, x_{14} 组成的强连通子图。现在设 x_{11} 至 x_1 的支路传输 $a_{1,11}$ 发生变化。按上述规则 (1)，子系统 Y_1 中的所有节点变量 x_1, x_9, x_{10}, x_{11} 都要发生变化。由图 4-15 可看出，子系统 Y_1 是子系统 Y_2, Y_3, Y_4 和 Y_5 的上级系统。按上述规则 (2)，子系统 Y_2, Y_3, Y_4 和 Y_5 中的所有变量都要发生

表 4-1

$a_{1,9} = 0.1$	$a_{1,11} = 0.2$	$a_{2,13} = 0.15$	$a_{3,8} = 0.2$
$a_{4,6} = 0.15$	$a_{4,11} = 0.17$	$a_{4,13} = 0.1$	$a_{5,5} = 0.20$
$a_{5,14} = 0.1$	$a_{6,4} = 0.12$	$a_{7,13} = 0.29$	$a_{7,4} = 0.15$
$a_{8,1} = 0.1$	$a_{8,9} = 0.20$	$a_{9,10} = 0.10$	$a_{10,1} = 0.15$
$a_{11,9} = 0.15$	$a_{12,2} = 0.20$	$a_{12,11} = 0.14$	$a_{13,2} = 0.12$
$a_{13,12} = 0.1$	$a_{14,5} = 0.10$	$a_{14,16} = 0.20$	$a_{14,7} = 0.12$
$x_0 = u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_{10} = 1$			

表 4-2

$a_{1,11}$ 未变化前的解		
$x_1 = 1.01497921$	$x_2 = 1.02148753$	$x_3 = 1.01176377$
$x_4 = 1.03590962$	$x_5 = 1.22134526$	$x_6 = 0.12430915$
$x_7 = 0.35773920$	$x_8 = 0.05881886$	$x_9 = 0.11522469$
$x_{10} = 1.15224688$	$x_{11} = 0.01728370$	$x_{12} = 0.20671722$
$x_{13} = 0.14325023$	$x_{14} = 0.18992506$	
$a_{1,11}$ 变化为 0.22(+10%) 后的解		
$x_1 = 1.01532557$	$x_2 = 1.02148753$	$x_3 = 1.01176398$
$x_4 = 1.03590976$	$x_5 = 1.22134530$	$x_6 = 0.12430917$
$x_7 = 0.35773926$	$x_8 = 0.05881990$	$x_9 = 0.11522988$
$x_{10} = 1.15229884$	$x_{11} = 0.01728448$	$x_{12} = 0.20671733$
$x_{13} = 0.14325024$	$x_{14} = 0.18992507$	

变化。若子系统 Y_5 中从节点 14 到节点 5 的支路传输 $a_{5,14}$ 发生变化, 则同一系统中的变量 x_5, x_{14} 发生变化。因为子系统 Y_5 是 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 的下级系统, 所以 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 中的变量没有变化。表 4-1 给出了图 4-14 中的所有支路的传输。表 4-2 给出了 $a_{1,11}$ 变化(变化 +10%) 前后的节点变量数值。表 4-3 给出了 $a_{5,14}$ 变化(变化 +10%) 前后的节点变量数值。

表 4-3

$a_{5,14}$ 变化前的解		
$x_1 = 1.01497921$	$x_2 = 1.02148753$	$x_3 = 1.01176377$
$x_4 = 1.03590962$	$x_5 = 1.22134526$	$x_6 = 0.12430915$
$x_7 = 0.35773920$	$x_8 = 0.05881806$	$x_9 = 0.11522469$
$x_{10} = 1.15224688$	$x_{11} = 0.01728370$	$x_{12} = 0.20671722$
$x_{13} = 0.14325023$	$x_{14} = 0.18992504$	
$a_{5,14}$ 变为 0.11(+10%) 后的解		
$x_1 = 1.01497921$	$x_2 = 1.02148753$	$x_3 = 1.01175377$
$x_4 = 1.03590962$	$x_5 = 1.22326564$	$x_6 = 0.12430915$
$x_7 = 0.35773920$	$x_8 = 0.05001886$	$x_9 = 0.11522469$
$x_{10} = 1.15224688$	$x_{11} = 0.01728370$	$x_{12} = 0.20671722$
$x_{13} = 0.14325023$	$x_{14} = 0.19011710$	

从表 4-2 可看出, $a_{1,11}$ 变化后除变量 x_1 无变化外所有变量都发生变化。4-3 表表明, $a_{5,14}$ 变化后, 只有变量 x_5 和 x_{14} 变化。这就证实了上述推断的正确性。

4-6 高阶灵敏度

式 (4-24) 表明了当 n 个参数同时发生变化时, 系统特性的变化。当参数 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的变化 Δx_i 不是很小时, 只考虑一次项将产生很大的误差。这时, 必须考虑二次, 甚至更高次项, 也就是必须计算 $\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^n T}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}, \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \dots,$

$\frac{\partial^n T}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$ 分别称为 T 对 x_i, x_j 的二阶非标称灵敏度, ..., 对 x_1, x_2, \dots, x_n 的 n 阶非标称灵敏度。后面, 统称高阶灵敏度。

本节, 将在计算一阶灵敏度的拓扑公式的基础上, 讨论高阶灵敏度的拓扑计算问题。

由一阶灵敏度的拓扑公式 (4-121), 有

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \sum_{\theta_1} t_{W_1,0} \frac{\partial \theta_1(x_1)}{\partial x_1} t_{P, \theta_1} \quad (4-134)$$

式 (4-134) 两端对 x_2 微分, 得出

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{\theta_1} t_{W_1,0} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \cdot t_{P, \theta_1} \right) \\ &= \sum_{\theta_1} t_{W_1,0} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \cdot t_{P, \theta_1} \right) + \sum_{\theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} t_{P, \theta_1} \frac{\partial}{\partial x_2} (t_{W_1,0}) \\ &= \sum_{\theta_1} t_{W_1,0} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1 \partial x_2} t_{P, \theta_1} + \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} t_{W_1,0} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \cdot t_{W_2, \theta_1} \\ &\quad \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \cdot t_{P, \theta_2} + \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_3} t_{W_1,0} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \cdot t_{W_1, \theta_3} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial x_2} \cdot t_{P, \theta_3} \quad (4-135) \end{aligned}$$

式中 $t_{W_1,0}$ 是从源点 O 到支路 θ_1 的起点的传输, t_{P, θ_1} 是从支路 θ_1 的终点 I_1 到汇点 P 的传输, t_{W_2, θ_1} 是从支路 θ_1 的终点 I_1 到支路 θ_2 的起点 W_2 的传输, t_{P, θ_2} 是从支路 θ_2 的终点 I_2 到汇点 P 的传输, $t_{W_3,0}$ 是从源点 O 到支路 θ_3 的起点 W_3 的传输, t_{W_1, θ_3} 是从支路 θ_3 的终点 I_3 到支路 θ_1 的起点 W_1 的传输。

从式 (4-135) 可看出, 二阶灵敏度的计算和一阶灵敏度的计算相类似, 也是归结于计算信号流图中一些路的传输。除了包括一阶灵敏度计算中的路传输 $t_{W_1,0}$, t_{P, θ_1} 外, 还包括 $t_{W_1,0}$ 和 t_{P, θ_1} 再划分的路传输 ($t_{W_3,0}$ 和 t_{W_1, θ_3} 是 $t_{W_1,0}$ 的划分, t_{W_2, θ_1} 和 t_{P, θ_2} 是 t_{P, θ_1} 的划

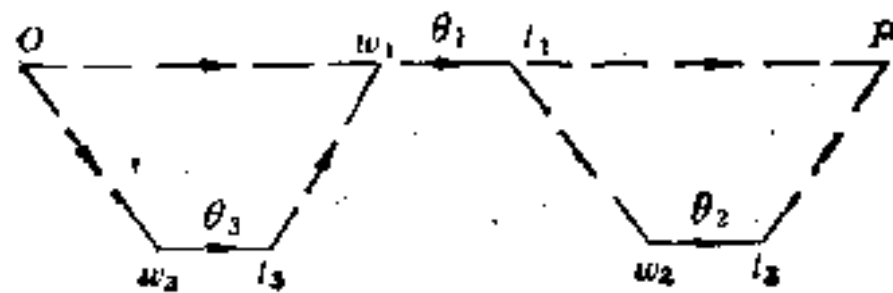


图 4-16

分),如图 4-16 所示。

例 4-11. 求图 4-17 所示的 RC 网络的电压传输函数 T 对 R 和 C 的二阶灵敏度 $\frac{\partial^2 T}{\partial R \partial C}$. RC 网络的信号流图如图 4-18 所示。

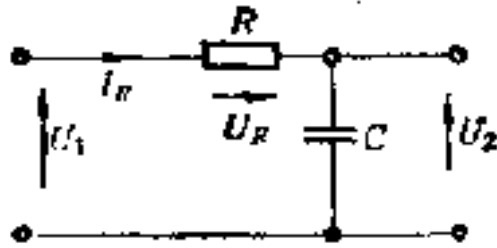


图 4-17

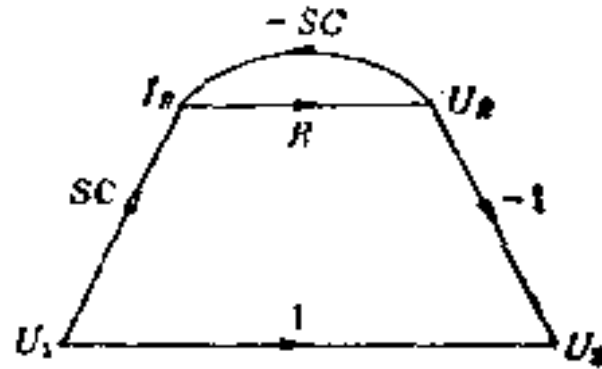


图 4-18

由图 4-18, 利用式 (4-135) 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial R \partial C} &= t_{I_R U_1} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial R} \right) \cdot t_{U_R U_R} \cdot \frac{\partial}{\partial C} (-SC) \cdot t_{U_2 I_R} + \left[t_{U_1 U_1} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\partial}{\partial C} (SC) + t_{U_R U_1} \frac{\partial}{\partial C} (-SC) \right] t_{I_R I_R} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial R} R \right) \cdot t_{U_2 U_R} \\ &= \frac{SC}{(1+RCS)} \cdot (1) \cdot \frac{1}{(1+RCS)} \cdot (-S) \\ &\quad \cdot \frac{-R}{(1+RCS)} + (1) \cdot (S) \cdot \frac{1}{(1+RCS)} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(1+RCS)} \cdot \frac{-1}{(1+RCS)} \\ &= \frac{S(SCR-1)}{(1+RCS)^2} \end{aligned} \quad (4-136)$$

如果 $x_1 = x_2$, 则式 (4-135) 简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} &= \sum_{\theta_1} t_{w_{10}} \cdot \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1^2} \cdot t_{p_{11}} + 2 \sum_{\theta_2} \sum_{\theta_1} t_{w_{10}} \\ &\quad \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \cdot t_{w_{21}} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \cdot t_{p_{12}} \end{aligned} \quad (4-137)$$

例 4-12. 求图 4-17 中 RC 网络的电压传输函数 T 对 R 的二阶灵敏度 $\frac{\partial^2 T}{\partial R^2}$.

由式 (4-137):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} &= 2 \cdot t_{I_R U_i} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial R} \right) \cdot t_{I_R U_R} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial R} \right) \cdot t_{U_i U_R} \\ &= 2 \cdot \frac{SC}{(1+RCS)} (1) \cdot \frac{-SC}{(1+RCS)} \cdot (1) \cdot \frac{-1}{(1+RCS)} \\ &= \frac{2S^2 C^2}{(1+RCS)^3} \end{aligned} \quad (4-138)$$

例 4-13. 求图 4-11 中 $T = \frac{V_i}{i_1}$ 对 Z_L 和 h_{fe} 的二阶灵敏度 $S_{Z_L, h_{fe}}^T$.

由图 4-11 可知, 支路传输是 Z_L 函数的支路有 $\theta_1, \theta_3, \theta_4, \theta_7, \theta_8, \theta_9$. 支路传输是 h_{fe} 函数的支路有 $\theta_1, \theta_3, \theta_4, \theta_9$. 支路传输同时是 Z_L 和 h_{fe} 的函数的支路有 $\theta_1, \theta_3, \theta_4, \theta_9$.

于是, 由式 (4-135) 和图 4-11, 得出

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial Z_L \partial h_{fe}} &= \left(t_{00} \cdot \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial Z_L \partial h_{fe}} \cdot t_{51} + t_{00} \cdot \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial Z_L \partial h_{fe}} \cdot t_{53} \right. \\ &\quad \left. + t_{20} \cdot \frac{\partial^2 \theta_4}{\partial Z_L \partial h_{fe}} \cdot t_{51} + t_{20} \cdot \frac{\partial^2 \theta_9}{\partial Z_L \partial h_{fe}} \cdot t_{53} \right) \\ &\quad + \left[t_{00} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial Z_L} \cdot t_{21} \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial h_{fe}} \cdot t_{51} + \frac{\partial \theta_9}{\partial h_{fe}} \cdot t_{53} \right) \right. \\ &\quad \left. + t_{00} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial Z_L} \cdot t_{23} \cdot \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial h_{fe}} \cdot t_{51} + \frac{\partial \theta_9}{\partial h_{fe}} \cdot t_{53} \right) \right. \\ &\quad \left. + t_{20} \cdot \frac{\partial \theta_4}{\partial Z_L} \cdot t_{21} \cdot \frac{\partial \theta_9}{\partial h_{fe}} \cdot t_{53} + t_{40} \cdot \frac{\partial \theta_7}{\partial Z_L} \cdot t_{23} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial h_{fe}} \cdot t_{51} + \frac{\partial \theta_9}{\partial h_{fe}} \cdot t_{53} \right) + t_{40} \cdot \frac{\partial \theta_8}{\partial Z_L} \cdot t_{21} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial h_{fe}} \cdot t_{51} + \frac{\partial \theta_9}{\partial h_{fe}} \cdot t_{53} \right) + t_{20} \cdot \frac{\partial \theta_9}{\partial Z_L} \cdot t_{21} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\partial \theta_4}{\partial h_{fe}} \cdot t_{51} \right] + t_{00} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial h_{fe}} \cdot \left[t_{21} \cdot \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial Z_L} \cdot t_{51} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \theta_9}{\partial Z_L} \cdot t_{53} \right) + t_{41} \left(\frac{\partial \theta_7}{\partial Z_L} \cdot t_{53} + \frac{\partial \theta_8}{\partial Z_L} \cdot t_{51} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + t_{10} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial h_{fc}} \cdot \left[t_{23} \cdot \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial Z_L} \cdot t_{31} + \frac{\partial \theta_5}{\partial Z_L} \cdot t_{32} \right) \right. \\
& + t_{43} \cdot \left(\frac{\partial \theta_7}{\partial Z_L} \cdot t_{31} + \frac{\partial \theta_8}{\partial Z_L} \cdot t_{32} \right) \left. \right] + t_{20} \cdot \frac{\partial \theta_4}{\partial h_{fc}} \\
& \cdot \left[t_{24} \cdot \frac{\partial \theta_5}{\partial Z_L} \cdot t_{33} + t_{41} \cdot \left(\frac{\partial \theta_7}{\partial Z_L} \cdot t_{33} + \frac{\partial \theta_8}{\partial Z_L} \cdot t_{34} \right) \right] \\
& + t_{20} \cdot \frac{\partial \theta_5}{\partial h_{fc}} \cdot \left[t_{23} \cdot \frac{\partial \theta_4}{\partial Z_L} \cdot t_{31} + t_{43} \cdot \left(\frac{\partial \theta_7}{\partial Z_L} \cdot t_{33} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial \theta_8}{\partial Z_L} \cdot t_{34} \right) \right] \quad (4-139)
\end{aligned}$$

式(4-139)中,只需求出

$$\begin{aligned}
t_{21} &= \frac{1}{\Delta} y_f (1 + Z_c h_{oc} d), & t_{23} &= \frac{1}{\Delta} Z_c d y_f, \\
t_{41} &= \frac{-1}{\Delta} y_f Z_c d (1 + h_{fc}), & t_{43} &= \frac{1}{\Delta} Z_c (1 - Q y_f), \\
\frac{\partial \theta_1}{\partial h_{fc}} &= Z_L d, & \frac{\partial \theta_3}{\partial h_{fc}} &= d, & \frac{\partial \theta_4}{\partial h_{fc}} &= \frac{-Z_L}{(1 + Z_L h_{oc})}, \\
\frac{\partial \theta_2}{\partial h_{fc}} &= -d, & \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial Z_L \partial h_{fc}} &= \frac{1}{(1 + Z_L h_{oc})^2}, & \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial Z_L \partial h_{fc}} &= \\
&= \frac{-h_{oc}}{(1 + Z_L h_{oc})^2}, & \frac{\partial^2 \theta_4}{\partial Z_L \partial h_{fc}} &= \frac{-1}{(1 + Z_L h_{oc})^2}, \\
\frac{\partial^2 \theta_5}{\partial Z_L \partial h_{fc}} &= \frac{h_{oc}}{(1 + Z_L h_{oc})^2} \quad (4-140)
\end{aligned}$$

其余结果在计算一阶灵敏度时已得出,将式(4-123),(4-125)及式(4-140)代入式(4-139)中,可求出二阶灵敏度 $\frac{\partial^2 T}{\partial Z_L \partial h_{fc}}$ 。

将式(4-135)两端对 x_3 微分后并整理可得出三阶灵敏度

S_{x_1, x_2, x_3}^T :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 T}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} &= \sum_{\theta_1} t_{w_1^0} \cdot \frac{\partial^3 \theta_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \cdot t_{p_1} + \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \left(t_{w_1^0} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right. \\
&\quad \left. \cdot t_{w_2^1} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x_3} \cdot t_{p_1} \right) + \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \left(t_{w_1^0} \cdot \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot t_{w_2^1} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} t_{p^2_2}) + \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \left(t_{w_3 0} \cdot \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x_2 \partial x_3} \cdot t_{w_1 t_2} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} t_{p^1_1} \right) \\
& + \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \left(t_{w_1 0} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial x_3} \cdot t_{w_1 t_1} \cdot \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1 \partial x_2} t_{p^2_1} \right) \\
& + \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \left(t_{w_3 0} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial x_3} \cdot t_{w_1 t_2} \cdot \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1 \partial x_3} t_{p^1_1} \right) \\
& + \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \left(t_{w_1 0} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \cdot t_{w_2 t_1} \cdot \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x_2 \partial x_3} t_{p^2_2} \right) \\
& + \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \sum_{\theta_3} \left(t_{w_1 0} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \cdot t_{w_2 t_1} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \cdot t_{w_3 t_2} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial x_3} t_{p^3_3} \right) \\
& + \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \sum_{\theta_3} \left(t_{w_1 0} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \cdot t_{w_1 t_1} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial x_3} \cdot t_{w_2 t_2} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} t_{p^2_2} \right) \\
& + \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \sum_{\theta_3} \left(t_{w_3 0} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial x_2} \cdot t_{w_1 t_2} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \cdot t_{w_2 t_1} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x_3} t_{p^2_2} \right) \\
& + \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \sum_{\theta_3} \left(t_{w_3 0} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial x_2} \cdot t_{w_2 t_2} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial x_3} \cdot t_{w_1 t_1} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} t_{p^1_1} \right) \\
& + \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \sum_{\theta_3} \left(t_{w_1 0} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_3} \cdot t_{w_1 t_1} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \cdot t_{w_2 t_1} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} t_{p^2_2} \right) \\
& + \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \sum_{\theta_3} \left(t_{w_3 0} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial x_1} \cdot t_{w_2 t_2} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial x_2} \cdot t_{w_1 t_1} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} t_{p^1_1} \right) \quad (4-141)
\end{aligned}$$

从式(4-141)可看出,三阶灵敏度中每一项都包括对 x_1, x_2, x_3 的偏微商。同一支路传输对 x_1, x_2, x_3 进行偏微商的只能有一种形式(项数不一定只有一项)。一条支路对两个参数进行偏微商,而另一条支路对其余一个参数进行偏微商的形式共有 $2 \times C_3^2 = 6$ 种,每条支路分别对一个参数进行偏微商的形式共有 $3! = 6$ 种,故全部共有 13 种形式。式(4-141)中的一些路传输已在一阶灵敏度和二阶灵敏度的计算中得出,不必重新计算。类似地,可推广到计算 n 阶灵敏度的一般拓扑公式。

4-7 大变化灵敏度

前面讨论了系统参数变化很小时对系统特性的影响。只要知

道了系统传输函数对参数的标称灵敏度后，就可求得系统函数的变化。本节我们将讨论参数变化较大时对系统传输函数产生的影响。这就是所谓的大变化灵敏度问题。在线性数字网络中，由于它的乘法器系数同时发生大变化时的传输函数的变化，曾引起广泛的注意，因为该问题在分析系数舍入效应和数字滤波器优化设计中非常重要。

这里，我们将应用矩阵信号流图模型来计算乘法器系数变化一定数量后及乘法器系数为额定值时的传输函数的变化（即差值）。

设线性数字网络中有 n 个乘法器，其系数为 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。系数为 β_i 的乘法器接在节点 p_i 和 q_i 间。用矩阵信号流图表示该网络的特性如下(图 4-19)。

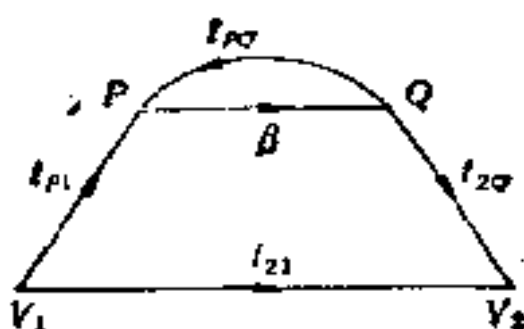


图 4-19

图中， t_{21} 是输入节点(源)1 到输出节点(汇)2 的直接传输。 β 是 n 阶对角矩阵。 $t_{P1} = [t_{p_1 1} t_{p_1 2} \dots t_{p_1 n}]^T$ ， $t_{p_i 1}$ 是源点 1 到节点 p_i 的支路传输。 $t_{2Q} = [t_{2q_1} t_{2q_2} \dots t_{2q_n}]$ ， t_{2q_i} 是节点 q_i 到汇点 2 的传输。

$$t_{PQ} = \begin{bmatrix} t_{p_1 q_1} & t_{p_1 q_2} & \dots & t_{p_1 q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{p_n q_1} & t_{p_n q_2} & \dots & t_{p_n q_n} \end{bmatrix}$$

$t_{p_i q_i}$ 是从节点 q_i 到节点 p_i 的支路传输。

由图 4-19，可得出该系统的电压传输函数

$$F = \frac{V_2}{V_1} = t_{21} + t_{2Q} \beta (I - t_{PQ} \beta)^{-1} t_{P1} \quad (4-142)$$

现在设所有 β_i 变化给定量 $\Delta \beta_i$ ，则传输函数的变化

$$\Delta T = T_{\beta + \Delta \beta} - T_{\beta} = t_{2Q} \Delta(\beta F^{-1}) t_{P1} \quad (4-143)$$

式中

$$F = (I - t_{p0}\beta), \quad (4-144)$$

$$\Delta(\beta F^{-1}) = (\beta + \Delta\beta)(F + \Delta F)^{-1} - \beta F^{-1} \quad (4-145)$$

$$\Delta F = -t_{p0}\Delta\beta \quad (4-146)$$

设 $\Delta(F^{-1}) = (F + \Delta F)^{-1} - F^{-1} \quad (4-147)$

则式(4-145)可写成

$$\begin{aligned} \Delta(\beta F^{-1}) &= (\beta + \Delta\beta)(F + \Delta F)^{-1} - (\beta + \Delta\beta)F^{-1} + \Delta\beta F^{-1} \\ &= (\beta + \Delta\beta)\Delta(F^{-1}) + \Delta\beta F^{-1} \end{aligned} \quad (4-148)$$

将式(4-148)代入式(4-143), 有

$$\Delta T = t_{20}\{(\beta + \Delta\beta)\Delta(F^{-1}) + \Delta\beta F^{-1}\}t_{p1} \quad (4-149)$$

因为

$$\Delta(F^{-1}F) = (F + \Delta F)^{-1}(F + \Delta F) - F^{-1}F = 0 \quad (4-150)$$

则

$$\begin{aligned} &(F + \Delta F)^{-1}F - F^{-1}F + (F + \Delta F)^{-1}\Delta F - F^{-1}\Delta F \\ &= -F^{-1}\Delta F \end{aligned} \quad (4-151)$$

所以,

$$\Delta(F^{-1})F + \Delta(F^{-1})\Delta F = -F^{-1}\Delta F \quad (4-152)$$

由式(4-152), 得出

$$\Delta(F^{-1}) = -F^{-1}\Delta F(I + F^{-1}\Delta F)^{-1}F^{-1} \quad (4-153)$$

将式(4-153)代入式(4-149), 得出

$$\begin{aligned} \Delta T &= t_{20}\{(\beta + \Delta\beta)[-F^{-1}\Delta F(I + F^{-1}\Delta F)^{-1}F^{-1}] \\ &\quad + \Delta\beta F^{-1}\}t_{p1} \\ &= t_{20}F^{-1}[F\Delta\beta(I + F^{-1}\Delta F) - F(\beta + \Delta\beta)F^{-1}\Delta F](I \\ &\quad + F^{-1}\Delta F)^{-1}F^{-1}t_{p1} \\ &= T_{20}[F(I + \beta T_{p0})]\Delta\beta(I + F^{-1}\Delta F)^{-1}T_{p1} \end{aligned} \quad (4-154)$$

式中 $T_{20} = t_{20}F^{-1} = [T_{2q_1} T_{2q_2} \cdots T_{2q_n}]$, T_{2q_j} ($j = 1, 2, \cdots, n$) 是节点 q_j 到汇点 2 的传输。

$$T_{p0} = F^{-1}t_{p0} = \begin{bmatrix} T_{p,q_1} & T_{p,q_2} & \cdots & T_{p,q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{p,n,q_1} & T_{p,n,q_2} & \cdots & T_{p,n,q_n} \end{bmatrix}$$

$T_{p_i q_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 是节点 q_j 到节点 p_i 的传输。 $T_{p_1} = F^{-1}t_{p_1} = [T_{p_1 1} T_{p_1 2} \dots T_{p_1 n}]^t$, T_{p_i} 是源点 1 到节点 p_i 的传输。

给定网络的结构和参数的变化, 由式 (4-154) 可以求得传输函数的变化。

式 (4-154) 是普遍的公式。它适用于系统参数同时发生大变化时计算系统的传输函数的变化。当系统中只有一个参数的情况下, $F(I + \beta T_{p_0})$ 简化为 $(1 - \beta t_{p_0}) \left(1 + \beta \frac{t_{p_0}}{1 - \beta t_{p_0}}\right) = 1$, $(I + F^{-1}\Delta F)^{-1}$ 简化为 $\left(1 + \frac{-t_{p_0}\Delta\beta}{1 - t_{p_0}\beta}\right)^{-1} = \frac{1}{1 - T_{p_0}\Delta\beta}$ 。于是, 式 (4-154) 简化为

$$\Delta T = T_{p_0} \cdot \frac{\Delta\beta}{1 - T_{p_0}\Delta\beta} T_{p_1} \quad (4-155)$$

这正是 Crochier^[13] 得出的结果。它是式 (4-154) 的一个特殊情况。

4-8 灵敏度图

在进行灵敏度分析中, 常常需要计算传输函数对很多参数的灵敏度。这些计算是很麻烦而费时间的。利用上面叙述的拓扑方法, 每计算一种灵敏度需要求出信号流图中的一些路的传输。下面我们要研究这些灵敏度间的关系。也就是说, 在这些灵敏度中, 有些是独立的, 而有些则不是独立的。后者可用前者的线性组合来表示。这样, 就不必要计算所有支路传输的灵敏度, 只要算出其中一部分。这在减少计算量方面是很有帮助的, 尤其是对于结构复杂的大图更有必要。

首先, 讨论图传输的一些性质。设信号流图中有 n 个节点, 其中源点的编号为 1, 汇点的编号为 n 。从节点 p 到节点 q 的传输为 t_{qp} ($p \neq q$) 和 $1 + t_{pp}$ ($p = q$), 且 $1 + t_{pp} \neq 0$ 。于是, 可得到下列结果:

$$(1) T_m(k t_{n1}, \dots, k t_{m1}) = k T_m(t_{n1}, \dots, t_{m1}) \quad (4-156)$$

$$(2) T_{n1}(kt_{n1}, \dots, kt_{nn-1}) = kT_{n1}(t_{n1}, \dots, t_{nn-1}) \quad (4-157)$$

式(4-156)和式(4-157)表明, 如果将离开源点1或进入汇点*n*的所有支路的传输乘以参数*k*, 则从源点1到汇点*n*的传输也要乘以参数*k*.

上述结果可用 Mason 增益公式加以证明. 当离开源点1或进入汇点*n*的所有支路的传输都乘以*k*后, 从源点1到汇点*n*的每条路的传输都增加*k*倍. 这些支路都不在环中, 故图行列式不变. 由 Mason 增益公式, 从源点1到汇点*n*的传输增加*k*倍.

$$(3) T_{n1}(kt_{i1}, \dots, kt_{in-1}) = T_{n1}(t_{i1}, \dots, t_{in-1}) \quad (4-158)$$

$$(4) T_{n1}(kt_{2i}, \dots, kt_{ni}) = T_{n1}(t_{2i}, \dots, t_{ni}) \quad (4-159)$$

$$(i = 2, 3, \dots, n-1)$$

式(4-158)和式(4-159)表明, 如果将进入或离开某一内节点*i*的所有支路的传输都增加*k*倍, 从源点1到汇点*n*的传输不变.

式(4-158)可以由图4-20(a), (b)在节点*i*的自环消去后

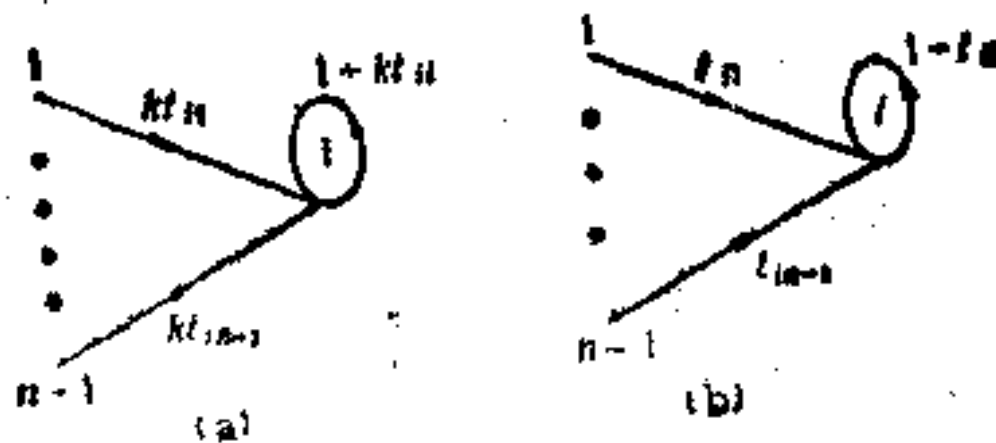


图 4-20

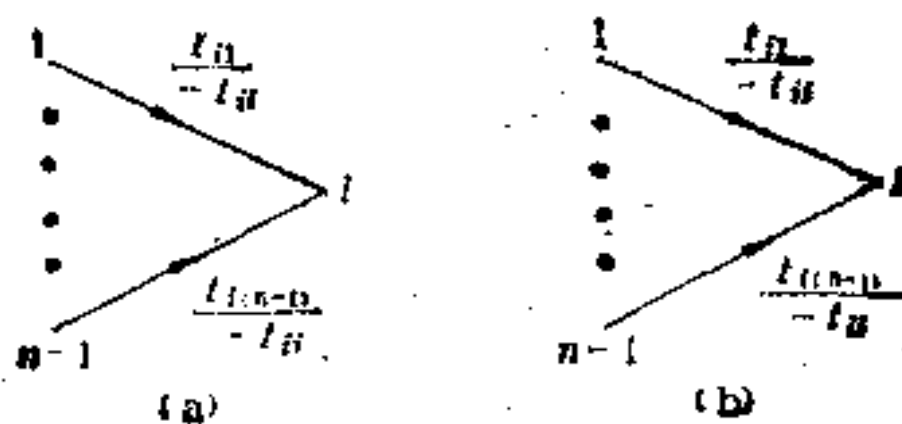


图 4-21

的一致性而得到证明。对图 4-20(a), (b), 当节点 i 的自环消去后得出图 4-21(a), (b)。显然, 它们完全相同。因此, 从源点 1 到汇点的传输是不变的。

由式 (4-158) 的结果可以证明式 (4-159)。如果将信号流图中的所有支路都反向(支路传输保持不变), 则源点变为汇点, 汇点变为源点。显然, 信号流图中从源点到汇点的传输应等于反向信号流图中从源点到汇点的传输。但是, 原信号流图中离开节点 i 的所有支路, 在反向信号流图中变为进入节点 i 的所有支路。将式 (4-158) 的结果应用于反向信号流图, 即得出式 (4-159)。

如果节点 i 没有自环, 则有

$$(5) \quad \begin{aligned} T_{n1}(kt_{i1}, \dots, kt_{in-1}, t_{i1}/k, \dots, t_{ni}/k) \\ = T_{n1}(t_{i1}, \dots, t_{in-1}, kt_{i1}, \dots, kt_{ni}) \end{aligned} \quad (4-160)$$

式 (4-160) 表明, 对于没有自环的内节点 i , 如果将所有进入节点 i 的支路的传输乘以 k , 所有离开节点 i 的支路的传输除以 k , 则从源点 1 到汇点 n 的传输不变。

因为所有进入节点 i 的支路的传输乘以 k , 所有离开节点 i 的支路的传输除以 k , 故所有通过节点 i 的环和路的传输均不变。因此, 从源点 1 到汇点 n 的传输不变。

现在利用方程 (4-158) ~ (4-160) 推出灵敏度方程。

将方程 (4-158) 两端对 k 微分, 有

$$\frac{\partial T_{n1}}{\partial kt_{i1}} \cdot \frac{\partial kt_{i1}}{\partial k} + \frac{\partial T_{n1}}{\partial kt_{i2}} \cdot \frac{\partial kt_{i2}}{\partial k} + \dots + \frac{\partial T_{n1}}{\partial kt_{in}} \cdot \frac{\partial kt_{in}}{\partial k} = T_{n1} \quad (4-161)$$

令式 (4-161) 中的 $k=1$, 并将两端除以 T_{n1} , 得出

$$\sum_{p=1}^n S_{p1} = 1 \quad (4-162)$$

式中

$$S_{p1} = \frac{t_{p1}}{T_{n1}} \frac{\partial T_{n1}}{\partial t_{p1}} \quad (4-163)$$

这就是说, 从源点 1 到汇点 n 的传输对所有离开源点 1 的支路传输的灵敏度之和等于 1。从式 (4-162) 可以看出, $n-1$ 个灵

敏度 S_{11}, \dots, S_{n1} 中只有 $n-2$ 个灵敏度是独立的。

类似地，将式 (4-157) 两端对 k 微分，再令 $k=1$ ，然后，在方程两端除以 T_{n1} ，得出

$$\sum_{p=1}^{n-1} S_{np} = 1 \quad (4-164)$$

式 (4-164) 表明，从源点 1 到汇点 n 的传输对所有进入汇点 n 的支路传输的灵敏度之和等于 1，即 $n-1$ 个灵敏度 S_{n1}, \dots, S_{nn-1} 中只有 $n-2$ 灵敏度是独立的。

同样，将式 (4-158) 和 (4-159) 两端对 k 微分，再令 $k=1$ ，然后在方程两端除以 T_{n1} ，可分别得出

$$\sum_{p=1}^{n-1} S_{ip} = 0 \quad (4-165)$$

和

$$\sum_{i=2}^n S_{pi} = 0 \quad (4-166)$$

式 (4-165) 和式 (4-166) 分别表明，从源点 1 到汇点 n 的传输对所有进入或离开任一节点 i 的支路传输的灵敏度之和为零。这就是说，与任一节点 i 相关的 $2(n-1)$ 个灵敏度中只有 $2(n-2)$ 个是独立的。

类似地，对式 (4-160) 可得出

$$\sum_{p=1}^{n-1} S_{pi} = \sum_{q=2}^n S_{iq} \quad (4-167)$$

即从源点 1 到汇点 n 的传输对所有离开内节点 i 的支路传输的灵敏度之和等于对所有进入内节点 i 的支路传输的灵敏度之和。

由式 (4-162), (4-164), (4-165), (4-166) 和式 (4-167) 可知，灵敏度方程的数目共为 $1 + 1 + 2n_i + (n - n_i - 2) = n + n_i$ 个 (n 为节点总数, n_i 为有自环的节点数)，而全部灵敏度数 b (支路总数) $\leq (n-1) + (n-2)(n-1) = n(n-2) + 1$ 。一般，灵敏度数总大于灵敏度方程数。所以，我们从中选取一些独立的灵敏度，用拓扑方法计算出来。然后，由这些灵敏度的线性组合，即

可算出其余的灵敏度。这样，大大减少了计算灵敏度的工作量，提高了效率。

为了从式(4-162)，(4-164)，(4-165)，(4-166)和式(4-167)中得到独立的灵敏度方程，并决定独立的和非独立的灵敏度，需要应用灵敏度图。对应于给定的信号流图，用下列步骤构成另一个图：

(1) 对于有自环的内节点 $i(i = 2, 3, \dots, n_s + 1)$ ，将其分裂为两个节点 i' 和 i'' 。原来进入节点 i 的支路现进入节点 i' ，原来离开节点 i 的支路现在离开节点 i'' 。

(2) 在得出的信号流图中，去掉所有节点变量，并用灵敏度 S_{pq} 代替信号流图中对应的支路传输 t_{pq} 。

(3) 再从汇点 n 到源点 1 加入一条支路，其灵敏度为 1。

按上述步骤构成的图称为信号流图的灵敏度图。显然，灵敏度图中的支路数比信号流图中的支路数多一条。灵敏度图的节点数是 $n + n_s$ ，等于灵敏度的方程数。

例 4-14. 求图 4-22 所示的信号流图的灵敏度图。

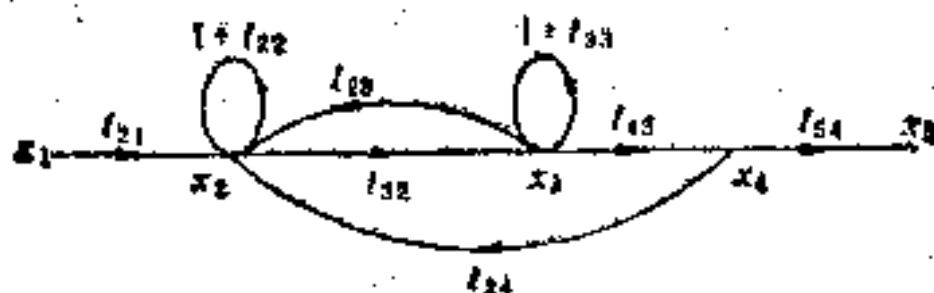


图 4-22

根据上述构成灵敏度图的三个步骤，得到图 4-23 所示的灵敏度图。

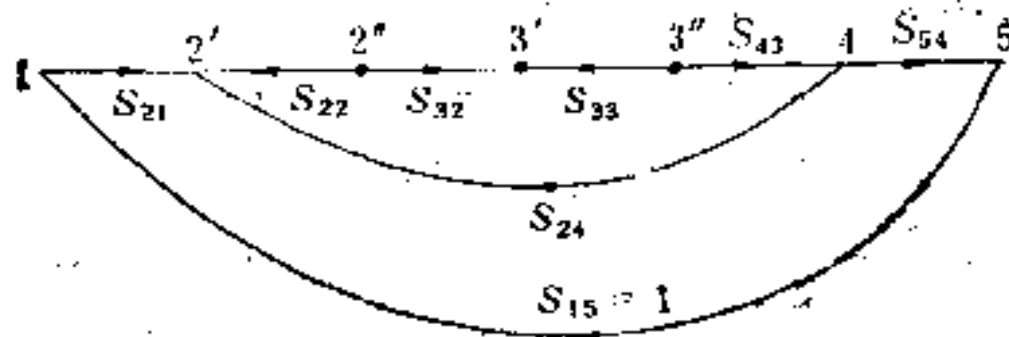


图 4-23

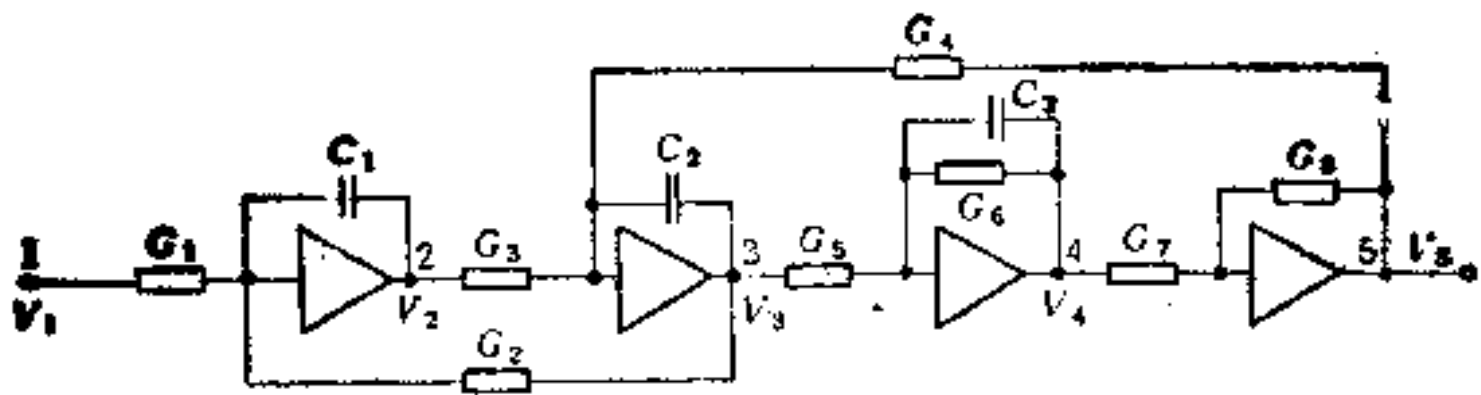
由图 4-23 可看出,灵敏度图的节点数比对应的信号流图的节点数多两个(因为信号流图中有两个有自环的节点),而支路数多了一条(从汇点 5 到源点 1 的支路)。

现在的问题是如何由灵敏度图决定独立的和非独立的灵敏度。不妨将灵敏度图与网络图相对比。设灵敏度相当于网络中的电流,其参考方向为支路的方向,则方程 (4-162) 和 (4-164) 分别对应于对灵敏度图中的节点 1 和节点 n 写出的电流平衡方程。方程 (4-165) 和 (4-166) 分别是对应于对灵敏度图中的汇点 i' 和源点 i'' 写出的电流平衡方程组。方程 (4-167) 对应于对灵敏度图中任一中间节点 i 写出的电流平衡方程组。大家知道,对网络图中的所有节点减一后的节点写出的电流平衡方程组是线性无关的,故上述灵敏度方程组中的方程数减一后的方程组是线性无关的,即独立的方程数为 $n + n_s - 1$ 。在网络图中,如果选取一棵树,则链支路电流和树支路电流分别构成了独立的和非独立的电流集合。而非独立的电流可由基本割集方程组用独立的电流表示。因此,如果在灵敏度图中选取一棵树,则 $b - (n + n_s - 1) + 1 = b - (n + n_s) + 2$ 条链支路灵敏度是独立的。这些链支路灵敏度(其中有一条从汇点到源点的支路的灵敏度为 1)可用 4-4 节中的拓扑公式算出。其余 $n + n_s - 1$ 条树支路灵敏度可用已求得的链支路灵敏度线性表示出来。这样,我们不需要计算 b 条支路的灵敏度,只需直接计算其中 $b - (n + n_s) + 1$ 条支路的灵敏度,这大大提高了计算的效率。

例 4-15. 求图 4-24 所示的三阶低通 RC 有源电路的电压增益 $T = \frac{V_3}{V_1}$ 对电路参数 $G_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ 和 $C_i (i = 1, 2, 3)$ 的灵敏度。

电路的信号流图如图 4-25 所示。图 4-26 是图 4-25 的信号流图的灵敏度图。

对图 4-26 的灵敏度图,选取一棵树(如图 4-27 中的实粗线所示),对应于每条树支路的每个基本割集如图 4-27 中的虚线所



$G_1 = G_2 = G_3 = G_5 = G_7 = G_8 = 1$ 姆, $G_4 = G_6 = 2$ 姆, $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ 法

图 4-24

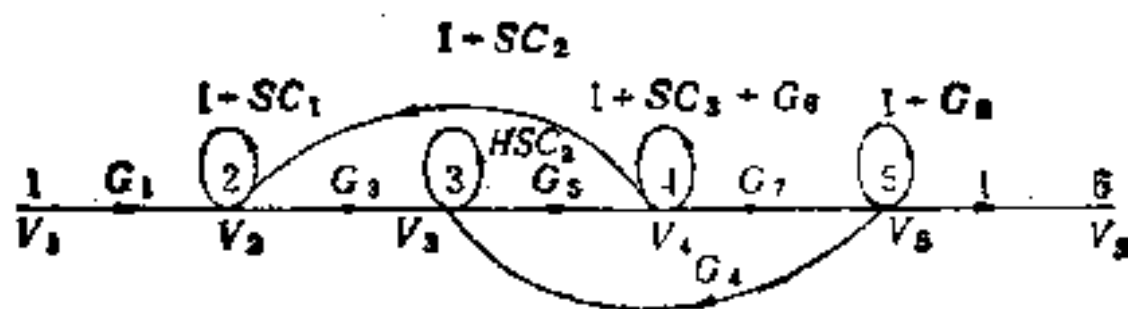


图 4-25

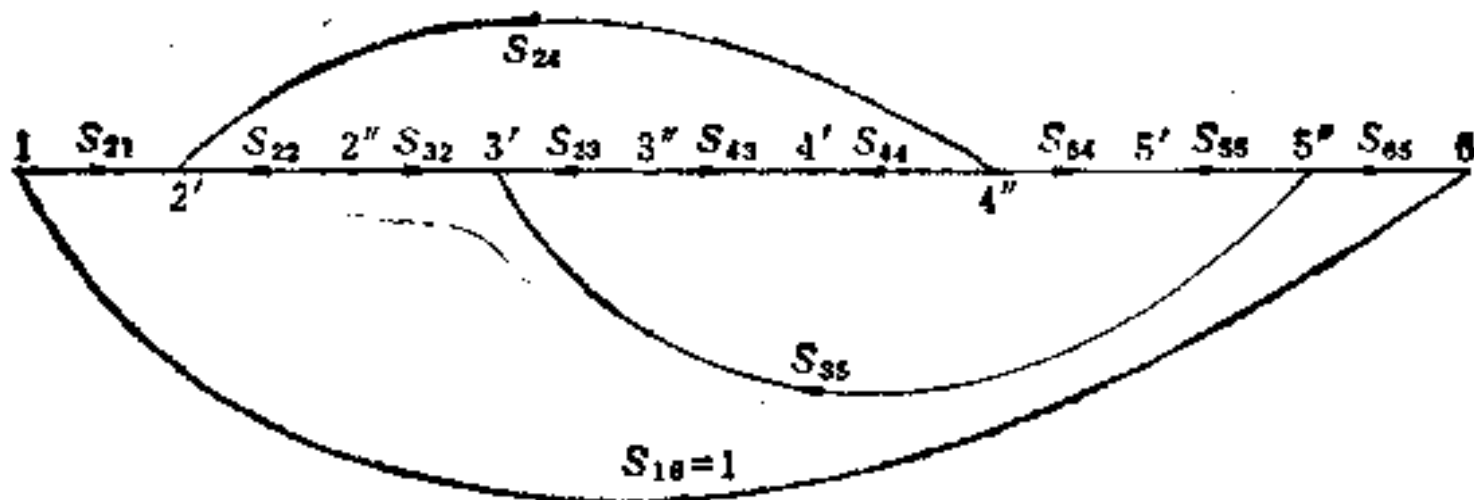


图 4-26

示。割集的方向与树支路的方向一致。

由图 4-27 可看出, 只有链支路灵敏度 S_{24} 和 S_{35} 是独立的灵敏度, 树支路灵敏度 S_{21} , S_{22} , S_{32} , S_{33} , S_{43} , S_{44} , S_{54} , S_{55} , S_{65} 是非独立的灵敏度。由下列基本割集方程可求得树支路灵敏度:

$$\begin{aligned}
 S_{21} &= 1, & S_{22} &= -(1 + S_{24}), & S_{32} &= 1 + S_{24}, \\
 S_{33} &= -(1 + S_{24} + S_{35}), & S_{43} &= 1 + S_{24} + S_{35}, \\
 S_{44} &= -(1 + S_{24} + S_{35}), & S_{54} &= 1 + S_{35}, \\
 S_{55} &= -(1 + S_{35}), & S_{65} &= 1
 \end{aligned}
 \tag{4-168}$$

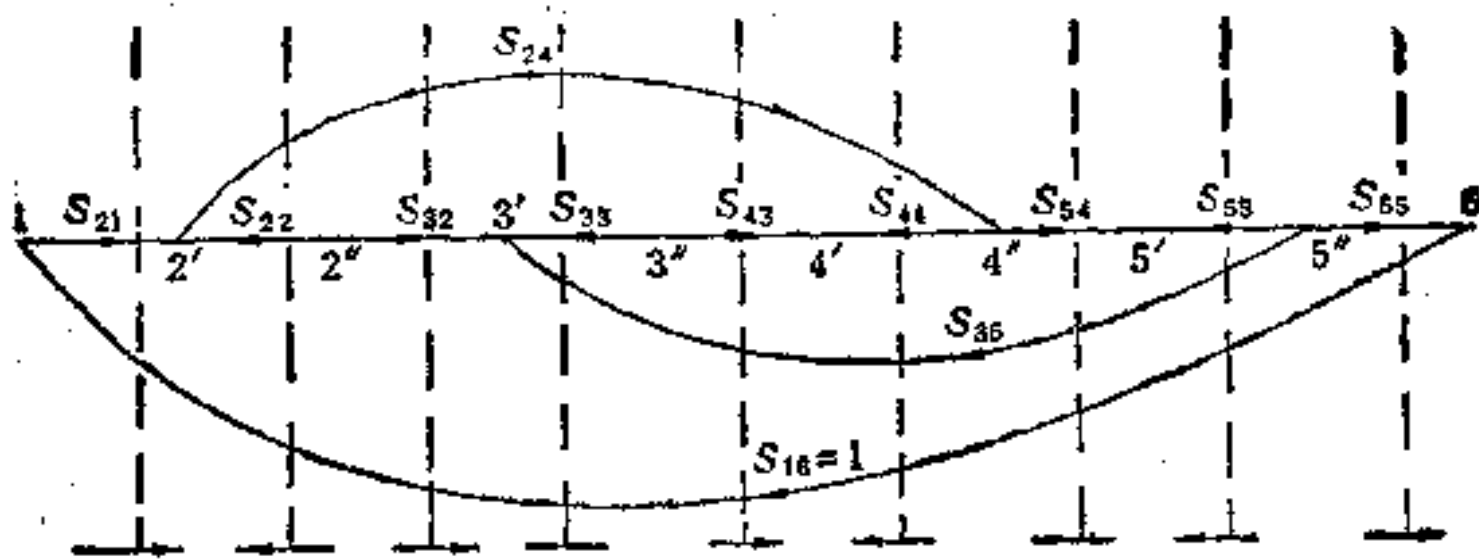


图 4-27

由拓扑公式 (4-121) 结合图 4-25, 可求得

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dG_2} = & \frac{1}{\Delta} G_1 \cdot G_3 \cdot G_5 (1 - 1 - G_8) \cdot \frac{\partial G_2}{\partial G_2} \\ & \cdot G_3 \cdot G_5 \cdot G_7 \cdot \frac{1}{\Delta} \end{aligned} \quad (4-169)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dG_4} = & \frac{1}{\Delta} \cdot G_1 G_3 \cdot G_5 \cdot G_7 \cdot \frac{\partial G_4}{\partial G_4} \\ & \cdot G_5 \cdot G_7 (1 - 1 - SC_1) \cdot \frac{1}{\Delta} \end{aligned} \quad (4-170)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - (1 + SC_1 + 1 + SC_2 + 1 + SC_3 + G_6 + 1 + G_8 \\ & + G_2 G_3 G_5 + G_4 G_5 G_7) + (1 + SC_1)[(1 + SC_2) + (1 \\ & + SC_3 + G_6) + (1 + G_8) + G_4 G_5 G_7] + (1 + SC_1)[(1 \\ & + SC_3 + G_6) + (1 + G_8)] + (1 + SC_3 + G_6)(1 + G_8) \\ & + (G_2 G_3 G_5)(1 + G_8) - (1 + SC_1)(1 + SC_2)[(1 \\ & + SC_3 + G_6) + (1 + G_8)] - (1 + SC_2)(1 + SC_3 \\ & + G_6)(1 + G_8) - (1 + SC_1)(1 + SC_3 + G_6)(1 + G_8) \\ & + (1 + SC_1)(1 + SC_2)(1 + SC_3 + G_6)(1 + G_8) \end{aligned} \quad (4-171)$$

RC 电路的电压增益

$$T = \frac{V_3}{V_1} = \frac{1}{\Delta} G_1 G_3 G_5 G_7 \quad (4-172)$$

将 $G_1 \sim G_9$ 及 $C_1 \sim C_3$ 的数值代入式 (4-169)~(4-172) 可得出:

$$\frac{dT}{dG_2} = \frac{1}{\Delta^2} = \frac{-1}{(S^3 + 2S^2 + 2S + 1)^2} \quad (4-173)$$

$$\frac{dT}{dG_4} = \frac{-S}{\Delta^2} = \frac{-S}{(S^3 + 2S^2 + 2S + 1)^2} \quad (4-174)$$

$$\Delta = S^3 + 2S^2 + 2S + 1 \quad (4-175)$$

$$T = \frac{1}{S^3 + 2S^2 + 2S + 1} \quad (4-176)$$

于是:

$$S_{G_2}^T = \frac{G_2}{T} \cdot \frac{dT}{dG_2} = \frac{-1}{S^3 + 2S^2 + 2S + 1} \quad (4-177)$$

$$S_{G_4}^T = \frac{G_4}{T} \frac{dT}{dG_4} = \frac{-2S}{S^3 + 2S^2 + 2S + 1} \quad (4-178)$$

由式 (4-168):

$$\left. \begin{aligned} S_{G_1}^T &= S_{21} = 1, & S_{G_2}^T &= S_{32} = 1 + S_{24} = 1 + S_{G_4}^T, \\ S_{G_3}^T &= S_{43} = 1 + S_{24} + S_{35} = 1 + S_{G_2}^T + S_{G_4}^T, \\ S_{G_6}^T &= S_{44} \cdot S_{G_4}^{T4} = -(1 + S_{24} + S_{35}) \frac{-G_6}{G_6 + SC_3} \\ &= \frac{-G_6}{G_6 + SC_3} (1 + S_{G_2}^T + S_{G_4}^T) \\ S_{G_7}^T &= S_{34} = 1 + S_{35} = 1 + S_{G_4}^T, \\ S_{G_8}^T &= S_{55}^T = -(1 + S_{35}) = -(1 + S_{G_4}^T) \\ S_{C_1}^T &= S_{22} = -(1 + S_{24}) = -(1 + S_{G_2}^T), \\ S_{C_2}^T &= S_{33} = -(1 + S_{G_2}^T + S_{G_4}^T) \\ S_{C_3}^T &= S_{44} \cdot S_{C_3}^{T4} = -(1 + S_{24} + S_{35}) \cdot \frac{-SC_3}{SC_3 + G_6} \\ &= \frac{-SC_3}{G_6 + SC_3} (1 + S_{G_2}^T + S_{G_4}^T) \end{aligned} \right\} (4-179)$$

由本例可知,只需求 G_2 和 G_4 的灵敏度 $S_{G_2}^T$ 和 $S_{G_4}^T$, 其他所有灵敏度均可用前两者的线性组合求出。显然,计算量大为减小,

这就是灵敏度图所要解决的问题。

参 考 文 献

- [1] Acar, C., On the Evaluation of Sensitivity for Graph Transfer Functions, *AEU*, Vol. 28, pp. 337—338, 1974.
- [2] Acar, C., Formulation of the Sensitivity Function Using Signal Flow Graphs, *Proc. IEE*, Vol. 21, No. 2, pp. 91—94, 1974.
- [3] Acar, C., Dependent and Independent Sensitivities in Signal Flow Graphs, *Proc. IEE-G*, Vol. 130, No. 3, pp. 97—100, 1983.
- [4] Butler, W. J., and Haykin, S. S., Multiparameter Sensitivity Problems in Network Theory, *Proc. IEE*, Vol. 177, No. 12, pp. 2228—2236, 1970.
- [5] Fidler, J. K., Network Sensitivity Calculation, *IEEE Trans., on Circuits and Systems*, Vol. CAS-23, pp. 567—572, Sep. 1976.
- [6] Fidler, J. K., Some Topics in Network Sensitivity, Wroclow, Wydawnictwo Politechniki Wroclashiej, 1977.
- [7] Frank, P. M., Introduction to Systems Sensitivity Theory, New York: Academic Press, 1978.
- [8] Lee, A. Y., Computer-aided System Analysis and Sensitivity Calculations, *IEEE Trans., on Circuits and Systems*, Vol. CAS-21, No. 2, pp. 209—216, 1974.
- [9] Lurch, W. A., A Formulation of the Sensitivity Function, *IRE Trans.*, Vol. CT-4, pp. 289—290, 1957.
- [10] Parker, S. R., Sensitivity: Old Questions, Some New Answers, *IEEE Trans.*, Vol. CT-18, pp. 27—35, 1971.
- [11] Romanowicz, T. M., Structural Sensitivity Analysis in a Certain Class of Linear Systems, *IEEE Trans., on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-13, No. 3, pp. 413—417, 1983.
- [12] Solymosi, J., and Tron, T., General Interpretation of Sensitivity Functions, *Int. J. Circuit Theory and Applications*, Vol. 4, pp. 75—80, 1976.
- [13] Temes, G. C., and Cho, K. M., Large-Change Sensitivities of Linear Digital Networks, *IEEE Trans., on Circuits and Systems*, Vol. CAS-25, pp. 113—114, Feb. 1978.
- [14] 赵永昌, 计算灵敏度的一种拓扑方法, 电子学报, 1981年第3期, 第48—56页。

第五章 离散系统

前面四章所讨论的是连续系统,即涉及的变量都是连续变量。本章将讨论离散(采样)系统。这种系统中不仅包括连续变量,而且也包括离散变量。Mason 增益公式不能直接用于分析这种系统。在讨论采样的一些基本性质的基础上,阐述三种分析采样系统的方法。复合信号流图方法是提出最早的常用方法,其特点是易于掌握,但图中包括的节点数较多,而且存在着相消项。Sedlar-Bekey 增益公式实际上是 Mason 增益公式在采样系统中的推广,其缺点也是存在相消项。节点逐步消除法则克服了上述缺点,对于处理大的系统特别有利。为了将多速系统变为单速系统来处理,讨论了开关分解方法。

近年来,随着金属氧化物半导体集成电路技术的发展而出现的开关电容网络,是一种时变的采样网络。本章将讨论信号流图在分析和综合这种网络中的原理和步骤。

5-1 采样的一些性质

采样系统中的主要元件是采样器。采样器(图 5-1)是一个以固定频率运行的开关,即开关每 T 秒闭合一次。在很多包括采样器的物理系统中,开关闭合的时间 τ 与时间 T 相比,可以忽略不



图 5-1

计。因此,在开关闭合期间内输入信号可认为是常量。于是,可用脉冲调制逼近的方法处理。若 $f(t)$ 为采样器的输入,则它的输出

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT) \quad (5-1)$$

式中 $\delta(t - nT)$ 是延迟的单位脉冲函数，它仅在 $t = nT$ 时出现，简称为 $\delta_T(t)$ 。

式 (5-1) 表明，采样器的输出信号等于理想的采样函数与输入人的连续函数之积。实际上，可将采样器看成为一个调制器。输入信号 $f(t)$ 是调制信号，载频是单位脉冲函数。采样过程可想象为脉冲调制过程，它将连续信号变为很窄的调幅脉冲列。 $f(t)$ 、 $\delta(t - nT)$ 和 $f^*(t)$ 分别如图 5-2(a)、(b)、(c) 所示。

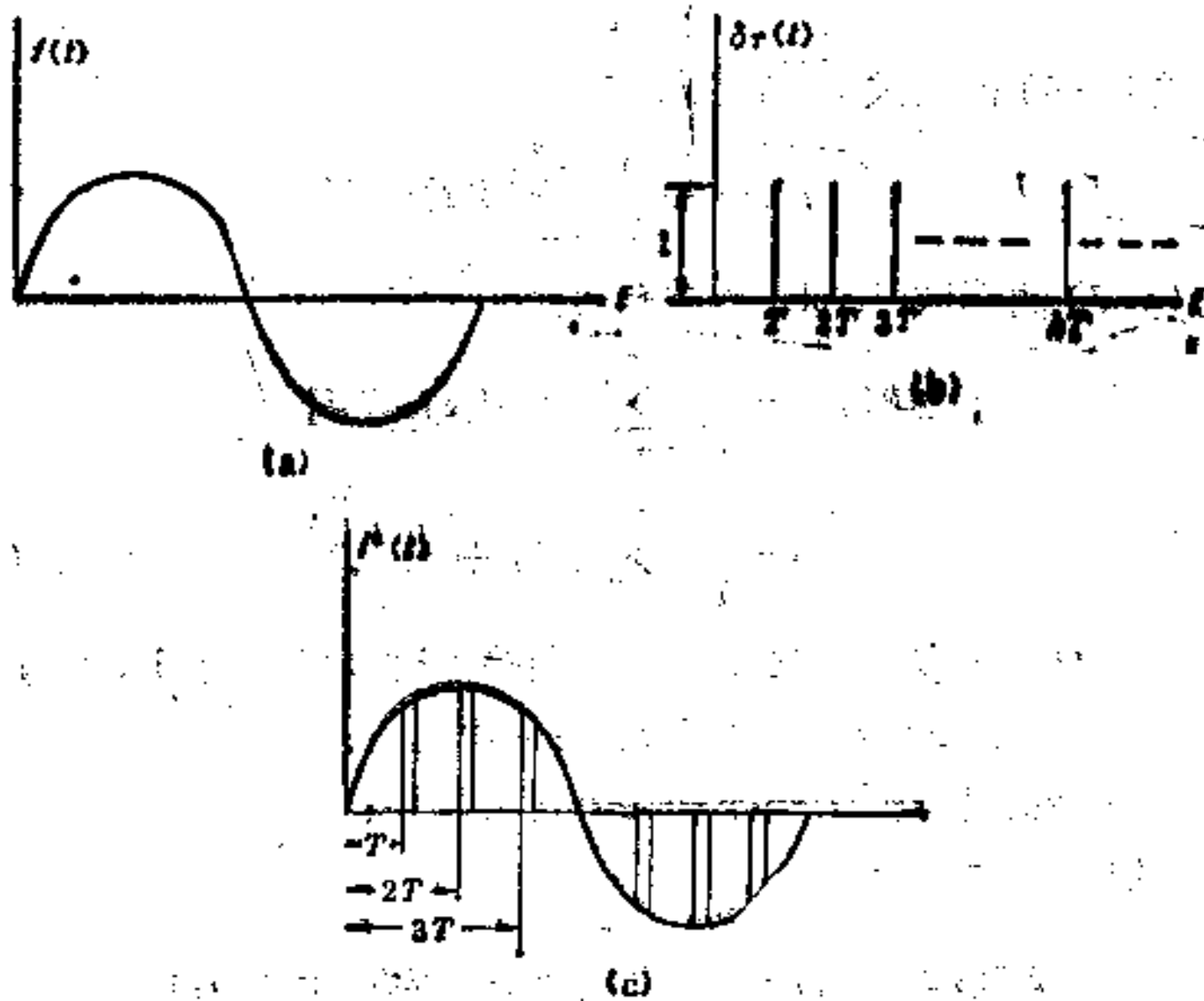


图 5-2

因为 $\delta_T(t)$ 是周期函数，故可展开成 Fourier 级数：

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \quad (5-2)$$

式中 $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$ 是采样角频率

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt \quad (5-3)$$

因为

$$\int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (5-4)$$

故

$$C_n = \frac{1}{T} \quad (5-5)$$

将式(5-5)代入式(5-2),得

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \quad (5-6)$$

将式(5-6)代入式(5-1)后,有

$$f^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) e^{jn\omega_s t} \quad (5-7)$$

式(5-7)两端取 Laplace 变换后:

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[f(t) e^{jn\omega_s t}] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s) \end{aligned} \quad (5-8)$$

式(5-8)表示了采样器输入和输出时间函数的 Laplace 变换式间的关系。 $F^*(s)$ 称为 $F(s)$ 的脉冲变换。

下面列出有关 $F^*(s)$ 的几个重要特性:

(1) 设 k 为整数,则

$$\begin{aligned} F^*(s \pm jk\omega_s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s \pm jk\omega_s + jn\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[s + j(n \pm k)\omega_s] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s) = F(s) \end{aligned} \quad (5-9)$$

即 $F^*(s)$ 是周期函数,其周期为 $j\omega_s$ 。

$$\begin{aligned}
 (2) \quad [F^*(s)]^* &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s + jm\omega_s) \right] \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s) = F^*(s) \quad (5-10)
 \end{aligned}$$

即脉冲变换的脉冲变换具有不变性质。

$$\begin{aligned}
 (3) \quad [F_1^{(s)} + F_2^{(s)}]^* &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_1^{(s)} + F_2^{(s)}] e^{jn\omega_s T} \\
 &= F_1^*(s) + F_2^*(s) \quad (5-11)
 \end{aligned}$$

即两个函数之和的脉冲变换等于各个函数的脉冲变换之和。

$$\begin{aligned}
 (4) \quad [F_1(s) \cdot F_2(s)]^* &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_1(s + jn\omega_s) \cdot F_2(s \\
 &\quad + jn\omega_s)] \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_1(s + jn\omega_s) \\
 &\quad \cdot \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_2(s + jm\omega_s) \\
 &= F_1^*(s) \cdot F_2^*(s) \quad (5-12)
 \end{aligned}$$

即两个函数之积的脉冲变换等于各个函数的脉冲变换之积。

总之，采样系统是由线性时不变元件和采样器组成的系统，它仍旧是线性系统。因此，信号流图分析方法还适用于这种系统。

5-2 复合信号流图

现在，首先讨论所有采样器以同一频率同步工作的采样系统，即单速采样系统。

对于图 5-3 所示的采样系统，变量 r ， x_1 ， x_2 和 x_3 是系统变量的 Laplace 变换。现要求输出变量 x_3 。

由图 5-3，可写出下列方程组：

$$x_1 = r - x_3$$

$$x_2 = x_1^*$$

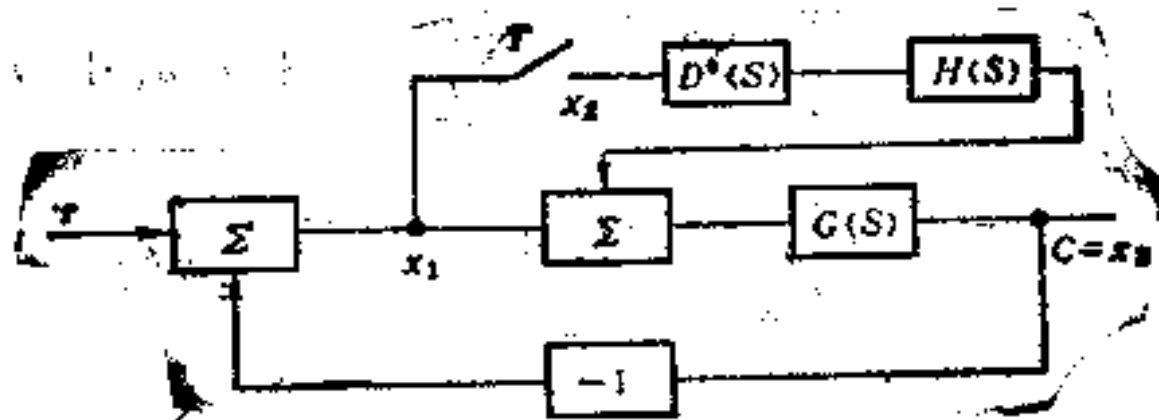


图 5-3

$$x_3 = D^*HGx_2 + Gx_1 \quad (5-13)$$

式(5-13)写成矩阵形式,有

$$AX = BX^* + R \quad (5-14)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -G & -D^*HG & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \quad (5-15)$$

解式(5-14),可得

$$X = A^{-1}BX^* + A^{-1}R \quad (5-16)$$

对式(5-16)两端取脉冲变换,有

$$X^* = (A^{-1}B)^*X^* + (A^{-1}R)^* \quad (5-17)$$

式(5-17)是仅包括采样变量的线性代数方程组,与它对应的信号流图称为采样信号流图。

将式(5-13)写成式(5-14)的形式,有

$$\begin{aligned} x_1 &= -D^* \left(\frac{GH}{1+G} \right) x_1^* + \frac{r}{1+G} \\ x_2 &= x_1^* \\ x_3 &= D^* \left(\frac{GH}{1+G} \right) x_1^* + \frac{Gr}{1+G} \end{aligned} \quad (5-18)$$

对式(5-18)两端取脉冲变换,可得

$$\begin{aligned}
 x_1^* &= -D^* \left(\frac{GH}{1+G} \right)^* x_1^* + \left(\frac{r}{1+G} \right)^* \\
 x_2^* &= x_1^* \\
 x_3^* &= D^* \left(\frac{GH}{1+G} \right)^* x_1^* + \left(\frac{Gr}{1+G} \right)^*
 \end{aligned}
 \tag{5-19}$$

与式(5-19)对应的采样信号流图如图5-4所示。

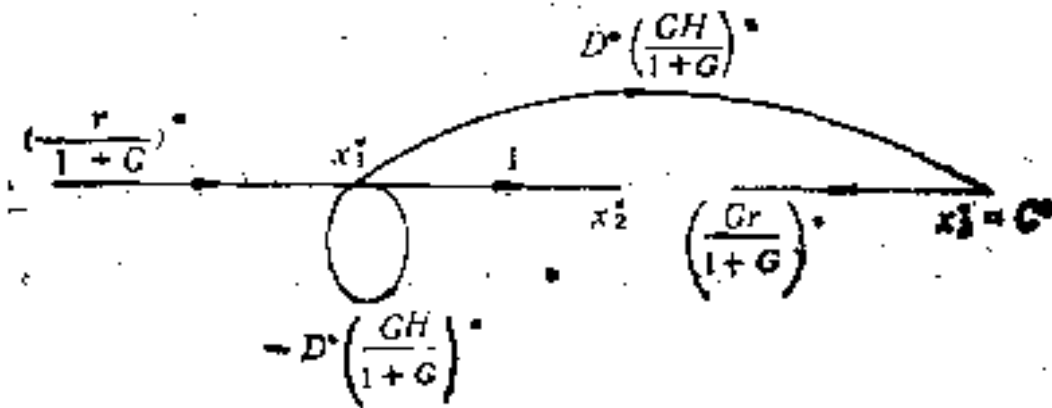


图 5-4

图5-4中已没有采样器,可利用Mason增益公式求出采样输出:

$$\begin{aligned}
 x_3^* &= \frac{1}{\left[1 + D^* \left(\frac{GH}{1+G} \right)^* \right]} \cdot \left(\frac{r}{HG} \right)^* \\
 &\quad \cdot D^* \left(\frac{GH}{1+G} \right)^* + \left(\frac{Gr}{1+G} \right)^*
 \end{aligned}
 \tag{5-20}$$

由式(5-17)可看出,在给定了采样系统的方框图后,可得到 A , B 和 R ,进一步需要找出 $A^{-1}B$ 和 $A^{-1}R$,才能得到采样信号流图。这涉及求逆矩阵和矩阵相乘的运算。下面,我们将讨论由系统的方框图直接作出采样信号流图的拓扑方法。

设 A 是下列方程组的系数矩阵:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\
 \cdots & \cdots \cdots \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n
 \end{aligned}
 \tag{5-21}$$

式(5-21)是描述系统中所有采样器都断开时变量间关系的方程组。

显然, A^{-1} 的第 i 行第 j 列的元素 $a_{ij}^{-1} = \frac{A_{ji}}{|A|} = \frac{x_j}{y_i} \Big|_{\substack{\text{所有其他 } y_k=0 \\ (k \neq j)}}$

所以, a_{ij}^{-1} 是在节点 j 加单位信号后在节点 i 产生的输出信号。若用 T_{ij} 表示系统中从节点 j 至节点 i 的传输, 则 $a_{ij}^{-1} = T_{ij}$ 。

再看矩阵 B 。由式 (5-14) 可看出, B 是表示采样器所在位置的。

$B = [b_{ij}]$, $b_{ij} = 1$, 若采样器接在节点 j 和节点 i 间; 否则, $b_{ij} = 0$ 。

因此, 若节点 x_j 不是采样器的输入, 则 $(A^{-1}B)$ 的第 j 列的元素全为零。若 x_j 是采样器的输入, 而 x_i 是它的输出, 则 $(A^{-1}B)$ 的第 j 列为

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} \dots T_{j1} \dots \\ \dots T_{j2} \dots \\ \vdots \\ \dots T_{jn} \dots \end{bmatrix} \quad (5-22)$$

对于 $A^{-1}R$ 有完全类似的结果。因为 R 是列矩阵, 且设输入信号加在节点 1, 故有

$$A^{-1}R = \begin{bmatrix} T_{11}r \\ T_{21}r \\ \vdots \\ T_{n1}r \end{bmatrix} \quad (5-23)$$

式 (5-22) 和 (5-23) 是构造采样信号流图的基础。

应该指出, 在计算采样输出时, 可以不考虑那些不是采样器输入的变量, 这可由方程组 (5-17) 看出。取其中第 k 个方程:

$$x_k^* = T_{k1}^* x_1^* + \dots + T_{kj}^* x_j^* + \dots + T_{kn}^* x_n^* + (T_{kr})^* \quad (5-24)$$

只有当节点 j 是采样器的输入时, T_{kj}^* 才不为零。因此, 若 x_j 是采样器 S 的输入, 则 T_{kj}^* 是从 S 的输出至节点 K 的传输 (所有采

样器均开路)。

设系统有 p 个采样器 S_1, S_2, \dots, S_p , 输入信号 r 接至节点 1. 引入下列符号:

$T_{s_i s_j} \triangleq$ 从采样器 S_j 的输出至采样器 S_i 的输入的传输 (所有采样器均开路)

$T_{s_i 1} \triangleq$ 从系统的输入至采样器 S_i 的输入的传输 (所有采样器均开路)。

于是, 采样器 S_k 的输入信号

$$S_k^* = T_{s_k s_1}^* S_1^* + T_{s_k s_2}^* S_2^* + \dots + T_{s_k s_p}^* S_p^* + (T_{s_k 1} r)^* \quad (5-25)$$

因此, 可得出作采样信号流图的步骤如下:

(1) 每个采样器对应于一个节点, 系统的输出可看作是一个采样器的输入

(2) 对所有采样器, 计算 $T_{s_i s_j}^*$.

(3) 对所有采样器, 计算 $(T_{s_i 1} r)^*$.

(4) 作出采样信号流图。

例 5-1. 求图 5-3 的采样信号流图。

图 5-3 中有一个采样器及一个输出节点 (看作为一个采样器的输入), 故采样图中应有两个节点 $S_1^* = x_1^* = x_2^*$ 及 $S_2^* = x_3^* = C$. 由图 5-3 可得出

$$T_{s_1 s_1} = \frac{D^*(HG)^*}{(1+G)^*}, \quad T_{s_1 s_2} = -\frac{D^*(HG)^*}{(1+G)^*},$$

$$T_{s_2 s_1} = T_{s_2 s_2} = 0,$$

$$(T_{s_1 1} r)^* = \frac{r^*}{(1+G)^*}, \quad (T_{s_2 1} r)^* = \left(\frac{Gr}{1+G}\right)^* \quad (5-26)$$

于是, 可得到图 5-5 所示的采样信号流图。显然, 图 5-5 和图 5-4 是等价的 (对于求 x_1^* , x_2^* 和 x_3^*)。

例 5-2. 对于图 5-6 所示的多环采样系统, 采样图中应包括三个节点, 它们分别对应于采样器 S_1, S_2 和输出节点 x_4 . 由图 5-6, 有

$$T_{s_1 s_2}^* = -(G_1 G_2)^*, \quad T_{s_2 s_1}^* = (G_1 G_2)^*, \quad T_{s_2 s_2}^* = (G_1 G_2)^*,$$

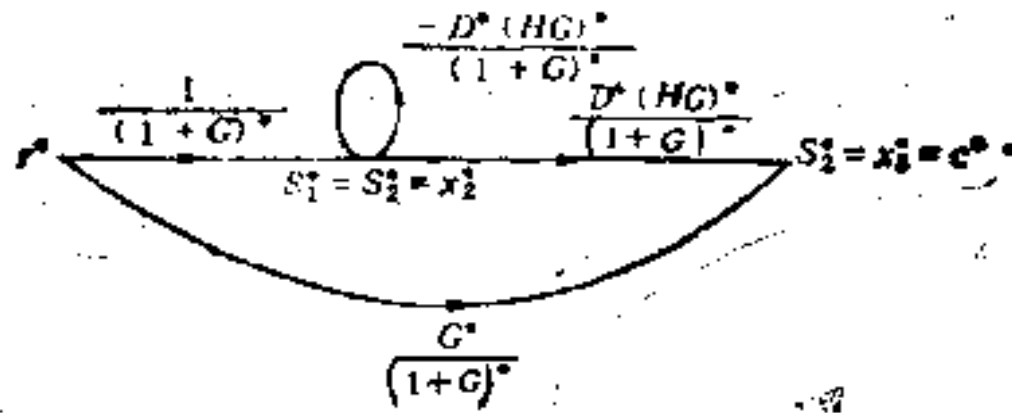


图 5-5

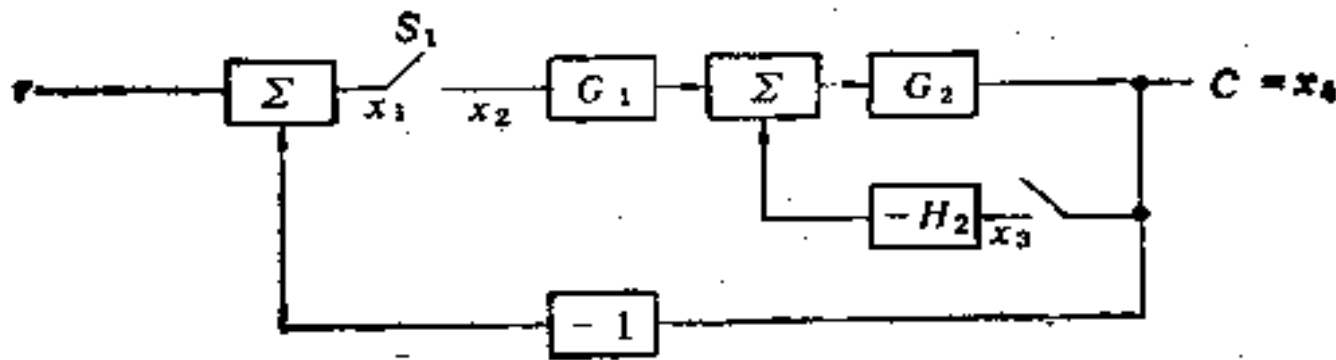


图 5-6

$$\begin{aligned}
 T_{S_1 S_2}^* &= (G_2 H_2)^*, & T_{S_2 S_1}^* &= -(G_2 H_2)^*, & T_{S_3 S_2}^* &= -(G_2 H_2)^*, \\
 T_{S_1 S_3}^* &= T_{S_2 S_3}^* = T_{S_3 S_3}^* &= 0, & (T_{S_1 r})^* &= r^*, \\
 (T_{S_2 r})^* &= (T_{S_3 r})^* &= 0 & & & (5-27)
 \end{aligned}$$

由式 (5-27), 可得图 5-7 所示的采样信号流图。

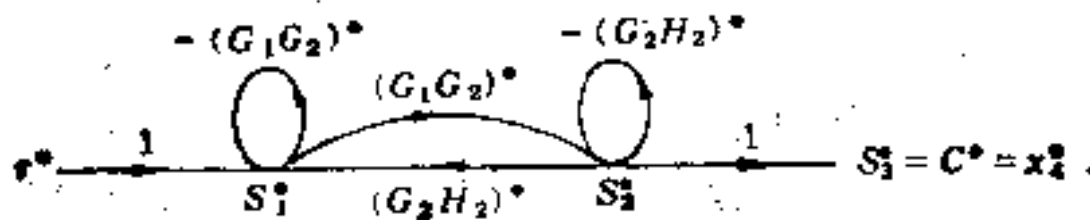


图 5-7

由图 5-7; 可得采样输出(应用 Mason 增益公式),

$$C^* = \frac{r^* (G_1 G_2)^*}{1 + (G_1 G_2)^* + (G_2 H_2)^*} \quad (5-28)$$

求出系统的采样输出后, 利用式 (5-16) 可得到系统的非采样输出。Kuo^[7] 曾提出一种拓扑方法, 直接在图上计算采样输出和非采样输出, 而不必先算出所有采样输出后再计算非采样输出。这就是复合信号流图法。*复合信号流图是由采样信号流图和原信

号流图组成。原信号流图是在系统的方框图中去掉所有采样器后得出的。如果在系统中的节点 i 和 j 间有一采样器，则采样器的作用可由采样信号流图中的节点 x_i^* 作一支路（支路传输为 1）至原信号流图中的节点 x_j 来实现。这样构成的信号流图称为复合信号流图。这里，采样器已不存在，可直接利用 Mason 增益公式求出采样输出和非采样输出。

例 5-3. 求图 5-3 所示的采样系统的复合信号流图。

该系统的采样信号流图如图 5-5。原信号流图可直连由图 5-3 所示的方框图去掉采样器得出。从采样信号流图中的 x_1^* 至原信号流图中的 x_2 加入传输为 1 的支路，以实现采样器的作用。最后，得出图 5-8 所示的复合信号流图。

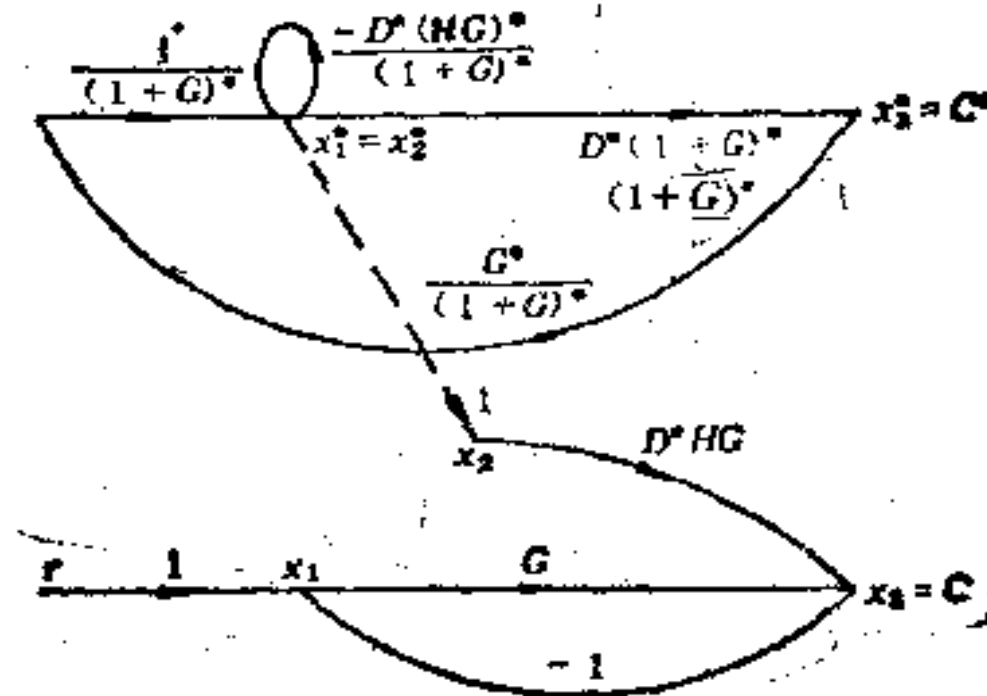


图 5-8

由图 5-8，可得出非采样输出

$$C = x_3 = \frac{D^*GHr^*/(HG)^*}{(1+G)[1+D^*(HG)^*/(HG)^*]} + \frac{rG}{(1+G)} \quad (5-29)$$

采样输出

$$C^* = x_3^* = \frac{D^*(GH)^*r^*/(1+G)^*}{(1+G)^*[1+D^*(HG)^*/(HG)^*]} + \frac{r^*G^*}{(1+G)^*} \quad (5-30)$$

若对式 (5-29) 取脉冲变换，得出的结果与式 (5-30) 相同。

例 5-4. 对于图 5-6 所示的采样系统, 可得到图 5-9 的复合信号流图.

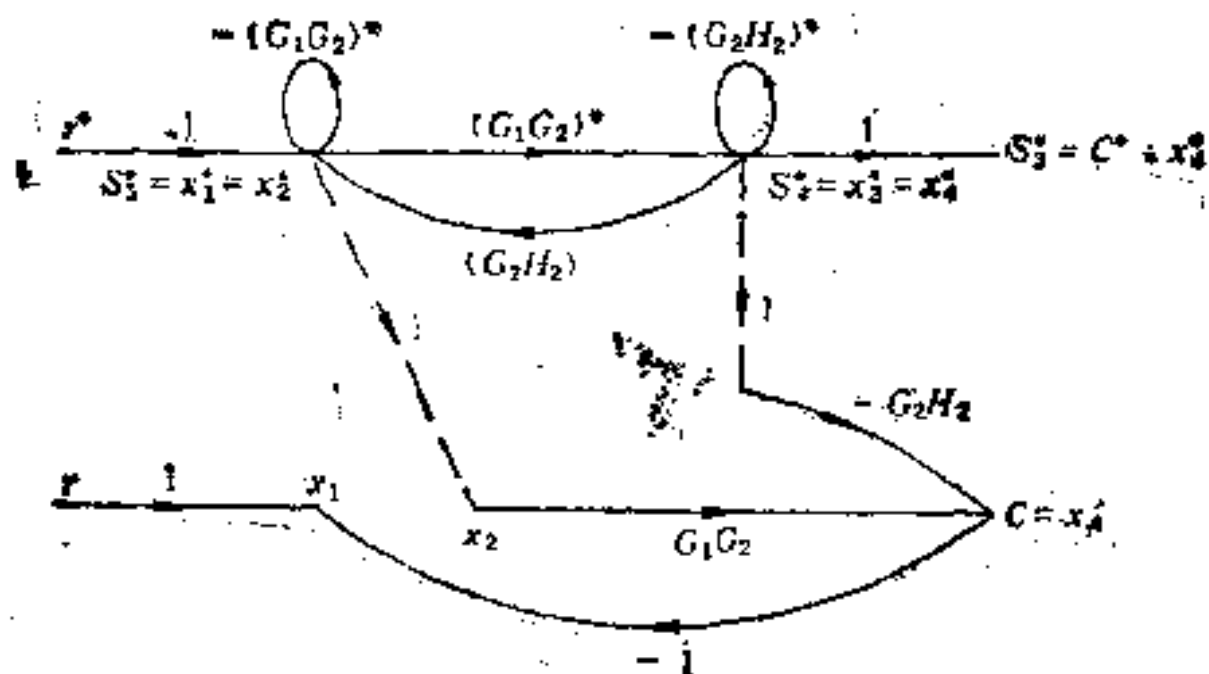


图 5-9

由图 5-9, 可得非采样输出

$$\begin{aligned}
 C = x_4 &= \frac{r^* G_1 G_2 [1 + (G_2 H_2)^*] + r^* (G_1 G_2) (-G_2 H_2)}{1 + (G_1 G_2)^* + (G_2 H_2)^*} \\
 &= \frac{r^* G_1 G_2}{1 + (G_1 G_2)^* + (G_2 H_2)^*} \quad (5-31)
 \end{aligned}$$

从上面的实例可看出, 复合信号流图中所包括的节点数约为原信号流图的一倍. 对于大的系统, 这是相当可观的. 利用这种方法分析采样系统时, 要应用 Mason 增益公式两次, 第一次是在构成采样信号流图时用于计算各点间的传输; 第二次是对复合信号流图计算采样和非采样的输出. 此外, 在计算中会出现相消项. 例如, 在式 (5-28) 和式 (5-31) 的分母和分子中分别出现相消项. 因此, 计算效率受到影响. 上述情况使复合信号流图法的应用受到限制.

5-3 Sedlar-Bekey 增益公式

Sedlar 和 Bekey 曾将 Mason 增益公式推广到采样系统, 得到了求采样系统传输的增益公式^[13]. 这就是 Sedlar-Bekey 增益

公式。在叙述该公式前,需要引进一些定义。

图中有两类节点:白节点和黑节点。白节点表示连续变量,黑节点表示采样变量。用黑节点表示的变量是所有进入该节点的信号相加后的采样形式。

线段是一条有向路,其起点是黑节点或源点,其终点是黑节点或汇点(任一非源点在加入传输为1的出支路后均可变为汇点)。

只包括白节点的路或环称为1型的,用上角(1)表示。

至少包括一个黑节点的路或环称为2型的,用上角(2)表示。

1型路或环是基本的,如果其中每个节点只通过一次。

2型路或环是基本的,如果其中每个黑节点只通过一次。但同一白节点可通过多次,只要它属于不同的线段。

例如,在图5-10中,源点为1,汇点为3。有下列基本路:

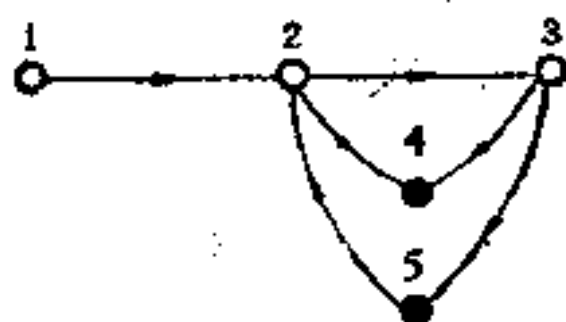


图 5-10

(1) 1型的:

$$P_1^{(1)} = [1, 2, 3]$$

(2) 2型的:

$P_1^{(2)} = [1, 2, 3, 4, 2, 3]$,由线段 $[1, 2, 3, 4]$ 和 $[4, 2, 3]$ 组成

$P_2^{(2)} = [1, 2, 3, 5, 2, 3]$,由线段 $[1, 2, 3, 5]$ 和 $[5, 2, 3]$ 组成

$P_3^{(2)} = [1, 2, 3, 4, 2, 3, 5, 2, 3]$,由线段 $[1, 2, 3, 4]$, $[4, 2, 3, 5]$ 和 $[5, 2, 3]$ 组成

$P_4^{(2)} = [1, 2, 3, 5, 2, 3, 4, 2, 3]$,由线段 $[1, 2, 3, 5]$, $[5, 2, 3, 4]$ 和 $[4, 2, 3]$ 组成

有下列基本环:

(1) 1 型环没有。

(2) 2 型环:

$$L_1^{(2)} = [4, 2, 3, 4]$$

$$L_2^{(2)} = [5, 2, 3, 5]$$

$$L_3^{(2)} = [4, 2, 3, 5, 2, 3, 4]$$

若 1 型环与线段, 或 1 型路、1 型环有公共的白节点, 则称它们是接触的。

若 2 型环与线段, 或 2 型路、2 型环有公共黑节点, 则称它们是接触的。

例如, 在图 5-10 中, $L_1^{(2)}$ 和 $L_2^{(2)}$ 是不接触的, 虽然它们有公共的白节点 2 和 3, 但没有公共的黑节点。 $L_1^{(2)}$ 和 $L_2^{(2)}$ 与 $L_3^{(2)}$ 是接触的, 因为 $L_1^{(2)}$ 与 $L_3^{(2)}$ 有公共的黑节点 4, $L_2^{(2)}$ 与 $L_3^{(2)}$ 有公共的黑节点 5。 同样, $L_1^{(2)}$ 与 $P_1^{(2)}$, $P_3^{(2)}$ 接触, 与 $P_2^{(2)}$ 不接触。

路传输是路中所包括的支路的传输之积。 各个传输按支路在路中的顺序排列。 如果路中有黑节点, 则黑节点以前的支路传输之积应取采样形式。 对线段和环的传输可类似地定义, 但黑节点取作为 2 型环的起点。

例如, 在图 5-11 中, 从 x_1 至 x_5 的 1 型路 $P_1^{(1)} = [x_1, x_2, x_3, x_5]$,

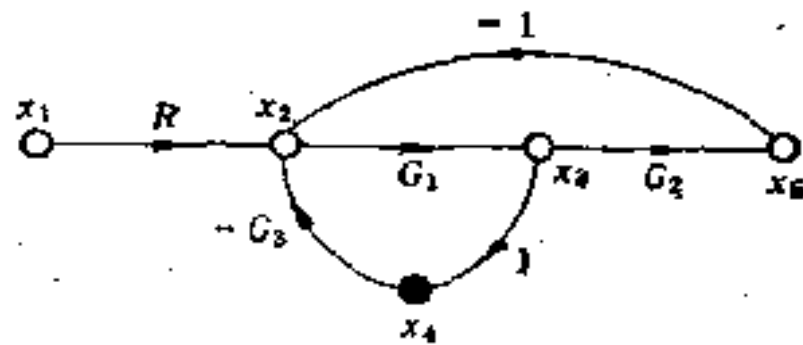


图 5-11

其传输为 RG_1G_2 ; 2 型路 $P_1^{(2)} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_2, x_3, x_5]$, 其传输为 $-(RG_1)^*G_3G_1G_2$; 1 型环 $L_1^{(1)} = [x_2, x_3, x_4, x_2]$, 其传输为 $-G_1G_2$; 2 型环 $L_1^{(2)} = [x_2, x_3, x_4, x_2, x_3, x_2]$, 其传输为 $-(G_1G_3)^*$ 。

图的第 1 行列式

$$\Delta^{(1)} = 1 - \sum_i L_i^{(2)} + \sum_{i,j} L_i^{(1)}L_j^{(1)} - \sum_{i,j,k} L_i^{(1)}L_j^{(1)}L_k^{(1)} + \dots \quad (5-32)$$

式中 $L_i^{(1)}, L_i^{(1)}L_j^{(1)}, L_i^{(1)}L_j^{(1)}L_k^{(1)}, \dots$ 分别为 1 阶, 2 阶, 3 阶, ... 不接触的 1 型环。

图的第 2 行列式

$$\Delta^{(2)} = 1 - \sum_i L_i^{(2)} + \sum_{i,j} L_i^{(2)}L_j^{(2)} - \sum_{i,j,k} L_i^{(2)}L_j^{(2)}L_k^{(2)} + \dots \quad (5-33)$$

式中 $L_i^{(2)}, L_i^{(2)}L_j^{(2)}, L_i^{(2)}L_j^{(2)}L_k^{(2)}, \dots$ 分别为 1 阶, 2 阶, 3 阶... 不接触的 2 型环。

例如, 在图 5-11 中, $\Delta^{(1)} = 1 + G_1G_2$, $\Delta^{(2)} = 1 + (G_1G_3)^*$ 。

用于求采样系统输出 Y 的 Sedlar-Bekey 增益公式¹⁾:

$$Y = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta^{(2)}} \otimes \frac{\sum_i P_i \Delta_i^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \quad (5-34)$$

式中 P_i 是从源点到汇点的路传输(可以是 1 型或 2 型的), $\Delta_i^{(2)}$ 是不接触路 P_i 的第 2 图行列式, $\Delta^{(2)}$ 是第 2 图行列式, \sum_i 表示对所有路 P_i 求和, $\Delta_i^{(1)}$ 是从 $\Delta^{(1)}$ 中去掉与 $(\sum_i P_i \Delta_i^{(2)})/\Delta^{(2)}$ 中第 i 个线段相接触的环传输后得出的第 1 图行列式。符号 \otimes 表示 $(\sum_i P_i \Delta_i^{(2)})/\Delta^{(2)}$ 出现的每个线段传输用对应的 $\Delta_i^{(1)}/\Delta^{(1)}$ 相乘的运算。如果任一线段传输以采样形式出现, 则乘法对相应的连续量进行, 最后将乘积采样。

用于连续系统的 Mason 增益公式是式 (5-34) 的特殊形式。对于连续系统, 只包括 1 型环, 故 $\Delta^{(2)} = \Delta_i^{(2)} = 1$ 。于是, 式 (5-34) 简化为

$$Y = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \otimes \sum_i P_i \quad (5-35)$$

在连续系统中, 所有节点均为白节点, 则每个 P_i 实际上是一个从源点到汇点的线段, 则 \otimes 变为简单的乘法, 故有

1) 关于该公式的证明, 参阅 [13]。

$$Y = \frac{\sum_i P_i \Delta_i^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \quad (5-36)$$

式(5-36)就是 Mason 增益公式。

例 5-5. 求图 5-12(a) 的采样系统中的输出 Y 。

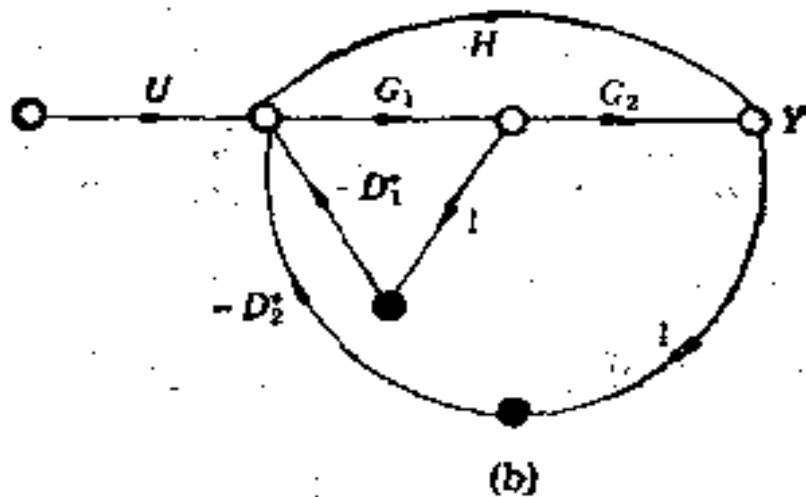
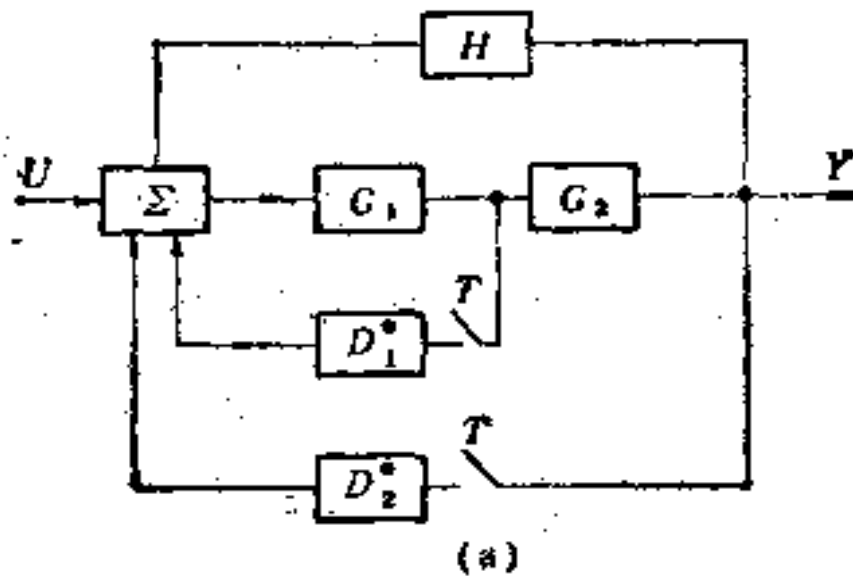


图 5-12

图 5-12(a) 对应的信号流图如图 5-12(b)。图 5-12(b) 中有两个黑节点分别用于表示两个采样器的输出。

由图 5-12(b) 可看出，有一个 1 型路和四个 2 型路。它们的传输分别为

$$\begin{aligned} P_1^{(1)} &= UG_1G_2 \\ P_1^{(2)} &= -(UG_1)^*D_1^*G_1G_2 \\ P_2^{(2)} &= -(UG_1G_2)^*D_2^*G_1G_2 \\ P_3^{(2)} &= (UG_1G_2)^*D_2^*G_1^*D_1^*G_1G_2 \\ P_4^{(2)} &= (UG_1)^*D_1^*(G_1G_2)^*D_2^*G_1G_2 \end{aligned} \quad (5-37)$$

有一个 1 型环和三个 2 型环。它们的传输分别为

$$\begin{aligned} L_1^{(1)} &= HG_1G_2 \\ L_1^{(2)} &= -D_1^*G_1^* \\ L_2^{(2)} &= -D_2^*(G_1G_2)^* \\ L_3^{(2)} &= D_1^*(G_1G_2)^*D_2^*G_1^* \end{aligned} \quad (5-38)$$

故

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)} &= 1 - L_1^{(1)} = 1 - HG_1G_2 \\ \Delta^{(2)} &= 1 - L_1^{(2)} - L_2^{(2)} - L_3^{(2)} + L_1^{(2)}L_2^{(2)} \\ &= 1 + D_1^*G_1^* + D_2^*(G_1G_2)^* - D_1^*(G_1G_2)^*D_2^*G_1^* \\ &\quad + D_1^*G_1^*D_2^*(G_1G_2)^* \\ &= 1 + D_1^*G_1^* + D_2^*(G_1G_2)^* \end{aligned} \quad (5-40)$$

对 $P_1^{(1)}$, $P_1^{(2)}$, $P_2^{(2)}$, $P_3^{(2)}$, $P_4^{(2)}$ 的余因式分别为 $\Delta^{(1)}$, $1 + D_2^* \cdot (G_1G_2)^*$, $1 + D_1^*G_1^*$, 1 , 1 。代入式 (5-34) 后, 可得输出

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta^{(2)}} \otimes \frac{\sum P_i \Delta_i^{(2)}}{\Delta^{(2)}} = \frac{UG_1G_2}{1 - HG_1G_2} \\ &\quad - \frac{\left(\frac{UG_1}{1 - HG_1G_2}\right)^* \frac{D_2^*G_1G_2}{(1 - HG_1G_2)} \left[1 + D_2^* \left(\frac{G_1G_2}{1 - HG_1G_2}\right)^*\right]}{D} \\ &\quad - \frac{\left(\frac{UG_1G_2}{1 - HG_1G_2}\right)^* \frac{D_2^*(G_1G_2)^*}{1 - HG_1G_2} \left[1 + D_1^* \left(\frac{G_1G_2}{1 - HG_1G_2}\right)^*\right]}{D} \\ &\quad + \frac{\left(\frac{UG_1G_2}{1 - HG_1G_2}\right)^* D_2^* \left(\frac{G_1}{1 - HG_1G_2}\right)^* D_1^* \frac{G_1G_2}{1 - HG_1G_2}}{D} \\ &\quad + \frac{\left(\frac{UG_1}{1 - HG_1G_2}\right)^* D_1^* \left(\frac{G_1G_2}{1 - HG_1G_2}\right)^* D_2^* \cdot \frac{G_1G_2}{1 - HG_1G_2}}{D} \\ &= \frac{UG_1G_2}{1 - HG_1G_2} \end{aligned}$$

$$\frac{\left(\frac{UG_1}{1-HG_1G_2}\right)^* \frac{D_1^*G_1G_2}{1-HG_1G_2} + \left(\frac{-UG_1G_2}{1-HG_1G_2}\right)^* \frac{D_2^*G_1G_2}{1-HG_1G_2}}{D} \quad (5-41)$$

式中

$$D = 1 + D_1^* \left(\frac{G_1}{1-HG_1G_2}\right)^* + D_2^* \left(\frac{G_1G_2}{1-HG_1G_2}\right)^* \quad (5-42)$$

Sedlar-Bekey 增益公式应用中的主要问题是, 识别各种路和环, 以及它们之间是否接触并不是一件容易的事, 特别是对于结构复杂的图。此外, 从上例中可以看出, 在计算中出现了很多相消项, 降低了效率。因此, 这种方法在处理大系统时并不方便。

5-4 节点逐步消除法

在上两节中叙述的分析采样系统的两种方法, 都存在着一一定的缺点, 而主要缺点是计算不方便。Salehi^[12] 于 1981 年提出了节点逐步消除法, 它克服了上述两种方法的缺点。在这种方法中, 采样器作为传输为 * 的子系统来处理, 脉冲变换在算法结束后再进行。节点分为三种: 灰节点表示采样器的输入节点; 黑节点表示采样器的输出节点; 其他为白节点。在节点消除过程中, 先消除白节点, 再消除灰节点, 最后消除黑节点。这种方法的基本思想是推广了 Munro^[11] 的简化规则, 包括十个步骤, 现叙述如下:

第 1 步. 作初始的信号流图。

首先, 对方框图中采样器的串联和并联作一些简化, 如图 5-13。

在简化后, 将采样器用传输为运算符 * 的支路来代替。采样器的输入节点用灰节点(阴影)表示。采样器的输出节点用黑节点表示。所有其他节点用白节点表示。引入传输为输入变量的支路使输入标称化。

第 2 步. 从黑节点上分开求和运算。

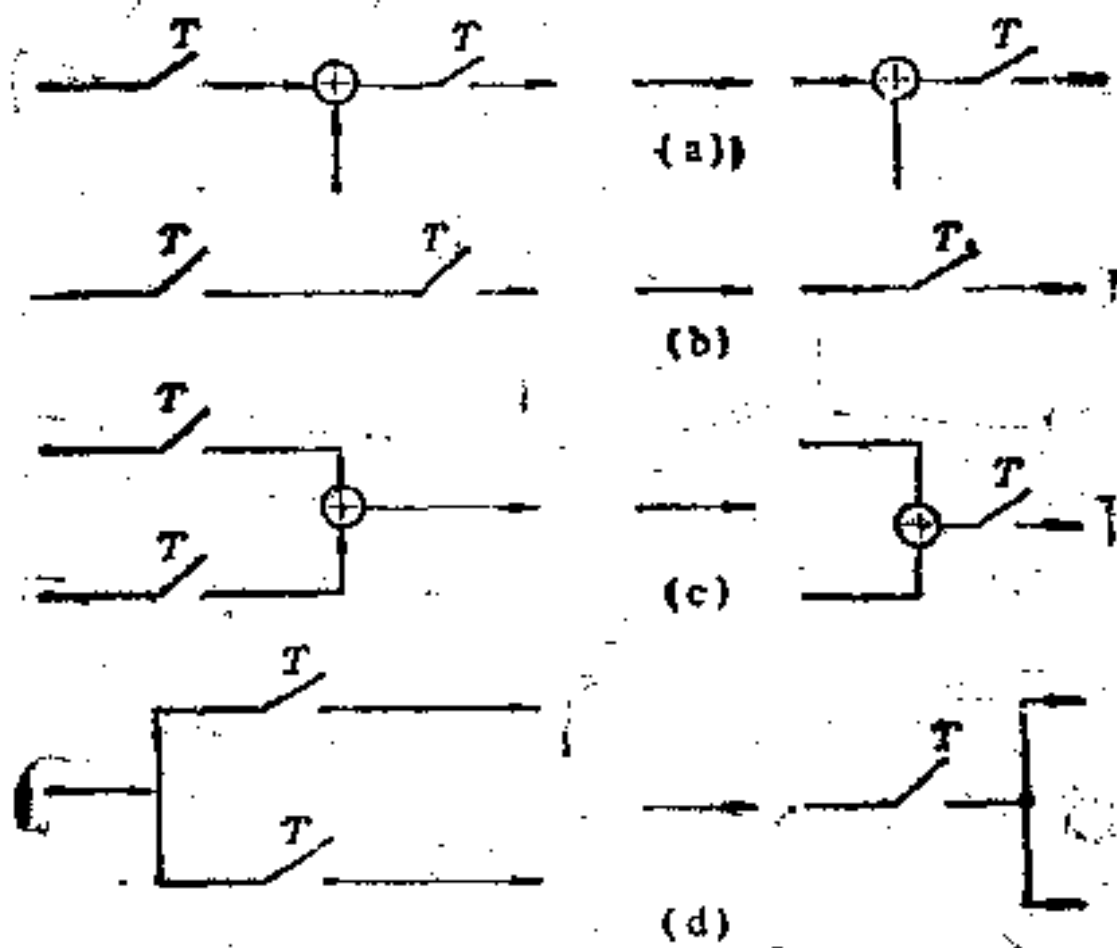


图 5-13

如果黑节点上还有除了从采样器来的带*的入支路，则先使黑节点变为白节点，再在灰节点与白节点间加入黑节点。黑节点至白节点间的支路传输为1。如图5-14所示。

第3步。从不包括采样器的环中移开灰节点。

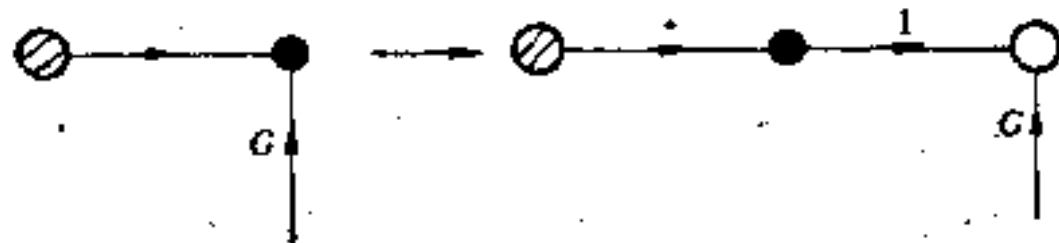


图 5-14

要找出不包括黑节点的环，先将灰节点和白节点暂时予以编号。然后，构成接近矩阵 A

$$A = [a_{ij}],$$

式中

$a_{ij} = 1$ ，如果节点 i 有一支路至节点 j ，否则为零
然后，若有一最小正整数 p ，使

$$(I_N + A)_{\#}^{-1} = (I_N + A)_{\#} \quad (5-43)$$

(式中 I_N 是 N 阶单位阵, $\#$ 表示布尔运算, 即 $x + y = \text{Max}(x, y)$, $x \cdot y = \text{Min}(x, y)$) 则得出可达矩阵 $R = (I_N + A)_{\#}^{-1} = [r_{ij}]$. 若 $r_{ij} = 1$, 则表示节点 i 可经过有向路到达节点 j .

由 R 构成矩阵 $T = R + R^T - 2I_N$ (R^T 为 R 的转置). 行中有元素 2 的节点一定在环内. 将环中的灰节点变为白节点, 然后新的白节点和黑节点间加入一个新的灰节点, 从白节点到灰节点间有 1 条传输为 1 的支路. 如图 5-15 所示.

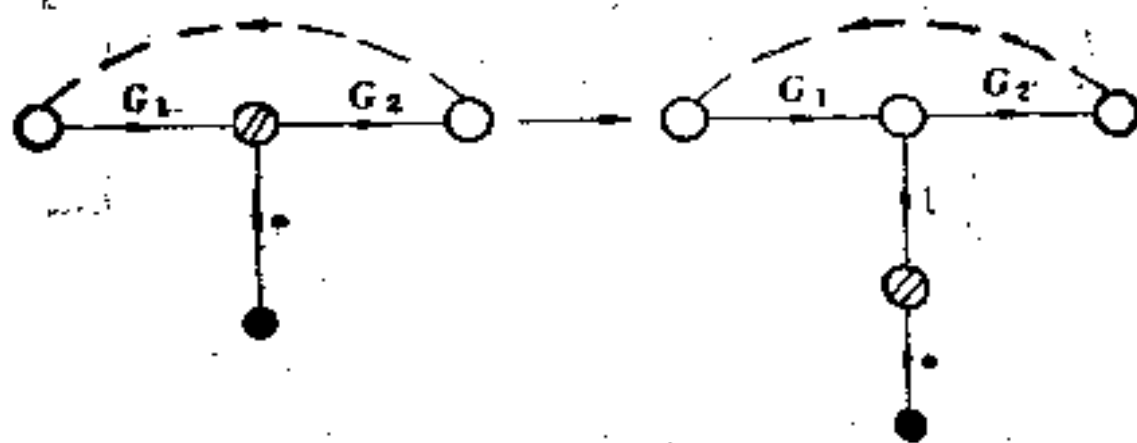


图 5-15

第 4 步. 将所有节点编号.

首先, 将 n_w 个白节点编号, 然后将 n_g 个灰节点编号, 最后将 n_b 个黑节点编号. 注意, 黑节点的编号应按照对应的灰节点编号的顺序.

第 5 步. 得出连接矩阵.

连接矩阵的维数是 $(n_w + 2n_g + 1) \times (n_w + 2n_g + 1)$, 其中 $(n_w + 2n_g) \times (n_w + 2n_g)$ 的主子阵是节点间的传输矩阵. 采样器的传输为 $*$. 最后一列有一个 1, 表示输出节点, 最后一行在适当位置包括输入支路的传输 U . 连接矩阵的结构如图 5-16 所示.

注意, 白-黑子阵的元素全为零, 这由第 2 步所保证. (即黑节点只能有一条从灰节点来的人支路) 灰-黑子阵的对角性是由第 4 步中的编号规则决定的.

例如, 对图 5-17 所示的系统, 其连接矩阵

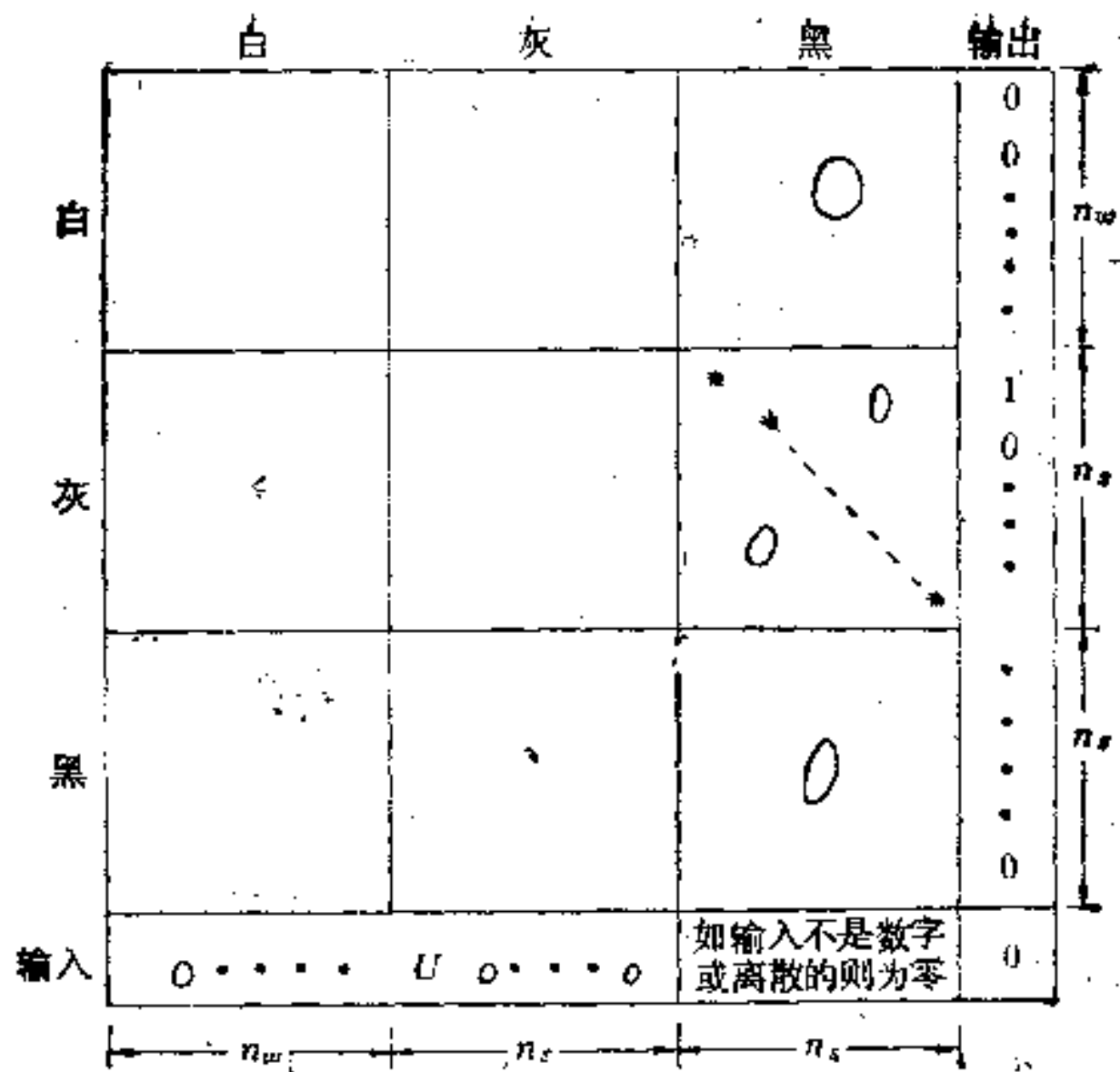


图 5-16

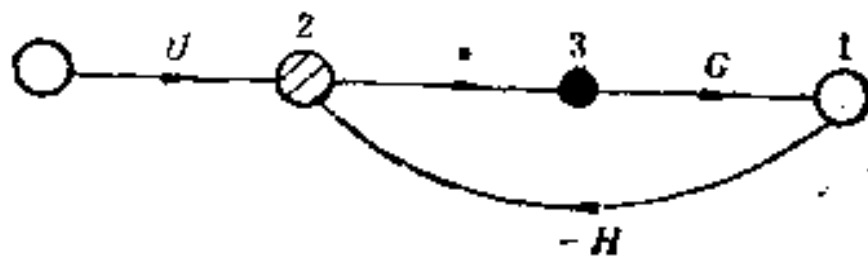


图 5-17

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -H & 0 & 1 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ G & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & U & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为节点 1 是输出节点，故附加的输出列中第 1 行的元素为 1。输入支路加到节点 2，故附加的输入行中第 2 列的元素为 U 。

第 6 步。消去白节点。

对于 $i = 1, 2, \dots, n_w$, 用

$C_{ik} + C_{ji}(1 - C_{ii})^{-1}C_{ik}$ 代替 C_{ik} ($j, k = i + 1, i + 2, \dots, n_w + 2n_s + 1$), 依次消去 n_w 个白节点.

这等效于第一章 1-3 节中的节点吸收过程.

由于白-黑子阵的元素全为零, 在消去白节点的过程中, 对应于黑节点各列的子阵不变.

第 7 步. 灰节点重新编号.

写出对应于连接矩阵中灰-灰子阵的灰子图的接近矩阵 A . 因为消去了白节点后, 去掉了所有的环, 所以灰节点的子图不可能包括环. 从而, 灰节点的子图是无环的. 每个无环图至少有一个源点, 它就是最长路的起点. 矩阵 A 的 q 次方的 (i, j) 元素表示从节点 i 到 j 的长度为 q 的有向路的数目. 如果 $A^p = 0$, 而 A^{p-1} 中的 (i, j) 元素不为零, 表明从节点 i 到节点 j 有一长为 $p-1$ 的有向路. 去掉节点 i , 图仍然是无环的. 重复以上过程, 直至所有节点去掉为止. 按这些节点去掉的顺序, 重新将灰节点编号. 于是, 灰-灰子阵变为真上三角阵(对角线元素为零). 最后, 将黑节点也按灰节点的编号相应地重新编号, 以保证灰-黑子阵的对角性.

第 8 步. 消去灰节点.

对于 $i = n_w + 1, n_w + 2, \dots, n_w + n_s$ 用

$$C_{jk} + C_{ji}C_{ik} \text{ 代替 } C_{jk}, \quad (j = i + n_s + 1, i + n_s + 2, \dots, n_w + 2n_s + 1 \quad k = i + 1, i + 2, \dots, n_w + n_s \text{ 和 } n_w + 2n_s + 1) \quad (5-44)$$

$$C_{ji}^* \text{ 代替 } C_{ik} (=0), \quad (j = i + n_s, i + n_s + 1, \dots, i + 2n_s + 1 \quad k = i + n_s) \quad (5-45)$$

注意 C_{ji}^* 中的乘积的顺序.

式 (5-44) 对应于消去图 5-18 中的节点 i .

式 (5-45) 对应于消去图 5-19 中的节点 i .

第 9 步. 消去黑节点.

对 $i = n_w + n_s + 1, n_w + n_s + 2, \dots, n_w + 2n_s$, 用

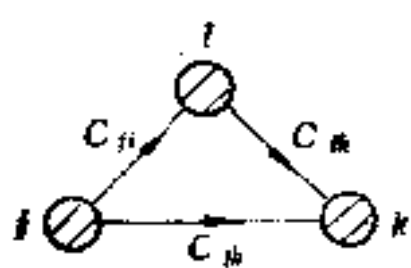


图 5-18

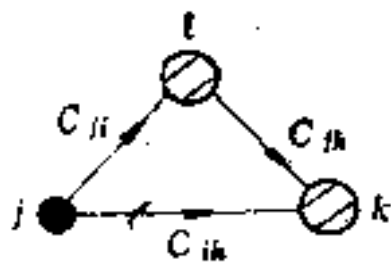


图 5-19

$C_{jk} + C_{ji}(1 - C_{ii})^{-1}C_{ik}$ 代替 C_{jk} , $i, k = i + 1, i + 2, \dots, n_w + 2n_s + 1$.

第 10 步. $C_{(n_w+2n_s+1)(n_w+2n_s+1)}$ 中的元素即为所希望求得的传输. 每项中的 * 是脉冲变换运算.

例 5-6. 用节点逐步消除法求图 5-12 所示系统的输出 Y .

图 5-12 中没有多余的采样器, 故不需要化简. 用传输为 * 的支路代替采样器后得出图 5-20 的信号流图.

因为黑节点上没有其他支路, 故第 2 步是多余的. 为了找出白节点和灰节点构成的环, 将节点按白、灰、黑的顺序暂行编号, 如图 5-20. 输入节点不需要编号.

白节点和灰节点子图的接近矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-46)$$

求得可达矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-47)$$

故

$$T = R + R^T - 2I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-48)$$

由此可知, 节点 1, 2, 3 是在同一环中. 当然, 对于这种简单的情况可从图 5-20 中直接看出. 但在图的结构比较复杂时, 需要由矩阵 T 决定环中的节点.

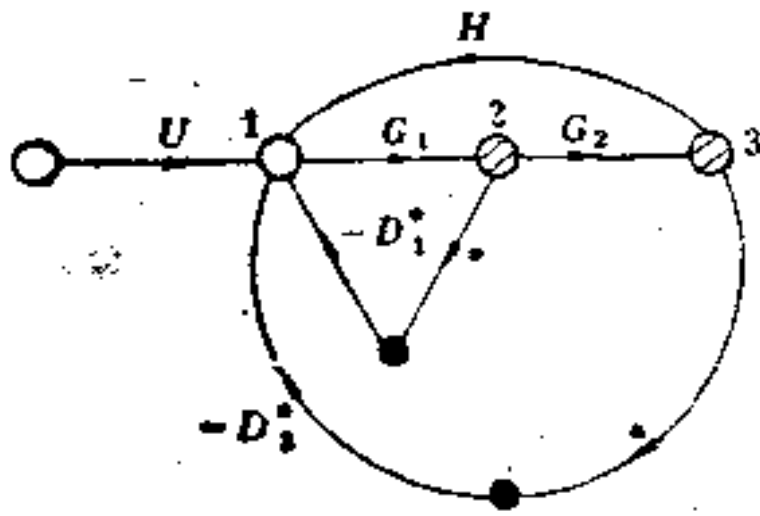


图 5-20

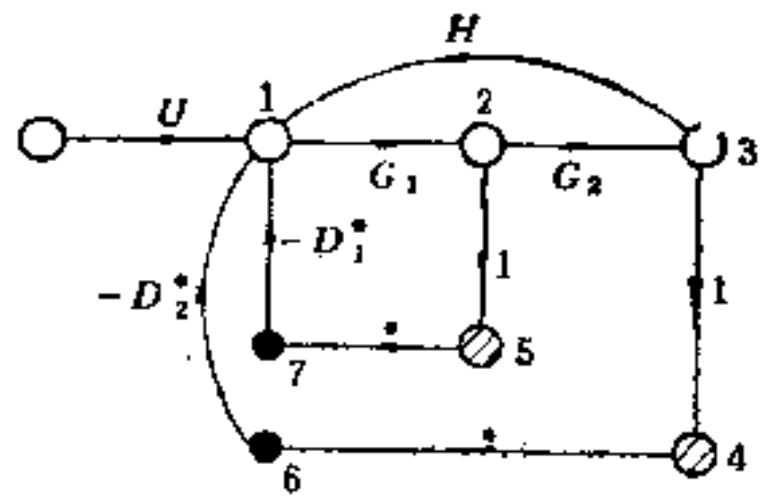


图 5-21

根据第 3 步的原则,将灰节点 2 和 3 变为白节点,并在白节点和黑节点间分别加入灰节点。因此,环中节点均为白节点。再按第 4 步,将节点进行编号,得出图 5-21。

由图 5-21, 得出连接矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 0 & G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ -D_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-49)$$

由第 6 步,消去白节点 1, 2, 3, 得出

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ -D_2^* K G_1 & -D_2^* K & 0 & 0 & -D_2^* K G_1 \\ -D_1^* K G_2 & -D_1^* K & 0 & 0 & -D_1^* K G_2 \\ \hline U K G_2 & U K & 0 & 0 & U K G_2 \end{bmatrix} \quad (5-50)$$

式中

$$K = \frac{G_1}{1 - H G_1 G_2} \quad (5-51)$$

因为灰-灰子阵为零,故第7步不需要应用。

由第8步,消去灰节点4,5,得出

$$C = \left[\begin{array}{cc|c} -D_1^*KG_2^* & -D_1^*K^* & -D_1^*KG_2 \\ -D_1^*KG_2^* & -D_1^*K^* & -D_1^*KG_2 \\ \hline UKG_2^* & UK^* & UKG_2 \end{array} \right] \quad (5-52)$$

由第9步,消去黑节点6,7,最后得出输出

$$Y = UKG_2 - \frac{UK^*D_1^*KG_2 + UKG_2^*D_1^*KG_2}{1 + D_1^*K^* + D_1^*KG_2^*} \quad (5-53)$$

应指出式(5-53)中的*作为一种运算符号出现,它将它前面的乘积进行脉冲变换。例如, $UKG_2^*D_1^*KG_2$ 表示乘积 UKG_2 进行脉冲变换后再与后面的因子相乘。

不难看出,式(5-53)与式(5-41)的结果是相同的。

与复合信号流图法和 Sedlar-Bekey 拓扑公式相比,节点逐步消除法应用起来比较方便,它的计算复杂性为 $o(N^3)$, N 是图中的节点数。

5-5 多速采样系统

上面讨论的是单速采样系统,即所有采样器的采样周期都相同的系统。但很多实际系统并不是单速的,其中包括一些以不同采样周期工作的采样器。例如,雷达跟踪系统就有一个从数字计算机来的不同于内部的采样频率。在有些情况下,采用多速采样可改善系统的性能。因此,有必要讨论多速采样系统的分析问题。

对于多速采样系统,不能直接应用信号流图方法分析。为此,必须将多速采样系统变成等效的单速采样系统。Kranc^[5] 曾提出开关分解方法。这种方法适用于采样器的周期是“有理相关”的系统。有理相关的意思是:如果系统中包括几个采样器,它们的周期为 T_1, T_2, \dots, T_n , 则存在数 T 和整数 p_1, p_2, \dots, p_n , 使得

$T_1 = T/p_1, T_2 = T/p_2, \dots, T_n = T/p_n$. 因为无理数可用有理数逼近, 所以有理相关的限制并不是很重要的.

开关分解方法的实质是包括周期为 T 的 p 个采样器的等效系统代替以周期为 T/p 工作的采样器. 这 p 个采样器的周期都是 T , 但具有不同的超前和延迟元件. 图 5-22 表示两个采样系统. 现在要证明, 图 5-22(a) 和图 5-22(b) 是等效的.

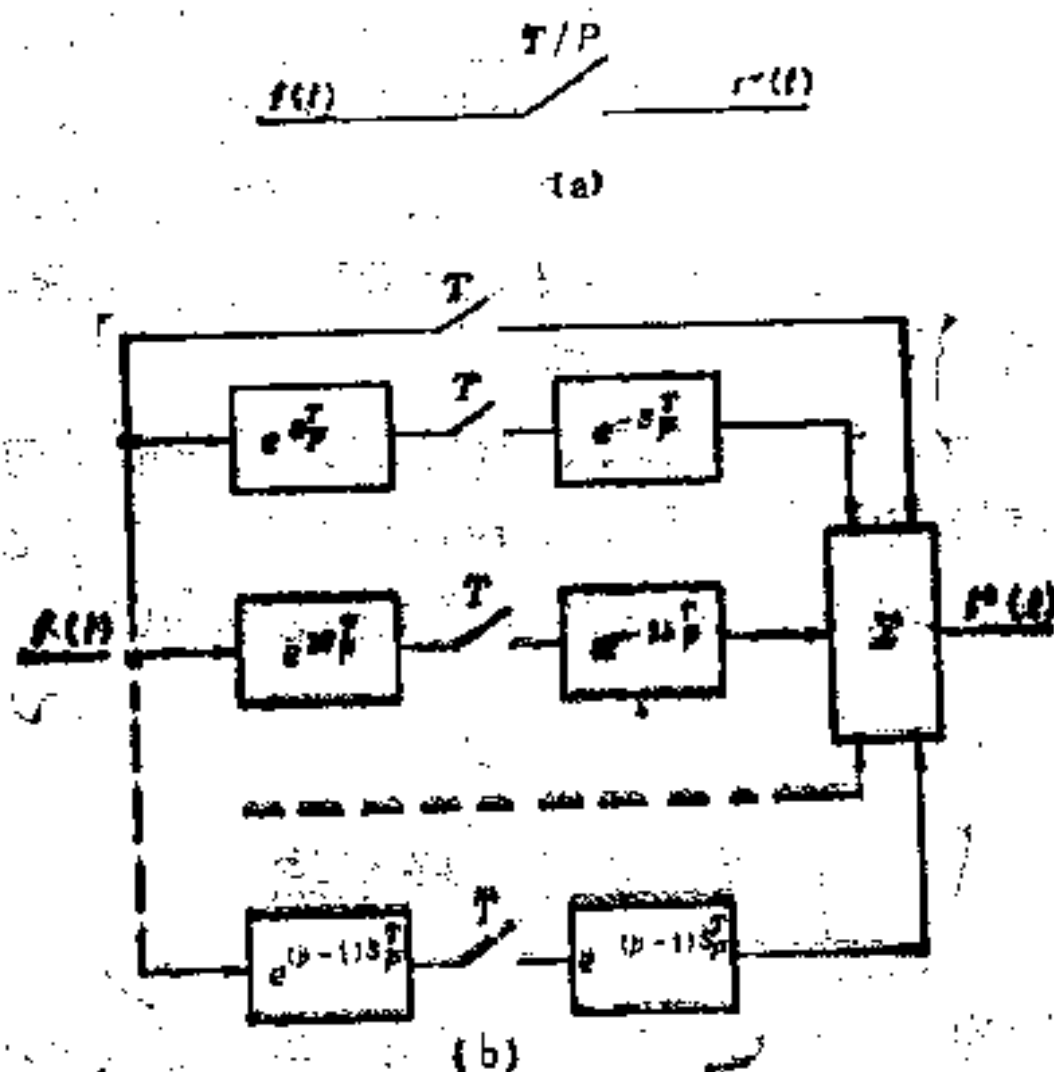


图 5-22

图 5-22(b) 中传输函数 $e^{-kT/p}$ 表示纯延迟或右移 $k \frac{T}{p}$, 而传输函数 $e^{kT/p}$ 表示超前或左移 $k \frac{T}{p}$. 实际上, 超前在物理上是不可能实现的, 因为系统不可能在接收输入信号前产生输出信号. 因此, 开关分解只是一个数学模型, 并无对应的物理意义. 现在, 考虑图 5-23 所示的系统. 由图 5-23, 有

$$g(t) = f[t + (kT/p)] \quad (5-54)$$

并由式 (5-1):

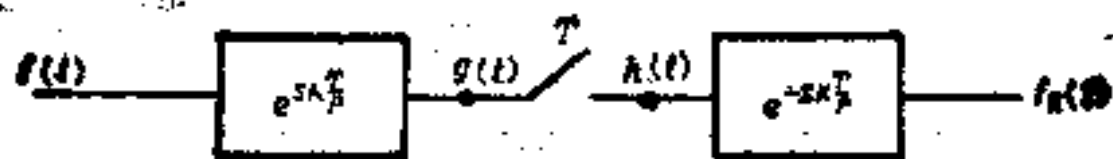


图 5-23

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(nT + \frac{kT}{p}\right) \delta(t - nT) \quad (5-55)$$

故

$$f_k(t) = h\left(t - \frac{kT}{p}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(nT + \frac{kT}{p}\right) \delta\left(t - nT - \frac{kT}{p}\right) \quad (5-56)$$

因此,系统的输出

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{p-1} f_k(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(nT + \frac{kT}{p}\right) \delta\left(t - nT - \frac{kT}{p}\right) \quad (5-57)$$

令 $m = np + k$, 则式 (5-57) 变为

$$f^*(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{mT}{p}\right) \delta\left(t - \frac{mT}{p}\right) \quad (5-58)$$

显然,式 (5-58) 正是图 5-22(a) 的系统的输出。因此,证实了图 5-22(a) 和 (b) 所表示的两个系统的等效性。

这样,我们利用开关分解方法就能将多速采样系统变为单速采样系统。从而,可应用前三节(5-2节~5-4节)中的信号流图方法来分析。但是,将多速采样系统变为单速采样系统后,图的结构更为复杂。

例 5-7. 有一多速采样系统如图 5-24 所示。首先,利用开关分解方法将周期为 $T/2$ 的采样器用两个周期为 T 的采样器代替,

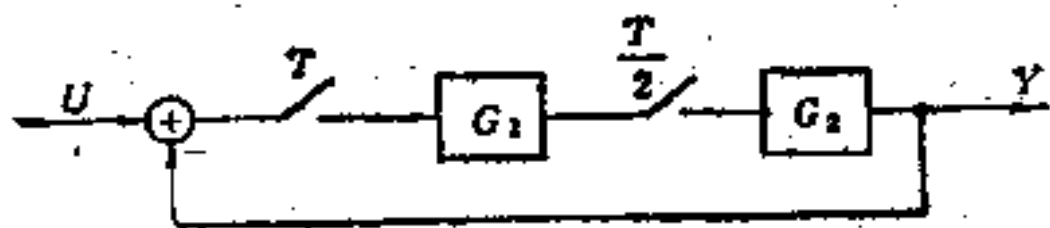


图 5-24

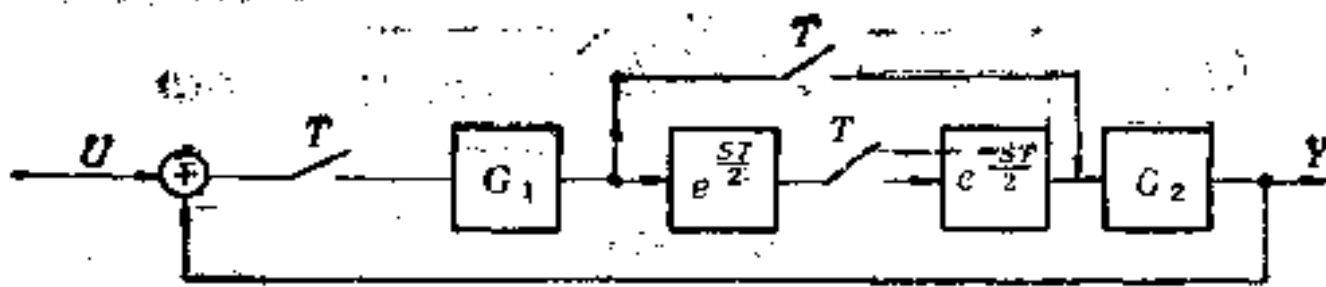


图 5-25

构成单速采样系统,如图 5-25 所示。

对于图 5-25 的单速采样系统,用 5-3 节中的节点逐步消除法来分析,得到图 5-26 的信号流图。

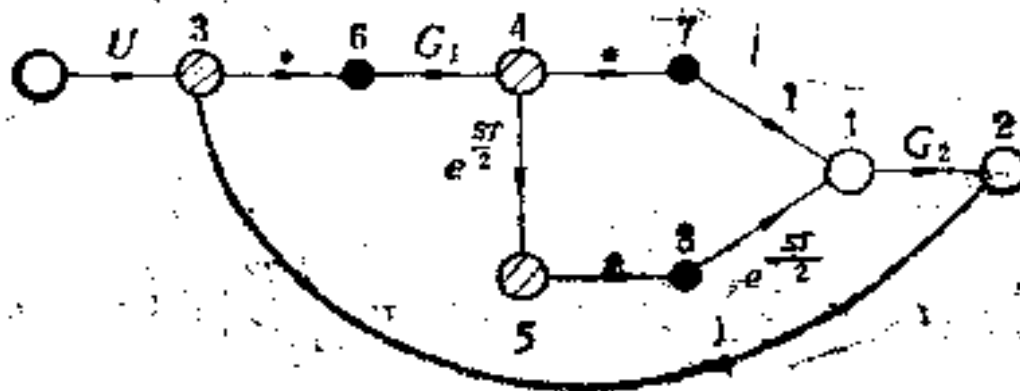


图 5-26

由图 5-26,可得出连接矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{sT/2} & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-sT/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-59)$$

依次消去白、灰、黑节点后,得出非采样输出

$$Y = U * \frac{G_1^* G_2 + (G e^{sT/2})^* e^{-sT/2} G_2}{1 + G_1^* G_2^* + (G e^{sT/2})^* (e^{-sT/2} G_2)^*} \quad (5-60)$$

可以看出,多速采样系统的信号流图比单速系统的要复杂得多。周期为 T/p 的采样器在等效的单速系统中要产生 p 个采样

器。每个采样器在信号流图中将产生两个节点。 p 个采样器将产生 $2p$ 个节点。因此,连接矩阵的阶数将大大增加,计算量也随之增大。

5-6 信号流图在离散系统中的应用—— 开关电容网络的分析和综合

由于金属氧化物工艺的不断发 展,开关电容网络引起了人们的广泛注意。本节中,我们将研究信号流图在分析和综合开关电容网络中的应用。首先,讨论不均匀的两相开关电容网络的分析,然后推广到多相的情况。

5-6-1 开关电容网络分析

1. 两相开关电容网络分析

设开关电容网络是两相不均匀的,即两相开关电容网络的时



图 5-27

间间隔分别为 τ_1 和 τ_2 (图5-27)。也就是说,每个周期分为两个子区间 τ_1 和 τ_2 。在区间 τ_1 内,开关 $S^{(1)}$ 闭合,而在区间 τ_2 内,开关 $S^{(2)}$ 闭合;当 $\tau_1 = \tau_2$ 时,称为两相均匀的。因此,对于任何两相开关电容网络,我们可将其分解为两个电容子网络 $N^{(1)}$ 和 $N^{(2)}$ 。因为当 $t \in \tau_1$ 时,所有开关 $S^{(1)}$ 闭合,而 $S^{(2)}$ 断开,故可得到子网络 $N^{(1)}$ 。同样,在 $t \in \tau_2$ 时,可得到相应的子网络 $N^{(2)}$ 。例如,对图5-28所示的网络,可得到它的两个子网络 $N^{(1)}$ 和 $N^{(2)}$ (图5-29)。

现讨论网络中的任一电容 C_{ij} 。它在 $N^{(1)}$ 中的端电压为 $V^{(1)}$,

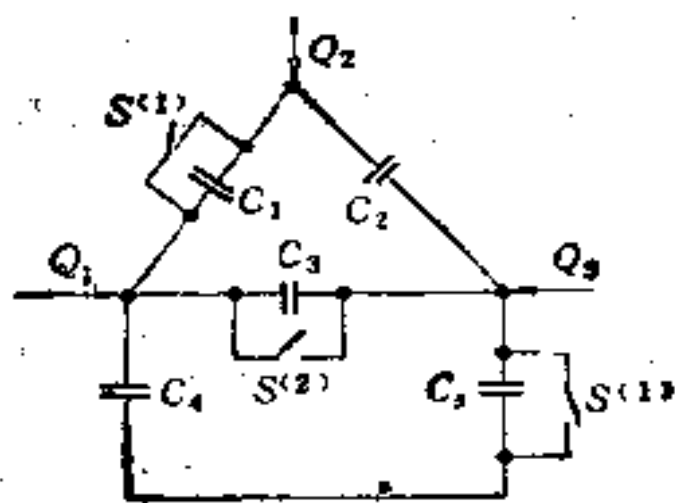


图 5-28

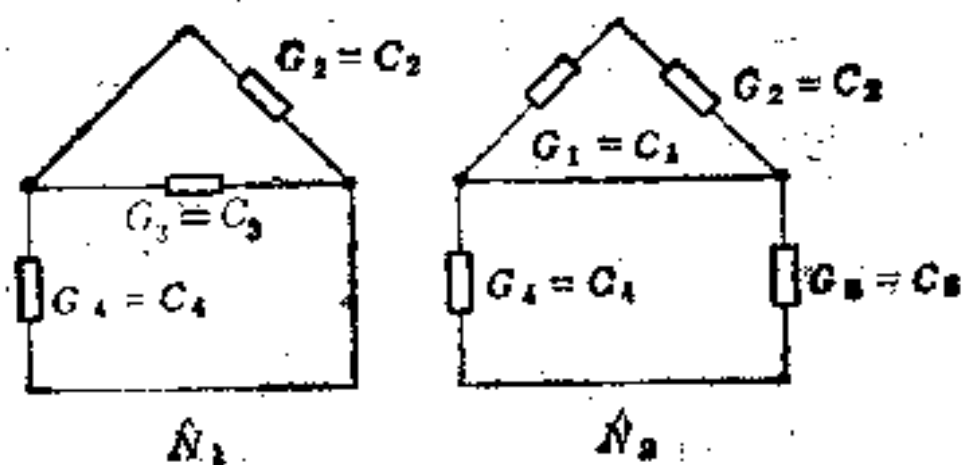


图 5-29

$V_i^{(1)}$, 而在 $N^{(2)}$ 中为 $V_i^{(2)}$, $V_i^{(2)}$. 对于折线输入, 在 $t = nT + \tau_1^-$ 时的增量电荷

$$\Delta q_{ij}(nT + \tau_1^-) = C_{ij}[V_i^{(1)}(nT + \tau_1^-) - V_j^{(1)}(nT + \tau_1^-)] - C_{ij}[V_i^{(2)}(nT^-) - V_j^{(2)}(nT^-)] \quad (5-61)$$

设 $q_i^{(1)}(nT + \tau_1^-)$ 为流入 $N^{(1)}$ 的节点 $i^{(1)}$ 或从 $i^{(1)}$ 流出的全部电荷, 则

$$q_i^{(1)}(nT + \tau_1^-) = \sum_k \Delta q_{ij}(nT + \tau_1^-) \quad (5-62)$$

式中 k 是在 $t = nT + \tau_1^-$ 时连接到节点 $i^{(1)}$ 的电容数目. 将式 (5-61) 代入式 (5-62), 得出

$$q_i^{(1)}(nT + \tau_1^-) = \sum_k C_{ik}[V_i^{(1)}(nT + \tau_1^-) - V_k^{(1)}(nT + \tau_1^-)] - \sum_l C_{il}[V_i^{(2)}(nT^-) - V_l^{(2)}(nT^-)] \quad (5-63)$$

式(5-63)经整理后可得

$$V_i^{(1)}(nT + \tau_1^-) = \frac{1}{C_{ii}^{(1)}} q_i^{(1)}(nT + \tau_1^-) + \frac{1}{C_{ii}^{(1)}} \sum_i^k C_{ij} V_j^{(1)}(nT + \tau_1^-) \\ + \frac{1}{C_{ii}^{(1)}} \sum_i^k C_{ij} [V_j^{(2)}(nT^-) - V_j^{(1)}(nT^-)] \quad (5-64)$$

式中 $C_{ii}^{(1)} = \sum_i^k C_{ij}$ 为节点 $i^{(1)}$ 的自电容。

类似地,对 $N^{(1)}$ 中的节点 $j^{(1)}$, 有

$$V_j^{(1)}(nT + \tau_1^-) = \frac{1}{C_{jj}^{(1)}} q_j^{(1)}(nT + \tau_1^-) + \frac{1}{C_{jj}^{(1)}} \sum_i^m C_{ij} V_i^{(1)}(nT + \tau_1^-) \\ + \frac{1}{C_{jj}^{(1)}} \sum_i^m C_{ij} [V_i^{(2)}(nT^-) - V_i^{(1)}(nT^-)] \quad (5-65)$$

式中 m 是在 $t = nT + \tau_1^-$ 时连接到节点 $j^{(1)}$ 的电容数目。

$C_{jj}^{(1)} = \sum_i^m C_{ij}$ 为节点 $j^{(1)}$ 的自电容。

将式(5-64)和(5-65)进行Z变换后,可得

$$V_i^{(1)}(Z) = \frac{1}{C_{ii}^{(1)}} Q_i^{(1)}(Z) + \frac{1}{C_{ii}^{(1)}} \underbrace{\sum_i^k C_{ij} V_j^{(1)}(Z)}_A \\ + \frac{1}{C_{ii}^{(1)}} \underbrace{\sum_i^k C_{ij} Z^{-\tau_1/T} [V_j^{(2)}(Z) - V_j^{(1)}(Z)]}_B \quad (5-66)$$

及

$$V_j^{(1)}(Z) = \frac{1}{C_{jj}^{(1)}} Q_j^{(1)}(Z) + \frac{1}{C_{jj}^{(1)}} \underbrace{\sum_i^m C_{ij} V_i^{(1)}(Z)}_A \\ + \frac{1}{C_{jj}^{(1)}} \underbrace{\sum_i^m C_{ij} Z^{-\tau_1/T} [V_i^{(2)}(Z) - V_i^{(1)}(Z)]}_B \quad (5-67)$$

同样,可得

$$V_i^{(2)}(Z) = \underbrace{\frac{1}{C_{ii}^{(2)}} Q_i^{(2)}(Z) + \frac{1}{C_{ii}^{(2)}} \sum_i^k C_{ij} V_j^{(2)}(Z)}_A + \underbrace{\frac{1}{C_{ii}^{(2)}} \sum_i^k C_{ij} Z^{-1} V_j^{(1)}(Z)}_B \quad (5-68)$$

及

$$V_i^{(2)}(Z) = \underbrace{\frac{1}{C_{ii}^{(2)}} Q_i^{(2)}(Z) + \frac{1}{C_{ii}^{(2)}} \sum_i^m C_{ij} V_j^{(2)}(Z)}_A + \underbrace{\frac{1}{C_{ii}^{(2)}} \sum_i^m C_{ij} Z^{-1} V_j^{(1)}(Z)}_B \quad (5-69)$$

显然,式(5-66)到式(5-69)是因果关系的形式。我们可用其作出对应的信号流图。由上面四个方程可看出,每个方程都由两部分组成(A和B)。仔细分析可知,A具有电阻网络的节点电压方程的形式。该网络的激励源是电荷源。每个电导在数值上等于对应的电容。B则表示了电容的存储性质。暂不考虑存储性质,于是对应于式(5-66)到式(5-69)的每个部分A的信号流图,可完全类似于节点电压信号流图那样画出。例如,对于图5-29所示的子网络 $N^{(1)}$ 和 $N^{(2)}$,不考虑它们的存储性质,可得到图5-30

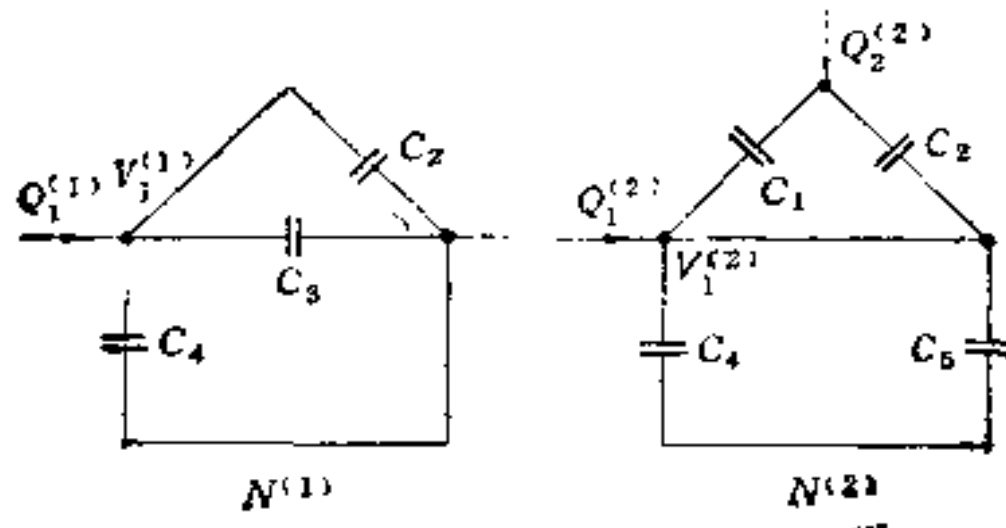


图 5-30

所示的对应电阻子网络 $\hat{N}^{(1)}$ 和 $\hat{N}^{(2)}$ 。

由图 5-30，不难作出 \hat{N}_1 和 \hat{N}_2 的对应节点电压信号流图 $G^{(1)}$ 和 $G^{(2)}$ ，如图 5-31。

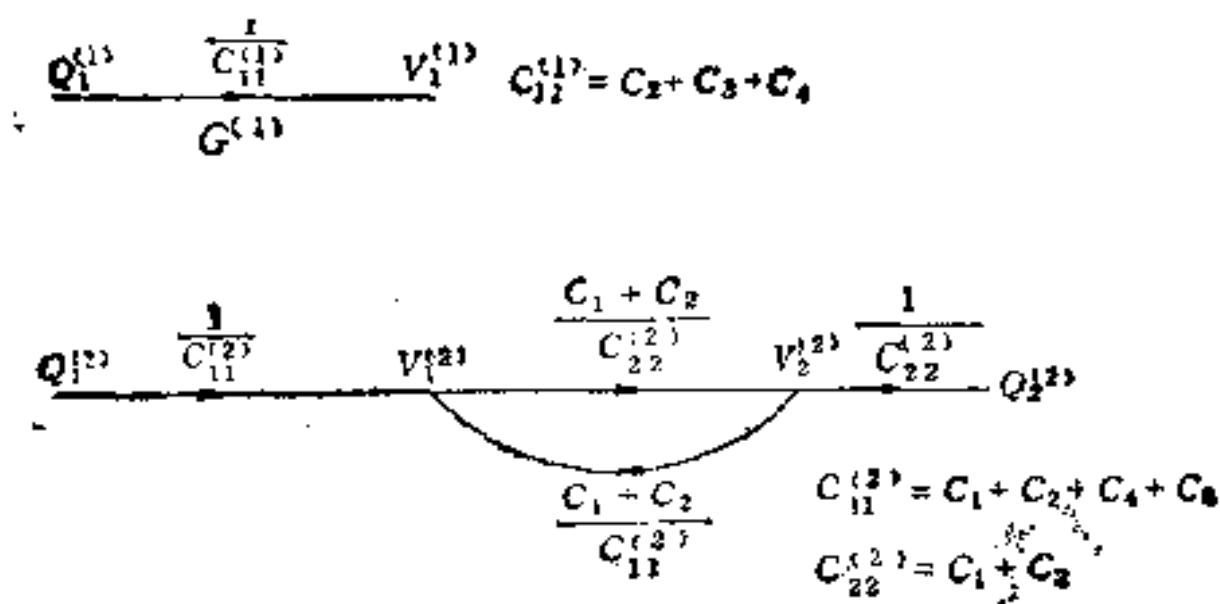


图 5-31

考虑电容的存储性质，即上述四个方程中的 B ，即可将 $\hat{N}^{(1)}$ 和 $\hat{N}^{(2)}$ 所对应的信号流图 $G^{(1)}$ 和 $G^{(2)}$ 连通起来。由 B 的表示式可清楚看出，有四条支路从 $G^{(2)}$ 连到 $G^{(1)}$ ，从 $G^{(1)}$ 到 $G^{(2)}$ 也有四条支路，如图 5-32 所示。

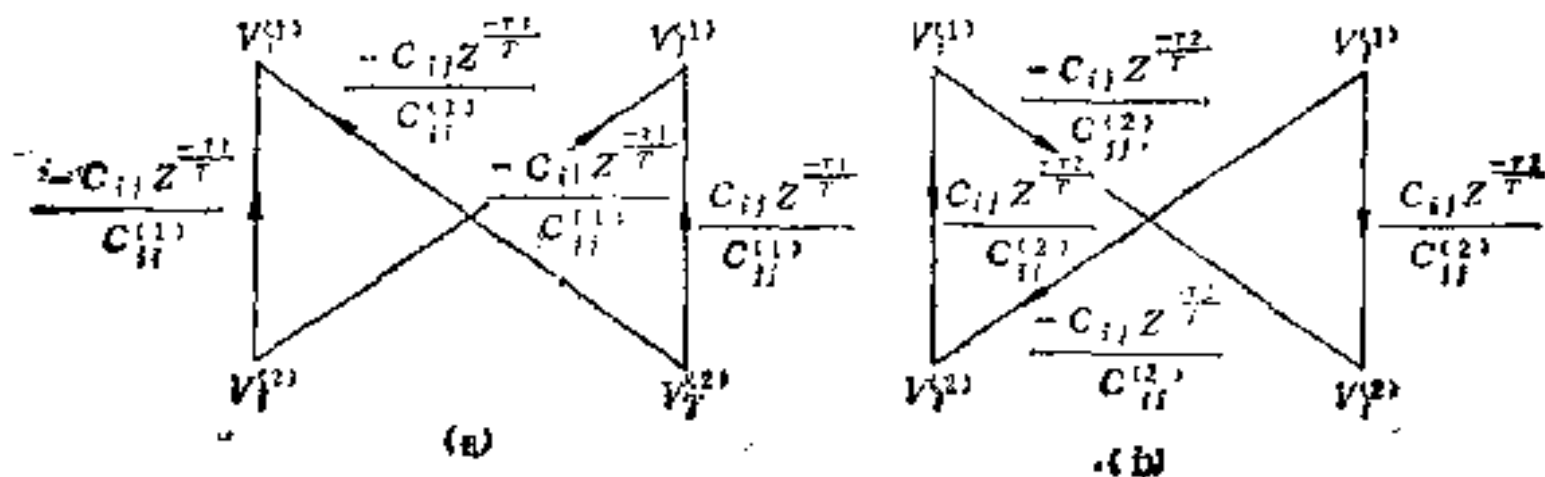


图 5-32

将图 5-32 与 $G^{(1)}$ 和 $G^{(2)}$ 叠加起来，就是整个开关网络的信号流图。

于是，得出了建立开关电容网络的信号流图的步骤如下：

第 1 步。由给定的两相开关电容网络 N ，依次将开关 $S^{(1)}$ 和 $S^{(2)}$ 闭合，可得出两个电容子网络 $N^{(1)}$ 和 $N^{(2)}$ ，取它们的节点电压

作为信号流图的变量。

第2步，分别画出 $N^{(1)}$ 和 $N^{(2)}$ 所对应的信号流图 $G^{(1)}$ 和 $G^{(2)}$ (不考虑存储性质)。

第3步，对于任一同时存在于 $N^{(1)}$ 和 $N^{(2)}$ 中的电容 C_{ij} ，从 $G^{(2)}$ 画四条支路至 $G^{(1)}$ (图 5-32(a))，从 $G^{(1)}$ 画四条支路至 $G^{(2)}$ (5-32(b))。

例如，对图 5-29 所示的网络 $N^{(1)}$ 和 $N^{(2)}$ ，只有电容 C_2 和 C_4 是它们所共有的。对 C_2 来说，在 $N^{(1)}$ 中它接于 $V_1^{(1)}$ 和参考点间，在 $N^{(2)}$ 中它接于 $V_2^{(2)}$ 和 $V_1^{(2)}$ 间，故从 $V_1^{(1)}$ 到 $V_1^{(2)}$ 和 $V_2^{(2)}$ 的支路传输分别为 $\frac{-C_2 Z^{-r_2/T}}{C_{11}^{(2)}}$ 和 $\frac{C_2 Z^{-r_2/T}}{C_{12}^{(2)}}$ ；从 $V_1^{(2)}$ 和 $V_2^{(2)}$ 到 $V_1^{(1)}$ 的支路传输分别为 $\frac{-C_2 Z^{-r_1/T}}{C_{11}^{(1)}}$ 和 $\frac{C_2 Z^{-r_1/T}}{C_{12}^{(1)}}$ 。对 C_4 来说，在 $N^{(1)}$ 中它接于 $V_1^{(1)}$ 和参考点间，在 $N^{(2)}$ 中它接于 $V_1^{(2)}$ 和参考点间，故从 $V_1^{(1)}$ 到 $V_1^{(2)}$ 和从 $V_1^{(2)}$ 到 $V_1^{(1)}$ 的支路传输分别为 $\frac{C_4 Z^{-r_2/T}}{C_{11}^{(2)}}$ 和 $\frac{C_4 Z^{-r_1/T}}{C_{11}^{(1)}}$ 。将上述四条支路叠加在图 5-31 上，得到图 5-33 的开关电容网络的完整信号流图。

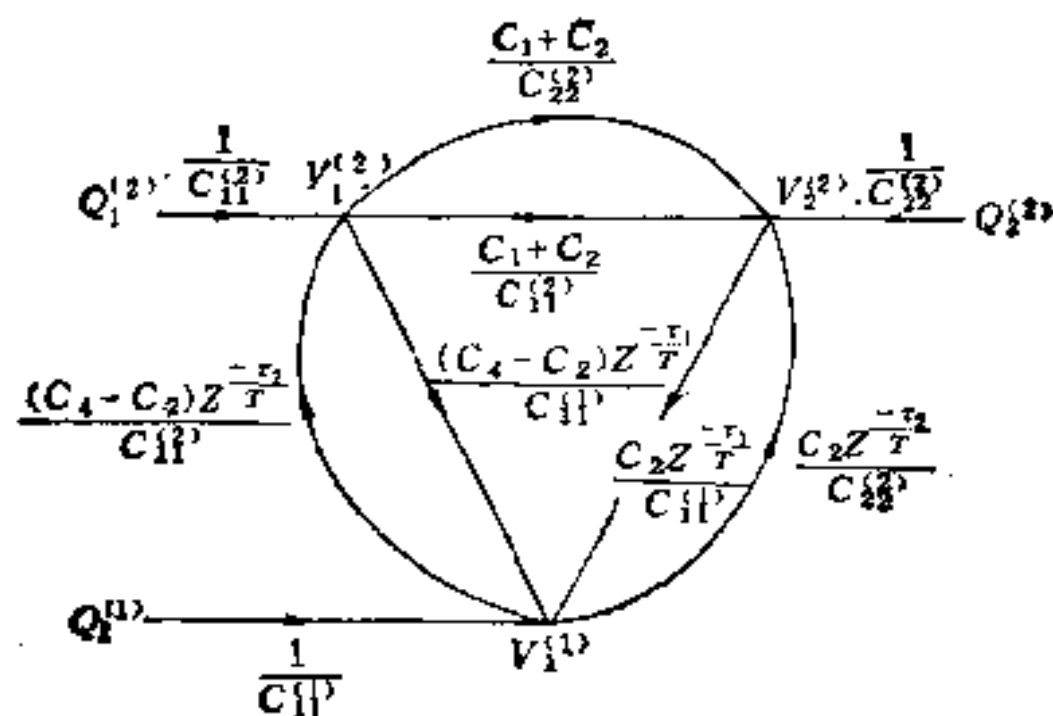


图 5-33

如果独立源是理想电压源，例如，设 $Q_1^{(2)} = Q_2^{(2)} = Q_1^{(1)} = 0$ ，而 $V_1^{(2)}$ 是理想的电压源，则自电容 $C_{11}^{(2)}$ 可考虑为无限 (因为理想电压源的内阻为零)，故所有进入 $V_1^{(2)}$ 的支路可去掉。于是，图 5-33

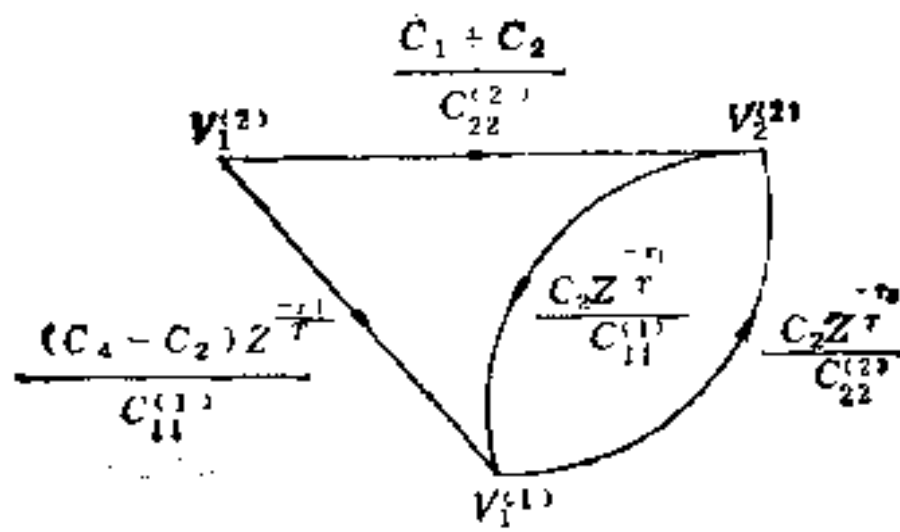


图 5-34

简化为图 5-34。

下面讨论有源开关电容网络（有理想运算放大器的开关电容网络）的信号流图。运算放大器是一个压控的电压源。控制方程 $V_o = A(V_{i+} - V_{i-})$ ，这里 V_o 是输出电压， V_{i+} 、 V_{i-} 是微分输入

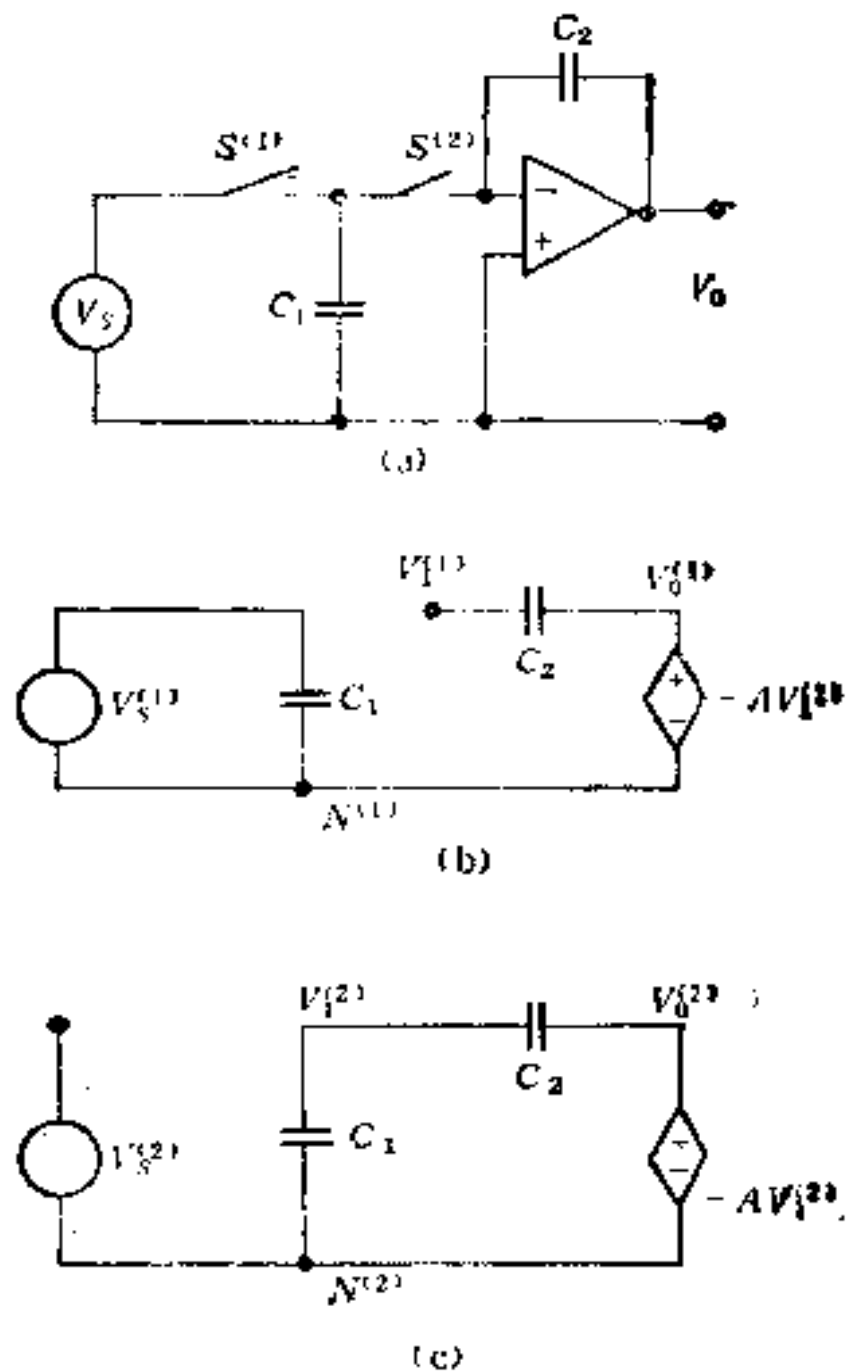


图 5-35

电压， A 是控制系数(理想情况下 A 为无限)。首先，我们不考虑 A ，将 V_0 看作为独立源，按上述三个步骤作出信号流图后，再将控制支路 A 加入。

考虑图 5-35(a) 所示的开关电容积分器。其子网络 $N^{(1)}$ 和 $N^{(2)}$ 如图 5-35(b), (c)。

由图 5-35(b), (c) 中的 $N^{(1)}$ 和 $N^{(2)}$ ，利用上述步骤中的第 2 步和第 3 步，分别得出 $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ ，以及考虑存储性质的 $G^{(1)}$ 和 $G^{(2)}$ 间的支路，得出图 5-36(a) 的信号流图。再考虑控制作用 $V_0^{(1)} = -AV_0^{(2)}$ 和 $V_0^{(2)} = -AV_0^{(1)}$ ，即得出完整的信号流图，如图 5-36(b) 所示。

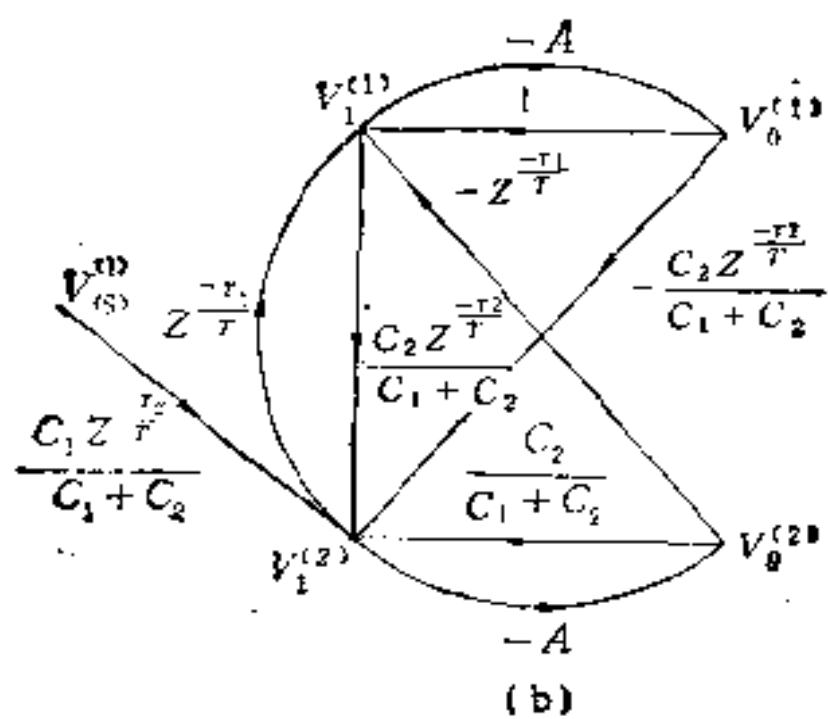
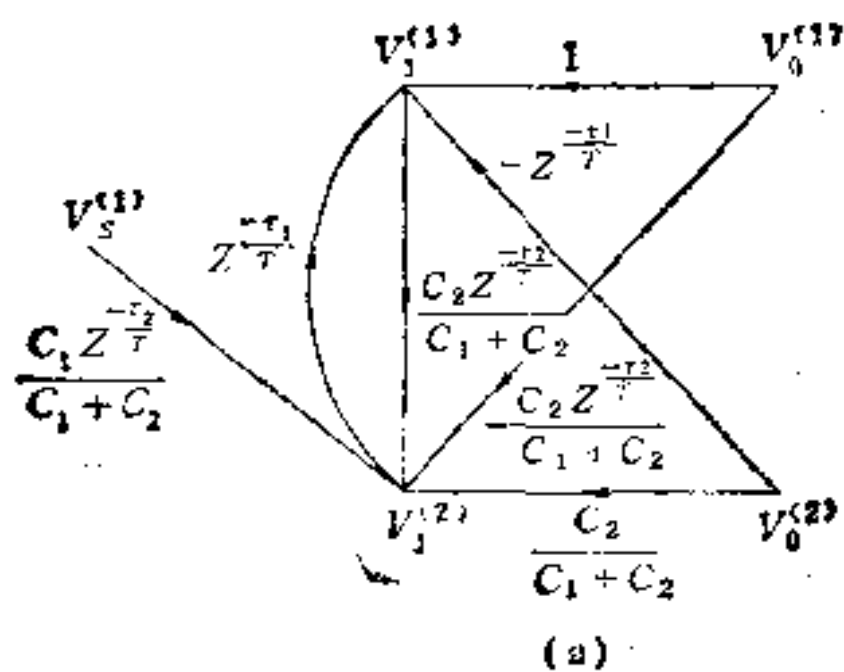


图 5-36

由图 5-36(b), 利用 Mason 增益公式, 不难得出开关电容网络的传输函数:

$$\begin{aligned}
 H_{11}(Z) &= \frac{V_0^{(1)}}{V_s^{(1)}} = \frac{-1}{\Delta} \left(\frac{C_1 Z^{-1}}{C_1 + C_2} A + \frac{C_1 Z^{-1}}{C_1 + C_2} A^2 \right) \\
 H_{21}(Z) &= \frac{V_0^{(2)}}{V_s^{(1)}} = \frac{-1}{\Delta} \left(\frac{C_1 Z^{-r_2/T}}{C_1 + C_2} A + \frac{C_1 Z^{-r_2/T}}{C_1 + C_2} A^2 \right) \quad (5-70)
 \end{aligned}$$

式中图行列式

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 1 - \frac{C_2 Z^{-1}}{C_1 + C_2} + \left(1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2} - \frac{2C_2 Z^{-1}}{C_1 + C_2} \right) A \\
 &\quad + (1 - Z^{-1}) \frac{C_2}{C_1 + C_2} A^2 \quad (5-71)
 \end{aligned}$$

对于理想的运算放大器, $A = \infty$, 于是式 (5-70) 的极限情况为

$$\begin{aligned}
 H_{11}(Z) &= \frac{-C_1}{C_2(Z-1)} \\
 H_{21}(Z) &= \frac{-C_1 Z^{r_2/T}}{C_2(Z-1)} \quad (5-72) \\
 H_{12}(Z) &= H_{22}(Z) = 0
 \end{aligned}$$

实际上, 对于带有理想运算放大器的开关电容网络, 可以得出更简化的信号流图。对于有运算放大器的有源网络, 运算放大器的输出电流(荷)是未知的, 因此, $V_0^{(1)}$ 和 $V_0^{(2)}$ 总是作为因变数出现的(如图 5-36(a))。为了显式地表示 $V_0^{(1)}$ 和 $V_0^{(2)}$, 必须将 $V_0^{(1)} \rightarrow V_1^{(1)}$ 和 $V_0^{(2)} \rightarrow V_1^{(2)}$ 的支路反向, 得出了图 5-37(a)。

对于理想的运算放大器, $V_{i+} = V_{i-} = V_1$ 。因为其中任一输入端为参考点, 故 $V_1 = 0$ 。因此, 可去掉 $V_1^{(1)}$ 和 $V_1^{(2)}$ 的出支路。图 5-37(a) 简化为图 5-37(b)。由 5-37(b), 可写出 $H_{11}(Z)$ 和 $H_{21}(Z)$, 其结果与式 (5-71) 相同。显然, 图 5-37(b) 比图 5-36(b) 要简单得多。

因此, 在用上述三个步骤建立的有源开关电容网络的信号流图基础上, 可由下列两个步骤进一步加以简化。

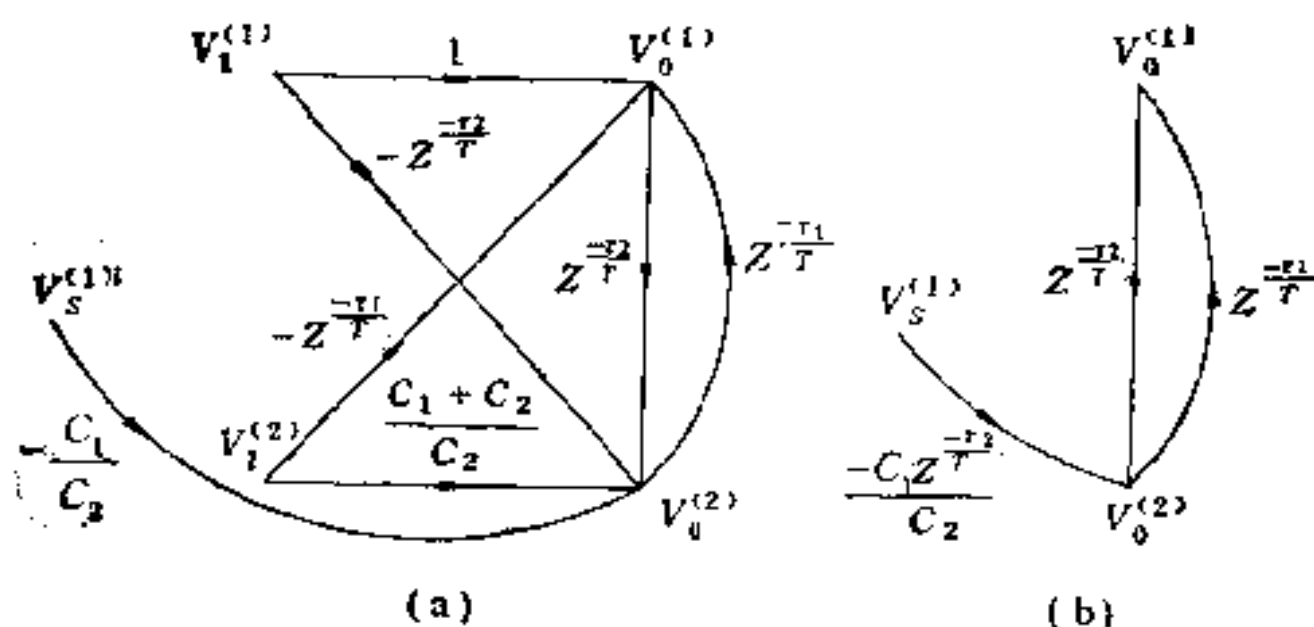


图 5-37

第 1 步. 将信号流图, $V_0 \rightarrow V_{i+}$ 或 $V_0 \rightarrow V_{i-}$ 的支路反向.

第 2 步. 如果 V_{i+} 或 V_{i-} 中的任一点为参考点, 则与 V_{i+} 或 V_{i-} 结合的节点 V_i 可从信号流图中去掉.

下面, 推广到多相开关电容网络的分析.

2. 多相开关电容网络分析

以上分析两相开关电容网络的方法, 不难推广到多相的情况. 设开关周期 T 分解为 M 个时间段, 如图 5-38 所示. 在时间段 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ 分别将开关 $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m)}$ 闭合, 可得到 m 个子网络 $N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(m)}$. 然后, 由前建立开关电容网络的信号流图

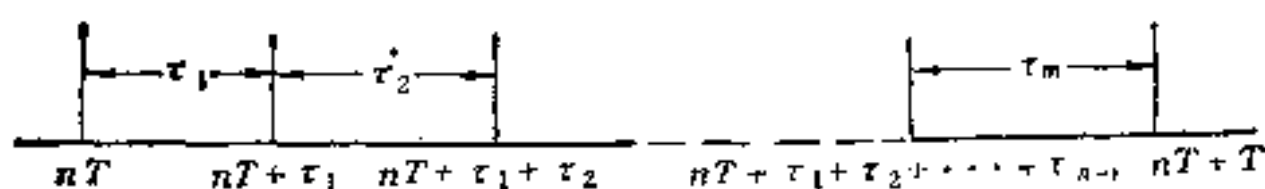
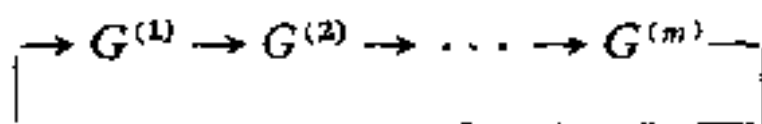


图 5-38

步骤的第 2 步可作出它们相应的信号流图 $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(m)}$. 再由第 3 步将这些信号流图按下列顺序连系起来, 即构成完整的多相开关电容网络信号流图:



下面以一个四相有源开关电容网络为例说明多相开关电容网

络的分析过程。

例 5-8. 图 5-39 所示为四相开关电容网络 (带有运算放大器)。需要画出其完整的信号流图, 并求出有关的传输函数。设四相开关网络是均匀的, 即 $\tau_k = T/4$, $Z^{-\tau_k/T} = Z^{-1/4}$ 。

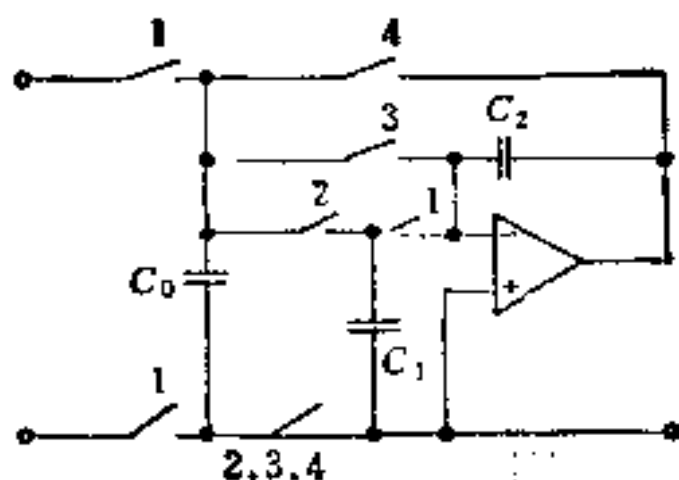


图 5-39

首先, 分别作出对应于时间段 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ 的子网络 $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}, N^{(4)}$ (图 5-40)。

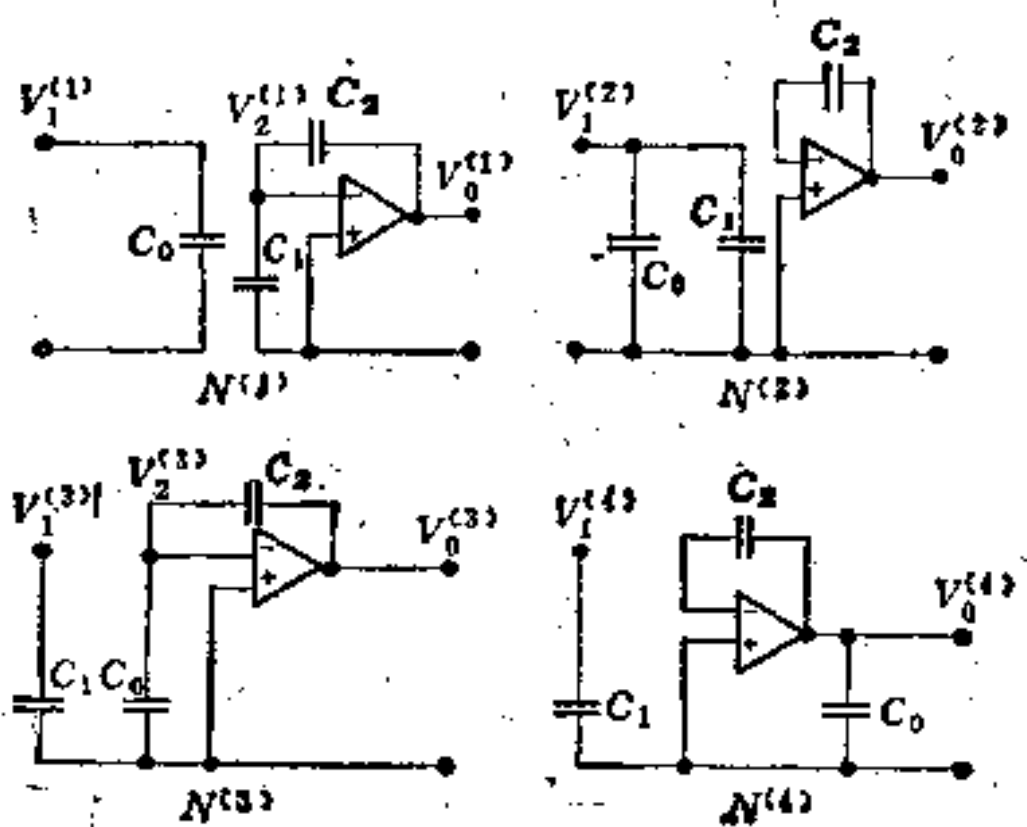


图 5-40

由图 5-40, 并考虑到 $G^{(1)} \rightarrow G^{(2)} \rightarrow G^{(3)} \rightarrow G^{(4)} \rightarrow G^{(1)}$ 间的联系, 可得出下列方程组:

$$V_1^{(1)} = \frac{1}{C_1 + C_2} (V_0^{(1)} C_2 - V_0^{(4)} C_2 Z^{-1/4} + V_1^{(4)} C_1 Z^{-1/4})$$

$$\begin{aligned}
& + V_2^{(4)} C_2 Z^{-1/4} \\
V_2^{(2)} &= V_0^{(2)} - V_0^{(1)} Z^{-1/4} + V_2^{(1)} Z^{-1/4} \\
V_2^{(1)} &= \frac{1}{C_0 + C_1} (C_0 Z^{-1/4} V_1^{(1)} + C_1 Z^{-1/4} V_2^{(1)}) \\
V_2^{(3)} &= \frac{1}{C_0 + C_2} (C_2 V_0^{(3)} + C_0 Z^{-1/4} \cdot V_1^{(2)} - C_2 Z^{-1/4} V_0^{(2)} \\
& \quad + C_2 Z^{-1/4} V_2^{(2)}) \tag{5-73} \\
V_1^{(3)} &= Z^{-1/4} V_1^{(2)} \\
V_2^{(4)} &= V_0^{(4)} + Z^{-1/4} V_2^{(3)} - Z^{-1/4} V_0^{(3)} \\
V_1^{(4)} &= Z^{-1/4} V_1^{(3)}
\end{aligned}$$

由式 (5-73), 得出图 5-41。

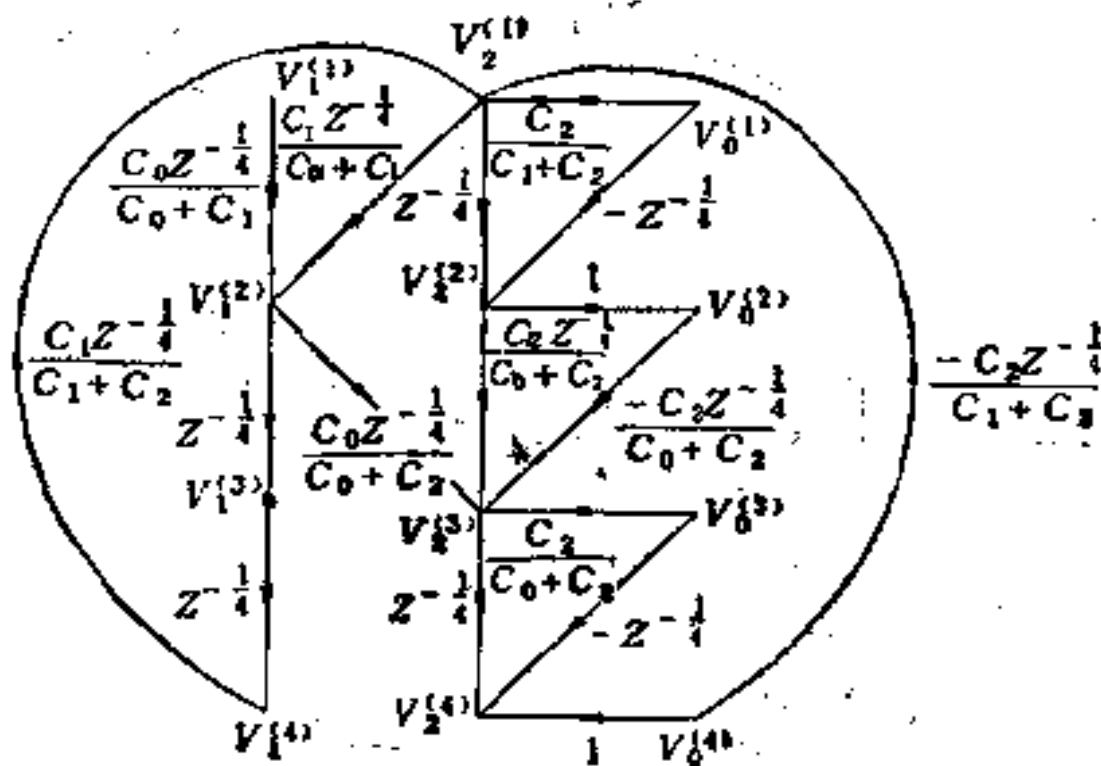


图 5-41

将图 5-41 中 $V_0^{(1)} \rightarrow V_2^{(1)}$, $V_0^{(2)} \rightarrow V_2^{(2)}$, $V_0^{(3)} \rightarrow V_2^{(3)}$, $V_0^{(4)} \rightarrow V_2^{(4)}$ 的支路反向, 并由理想运算放大器的特性 ($V_2^{(1)} = V_2^{(2)} = V_2^{(3)} = V_2^{(4)} = 0$), 去掉 $V_2^{(1)}$, $V_2^{(2)}$, $V_2^{(3)}$ 和 $V_2^{(4)}$ 的出支路, 最后得出图 5-42。

由图 5-42, 可求得传输函数

$$H(Z) = V_0^{(4)} / V_1^{(1)} = \frac{1}{1 - Z^{-1}} \cdot \frac{C_1 Z^{-1/4}}{C_0 + C_1} \cdot \left(-\frac{C_0}{C_2} Z^{-2/4} - \frac{C_1}{C_2} Z^{-3/4} \right)$$

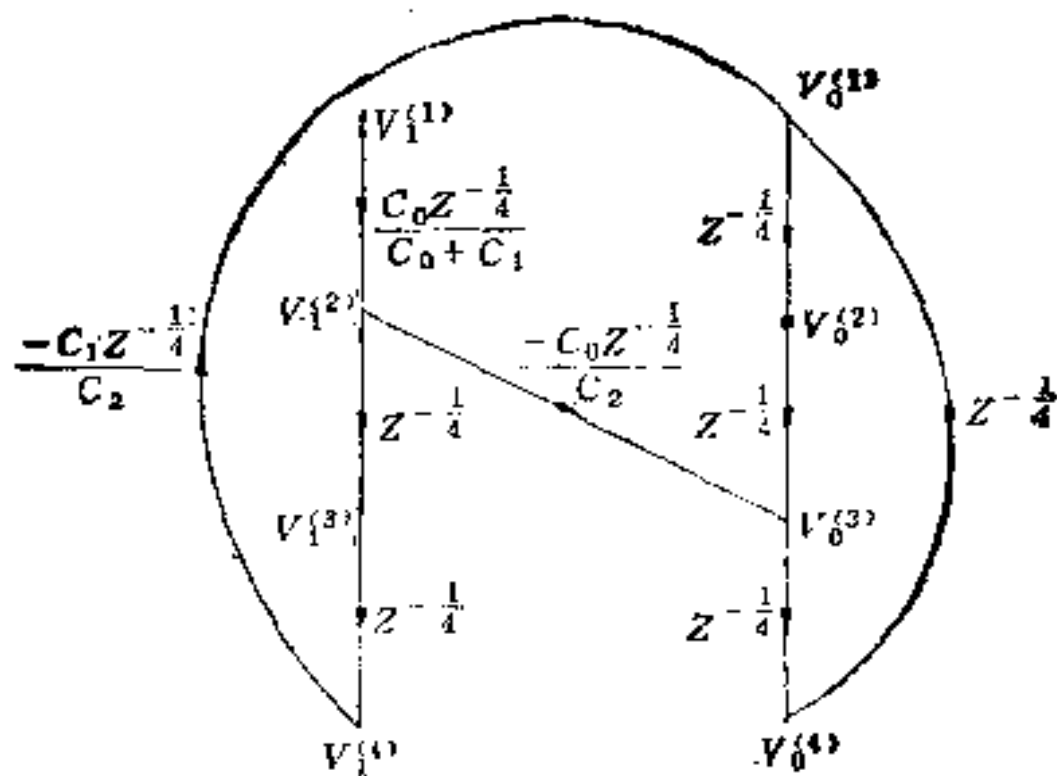


图 5-42

$$= -\frac{C_0}{C_2(C_0 + C_1)} \frac{C_0 Z^{-3/4} + C_1 Z^{-7/4}}{1 - Z^{-1}}$$

5-6-2 开关电容网络综合

有关开关电容网络综合问题的研究已有不少工作。现在，将讨论一种综合 Z 域 n 阶电压传输函数的方法。和第三章中对连续系统的给定传输函数有源实现的方法类似，首先将给定的 Z 域传输函数用信号流图表示出来，然后用开关电容网络实现信号流图中的各个支路。最后，将这些开关电容网络按对应的方式（与信号流图相对应）连接起来即为给定的 Z 域传输函数的实现。

这里，应用两相均匀开关，即 $\tau_1 = \tau_2 = \frac{T}{2} = \tau$ 。为说明方便，将 $2k\tau$ 时间内闭合的相称为偶相， $(2k+1)\tau$ 时间内闭合的相称为奇相，分别以 σ 和 θ 表示。

设给定的 Z 域 n 阶电压传输函数

$$H(Z) = \frac{V_{out}^c}{V_{in}^c} = \frac{B_n Z^n + B_{n-1} Z^{n-1} + \dots + B_1 Z + B_0}{Z^n + A_{n-1} Z^{n-1} + \dots + A_1 Z + A_0} \quad (5-74)$$

输出端用 0 表示，输入端用 1 表示，则图 5-43 所示的信号流图中从 1 到 0 的传输正是 $H(Z)$ 。应用 Mason 增益公式求 1 到

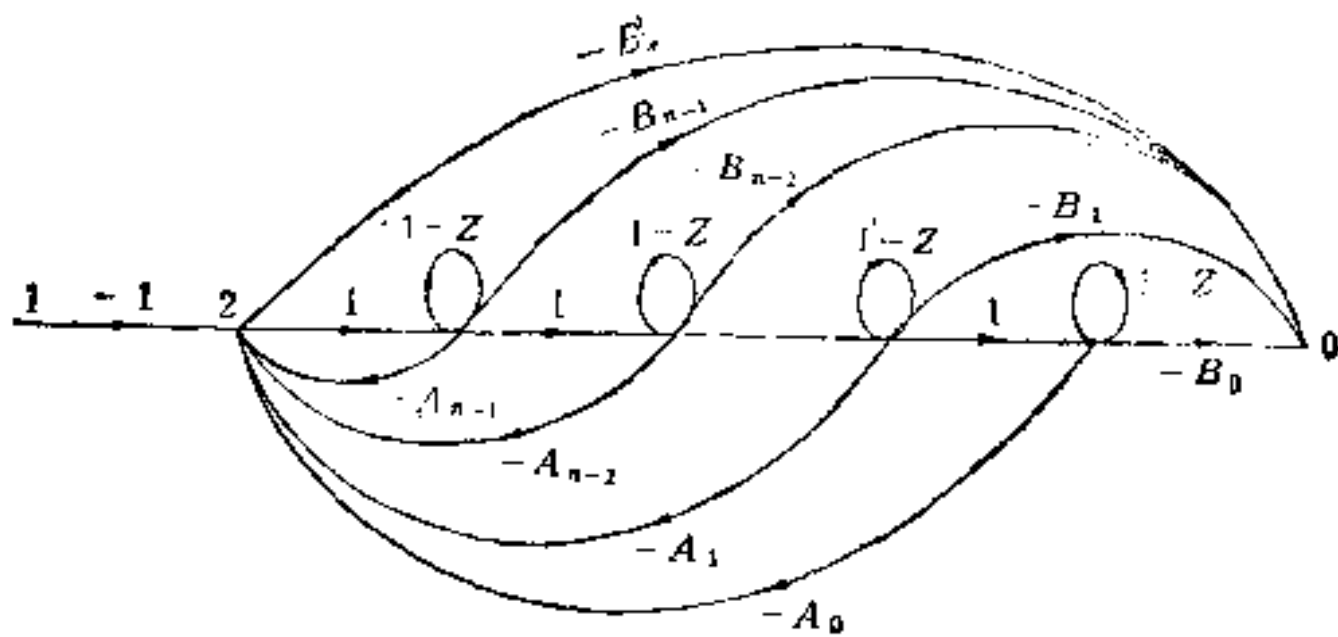


图 5-43

0 的传输,并化简后即可得出 $H(Z)$.

下面的问题是用开关电容网络实现图 5-43. 从图 5-43 可看出,在点 2 和点 0 可用加法器实现有关支路. 关键是图 5-44 的实现. 图 5-43 中共包括 n 个这样的结构. 如果图 5-44 能实现,则整个传输函数的实现就非常方便了.

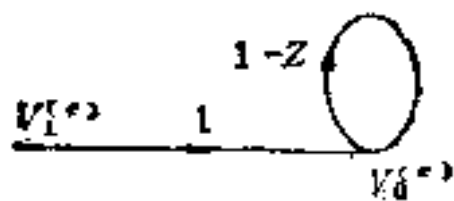


图 5-44

现分析图 5-45 的电路. 按 5-6-1 节的讨论,可先作出偶相和

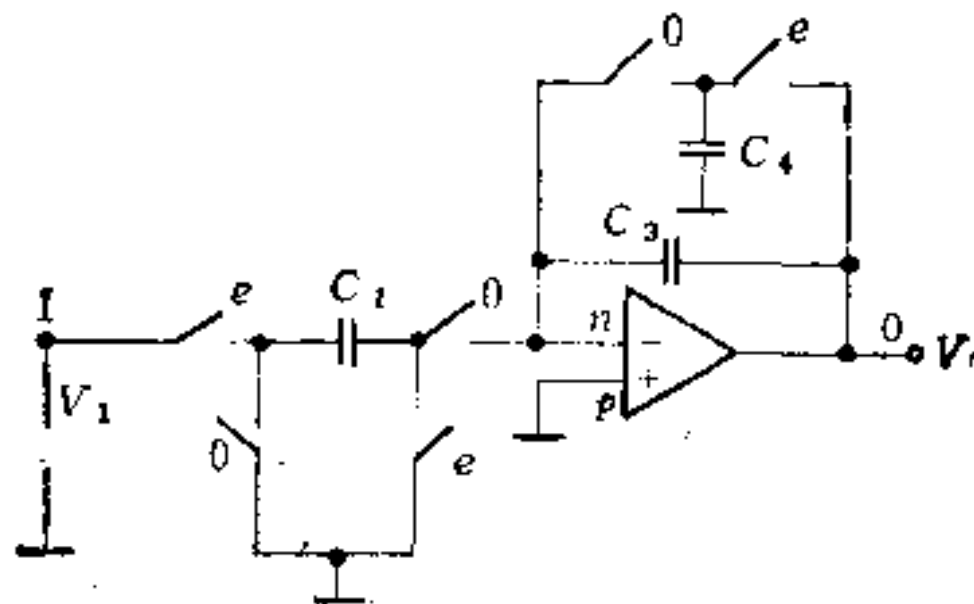


图 5-45

奇相的子网络 $N^{(e)}$ 和 $N^{(o)}$ ，如图 5-46(a)，(b)。由图 5-46，可写出下列方程组：

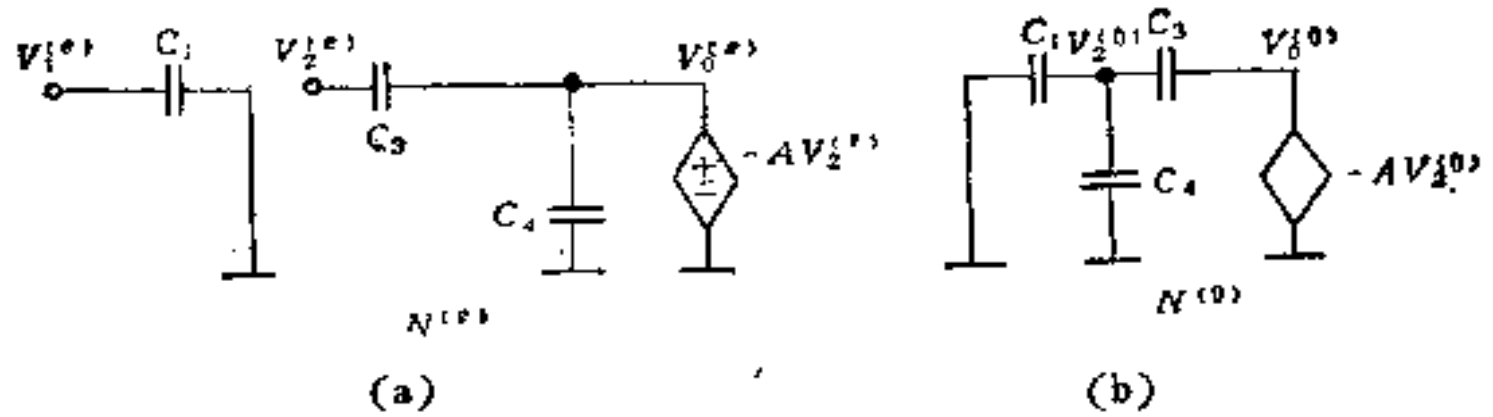


图 5-46

$$\begin{aligned}
 V_2^{(o)} &= \frac{1}{C_1 + C_3 + C_4} [C_3 V_0^{(o)} + Z^{-\frac{1}{2}} C_1 V_1^{(e)} \\
 &\quad + Z^{-\frac{1}{2}} (C_4 - C_3) V_0^{(e)} + Z^{-\frac{1}{2}} C_3 V_2^{(e)}] \\
 V_2^{(e)} &= V_0^{(e)} + Z^{-\frac{1}{2}} V_2^{(o)} - Z^{-\frac{1}{2}} V_0^{(o)} \quad (5-75)
 \end{aligned}$$

由式 (5-75)，可得出下列信号流图(图 5-47)。将图 5-47 中， $V_0^{(e)} \rightarrow V_2^{(e)}$ 及 $V_0^{(o)} \rightarrow V_2^{(o)}$ 的支路反向，并去掉 $V_2^{(e)}$ 和 $V_2^{(o)}$ 的所有出支路，即得出图 5-48。

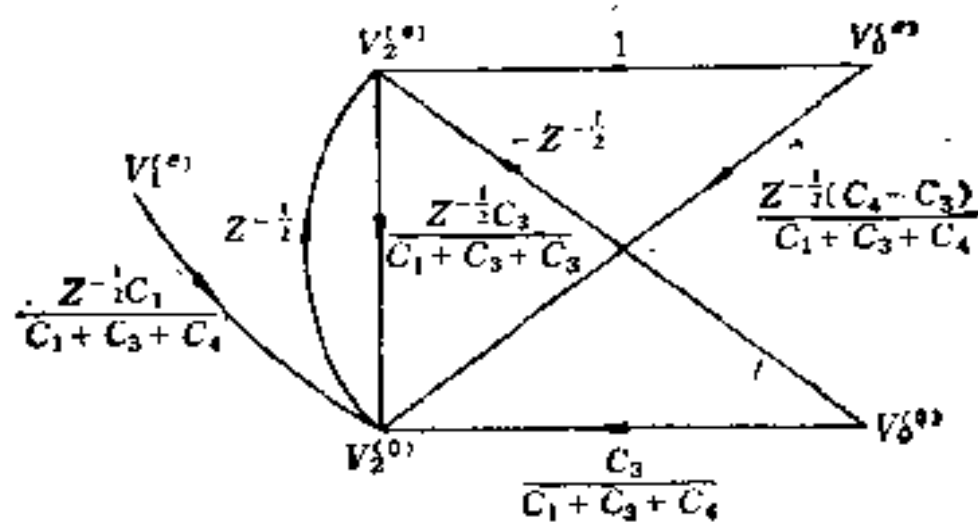


图 5-47

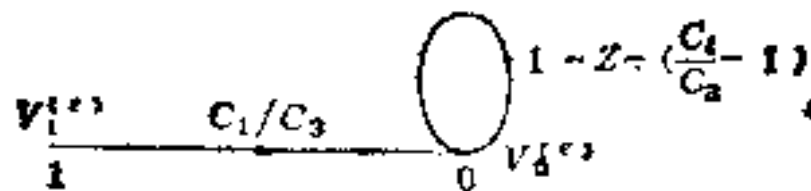


图 5-48

比较图 5-44 和图 5-48 可看出，当 $C_1/C_3 = C_4/C_3 = 1$ 时，图 5-45 的电路就是图 5-44 的实现。

图 5-43 中点 2 和点 0 处的支路相加, 可用电容加法器实现 (图 5-49).

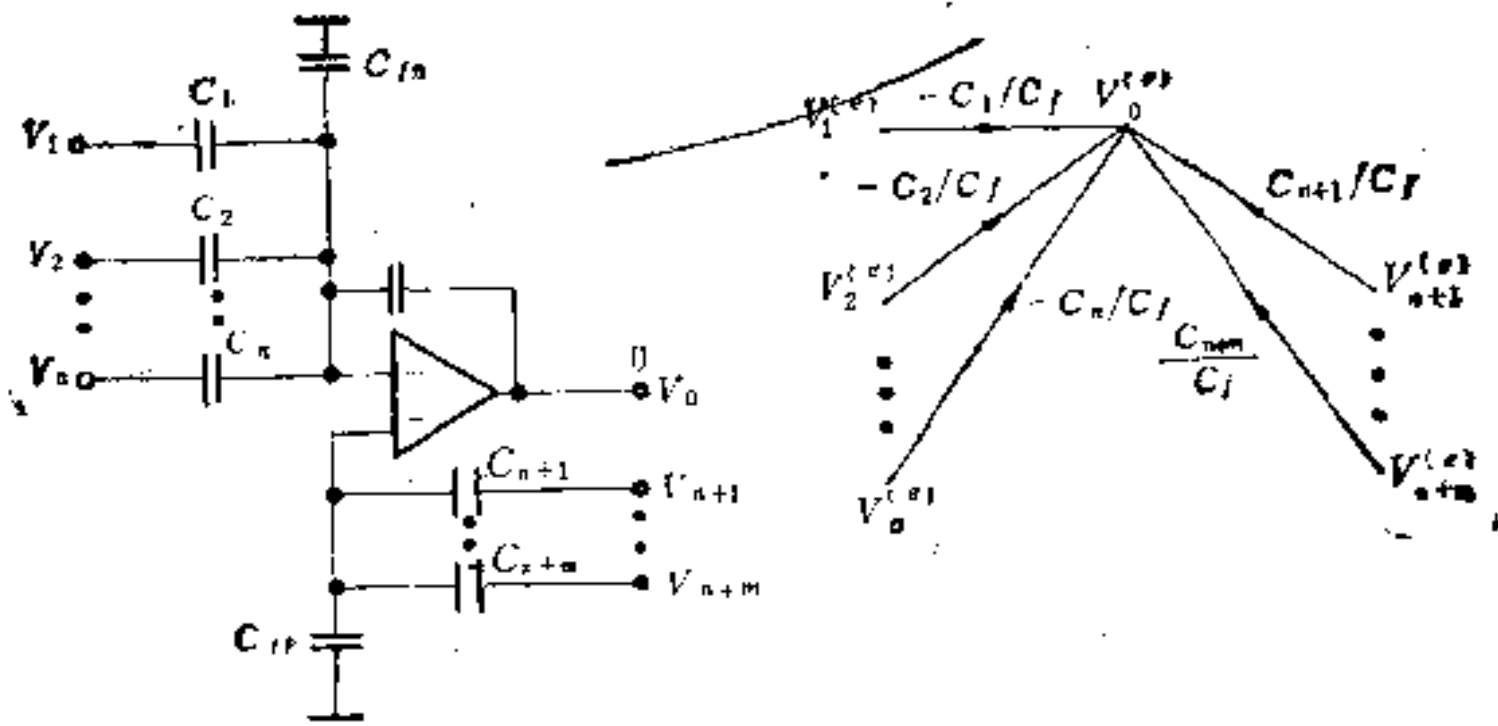


图 5-49

在图 5-49 中, 若

$$\sum_{i=1}^n C_i > \sum_{i=n+1}^m C_i,$$

则

$$C_{fn} = 0, \quad C_{fp} = \sum_{i=1}^n C_i - \sum_{i=n+1}^m C_i \quad (5-76)$$

若

$$\sum_{j=n+1}^m C_j > \sum_{i=1}^n C_i,$$

则

$$C_{fp} = 0, \quad C_{fn} = \sum_{j=n+1}^m C_j - \sum_{i=1}^n C_i \quad (5-77)$$

对于式 (5-74) 的 $H(Z)$ (图 5-43), 设所有系数均为正, 则由图 5-45 和图 5-49 的电路, 可得到实现 $H(Z)$ 的电路 (图 5-50).

图 5-50 中的参数与式 (5-74) 中的系数显然有下列关系:

$$\begin{aligned} C_{a_i}/C_{f1} &= A_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \\ C_{b_i}/C_{f2} &= B_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \\ C_{i3}/C_{i3} &= C_{i4}/C_{i3} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5-78)$$

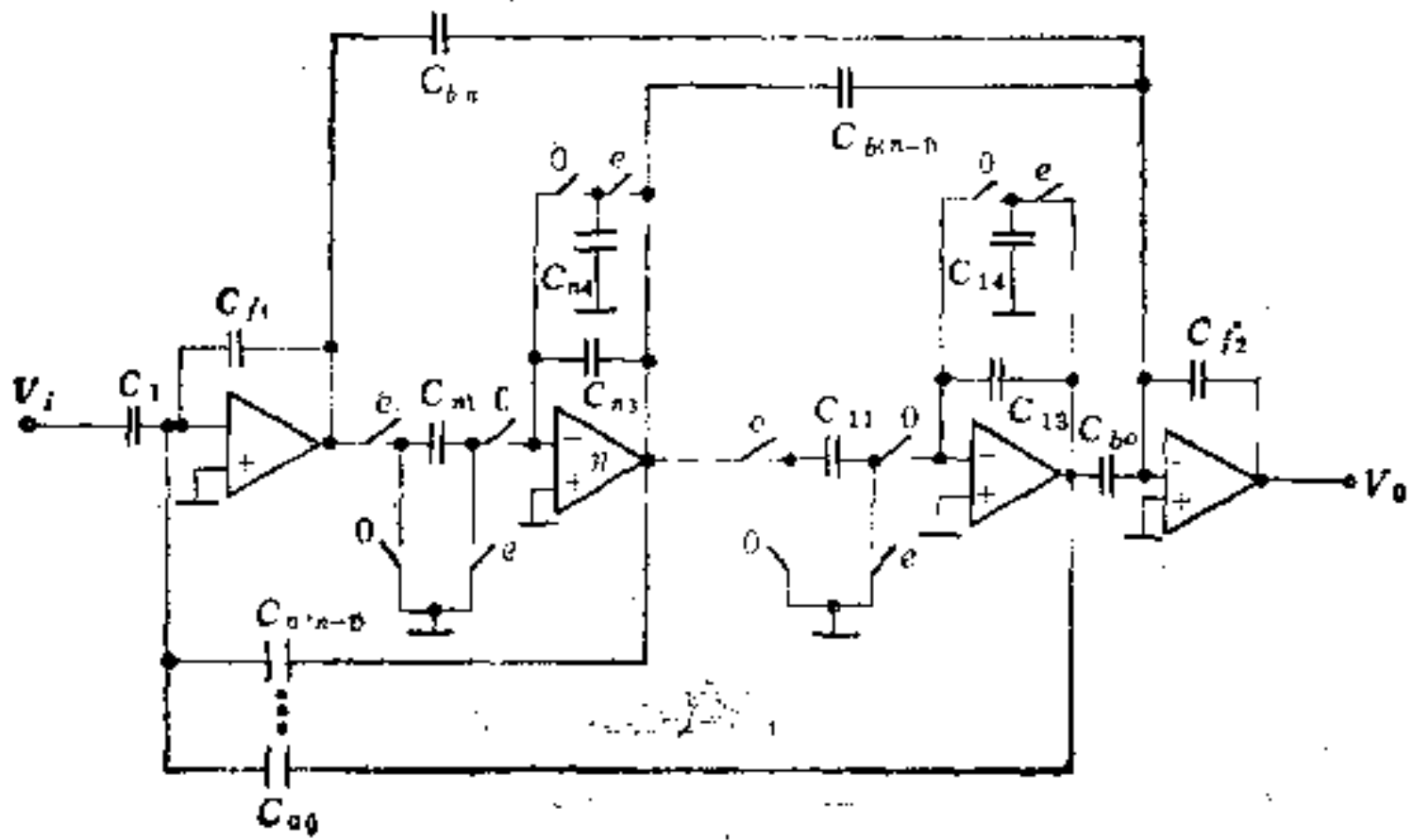


图 5-50

$$C_1/C_{f1} = 1$$

例 5-9. 求下列三阶电压传输函数的有源开关电容网络实现:

$$H(Z) = \frac{0.016(Z^3 + 3Z^2 + 3Z + 1)}{Z^3 - 1.975Z^2 + 1.524Z - 0.454} \quad (5-79)$$

式(5-79)所对应的信号流图如图 5-51 所示。由图 5-51 可得出实现电路如图 5-52 所示。因为在图 5-51 中, 节点 2 的四条入支路内有两条约入支路的传输为正值 1.975 和 0.454, 故需在运算放大器的 p 端输入。由图 5-52 可看出

$\sum_{i=1}^3 C_i = C_1 + C_{n1} + C_{f1} = 1 +$

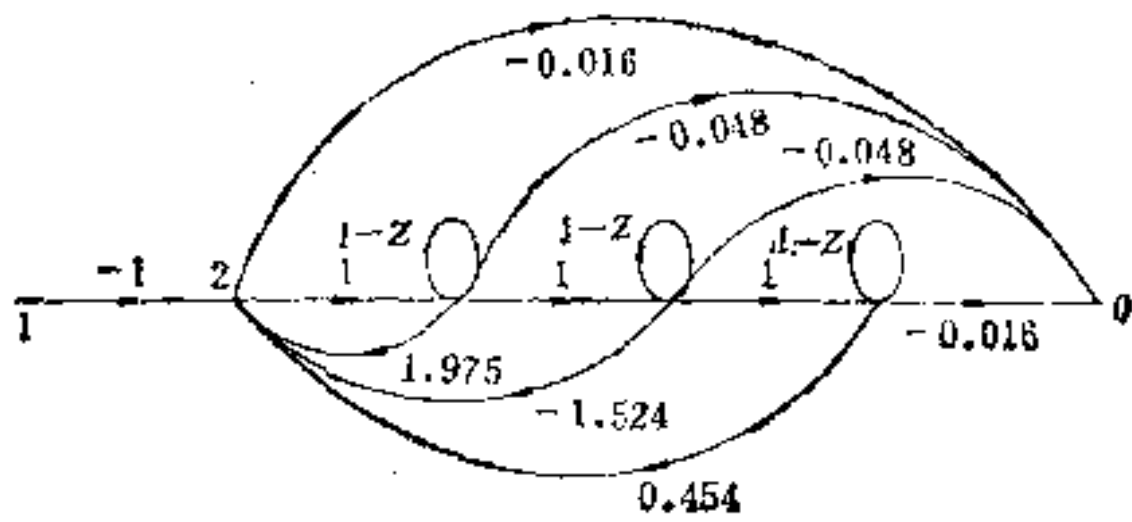


图 5-51

$1.524 + 1 = 3.524$, 而 $\sum_{i=1}^4 C_i = C_{a0} + C_{a2} = 0.454 + 1.975 =$

2.429, $\sum_{i=1}^n C_i > \sum_{i=n+1}^m C_i$, 故 $C_{tn} = 0$, $C_{tp} = \sum_{i=1}^3 C_i - \sum_{i=4}^5 C_i$
 $= 3.524 - 2.429 = 1.095$.

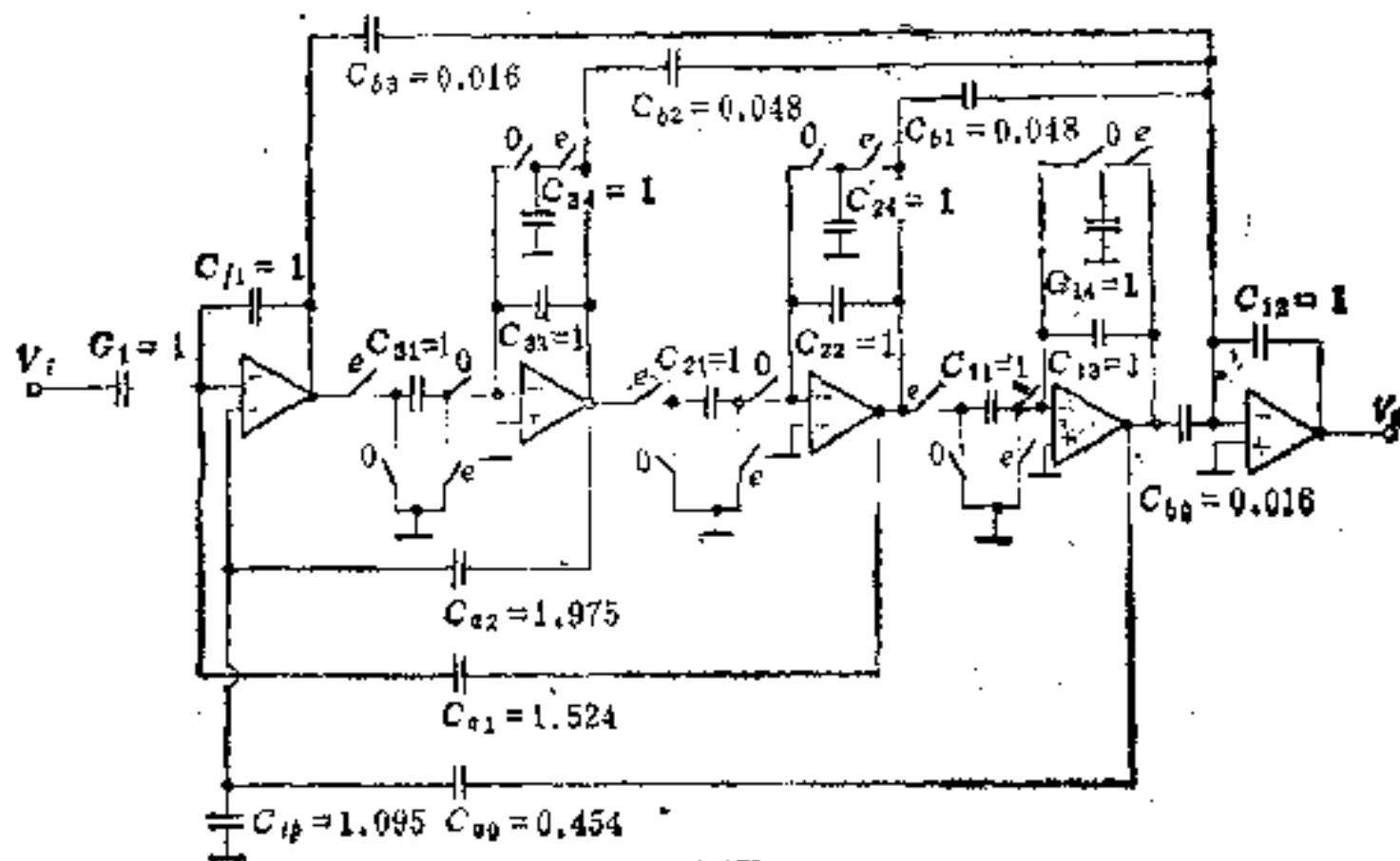


图 5-52

应该指出,对于给定的传输函数,如果采用不同的信号流图表示,则可得到不同的实现电路。实现电路不是唯一的。选取的原则应考虑到元件变化对电路性能的影响(灵敏度)以及节省元件等方面的问题。

参 考 文 献

- [1] Ash, R., Kim, W. H., and Krance, G. M., A General Flow Graph Technique for the Solution of Multiloop Sampled Systems, *J. Basic Engrg., Trans., ASME*, pp. 360—370, June, 1960.
- [2] U. W. Brugger, Moschytz, G. S., and Hökenek, E., SFG Analysis of SC Networks Comprising Integrators, *Proc. 1983 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, pp. 68—71.
- [3] Dias, M., and Evans, F. J., Algorithm for Sampled Data Signal Flow Graphs, *Electronics Letters*, Vol. 17, No. 10, pp. 341—342, 1981.

- [4] Karagoz, C., and Acar, C., Active Switched-Capacitor Network Realization for n th-order Voltage Transfer Functions: A Signal Flow Graph Approach, *Int. J. Circuit Theory and Applications*, Vol. 10, pp. 377—382, 1982.
- [5] Kranc, G. M., Input-Output Analysis of Multirate Feedback Systems, *IRE Trans. on Automation*, Vol. PGAC-3, pp. 21—28, 1957.
- [6] Kim, W. H., and Chien, R. T., *Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks*, Columbia University Press, 1962, Part II.
- [7] Kuo, B. C., *Analysis and Synthesis of Sampled Data Control Systems*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1963.
- [8] Kuo, B. C., *Automatic Control Systems*, Englewood Cliffs., N. J., Prentice-Hall, Ch. 3, 1982, Fourth Edition.
- [9] Kurth, C. F., and Moschytz, G. S., Nodal Analysis of Switched-Capacitor Networks, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. CAS-26, pp. 93—105, 1979.
- [10] Liou, M. L., and Kuo, Y. L., Exact Analysis of Switched-Capacitor Circuits with Arbitrary Inputs, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. CAS-26, pp. 213—223, 1979.
- [11] Salehi, S. V., On the Finding the Transmittance Between Any Two Points in a Composite System, *Int. J. of Control*, Vol. 30, No. 5, pp. 885—894, 1979.
- [12] Salehi, S. V., Signal Flow Graph Reduction of Sampled-Data Systems, *Int. J. of Control*, Vol. 32, pp. 71—94, 1981.
- [13] Sedler, M., and Bekey, G. A., Signal Flow Graphs of Sampled-Data Systems, A New Formulation, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-12, No. 2, pp. 154—161, 1967.
- [14] Vago, I., The Calculation of Transfer Matrices of Linear Systems with Continuous and Sampled-Data Signals by Signal Flow Graphs, *Int. J. Circuit Theory and Applications*, Vol. 11, pp. 355—362, 1983.
- [15] Zhou Xiao-Feng and Shen Zhi-Guang, Signal Flow Graph Analysis of Switched-Capacitor Network, *Int. J. Circuit Theory and Applications*, Vol. 13, pp. 179—189, 1985.

第六章 反馈系统

信号流图在反馈系统的研究中得到了广泛的应用。其特点主要表现为概念清楚，计算方便。本章讨论矩阵信号流图在多环反馈系统中的应用。作为回归差和零回归差概念的推广，本章定义了回归差矩阵和零回归差矩阵，并利用它们推导出直接传输矩阵非奇异时的广义 Bode 公式。当直接传输矩阵不存在或为奇异时，引入互补回归差矩阵，它解决了零回归差矩阵没有定义的困难。为了统一上述三种矩阵，提出了广义回归差矩阵。后者包括了前三种矩阵。当它的参数 k 为 0 ， ∞ 和 -1 时，即分别得到回归差矩阵、零回归差矩阵和互补回归差矩阵。利用广义回归差矩阵求系统函数是相当简便的。对于有源网络不完全熄灭的情况，提出了任意参考值时的回归差矩阵和零回归差矩阵，并分别得出它们与参考值为零时的回归差矩阵和零回归差矩阵间的关系。最后，作为单环反馈系统灵敏度的推广，给出了用回归差矩阵、零回归差或互补回归差矩阵的行列式计算多环反馈系统的灵敏度的公式。

6-1 反馈系统的信号流图分析

信号流图在反馈系统的分析中有着重要的应用。反馈系统中的一些定理可由信号流图简便地推导出来，特别是关于回归差的概念可以得到清楚的表示。

现有一多输入、多输出的多环反馈系统如图 6-1 所示。

输入变量 u 是 n 维向量，输出变量 y 是 m 维向量。 p 维向量 ϕ 称为控制向量， q 维向量 θ 称为被控制向量。 $q \times p$ 阶矩阵 X 称为控制系数矩阵。它是我们所要进一步研究的矩阵，即研究这

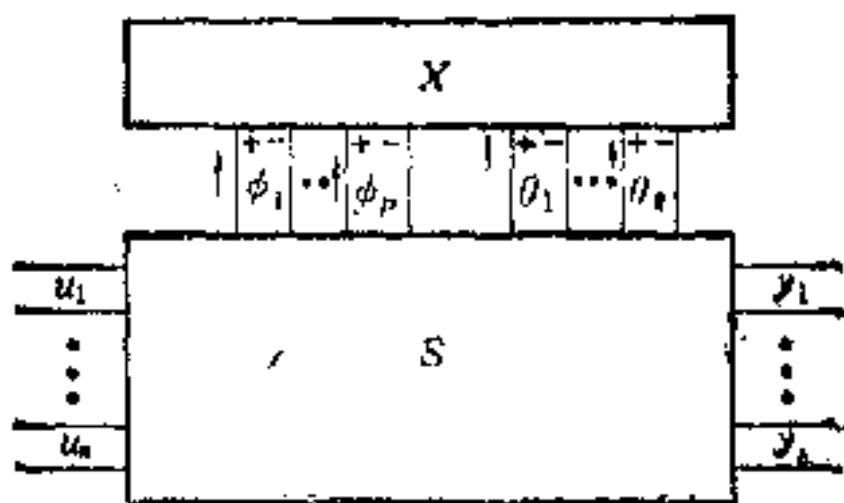


图 6-1

些系数对整个系统的影响。

例如,对于图 6-2 的反馈网络。如果我们要考虑导纳 Y_1 和控制参量 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 对整个网络性能的影响,则选取它们作为 X 的元素。于是,有

$$\theta = \begin{bmatrix} I_1 \\ V_s \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = X\phi \quad (6-1)$$

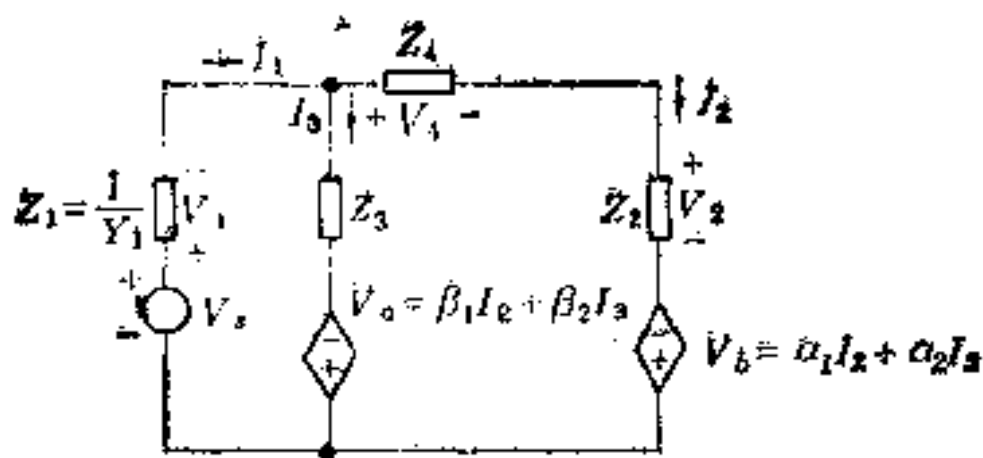


图 6-2

图 6-1 可更简洁地用图 6-3 的方框图表示。

设输入变量 u 和被控制变量 θ 对控制变量 ϕ 的贡献分别为 B 和 A , u 和 θ 对 ϕ 的贡献分别为 D 和 C 。因为系统 S 为线性系统,故有下列关系

$$\phi = A\theta + Bu \quad (6-2)$$

$$y = C\theta + Du \quad (6-3)$$

式中 A, B, C, D 分别为 $p \times q, p \times n, m \times q$ 和 $m \times n$ 阶矩阵。

式(6-1), (6-2) 和式(6-3) 可用图 6-4 所示的矩阵信号流图表示。

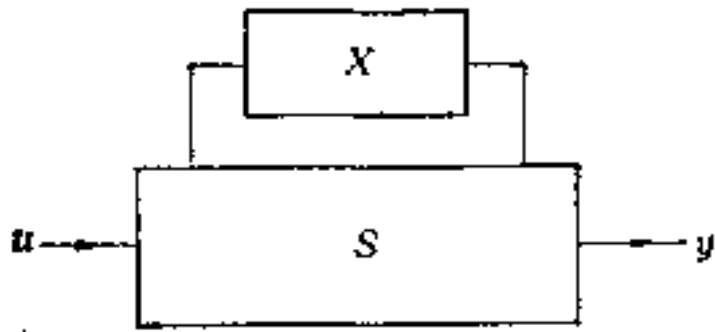


图 6-3

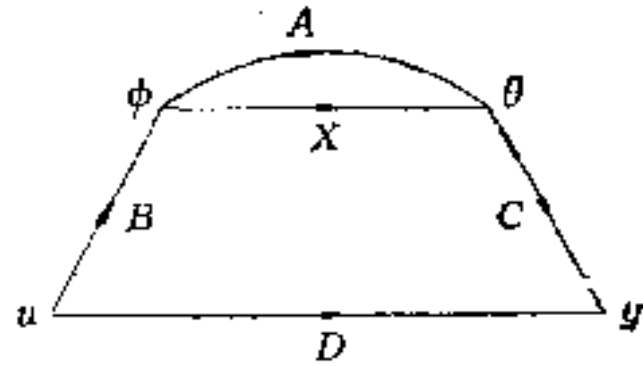


图 6-4

图 6-4 是研究反馈控制系统所用的基本信号流图。由图 6-4, 可写出系统的传输函数矩阵

$$W(X) = D + CX(I_p - AX)^{-1}B \quad (6-4)$$

式中

$$uW(X) = y \quad (6-5)$$

I_p 为 p 阶单位阵。

显然, $X = 0$ 时,

$$W(0) = D \quad (6-6)$$

若 X 是方阵, 且非奇异的, 则

$$W(X) = D + C(X^{-1} - A)^{-1}B \quad (6-7)$$

例 6-1. 图 6-5 是一电压-串联反馈放大器。设两只晶体管相同。它们的 h 参数是: $h_{ie} = 1.1$ 千欧, $h_{fe} = 50$, $h_{re} = h_{oo} = 0$ 。其等效电路如图 6-6。

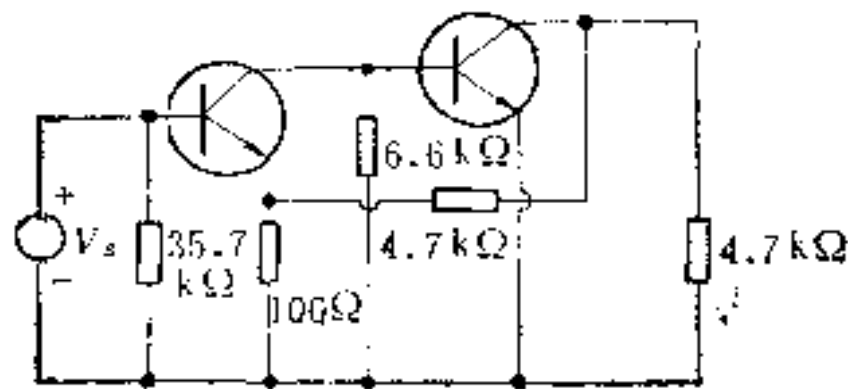


图 6-5

设两个压控流源的控制参数是我们感兴趣的参数, 即

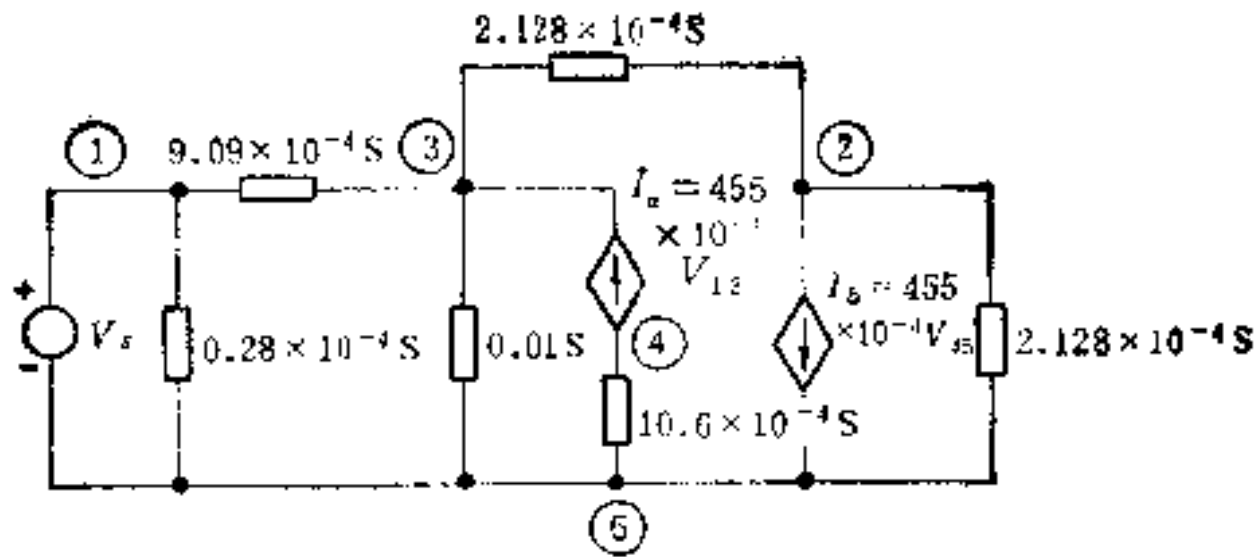


图 6-6

$$\theta = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = X\phi = 10^{-4} \begin{bmatrix} 455 & 0 \\ 0 & 455 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{13} \\ V_{45} \end{bmatrix} \quad (6-8)$$

设输入变量是信号源电压 V_s ，输出变量是输出电压 V_{25} 和输入电流 I_{51} ，则有下列方程组

$$\phi = \begin{bmatrix} V_{13} \\ V_{45} \end{bmatrix} = A\theta + Bu = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} [V_s] \quad (6-9)$$

$$y = \begin{bmatrix} V_{25} \\ I_{51} \end{bmatrix} = C\theta + Du = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix} [V_s] \quad (6-10)$$

现在需要根据等效电路来计算矩阵 A, B, C, D 中的元素。

令 $I_b = 0, V_s = 0, I_a = 1$ 安，可由图 6-7 算出 $V'_{13}, V'_{45}, V'_{25}$ 和 I'_{51} 。它们在数值上分别等于 $a_{11}, a_{21}, c_{11}, c_{21}$ 。结果是

$$\begin{aligned} a_{11} &= -90.782 \text{ 欧}, & a_{21} &= -942.507 \text{ 欧}, \\ c_{11} &= 45.391 \text{ 欧}, & c_{21} &= -0.08252 \text{ 欧}, \end{aligned} \quad (6-11)$$

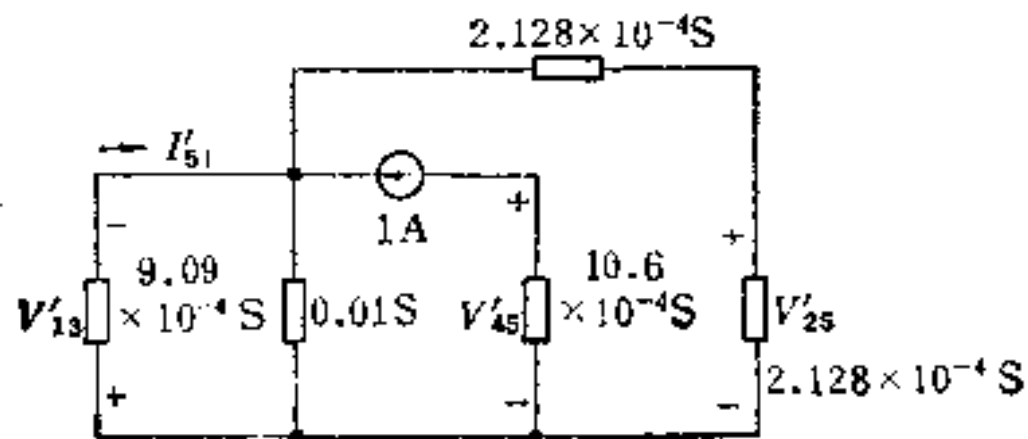


图 6-7

令 $I_a = 0, V_s = 0, I_b = 1$ 安，可由图 6-8 算出 V''_{13}, V''_{45} ，

V_{25}'' 和 I_{51}'' 。它们在数值上分别等于 a_{12} , a_{22} , c_{12} 和 c_{22} 。结果是

$$\begin{aligned} a_{12} &= 45.391 \text{ 欧}; & a_{22} &= 0 \\ c_{12} &= -2372.32 \text{ 欧}, & c_{22} &= 0.04126 \end{aligned} \quad (6-12)$$

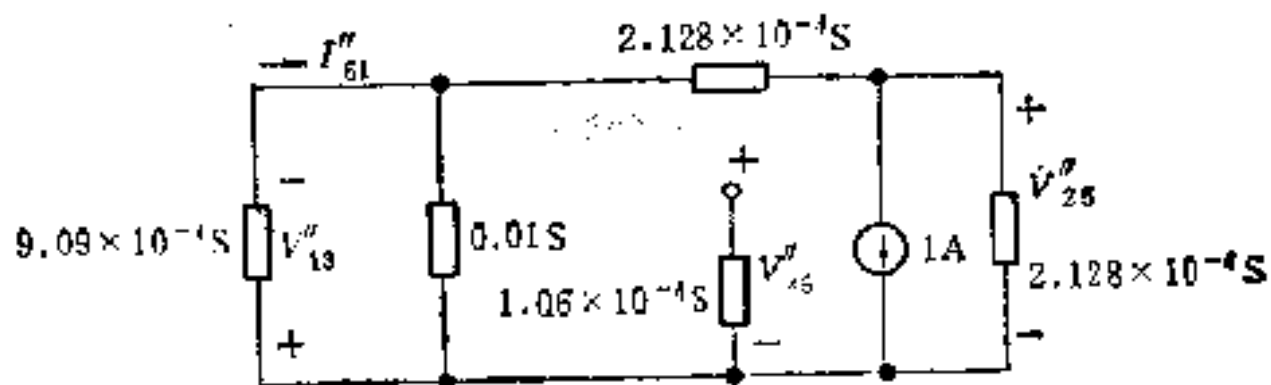


图 6-8

最后, 令 $V_s = 1$ 伏, $I_a = I_b = 0$, 可由图 6-9 算出 V_{13}''' , V_{45}''' , V_{25}''' 和 I_{51}''' 。它们在数值上分别等于 b_{11} , b_{21} , d_{11} , d_{21} 。结果是

$$\begin{aligned} b_{11} &= 0.91748, & b_{21} &= 0 \\ d_{11} &= 0.04126, & d_{21} &= 0.000862 \text{ 西} \end{aligned} \quad (6-13)$$

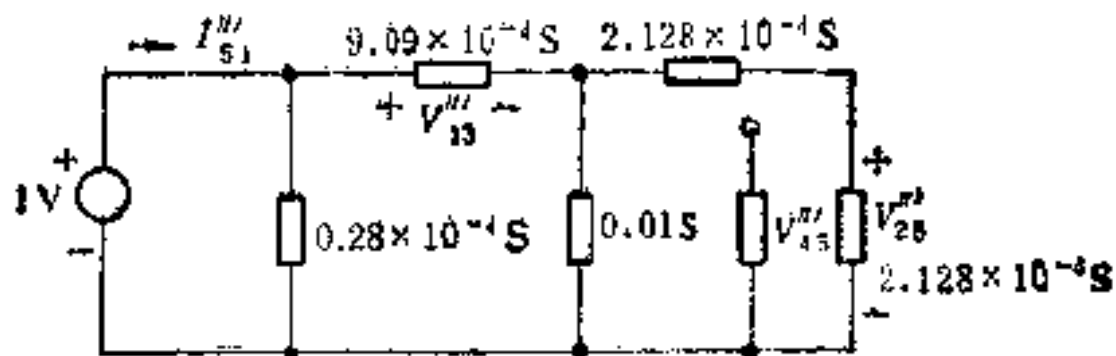


图 6-9

因为 X 是非奇异的, 故由式 (6-7) 可求得

$$\begin{aligned} W(X) &= D + (X^{-1} - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.041260 \\ 0.000862 \end{bmatrix} \\ &+ \left\{ \begin{bmatrix} 455 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 455 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}^{-1} - \begin{bmatrix} -90.782 & 45.391 \\ -942.507 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &\cdot \begin{bmatrix} 0.91748 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.387 \\ 0.369 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6-14)$$

故

$$y = \begin{bmatrix} V_{25} \\ I_{51} \end{bmatrix} = W(X)u = \begin{bmatrix} 45.387 \\ 0.369 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} [V_s] \quad (6-15)$$

因此,

$$\text{输入阻抗} = V_s / I_{s1} = \frac{1}{0.369 \cdot 10^{-4}} = 27.1 \text{ 千欧} \quad (6-16)$$

$$\text{电压增益} = V_{25} / V_s = 45.387 \quad (6-17)$$

6-1-1 回归差矩阵

在 4-3 节中,我们对单支路给出了回归差的定义,该定义用于研究系统中某一元件对系统特性的影响。对于多环反馈系统,需要研究的不是单个元件,而是一组元件对系统特性的影响。因此,要将回归差的概念加以推广。

参阅图 6-4 所示的基本信号流图,断开传输为 X 的支路输入端,在断开点右侧加 p 维向量 g ,并令输入向量 u 为零,如图 6-10 所示;则回归信号的 p 维向量

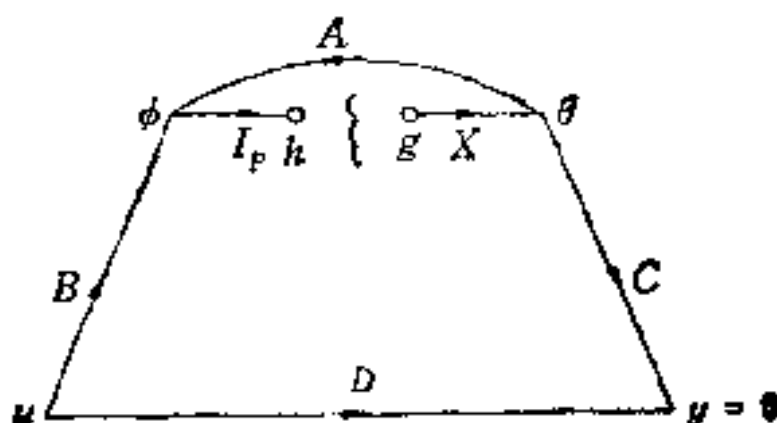


图 6-10

$$h = AXg \quad (6-18)$$

方矩阵 AX 称为环传输矩阵; $-AX$ 称为回归比矩阵,用 $T(X)$ 表示,即

$$T(X) = -AX \quad (6-19)$$

外加信号向量 g 与回归信号向量 h 之差

$$g - h = (I_p - AX)g \quad (6-20)$$

$I_p - AX$ 称为对 X 的回归差矩阵,用 $F(X)$ 表示,即

$$F(X) = I_p - AX \quad (6-21)$$

例如,例 6-1 中,对 X 的回归差矩阵

$$F(X) = I_2 - \begin{bmatrix} -90.782 & 45.391 \\ -942.507 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 455 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 455 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 5.131 & -2.065 \\ 42.884 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-22)$$

显然,当 AX 为标量时,回归差矩阵即简化为回归差。

6-1-2 零回归差矩阵

作为单环反馈系统中零回归差的直接推广,现在来讨论零回归差矩阵。

参阅图 6-4,断开支路 X ,加入 p 维向量的信号 g 。然后,再调整 n 维输入向量 u ,使 g 和 u 对 m 维输出向量 y 的贡献为零。

如图 6-11。

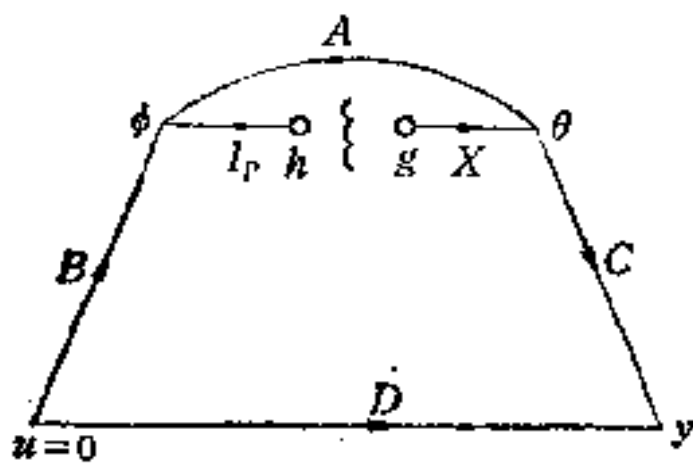


图 6-11

由图 6-11:

$$y = Du + CXg = 0 \quad (6-23a)$$

故

$$u = -D^{-1}CXg \quad (6-23b)$$

式 (6-23) 中,设 D 为非奇异方阵。这是为了调整 u 使 y 为零所需要的。否则,若 $m \neq n$,

则不可能满足 y 为零的要求。由图 6-11,断开点左端的回归信号

$$h = Bu + AXg = (-BD^{-1}CX + AX)g \quad (6-24)$$

故

$$g - h = (I_p - AX + BD^{-1}CX)g \quad (6-25)$$

矩阵

$$\hat{F}(X) = I_p - AX + BD^{-1}CX = I_p - \hat{A}X \quad (6-26)$$

称为对 X 的零回归差矩阵。其中

$$\hat{A} = A - BD^{-1}C \quad (6-27)$$

零回归差矩阵只有直接传输 D 存在,且在非奇异的情况下才存在。当 A, B, C, D 均为标量时,零回归差矩阵即简化为零回归

差。

例 6-2. 仍以例 6-1 中的电压-串联反馈放大器为例。根据零回归差矩阵的定义，只有 D 为非奇异矩阵时才有意义，因为输入变量 $u = V_s$ 为一维的，故输出变量 y 也应该是一维的。这样，才能保证 D 的非奇异性。

现设 V_{25} 为输出变量，则

$$\begin{aligned} y = [V_{25}] &= [45.391 \quad -2372.32] \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} + [0.04126][V_s] \\ &= C\theta + Du \end{aligned} \quad (6-28)$$

又由例 6-1，

$$A = \begin{bmatrix} -90.782 & 45.391 \\ -942.507 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.91748 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-29)$$

故

$$\hat{A} = A - BD^{-1}C = \begin{bmatrix} -1100.12 & 52797.6 \\ -942.507 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-30)$$

因此，

$$\hat{F}(X) = I_2 - \hat{A}X = \begin{bmatrix} 51.055 & -2402.29 \\ 42.884 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-31)$$

若取 I_{s1} 为输出变量，则

$$\begin{aligned} y = [I_{s1}] &= [-0.08252 \quad 0.04126] \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} \\ &+ [0.000862][V_s] \end{aligned} \quad (6-32)$$

这时，

$$C = [-0.08252 \quad 0.04126], \quad D = 0.000862 \quad (6-33)$$

故对应的零回归差矩阵

$$\hat{F}(X) = I_2 - \hat{A}X = \begin{bmatrix} 1.13426 & -0.06713 \\ 42.8841 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-34)$$

由式 (6-31) 和式 (6-34) 可看出，由于所选取的输出变量不同，即使对同一 X ，零回归差矩阵也是不一样的。这是因为，零回归差矩阵不仅与所选取的 X 有关，而且也与选取的输出变量有关。

它不象回归差矩阵那样,仅取决于所选取的 X 。

6-2 广义的 Bode 公式

由式 (6-4) 可知:

$$\begin{aligned} W(X) &= D + CX(I_p - AX)^{-1}B \\ &= D[I_n + D^{-1}CX(I_p - AX)^{-1}B] \end{aligned} \quad (6-35)$$

为了进一步说明 $W(X)$ 与回归差矩阵 $F(X)$ 和零回归差矩阵 $\hat{F}(X)$ 的行列式的关系,需要证明下列行列式的等式:

$$\det(I_m + MN) = \det(I_n + NM) \quad (6-36)$$

式中 M 和 N 分别为 $m \times n$ 阶和 $n \times m$ 阶任意矩阵, I_m 和 I_n 分别为 m 阶和 n 阶单位矩阵。

我们首先证明 M 和 N 均为 n 阶方阵时,式 (6-36) 的正确性,再分两种情况讨论:

(1) 当 M 非奇异时:

$$\begin{aligned} \det(I_n + MN) &= \det[M(I_n + NM)M^{-1}] \\ &= \det M \cdot \det(I_n + NM) \det M^{-1} \\ &= \det(I_n + NM) \end{aligned} \quad (6-37)$$

(2) 当 M 为奇异时,它有一零特征值,因此,对某一 λ , 矩阵 $\lambda I_n + M$ 为非奇异的,故由式 (6-37):

$$\det[I_n + (\lambda I_n + M)N] = \det[I_n + N(\lambda I_n + M)] \quad (6-38)$$

式 (6-38) 两端是 λ 的多项式(最大阶数为 n)。对所有使 $\lambda I_n + M$ 为非奇异的 λ , 式 (6-38) 两端相等。因为 $\lambda = 0$ 是 $\det(\lambda I_n + M)$ 的零点,因此存在一个正数 λ_0 , 使得 $\lambda I_n + M$ 对所有满足 $0 < \lambda < \lambda_0$ 的实数 λ 是非奇异的。因此,当 $\lambda = 0$ 时,式 (6-38) 有效。

再考虑 M 和 N 为非方阵的情况,设

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \tilde{N} = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为增广的 $n + m$ 阶方阵,则有

$$\begin{aligned}\det(I_{n+m} + \tilde{M}\tilde{N}) &= \det \begin{bmatrix} I_m + MN & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \\ &= \det(I_m + MN) \end{aligned} \quad (6-39)$$

$$\begin{aligned}\det(I_{n+m} + \tilde{N}\tilde{M}) &= \det \begin{bmatrix} I_n + NM & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \\ &= \det(I_n + NM) \end{aligned} \quad (6-40)$$

因为 \tilde{M} 和 \tilde{N} 为方阵, 由以上的讨论可知

$$\det(I_{n+m} + \tilde{M}\tilde{N}) = \det(I_{n+m} + \tilde{N}\tilde{M}) \quad (6-41)$$

故式 (6-36) 成立。

利用式 (6-36), 式 (6-35) 可写成

$$\begin{aligned}W(X) &= D[I_n + D^{-1}CX(I_p - AX)^{-1}B] \\ &= D[I_p + BD^{-1}CX(I_p - AX)^{-1}] \\ &= W(0)(I_p - AX + BD^{-1}CX)(I_p - AX)^{-1} \end{aligned} \quad (6-42)$$

因此,

$$\begin{aligned}\det W(X) &= \det W(0) \cdot \det(I_p - AX + BD^{-1}CX) \\ &\quad \cdot \det(I_p - AX)^{-1} \end{aligned} \quad (6-43)$$

由式 (6-21) 及式 (6-26), 有

$$\det W(X) = \det W(0) \cdot \frac{\det \hat{F}(X)}{\det F(X)} \quad (6-44)$$

式 (6-44) 表示了多环反馈系统中, 当直接传输矩阵 $W(0) = D$ 非奇异时, 传输函数矩阵 $W(X)$ 的行列式与回归差矩阵行列式 $\det F(X)$ 和零回差矩阵行列式 $\det \hat{F}(X)$ 的关系。这就是广义的 Bode 公式 (也有人称之为广义的 Blackman 公式)。

当输入变量 u 和输出变量 y 都是标量时 ($m=n=1$), 式 (6-44) 简化为

$$W(X) = W(0) \cdot \frac{\det \hat{F}(X)}{\det F(X)} \quad (6-45)$$

根据所选取的 u 和 y 的不同, 可以得到不同的网络函数。例如, u 为输入电压, y 为输出电压, 则 $W(X)$ 为电压增益; u 为输入电流, y 为输出电压, 则 $W(X)$ 为输入阻抗等等。若取 u 为网

网络的输入电流 I_i , y 为网络的输入电压 V_i , 则输入阻抗

$$Z(X) = Z(0) \cdot \frac{\det \hat{F}(X)}{\det F(X)} \quad (6-46)$$

这就是求有源网络阻抗的 Blackman 公式。我们可给式 (6-46) 中的各项以物理的解释。 $Z(0)$ 是在 $X=0$ 时得出的输入阻抗: X 是被控源的控制参数; $X=0$ 意味着断开了所开反馈环, 这时的输入阻抗就是无源阻抗, 故 $Z(0)$ 是很容易决定的; $F(X)$ 是在输入变量 $u(I_i)$ 为零时得出的对 X 的回归差矩阵, 即在输入端开路时测出的对 X 的回归差矩阵; $\hat{F}(X)$ 是在调整输入变量 I_i 使输出变量 V_i 为零时得出的对 X 的回归差矩阵, 即在输入端短路时测出的对 X 的回归差矩阵。因此, 式 (6-46) 可表示成

$$Z(X) = Z(0) \cdot \frac{\det F(\text{输入端短路时测量})}{\det F(\text{输入端开路时测量})} \quad (6-47)$$

式 (6-47) 在计算有源网络阻抗时是很有用的, 因为右端各项很容易决定。

例 6-3. 在例 6-2 中得出了 V_{25} 为输出变量时的零回归差矩阵

$$\hat{F}(X) = \begin{bmatrix} 51.055 & -2402.297 \\ 42.884 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-48)$$

故

$$\det \hat{F}(X) = 103071 \quad (6-49)$$

由式 (6-22) 给出

$$F(X) = \begin{bmatrix} 5.131 & -2.065 \\ 42.884 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-50)$$

故

$$\det F(X) = 93.68646 \quad (6-51)$$

由式 (6-28) 得出

$$W(0) = 0.04126 \quad (6-52)$$

将式 (6-49), (6-51) 和式 (6-52) 代入式 (6-45), 得出电压增益

$$W(X) = \frac{V_{s5}}{V_s} = W(0) \frac{\det \hat{F}(X)}{\det F(X)} = 45.39 \quad (6-53)$$

式(6-53)与式(6-17)的结果是一致的。

若取 I_{s1} 作为输出变量 y , V_s 作为输入变量 u 。则由式(6-34):

$$\hat{F}(X) = \begin{bmatrix} 1.13426 & -0.06713 \\ 42.8841 & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$\det \hat{F}(X) = 4.01307 \quad (6-54)$$

又由式(6-33)知:

$$W(0) = D = 0.000862 \quad (6-55)$$

将式(6-51), (6-54), (6-55)代入式(6-45), 得出输入导纳

$$W(X) = \frac{I_{s1}}{V_s} = 0.000862 \cdot \frac{4.01307}{93.68646} = 36.92 \text{ 微西} \quad (6-56)$$

式(6-56)与式(6-16)求得的输入阻抗 27.1 千欧互为倒数。

6-3 互补回归差矩阵

在定义零回归差矩阵 $\hat{F}(X)$ 时(参阅式(6-26)), 曾假定 D 存在并且是非奇异的。当直接传输矩阵 D 不存在或 D 为奇异时, 零回归差矩阵 $\hat{F}(X)$ 是没有定义的, 因为我们无法得到使输出变量为零的输入变量。因此, 提出了互补回归差矩阵来解决这样的困难。

由图 6-4 的基本信号流图, 和前面一样, 在断开点右端加入 p 维信号向量 g , 然后调整 n 维输入向量 u 使 n 维输出向量 y 为零, 即

$$u + y = 0 \quad (6-57)$$

式中 y 是在 $u = 0$ 时由 g 产生的输出向量。

由式(6-57):

$$u = -y = CXg \quad (6-58)$$

则回归信号为

$$h = Bu + AXg = (-BCX + AX)g \quad (6-59)$$

故

$$g - h = (I_p - AX + BCX)g = (I_p - \bar{A}X)g \quad (6-60)$$

式中

$$\bar{A} = A - BC \quad (6-61)$$

矩阵

$$\bar{F}(X) = I_p - \bar{A}X \quad (6-62)$$

称为互补回归差矩阵。

比较式 (6-27) 和式 (6-61) 可看出, 互补回归差矩阵是在 $D = I_n$ 时的零回归差矩阵。

现考虑 $m = n = 1, W(0) = D = 0$ 的情况。设在基本信号流图中用支路传输为 1 的支路代替 D ,

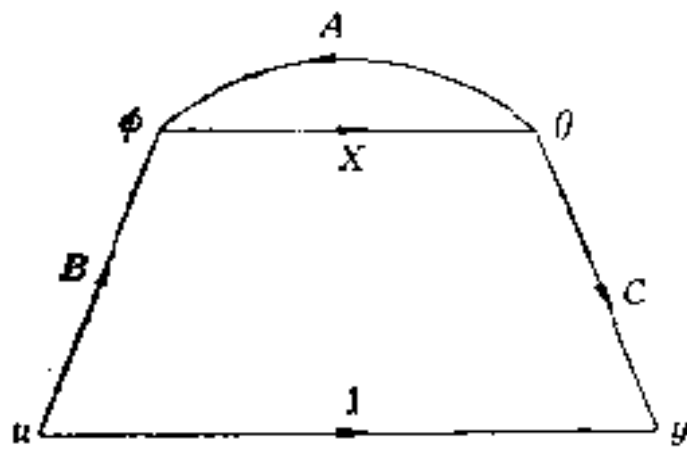


图 6-12

则得到图 6-12。从 u 到 y 的传输变成 $1 + W(X)$ 。这时, 对 X 的零回归差矩阵是在 $D = 1$ 时得出, 它即为 $\bar{F}(X)$ 。代入式 (6-44) 中, 有

$$1 + W(X) = [1 + W(0)] \frac{\det \bar{F}(X)}{\det F(X)} \quad (6-63)$$

于是,

$$W(X) = \frac{\det \bar{F}(X) - \det F(X)}{\det F(X)} \quad (6-64)$$

式 (6-64) 是在直接传输 D 为奇异情况下计算系统函数的公式。它克服了利用式 (6-45) 计算时产生的困难。

例 6-4. 参阅图 6-6 的反馈放大器的等效电路。现设 V_{45} 是输出变量, V_s 是输入变量。由例 6-1 可知:

$$\phi = \begin{bmatrix} V_{13} \\ V_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90.782 & 45.391 \\ -942.507 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.91748 \\ 0 \end{bmatrix} [V_s]$$

$$= A\theta + Bu \quad (6-65)$$

故

$$y = [V_{45}] = [-942.507 \ 0] \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} + [0][V_s] = C\theta + Du \quad (6-66)$$

因为 $D = 0$ ，故零回归差矩阵没有定义，不能利用式(6-45)来求 $W(X) = \frac{V_{45}}{V_s}$ 。但互补回归差矩阵 $\bar{F}(X)$ 可按式(6-62)求得

$$\begin{aligned} \bar{F}(X) &= I_2 - (A - BC)X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} -90.782 & 45.391 \\ -942.507 & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} 0.91748 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [45.391 \ -2372.32] \right\} \begin{bmatrix} 455 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 455 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -34.21468 & -2.06529 \\ 42.88407 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-67) \end{aligned}$$

故

$$\det \bar{F}(X) = 54.35336 \quad (6-68)$$

因此，将式(6-51)，(6-68)代入式(6-64)得出

$$W(X) = \frac{V_{45}}{V_s} = \frac{\det \bar{F}(X) - \det F(X)}{\det F(X)} = -0.42 \quad (6-69)$$

6-4 广义回归差矩阵

前面，我们讨论了反馈系统中经常应用到的三种矩阵，即回归差矩阵 $F(X)$ ，零回归差矩阵 $\hat{F}(X)$ 和互补回归差矩阵 $\bar{F}(X)$ 。当 $W(0) \neq 0$ 时，利用式(6-45)计算单输入和单输出的多环反馈系统的系统函数 $W(X)$ 。当 $W(0) = 0$ 时，则需用式(6-64)求 $W(X)$ 。现在，我们将讨论广义回归差矩阵 $\tilde{F}(X, k)$ 。 $F(X)$ ， $\hat{F}(X)$ 和 $\bar{F}(X)$ 可作为 $\tilde{F}(X, k)$ 在特定的 k 值情况下的结果。

对应于多环反馈系统的矩阵信号流图如图 6-13(a)。现在只讨论单输入、单输出的情况。图 6-13(a) 中只画出源点、汇点和引

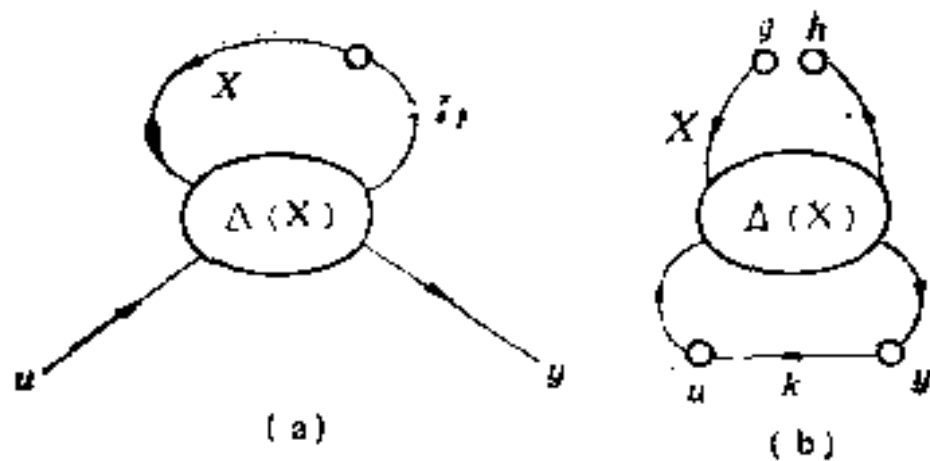


图 6-13

入支路 X 的内节点。 X 为 $q \times p$ 阶矩阵。 现用一条传输为 k 的支路从汇点接到源点, 并将支路 X 始端的内节点分裂为两个节点, 得出图 6-13(b)。 然后在分裂后的源点加 p 维信号向量 g , 在分裂后的汇点得到 p 维信号向量 h , 则广义回归差矩阵 $\tilde{F}(X, k)$ 由下式定义:

$$g - h = \tilde{F}(X, k)g \quad (6-70)$$

显然, $\tilde{F}(X, k)$ 是用传输为 k 的支路从汇点接到源点时对 X 的回归差。 因此, $\tilde{F}(X, k)$ 可表示成

$$\tilde{F}(X, k) = I_p - \tilde{T}(X, k) \quad (6-71)$$

式中 I_p 是 p 阶单位矩阵, $\tilde{T}(X, k)$ 是从图 6-13(b) 中的源点到汇点的传输。

为了得出系统函数 $W(X)$ 的一般关系式, 需要将第一章中有关部分回归差和图行列式的定义推广到矩阵信号流图。

考虑一个有 n 个节点的矩阵信号流图。 这些节点的编号为 $1, 2, \dots, n$ 。

节点 i 的部分回归差矩阵, 是在编号大于 i 的节点全部分裂后节点 i 的回归差矩阵, 用 D_i 表示。 若节点 i 的向量信号为 $p \times 1$, 则 D_i 是 $p \times p$ 方矩阵。

矩阵信号流图的图行列式, 是矩阵信号流图中所有节点的部分回归差矩阵行列式之积, 用 D 表示。 由以上定义, 可得

$$D = \det D_1 \det D_2 \cdots \det D_i \cdots \det D_n \quad (6-72)$$

在第一章 1—9 节中曾证明了图行列式与节点编号无关的性

质。对于矩阵信号流图，这个结果也是正确的。证明如下：设矩阵信号流图中除了节点 $i = j - 1$ 和 $i = j$ 以外的节点全消去，得出图 6-14。

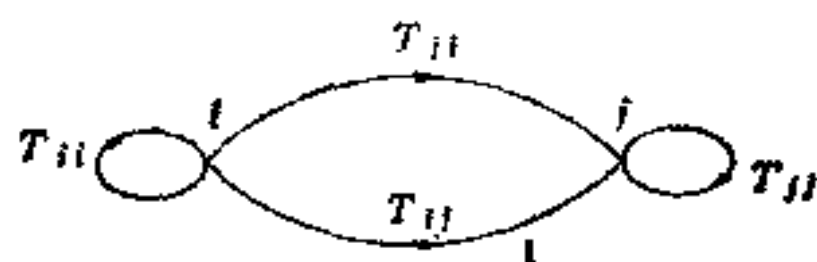


图 6-14

由图 6-14 可得出节点 i 和节点 j 的部分回归差矩阵：

$$D_i = I_p - T_{ii} \quad (6-73)$$

$$D_j = I_q - T_{jj} - T_{ji}(I_p - T_{ii})^{-1}T_{ij} \quad (6-74)$$

$$\det D_i \cdot \det D_j = \det(I_p - T_{ii}) \det[I_q - T_{jj} - T_{ji}(I_p - T_{ii})^{-1}T_{ij}] \quad (6-75)$$

这里，节点 i 和节点 j 的向量信号分别为 $p \times 1$ 和 $q \times 1$ 阶， I_p 和 I_q 分别为 p 阶和 q 阶方矩阵。

如果图 6-14 中节点 i 和节点 j 的编号互换，则有

$$D'_i = I_q - T_{jj} \quad (6-76)$$

$$D'_j = I_p - T_{ii} - T_{ij}(I_q - T_{jj})^{-1}T_{ji} \quad (6-77)$$

$$\det D'_i \cdot \det D'_j = \det(I_q - T_{jj}) \cdot \det[I_p - T_{ii} - T_{ij}(I_q - T_{jj})^{-1}T_{ji}] \quad (6-78)$$

这里， D'_i 和 D'_j 分别是重新编号后的节点 i 和节点 j 的部分回归差矩阵。

式 (6-75) 可进一步变成

$$\begin{aligned} \det D_i \cdot \det D_j &= \det(I_p - T_{ii}) \det(I_q - T_{jj}) \\ &\quad \times [I_q - (I_q - T_{jj})^{-1}T_{ji}(I_p - T_{ii})^{-1}T_{ij}] \\ &= \det(I_p - T_{ii}) \det(I_q - T_{jj}) \cdot \det[I_q - (I_q - T_{jj})^{-1}T_{ji}(I_p - T_{ii})^{-1}T_{ij}] \end{aligned} \quad (6-79)$$

式 (6-78) 可进一步变成

$$\begin{aligned} \det D'_i \cdot \det D'_j &= \det(I_q - T_{jj}) \det(I_p - T_{ii}) \\ &\quad \times [I_p - (I_p - T_{ii})^{-1}T_{ij}(I_q - T_{jj})^{-1}T_{ji}] \end{aligned}$$

$$= \det(I_q - T_{ij}) \cdot \det(I_p - T_{ii}) \det[I_p - (I_p - T_{ii})^{-1} T_{ij} (I_q - T_{ij})^{-1} T_{ii}] \quad (6-80)$$

若令 $M = (I_q - T_{ij})^{-1} T_{ij}$, $N = (I_p - T_{ii})^{-1} T_{ii}$, $p = m$, $q = n$, 则由式 (6-36), 显然有

$$\begin{aligned} & \det[I_q - (I_q - T_{ij})^{-1} T_{ij} (I_p - T_{ii})^{-1} T_{ii}] \\ &= \det[I_p - (I_p - T_{ii})^{-1} T_{ii} (I_q - T_{ij})^{-1} T_{ij}] \quad (6-81) \end{aligned}$$

于是证实了式 (6-79) 和式 (6-80) 的右端相等, 即

$$\det D_i \det D_j = \det D'_i \cdot \det D'_j \quad (6-82)$$

设对应于第 1 种和第 2 种节点编号的矩阵信号流图的图行列式分别为 D 和 D' . 于是

$$D = \det D_1 \cdot \det D_2 \cdots \det D_i \cdot \det D_j \cdots \det D_n \quad (6-83)$$

$$D' = \det D'_1 \cdot \det D'_2 \cdots \det D'_i \cdot \det D'_j \cdots \det D'_n \quad (6-84)$$

由于除了节点 i 和 j 以外的所有节点的编号不变, 即

$$D_k = D'_k, \quad k \neq i, j \quad (6-85)$$

因此, 由式 (6-82) 可知,

$$D = D' \quad (6-86)$$

重复应用相邻节点编号的互换, 可得到任意的节点编号. 因此, 证实了矩阵信号流图的图行列式与节点编号无关. 下面, 将利用这个性质推导 $W(X)$ 的表示式.

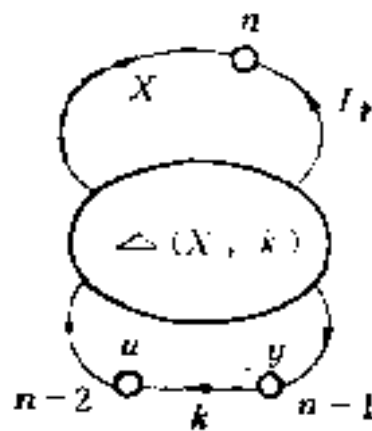


图 6-15

对于图 6-13(b), 若将分裂的节点恢复,

并将其编号为节点 n , 输出节点 y 编号为 $n-1$,

输入节点 u 编号为 $n-2$, 如图 6-15.

由图 6-15, 可写出图行列式

$$D(X, k) = \det D_1 \cdots \det D_{n-2} \cdot \det D_{n-1} \cdot \det D_n \quad (6-87)$$

当图 6-15 中内节点和输出节点的编号互换后的图行列式

$$D'(X, k) = \det D'_1 \cdots \det D'_{n-2} \cdot \det D'_{n-1} \cdot \det D'_n \quad (6-88)$$

时, 前 $n-2$ 个节点的编号不变, 故

$$D_i = D'_i, \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n-2 \quad (6-89)$$

因为

$$D(X, k) = D'(X, k) \quad (6-90)$$

故有

$$\det D_{n-1} \cdot \det D_n = \det D'_{n-1} \cdot \det D'_n \quad (6-91)$$

由 $F(X)$, $\tilde{F}(X, k)$ 和 $W(X)$ 的定义, 从图 6-15 可得出

$$\det D_{n-1} = 1 - kW(0) \quad (6-92)$$

$$\det D_n = \det \tilde{F}(X, k) \quad (6-93)$$

$$\det D'_{n-1} = \det F(X) \quad (6-94)$$

$$\det D'_n = 1 - kW(X) \quad (6-95)$$

将式 (6-92)~(6-95) 代入式 (6-91), 得出

$$\frac{1 - kW(X)}{1 - kW(0)} = \frac{\det \tilde{F}(X, k)}{\det F(X)} \quad (6-96)$$

当 $X = 0$ 时的图行列式

$$D(0, k) = \det D_1 \cdots \det D_{n-2} \cdot \det D_{n-1} \quad (6-97)$$

由式 (6-87), (6-93) 及 (6-97), 可得出广义回归差矩阵的行列式

$$\det \tilde{F}(X, k) = \frac{D(X, k)}{D(0, k)} \quad (6-98)$$

式 (6-98) 表明了广义回归差矩阵行列式与矩阵信号流图行列式的关系, 它在求系统函数 $W(X)$ 时是很有用的。

下面将阐述 $F(X)$, $\hat{F}(X)$, $\bar{F}(X)$ 和 $\tilde{F}(X, k)$ 间的关系, 以便进一步说明式 (6-96) 的普遍性。

由图 6-16 所示的矩阵信号流图, 可分别求得对 X 的回归差矩阵 $F(X)$, 零回归差矩阵 $\hat{F}(X)$, 互补回归差矩阵 $\bar{F}(X)$:

$$F(X) = I_p - CX \quad (6-99)$$

$$\hat{F}(X) = I_p - \left(C - \frac{1}{d} AB \right) X \quad (6-100)$$

$$\bar{F}(X) = I_p - \left(C - \frac{1}{1+d} AB \right) X \quad (6-101)$$

若从汇点 y 至源点 x 接入传输为 k 的支路(如图 6-17), 则对 X 的广义回归差矩阵 $\tilde{F}(X, k)$ 按式 (6-70) 的定义, 应为

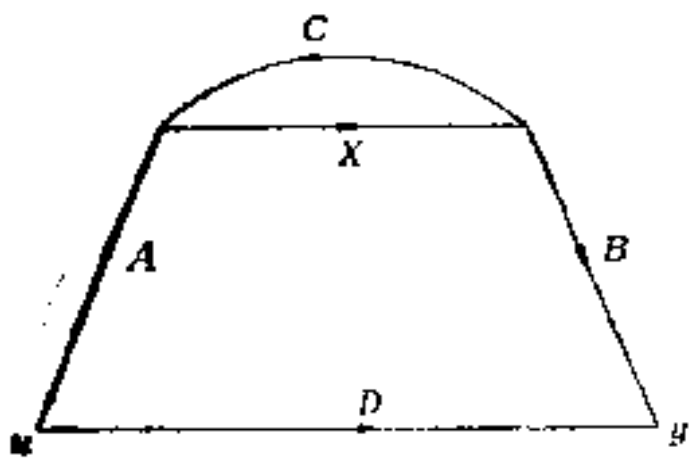


图 6-16

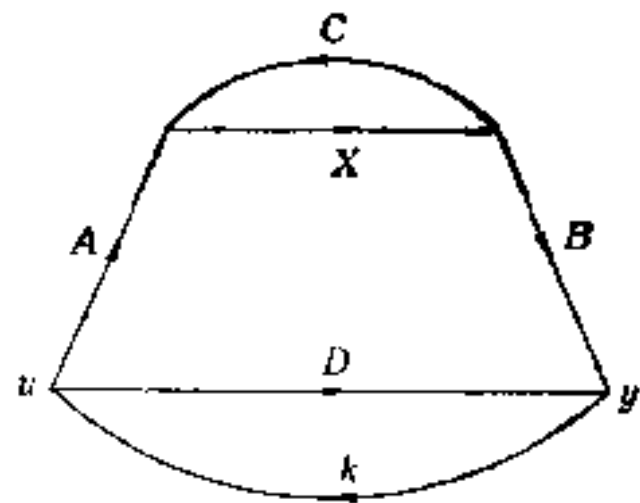


图 6-17

$$\tilde{F}(X, k) = I_p - \left(C + \frac{k}{1 - dk} AB \right) X \quad (6-102)$$

很容易看出, 当 k 取一些特殊数值时从 $\tilde{F}(X, k)$ 可分别得到 $F(X)$, $\hat{F}(X)$ 和 $\bar{F}(X)$ 为

$$F(X) = \hat{F}(X, 0) \quad (6-103)$$

$$\hat{F}(X) = \tilde{F}(X, \infty) \quad (6-104)$$

$$\bar{F}(X) = \tilde{F}(X, -1) \quad (6-105)$$

因此, 知道 $\tilde{F}(X, k)$ 后, 令 $k = 0, \infty$ 和 -1 , 即可算出 $F(X)$, $\hat{F}(X)$ 和 $\bar{F}(X)$.

在式 (6-96) 中, 若 $W(0) \neq 0$, 令 $k = \infty$, 则有

$$W(X) = W(0) \cdot \frac{\det \tilde{F}(X, \infty)}{\det F(X)} = W(0) \cdot \frac{\det \hat{F}(X)}{\det F(X)} \quad (6-106)$$

这正是式 (6-15).

在式 (6-96) 中, 若 $W(0) = 0$, 令 $k = -1$, 则有

$$1 + W(X) = \frac{\det \tilde{F}(X, -1)}{\det F(X)} \quad (6-107)$$

故

$$W(X) = \frac{\det \bar{F}(X) - \det F(X)}{\det F(X)} \quad (6-108)$$

这正是式 (6-64).

由此可见, 式 (6-96) 是求系统函数 $W(X)$ 的普遍公式. 它的关键是求 $\det \tilde{F}(X, k)$. 广义回归阵矩阵 $\tilde{F}(X, k)$ 的优点是可

以代替 $F(X)$, $\hat{F}(X)$ 和 $\bar{F}(X)$, 概念简单. 基于式 (6-92), (6-93) 和式 (6-96), 可以得出求 $W(X)$ 的步骤如下:

(1) 将传输为 X 的支路分解为单位传输和传输为 X 的两条支路的串联. 使支路 X 的起点编号为 n , 汇点编号为 $n-1$, 其余 $n-2$ 个节点可任意编号.

(2) 计算节点 n 的部分回归差矩阵 D_n 的行列式 $\det D_n$. 由式 (6-93) 可知, $\det D_n = \det \tilde{F}(X, k)$.

(3) 计算节点 $n-1$ 的部分回归差矩阵 D_{n-1} 的行列式 $\det D_{n-1}$. 由式 (6-92), $\det D_{n-1} = 1 - kW(0)$. 故可算出 $W(0) = \frac{1 - \det D_{n-1}}{k}$. 如果 $W(0) = 0$, 转 (4); 否则, 转 (5).

(4) 分别令 $\det \tilde{F}(X, k)$ 中的 $k = 0$ 和 -1 , 求出 $\det F(X)$ 和 $\det \bar{F}(X)$, 由式 (6-108) 求出 $W(X)$.

(5) 分别令 $\det \tilde{F}(X, k)$ 中的 $k = 0$ 和 ∞ , 求出 $\det F(X)$ 和 $\det \hat{F}(X)$, 由式 (6-106) 求出 $W(X)$.

例 6-5. 求图 6-18 所示迴转器电路中的电压传输函数 $W(X) = V_3/V_1$. 我们所感兴趣的是迴转器电导 g_1 和 g_2 .

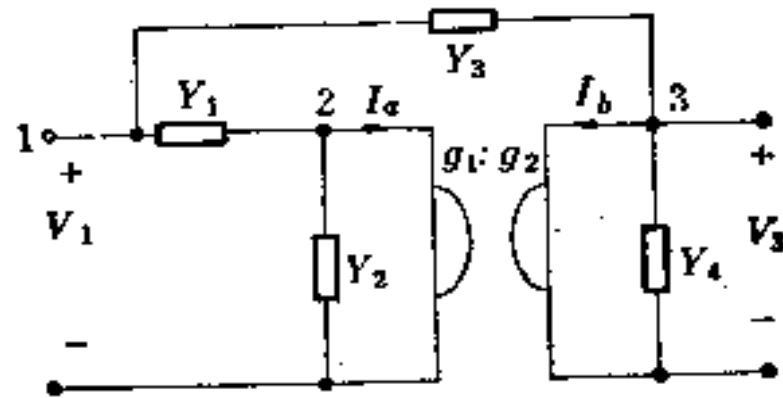


图 6-18

该电路的矩阵信号流图如图 6-19. V_1 是源点, V_3 是汇点. 为计算 $\tilde{F}(X, k)$, 图中从 V_3 至 V_1 加一条传输为 k 的支路. 节点的编号示于图 6-19.

由步骤 (2), 算出节点 5 的部分回归差矩阵行列式

$$\det D_5 = \det \left(I_3 - \left\{ I_2 - \begin{bmatrix} 1 + Y_1 + Y_2 & 0 \\ 0 & 1 + Y_3 + Y_4 \end{bmatrix} \right\} \right)$$

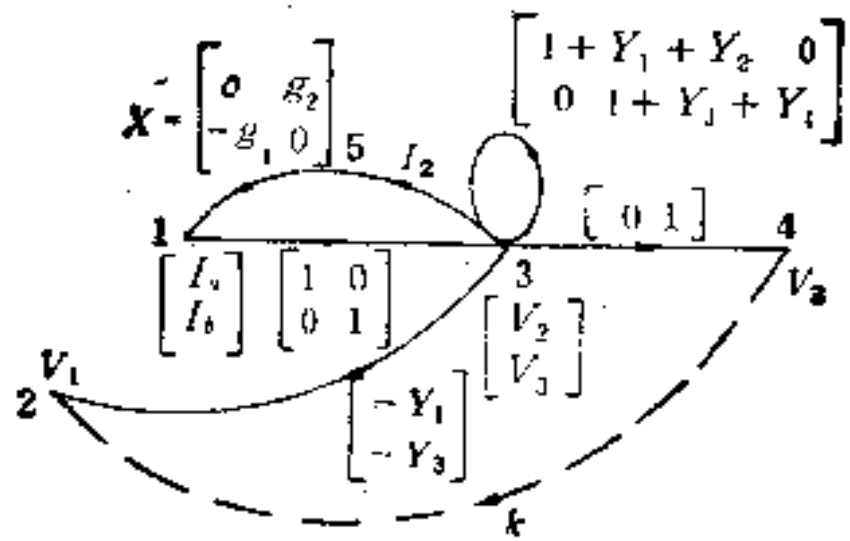


图 6-19

$$\begin{aligned}
 & + \begin{bmatrix} 0 & -kY_1 \\ 0 & -kY_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & g_2 \\ -g_1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & = \det \left(I_2 - \begin{bmatrix} -(Y_1 + Y_2) & kY_1 \\ 0 & -(Y_3 + Y_4 - kY_3) \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
 & \quad \times \begin{bmatrix} 0 & g_2 \\ -g_1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & = \det \left(I_2 - \begin{bmatrix} -(Y_3 + Y_4 - kY_3)/\Delta & 0 \\ kY_1/\Delta & -(Y_1 + Y_2)/\Delta \end{bmatrix} \right) \\
 & \quad \times \begin{bmatrix} 0 & g_2 \\ -g_1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & = \det \left(I_2 - \begin{bmatrix} 0 & -g_2(Y_3 + Y_4 - kY_3)/\Delta \\ g_1(Y_1 + Y_2)/\Delta & g_2kY_1/\Delta \end{bmatrix} \right) \\
 & = \det \begin{bmatrix} 1 & g_2(Y_3 + Y_4 - kY_3)/\Delta \\ -g_1(Y_1 + Y_2)/\Delta & 1 - g_2kY_1/\Delta \end{bmatrix} \\
 & = 1 - \frac{g_2kY_1}{\Delta} + \frac{g_1g_2(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4 - kY_3)}{\Delta^2} \quad (6-109)
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 \Delta & = (Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4 - kY_3) \\
 & = (Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) - kY_3(Y_1 + Y_2) \quad (6-110)
 \end{aligned}$$

式(6-109)继续化简后, 得出

$$\det D_s = \det \tilde{P}(X, k)$$

$$= \frac{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) + g_1 g_2 - k[Y_1 g_1 + (Y_1 + Y_2)Y_3]}{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) - k(Y_1 + Y_2)Y_3} \quad (6-111)$$

再由步骤(3)算出

$$\begin{aligned} \det D_k &= 1 - kW(0) = 1 - \frac{kY_3(Y_1 + Y_2)}{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4)} \\ &= 1 - \frac{kY_3}{(Y_3 + Y_4)} \end{aligned} \quad (6-112)$$

故

$$W(0) = Y_3 / (Y_3 + Y_4) \quad (6-113)$$

因为 $W(0) \neq 0$, 故由步骤(5)令式(6-111)中的 $k=0$ 和 ∞ , 分别求得

$$\det F(X) = 1 + g_1 g_2 / (Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) \quad (6-114)$$

及

$$\det \hat{F}(X) = 1 + Y_1 g_1 / (Y_1 + Y_2)Y_3 \quad (6-115)$$

将式(6-113), (6-114)及式(6-115)代入式(6-106)求出

$$W(X) = \frac{V_3}{V_1} = \frac{Y_3}{Y_3 + Y_4} \cdot \frac{1 + Y_1 g_1 / (Y_1 + Y_2)Y_3}{1 + g_1 g_2 / (Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4)} \quad (6-116)$$

6-5 任意参考值的回归差矩阵和零回归差矩阵

前面讨论的 $F(X)$ 和 $\hat{F}(X)$ 都是在参考值为零的情况下进行的。现在要推广到参考值不为零的情况。这在有源网络不完全熄灭时有实际的意义。

对于图 6-4 的基本信号流图, 如果将控制系数 X 的支路分解成两条支路 X_1 和 K , 使 $X = X_1 - K$, 则得到下列关系:

$$\theta = X\phi = (X - K)\phi + K\phi = \theta_1 + K\theta_1 \quad (6-117)$$

$$\theta_1 = X_1\phi_1 \quad (6-118)$$

于是, 有图 6-20 所示的信号流图。

现断开支路 X_1 , 仿照以前的方法, 在断开点右端加 p 维信号向量 g , 在断开点左端有 p 维回归信号向量 h (图 6-21)。

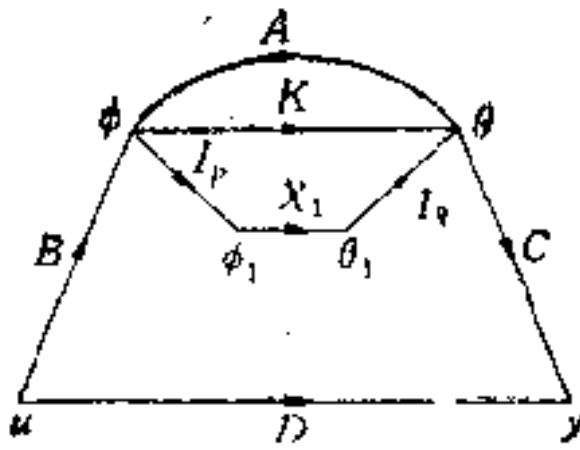


图 6-20

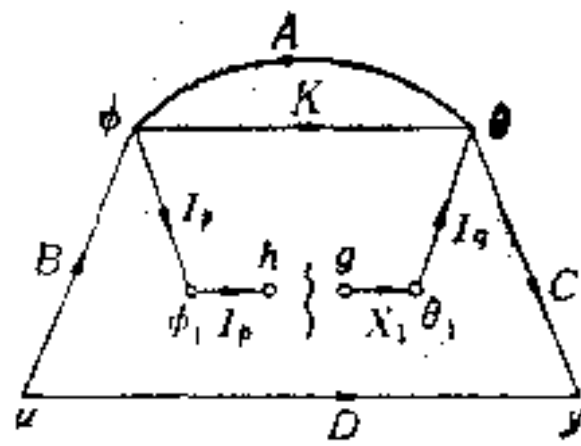


图 6-21

由图 6-21:

$$\theta = X_1 g + K \phi \quad (6-119)$$

$$\phi = A \theta + B u \quad (6-120)$$

按回归差矩阵的定义, 回归信号 h 是在 $u = 0$ 情况下得出。在式 (6-120) 中, 令 $u = 0$, 得到

$$\phi = A \theta \quad (6-121)$$

将式 (6-119) 代入式 (6-121):

$$\phi = (I_p - AK)^{-1} AX_1 g \quad (6-122)$$

故

$$h = \phi = (I_p - AK)^{-1} AX_1 g \quad (6-123)$$

外加信号 g 与回归信号 h 之差

$$g - h = [I_p - (I_p - AK)^{-1} AX_1] g \quad (6-124)$$

矩阵

$$F_K(X) = I_p - (I_p - AK)^{-1} AX_1 \quad (6-125)$$

称为以 K 为参考的对 X 的回归差矩阵,

当 $K = 0$, 即 $X_1 = X$ 时, $F_K(X)$ 变为 $I_p - AX$, 这就是 6-1-1 节中的回归差矩阵 $F(X)$, 即以零为参考的对 X 的回归差矩阵。

由式 (6-125):

$$\begin{aligned} F_K(X) &= I_p - (I_p - AK)^{-1} AX_1 = (I_p - AK)^{-1} (I_p - AX_1) \\ &= (I_p - AK)^{-1} \cdot (I_p - AK - AX + AK) \\ &= (I_p - AK)^{-1} (I_p - AX) = F^{-1}(K) \cdot F(X) \end{aligned} \quad (6-126)$$

即以 K 为参考的对 X 的回归差矩阵等于对 K 的回归差矩阵之逆乘

以对 X 的回归差矩阵。后两者都以零为参考。

式 (6-126) 也可写成

$$F(X) = F(K_1) \cdot F_{K_1}(X) \quad (6-127)$$

式中 K_1 是从 X 得出的某一参考值。

再从 K_1 中得出某一参考值 K_2 ，从 K_2 中得出 K_3 ，重复这一过程，可将回归差矩阵写成有限的乘积形式：

$$F(X) = F(K_n) \prod_{i=1}^n F_{K_i}(K_{i-1}) \quad (6-128)$$

式中 $K_0 = X$ 。

类似地，由图 6-21 可定义以 K 为参考的对 X 的零回归差矩阵。这时有下列关系：

$$y = C\theta + Du = 0 \quad (6-129)$$

故

$$u = -D^{-1}C\theta \quad (6-130)$$

由式 (6-119)，(6-120) 和 (6-130)，得出

$$h = \phi = (I_p - AK + BD^{-1}CK)^{-1}(A - BD^{-1}C)X_1 g \quad (6-131)$$

故

$$g = h = [I_p - (I_p - AK + BD^{-1}CK)^{-1} \\ \times (A - BD^{-1}C)X_1] g \quad (6-132)$$

矩阵

$$\hat{F}_K(X) = I_p - (I_p - AK + BD^{-1}CK)^{-1} \\ \times (A - BD^{-1}C)X_1 \quad (6-133)$$

称为以 K 为参考的对 X 的零回归差矩阵。

当 $K = 0$ ，即 $X_1 = X$ 时， $\hat{F}_K(X)$ 变为 $I_p - (A - BD^{-1}C)X$ 。这就是式 (6-26) 中的零回归差矩阵，即以零为参考的对 X 的零回归差矩阵。

由式 (6-133)：

$$\begin{aligned} \hat{F}_K(X) &= I_p - (I_p - AK + BD^{-1}CK)^{-1}(A - BD^{-1}C)X_1 \\ &= [I_p - (A - BD^{-1}C)K]^{-1} \cdot [I_p \\ &\quad - (A - BD^{-1}C)K - (A - BD^{-1}C)X_1] \\ &= [I_p - (A - BD^{-1}C)K]^{-1} \cdot [I_p - (A - BD^{-1}C)X] \end{aligned}$$

$$= \hat{F}^{-1}(K) \cdot \hat{F}(X) \quad (6-134)$$

式(6-134)表明,以 K 为参考的对 X 的零回归差矩阵等于对 K 的零回归差矩阵之逆乘以对 X 的零回归差矩阵,后两者都以零为参考。

类似地,零回归差矩阵也可写成有限的乘积形式:

$$\hat{F}(X) = \hat{F}(K_n) \prod_{i=1}^n \hat{F}_{K_i}(K_{i-1}) \quad (6-135)$$

例 6-6. 由例 6-1, 有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_{13} \\ V_{43} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -90.782 & 45.391 \\ -942.507 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.91748 \\ 0 \end{bmatrix} [V_s] \\ &= A\theta + Bu \end{aligned} \quad (6-136)$$

$$\begin{aligned} [I_{11}] &= [-0.08252 \quad 0.04126] \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} \\ &\quad + [0.000862][V_s] = C\theta + Du \end{aligned} \quad (6-137)$$

设 $X = \begin{bmatrix} 0.0455 & 0 \\ 0 & 0.0455 \end{bmatrix}$ 的参考值 $K = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}$, 则

$$X_1 = X - K = \begin{bmatrix} 0.0355 & 0 \\ 0 & 0.0255 \end{bmatrix} \quad (6-138)$$

将 A, K, X_1 代入式(6-125), 得出

$$F_K(X) = I_2 - (I_2 - AK)^{-1}AX_1 = \begin{bmatrix} 4.21075 & -0.11061 \\ 3.19747 & 2.04254 \end{bmatrix} \quad (6-139)$$

若利用式(6-126)亦可得到相同结果。

将 A, B, C, D, K, X_1 代入式(6-133), 得出

$$\hat{F}_K(X) = \begin{bmatrix} 1.83518 & -0.02877 \\ 25.58756 & 1.27118 \end{bmatrix} \quad (6-140)$$

利用式(6-134)亦可得到相同结果。

6-6 多环反馈系统的灵敏度

在第四章中曾得出关于单环反馈系统中用回归差和零回归差

表示灵敏度的定理 4-1. 这里, 将推广到多环反馈系统的情况.

对于单输入、单输出的多环反馈系统, 由式 (6-45), 系统函数

$$W(X) = W(0) \frac{\det \hat{F}(X)}{\det F(X)} \quad (6-141)$$

按定义, $W(X)$ 对 X 中某一参数 x_{ij} 的灵敏度

$$\begin{aligned} S_{x_{ij}}^W &= \frac{x_{ij}}{W} \frac{\partial W}{\partial x_{ij}} = \frac{x_{ij} W(0)}{W} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \frac{\det \hat{F}(X)}{\det F(X)} = \frac{x_{ij} \cdot \det F(X)}{\det \hat{F}(X)} \\ &\quad \times \left(\frac{\det F(X) \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \det \hat{F}(X) - \det \hat{F}(X) \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \det F(X)}{\det^2 F(X)} \right) \\ &= \frac{1}{\det \hat{F}(X)} \left(x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \det \hat{F}(X) - x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \det F(X) \right) \end{aligned} \quad (6-142)$$

由式 (6-26),

$$\begin{aligned} \det \hat{F}(X) &= \det [I_p - (A - BD^{-1}C)X] \\ &= \det [I_p - \hat{A}X] \end{aligned} \quad (6-143)$$

设 x_{ij} 是 X 中第 i 行、第 j 列的元素. 用两矩阵之和的行列式展开公式^[5]对 $\det [I_p - \hat{A}X]$ 展开. 其中各项是 $\hat{A}X$ 的从 1 到 p 阶的所有主子行列式 (即行列式中包括的行号和列号一定相同). 而包括因子 x_{ij} 的主子行列式一定是包括 $\hat{A}X$ 的第 i 行和第 j 列的主子行列式. 于是, 有

$$x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \det \hat{F}(X) = \det \hat{F}(X) - \det \hat{F}(X)|_{x_{ij}=0} \quad (6-144)$$

类似地, 可得到

$$x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \det F(X) = \det F(X) - \det F(X)|_{x_{ij}=0} \quad (6-145)$$

将式 (6-144) 和式 (6-145) 代入式 (6-142), 得出

$$S_{x_{ij}}^W = \frac{\det F(X)|_{x_{ij}=0}}{\det F(X)} - \frac{\det \hat{F}(X)|_{x_{ij}=0}}{\det \hat{F}(X)} \quad (6-146)$$

式 (6-146) 是式 (4-65) 在多环反馈系统中的推广.

对于直接传输 $W(0) = 0$ 的情况，需应用互补回归差矩阵 $\bar{F}(X)$ ，我们可得出求灵敏度 $S_{x_{ij}}^W$ 的另一公式。由式 (6-64)：

$$W(X) = \frac{\det \bar{F}(X) - \det F(X)}{\det F(X)} \quad (6-147)$$

故

$$\begin{aligned} S_{x_{ij}}^W &= \frac{x_{ij}}{W(X)} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\frac{\det \bar{F}(X) - \det F(X)}{\det F(X)} \right) \\ &= \frac{x_{ij} \cdot \det F(X)}{\det \bar{F}(X) - \det F(X)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\frac{\det \bar{F}(X) - \det F(X)}{\det F(X)} \right) \\ &= \frac{x_{ij} \cdot \det F(X)}{\det \bar{F}(X) - \det F(X)} \cdot \frac{1}{\det^2 F(X)} \\ &\quad \cdot \left[\det F(X) \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \cdot \det \bar{F}(X) - \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \det F(X) \right) \right. \\ &\quad \left. - (\det \bar{F}(X) - \det F(X)) \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \det F(X) \right] \\ &= \frac{1}{\det \bar{F}(X) - \det F(X)} [\det \bar{F}(X) \cdot \det F(X)|_{x_{ij}=0} \\ &\quad - \det F(X) \cdot \det \bar{F}(X)|_{x_{ij}=0}] \quad (6-148) \end{aligned}$$

式 (6-148) 是直接传输为零时计算灵敏度的公式。

式 (6-147) 和式 (6-148) 表明，利用回归差矩阵的概念可以使灵敏度的计算非常方便。在计算 $W(X)$ 的过程中，已经求出 $\det F(X)$ ， $\det \hat{F}(X)$ 或 $\det \bar{F}(X)$ ，故只需将相应的 $x_{ij} = 0$ 代入上述回归差矩阵行列式中即可算出 $S_{x_{ij}}^W$ 。

例 6-7. 求例 6-5 中电压传输函数 $W = V_3/V_1$ 对 g_1 和 g_2 的灵敏度 $S_{g_1}^W$ 和 $S_{g_2}^W$ 。

因 $W(0) = 0$ ，故可利用式 (6-146) 计算灵敏度。在计算 $W(X)$ 时，已算出 $\det F(X)$ 和 $\det \hat{F}(X)$ ，分别见式 (6-114) 和式 (6-115)。故

$$S_{g_1}^W = \frac{\det F(X)|_{g_1=0}}{\det F(X)} \cdot \frac{\det \hat{F}(X)|_{g_1=0}}{\det \hat{F}(X)}$$

$$= \frac{1}{1 + g_1 g_2 / (Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4)} - \frac{1}{1 + Y_1 g_1 / (Y_1 + Y_2) Y_3}$$

$$= \frac{g_1(Y_1 + Y_2) [Y_1(Y_3 + Y_4) - g_2 Y_3]}{[(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) + g_1 g_2] [Y_1 g_1 + (Y_1 + Y_2) Y_3]} \quad (6-149)$$

$$S_{g_2}^W = \frac{\det F(X)|_{g_2=0}}{\det F(X)} - \frac{\det \hat{F}(X)|_{g_2=0}}{\det \hat{F}(X)}$$

$$= \frac{1}{1 + g_1 g_2 / (Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4)} - 1$$

$$= \frac{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4)}{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) + g_1 g_2} - 1$$

$$= \frac{-g_1 g_2}{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) + g_1 g_2} \quad (6-150)$$

式(6-146)和式(6-148)还分别可以写成下列形式:

$$S_{x_i}^W = \frac{\det F(X)_{ij}}{\det F(X)} - \frac{\det \hat{F}(X)_{ij}}{\det \hat{F}(X)} \quad (6-151)$$

式中 $\det F(X)_{ij}$ 和 $\det \hat{F}(X)_{ij}$ 分别是 $F(X)$ 和 $\hat{F}(X)$ 中去掉第 i 行、第 j 列的行列式。

$$S_{x_i}^W = \frac{1}{\det \bar{F}(X) - \det F(X)} [\det \bar{F}(X) \cdot \det F(X)_{ij} - \det F(X) \cdot \det \bar{F}(X)_{ij}] \quad (6-152)$$

式中 $\det \bar{F}(X)_{ij}$ 是 $\bar{F}(X)$ 中去掉第 i 行、第 j 列的图行列式。

例 6-8. 求图 6-6 的电路中电压增益 $W = \frac{V_{25}}{V_s}$ 对控制参数 x_{11} 和 x_{22} 的灵敏度 $S_{x_{11}}^W$ 和 $S_{x_{22}}^W$ 。

$F(X)$ 和 $\hat{F}(X)$ 分别在式(6-50)和式(6-48)中给出:

$$F(X) = \begin{bmatrix} 5.131 & -2.065 \\ 42.884 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-153)$$

$$\hat{F}(X) = \begin{bmatrix} 51.055 & -2402.29 \\ 42.884 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-154)$$

由式(6-151):

$$S_{x_{11}}^W = \frac{\det F(X)_{11}}{\det F(X)} - \frac{\det \hat{F}(X)_{11}}{\det \hat{F}(X)} = \frac{1}{93.68646} - \frac{1}{103071}$$

$$= 0.01066 \quad (6-155)$$

$$S_{x_{22}}^W = \frac{\det F(X)_{22}}{\det F(X)} - \frac{\det \hat{F}(X)_{22}}{\det \hat{F}(X)} = \frac{5.131}{93.68646} - \frac{51.055}{103071}$$

$$= 0.5426 \quad (6-156)$$

例 6-9. 求图 6-6 的电路中电压增益 $W = \frac{V_{45}}{V_s}$ 对控制参数 x_{11} 和 x_{22} 的灵敏度 $S_{x_{11}}^W$ 和 $S_{x_{22}}^W$.

这里,源点 V_s 到 V_{45} 间没有直接传输,即 $W(0) = 0$. 故需应用式 (6-152). 从例 6-4 中可知:

$$\bar{F}(X) = \begin{bmatrix} -34.21468 & -2.6529 \\ 42.88407 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-157)$$

$$\det \bar{F}(X) = 54.35336 \quad (6-158)$$

由式 (6-152):

$$S_{x_{11}}^W = \frac{1}{\det \bar{F}(X) - \det F(X)} [\det \bar{F}(X) \cdot \det F(X)_{11} - \det F(X) \cdot \det \bar{F}(X)_{11}]$$

$$= \frac{1}{\det \bar{F}(X) - \det F(X)} [\det \bar{F}(X) \cdot 1 - \det F(X) \cdot 1] = 1 \quad (6-159)$$

$$S_{x_{22}}^W = \frac{1}{\det \bar{F}(X) - \det F(X)} [\det \bar{F}(X) \cdot \det F(X)_{22} - \det F(X) \cdot \det \bar{F}(X)_{22}]$$

$$= \frac{1}{54.35336 - 93.68648} [54.35336 \times 5.131 - 93.68648 \times (-34.21468)]$$

$$= -88.58 \quad (6-160)$$

参 考 文 献

- [1] Acar, C., New Return Difference Matrix, *Int. J. Circuit Theory and Applica-*

- ions, Vol. 3, No. 1, pp. 87—94, 1975.
- [2] Chen, W. K., Active Network and Feedback Amplifier Theory, McGraw-Hill, 1980.
 - [3] Chen, W. K., and Elshent, H. M., Determinant of the Null Return-Difference Matrix, *Electronics Letters*, Vol. 13, No. 10, pp. 306—307, 1977.
 - [4] Elsherif, H. M., and Chen, W. K., The Return Difference Matrix in Multiple-Loop Feedback Systems, *Proc. 17th Midwest Symp. Circuits and Systems*, University of Kansas, Lawrence, Kansas, pp. 95—103, 1974.
 - [5] Goldstein, A. J., and Kuo, F. F., Multiparameter Sensitivity, *IRE Trans. on Circuit Theory*, Vol. CT-8, No. 2, pp. 177—178, 1961.
 - [6] Hakims, S., Multiple-Loop Feedback Circuits, *PIEE (London)*, Vol. 110, No. 11, pp. 1955—1959, 1963.
 - [7] E. S. Kuh, and Rohrer, R. A., Theory of Linear Active Networks, San Francisco, Calif. Holden-Day, 1967.
 - [8] MacFarlane, A. G. J., Return Difference and Return Ratio Matrices and Their Use in Analysis and Design of Multivariable Feedback Control Systems, *PIEE (London)*, Vol. 117, No. 10, pp. 2037—2049, 1970. Vol. 118, No. 7, pp. 946—947, 1971.
 - [9] Sandberg, I. W., On the Theory of Linear Multi-Loop Systems, *Bell Syst. Tech. J.*, pp. 355—382, 1963.
 - [10] Tassny-Tschiasny, L., The Return Difference Matrix in Linear Networks, *PIEE (London)*, Vol. 100, part IV, pp. 39—46, 1953.
 - [11] Truxal, J. G., Automatic Feedback Control System Synthesis, New York: McGraw-Hill, 1955.
 - [12] Waldhauer, F. D., Feedback, A Wiley-Interscience publication, John Wiley & Sons, 1982.
 - [13] 赵永昌, 信号流图及其应用, 人民邮电出版社 1975 年。

第七章 随机系统

信号流图用于随机系统的分析，使它的应用范围远远超出了电的领域进入到现代管理科学领域中来。这些工作开始于六十年代，近年来得到了不断发展，给企业管理的决策者提供了科学的决策依据。

本章首先用信号流图研究 Markov 过程的转移特性，包括它的稳定状态。对于半 Markov 过程，在用变换方法把积分方程组变为代数方程组后，很灵便地用信号流图描述了这一过程。对于表征这个过程的一些重要性态，如区间转移概率、瞬态过程、一次通过时间等，可从信号流图中方便地求出。作为有吸收状态的半 Markov 过程的网络模型的随机网络 GERT，从 1966 年建立以来，在近代化管理中得到了很大发展和应用。本章分别用变换法和时域法研究这种网络。对于变换法，在建立网络模型后，可直接应用 Mason 增益公式求解。时域法则是近年来提出的方法。对随机系统关键是找节点消除序列使卷积次数最少，这是一个较难的问题。本章讨论了解决此问题的两种启发式算法。信号流图一方面方便了随机系统的研究，另一方面在解决实际问题中也不断丰富了它本身的内容。

7-1 Markov 过程和随机图

最简单的随机过程，是相继试验的结果是彼此独立的。例如，掷骰子试验中，第 k 次投掷的结果与前 $k-1$ 次投掷的结果是无关的。在实际问题中产生的很多现象，往往不可能用这个简单的模型描述。自然界中有一些随机过程，其后继的结果与以前的试验结果有关。例如，后代继承遗传特点的概率就取决于其祖先是

否有这种特点。

Markov 过程是这样一种随机过程：任一次试验的结果仅与紧前的一次试验结果有关，与其他各次试验结果无关。Markov 过程在统计信息论、控制论、遗传学、库存论，以及现代管理科学等领域中得到了广泛应用。

Markov 过程是一个随机系统。该系统有 n 个状态 S_1, S_2, \dots, S_n ，状态的变化仅发生在离散的时间点(时刻)。第 k 个时刻的状态仅取决于第 $k-1$ 个时刻的状态，而与第 $1, 2, \dots, k-1$ 个时刻的状态无关。如果状态数是可数的，则 Markov 过程也称为 Markov 链。

要描述一个 Markov 过程，必须对每个状态 S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 给出它下一次转移到 n 个状态中任一状态的概率。转移概率 p_{ij} 是指过程的当前状态为 S_i ，而下一状态为 S_j 的概率。 p_{ij} 必须满足下列条件：

$$0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7-1)$$

后一等式表明，对某一特定的状态 S_i ，它到所有可能的各种状态的转移概率之和为 1。我们假定，所有上述的转移概率都是常数，不随时间变化；这样的 Markov 过程称为时不变的 Markov 过程。我们下面讨论的正是这种过程。以后简称 Markov 过程。

显然，要描述一个 Markov 过程，必须有 n^2 个转移概率。我们可用一个 $n \times n$ 的矩阵来描述。行对应于过程的当前状态，列对应于转移后的状态。这个矩阵称为转移矩阵记以 $P = [p_{ij}]$ 。当然， P 应满足式 (7-1) 的条件，即 P 中的每个元素应为非负的实数，且每行的元素之和等于 1。任一方矩阵，如果其中的每个元素均为非负的实数，且每行的元素之和等于 1，则该矩阵称为随机矩阵。因此，每个随机矩阵是某一 Markov 过程的转移矩阵，反之亦然。

随机矩阵 P 有下列几个基本性质：

(1) 对于 P ，它的 k 次方 P^k 也一定是随机矩阵 ($k = 0, 1,$

2, \dots), $P^0 = I$ 为单位矩阵.

(2) 如果 P 的各行均相等, 则

$$P = P^2 = P^3 = \dots \quad (7-2)$$

(3) 因为 P 的每行之和为 1, 故只需给出 $n-1$ 列. 另一列可直接推出.

除了转移概率外, 要决定系统在任一时刻的状态, 还必需给出系统在初始时刻(时间为零)处于各种状态的概率, 即

$$\pi(0) = [\pi_1(0), \pi_2(0), \dots, \pi_n(0)] \quad (7-3)$$

式中 $\pi_i(0)$ 是系统在初始时刻处于状态 i 的概率.

当然, $\pi(0)$ 也应满足式 (7-1) 的条件, 即

$$0 \leq \pi_i(0) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n \pi_i(0) = 1 \quad (7-4)$$

满足条件式 (7-4) 的实值向量, 称为概率向量.

因此, 给出系统的初始概率向量 $\pi(0)$ 和转移矩阵 P , 则完全决定了一个 Markov 过程. 它们足以决定系统在任一时刻 k 处于任一状态的概率.

例 7-1. 已知某一 Markov 过程的转移矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-5)$$

及初始概率向量

$$\pi(0) = [0.6 \quad 0.2 \quad 0.2] \quad (7-6)$$

求系统在时刻 $k=2$ 处于状态 1, 2, 3 的概率.

由 $\pi(0) \cdot P^2$ 可求出系统在时刻 $k=2$ 处于状态 1, 2, 3 的概率. 故

$$[0.6 \quad 0.2 \quad 0.2] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}^2 = [0.4 \quad 0.22 \quad 0.38] \quad (7-7)$$

即系统在时刻 $k=2$ 处于状态 1, 2, 3 的概率分别为 0.4, 0.22, 0.38.

为了进一步用图来研究 Markov 过程，下面首先用图表示转移矩阵。对于 n 个状态的 Markov 过程，在图上作出 n 个点，分别表示状态 S_1, S_2, \dots, S_n 。如果从 S_i 到 S_j 的转移概率 P_{ij} 不为零，则从 S_i 到 S_j 作一有向支路，其传输为 P_{ij} 。这样得出的图称为随机图或转移图。它不仅可形象地表示出 Markov 过程中各种状态的互相转移情况，而且是定量地研究该过程的一个有用的工具。例如，对于 n 状态的 Markov 过程，其随机图如图 7-1 所示。随机图和转移矩阵包含同样的信息，可以相互转换。对于随机图，式 (7-1) 后一条件可以表示为：从随机图上任一节点出发的所有支路的支路传输之和为 1。例如，对应于式 (7-5) 的转移矩阵的随机图如图 7-2 所示。

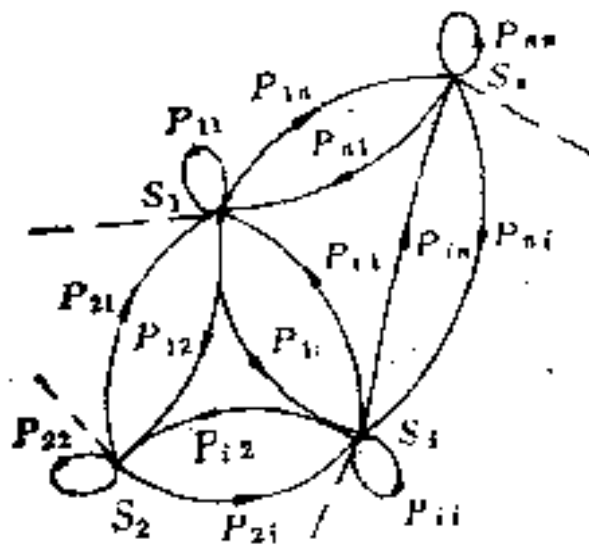


图 7-1

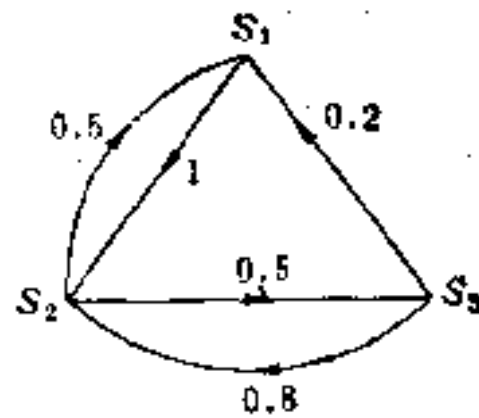


图 7-2

如果随机图是强连通的，则对应的 Markov 过程称为各态遍历的。例如，图 7-2 所对应的 Markov 过程是各态遍历的。在各态遍历的过程中，有一种特殊的过程，即从随机图中每一点到其他各点存在着长度为 k (正整数) 的有向边序列，则这一过程称为正则的 Markov 过程。显然，每一正则的 Markov 过程一定是各态遍历的。反之，各态遍历的 Markov 过程不一定是正则的。图 7-2 是正则的 Markov 过程。它的 $k=4$ 。图 7-3 是一各态遍历的 Markov 过程，

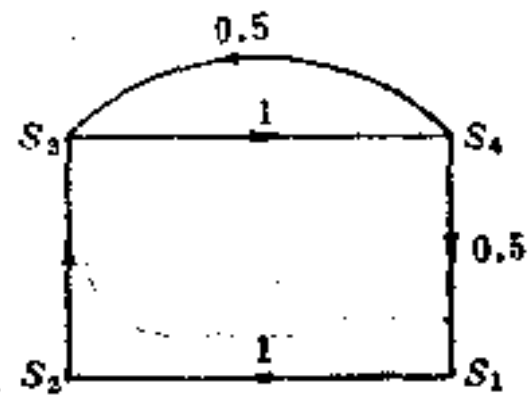


图 7-3

但它不是正则的。

判断各态遍历的过程是否为正则过程，可利用下列结果^[1]：若 G 为强连通的随机图， g_1, g_2, \dots, g_r 为它的最小强连通的子图，它们的节点数分别为 n_1, n_2, \dots, n_r 。当且仅当 n_1, n_2, \dots, n_r 的最大公因子为 1 时， G 表示一个正则的 Markov 过程。图 7-2 中有三个最小强连通子图 $\{S_1, S_2\}, \{S_2, S_3\}, \{S_1, S_2, S_3\}$ ，它们的节点数分别为 2, 2, 3，最大公因子为 1，故该图表示一个正则 Markov 过程。而图 7-3 中包括两个最小强连通子图 $\{S_3, S_4\}$ 及 $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ ，其节点数分别为 2 和 4，最大公因子为 2，故图 7-3 所表示的过程不是正则的。正则过程的长度 k 可以利用转移矩阵 P 求得，即对于任一给定的 P ，求得一对应的 k ，使得 P^{k-1} 中包含着零元素，而 P^k 中一定无零元素。这时得出的 k 即为正则过程的长度。

对于正则过程，一个很重要的问题是：在转移若干次后，系统能否达到一个与初始概率无关的稳定状态？如果能达到，怎样来计算这一稳态概率向量 $\pi(\infty)$ ？定理 7-1 回答了这个问题。

定理 7-1. 如果 P 是正则 Markov 过程的转移矩阵，则当 k 趋近于无限时， P^k 逼近于各行均相等的随机矩阵 $\Phi = [\phi_{ij}]$ ， Φ 的每一行 W 是一概率向量。

证明： 因为该过程是一正则过程，故一定存在某一正整数 r ，使得 $P^r = M$ 仅包括正元素。当任一列向量前乘以仅包括正元素的随机矩阵时，等价于对 y 的各个元素起着平均的作用。在多次重复这一作用后，最终会使 y 中各元素存在的差别消失，即 $M^h y = P^{rh} y = P^k y$ 中各元素相等（当 h 很大，因此， k 也很大时），这等价于 k 趋近于无限时， P^k 趋近于极限 Φ ，且 Φ 有相等的行。

定理 7-1 是一个很有用的结果。它是进一步求稳态概率向量 $\pi(\infty)$ 的基础。

因为 P^∞ （即 $k \rightarrow \infty$ 时 P^k 的极限）存在，则

$$\pi(\infty) = \pi(0)P^\infty = \pi(0)\Phi \quad (7-8)$$

式 (7-8) 写成分量形式为

$$\pi_j(\infty) = \sum_{i=1}^n \pi_i(0) \phi_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7-9)$$

因为 Φ 中的各行均相等, 故每个元素 ϕ_{ij} 仅与列角码有关, 即

$$\phi_{ij} = w_j \quad (7-10)$$

故

$$\pi_j(\infty) = \sum_{i=1}^n \pi_i(0) w_j = w_j \quad (7-11)$$

因此, 正则 Markov 过程逼近于同样的极限概率分布 W , 而与初始概率向量无关.

关于 W , 即 $\pi(\infty)$ 的计算, 有着不同的方法. 例如, 求 P 的高次幂就是一种方法, 但它是非常麻烦的. 下面, 我们将讨论用信号流图求 W 的方法. 其中的关键是从随机图导出求 W 的信号流图 G_W .

如果概率向量存在极限值 $\pi(\infty)$, 则有

$$\pi(\infty) = \pi(\infty)P \quad (7-12)$$

即

$$W = WP \quad (7-13)$$

故

$$W(I - P) = 0 \quad (7-14)$$

式中 I 为 n 阶单位矩阵.

因为 P 是一随机矩阵, 故 $I - P$ 的每行之和均为零, 即 $I - P$ 为奇异阵. 所以, 式 (7-14) 中的 n 个方程是线性相关的. 但其中的 $n - 1$ 个方程是线性无关的, 故还需要有一个方程才能解出 W 中的 n 个未知量. 对于 W , 显然有下列关系:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1 \quad (7-15)$$

因此, 需要从式 (7-14) 中去掉一个方程, 并将式 (7-15) 加入. 这样, 我们只需要将 $I - P$ 中的任一系列 (例如, 第 j 列) 的元素全部变为 1, 再在式 (7-14) 的右端加入行向量. 该行向量中除第 j 个元素为 1 外, 其余元素均为零. 于是, 式 (7-14) 变为

$$W(I - P)_{(j)}^* = (00 \dots 0j0 \dots 0) \triangleq V_j \quad (7-16)$$

式中 $(I - P)_{j(n)}^*$ 表示 $(I - P)$ 的第 j 列的所有元素均变为 1 后的矩阵。 V_j 是第 j 个元素为 1, 其余元素均为零的行向量。

由式 (7-16), 可得

$$W = V_j (I - P)_{j(n)}^{*-1} = \frac{1}{|(I - P)_{j(n)}^*|} (A_{j1} \ A_{j2} \ \cdots \ A_{jn}) \quad (7-17)$$

式中 $|(I - P)_{j(n)}^*|$ 是 $(I - P)_{j(n)}^*$ 的行列式。 $A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jn}$ 分别是 $(I - P)_{j(n)}^{*-1}$ 中第 j 行, 第 1, 2, \dots, n 列的元素。

随机图完全表示了矩阵 P 。令 $I - P$ 中第 j 列的所有元素为 1, 等价于在随机图中去掉所有进入节点 j 的支路, 从每个节点到节点 j 加入传输为 -1 的支路。在式 (7-16) 右端加入行向量 V_j , 等价于在随机图中从源节点(信号为 1)至节点 j 加入传输为 1 的支路。因此, 得到了从随机图推出求 W 的信号流图 G_W 的步骤:

- (1) 用 w_i 代替随机图中的节点标号 $S_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。
- (2) 去掉所有进入任一节点 w_j (即 S_j) 的支路。
- (3) 从每一节点 $w_i (i = 1, 2, \dots, n, i \neq j)$ 至节点 w_j 加入传输为 -1 的支路。
- (4) 在随机图中加入一个源点(信号为 1)。从源点至节点 j 加入传输为 1 的支路。

由式 (7-17) 可知, w_j 就是图 G_W 中从源点到节点 w_j 的传输。因此, 只要从随机图按上述步骤求出信号流图 G_W , 再求得 G_W 中从源点至节点 w_1, w_2, \dots, w_n 的传输, 就可得出系统的稳态概率向量 $W(x(\infty))$ 。

例 7-2. 给定某一 Markov 过程, 共有四种状态 S_1, S_2, S_3, S_4 。它的概率矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & 0 & 0 & p_{34} \\ 0 & 0 & p_{43} & 0 \end{bmatrix} \quad (7-18)$$

对应的随机图如图 7-4 所示。求该过程的稳态概率向量。

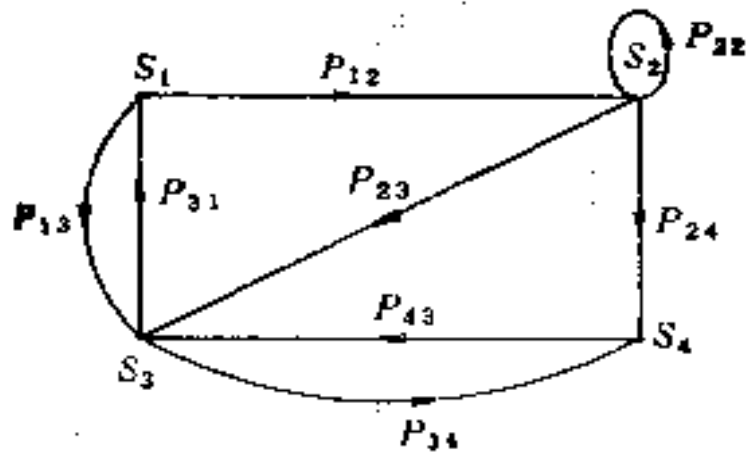


图 7-4

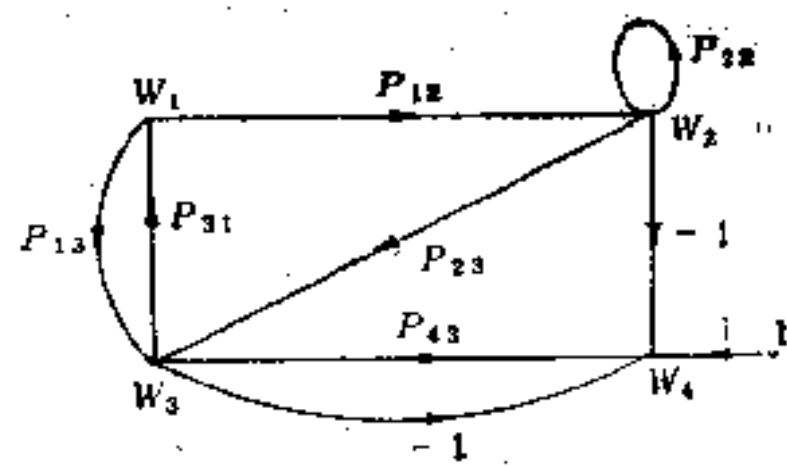


图 7-5

按上述步骤(取节点 S_4 作为节点 i)，可得到如图 7-5 所示的信号流图 G_W 。

由图 7-5，得出图行列式：

$$\Delta(G_W) = 1 - (p_{22} + p_{13}p_{31} + p_{12}p_{23}p_{31} - p_{43} - p_{13}p_{31} + p_{12}p_{43}p_{31}) + (p_{22}p_{13}p_{31} - p_{22}p_{43} - p_{22}p_{43}p_{31}) \quad (7-19)$$

故

$$w_1 = \frac{1}{\Delta(G_W)} \cdot p_{43} \cdot p_{31}(1 - p_{22}) \quad (7-20)$$

$$w_2 = \frac{1}{\Delta(G_W)} \cdot p_{43} \cdot p_{31} \cdot p_{12} \quad (7-21)$$

$$w_3 = \frac{1}{\Delta(G_W)} \cdot p_{43}(1 - p_{22}) \quad (7-22)$$

$$w_4 = \frac{1}{\Delta(G_W)} \cdot (1 - p_{22} - p_{13}p_{31} - p_{12}p_{23}p_{31} + p_{22}p_{13}p_{31}) \quad (7-23)$$

例 7-3. 某公司生产三种不同牌号的同一产品。根据以往销售的大量统计数据查明：在购买牌号 A 产品的用户中，有 80% 的用户继续购买这种牌号的产品，有 20% 的用户转向购买牌号 B 的产品；在购买牌号 B 产品的用户中，有 20% 的用户转向购买牌号 A 的产品，其余 80% 的用户则转向购买牌号 C 的产品，在购买牌号 C 产品的用户中，20% 的用户转向购买牌号 A 的产品，20% 的用户转向购买牌号 B 的产品，其余 60% 的用户仍购买牌号 C 的产品。该公司应如何安排三种牌号的产品的生产？

这个问题实际上是属于三种状态的 Markov 过程。求得该过

程的稳态概率向量，就是三种牌号产品的生产比例。描述这一过程的转移矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (7-24)$$

对应的随机图如图 7-6 所示。

由上述规则，选取 c 作为节点 j ，得到图 7-7 所示的信号流程图。

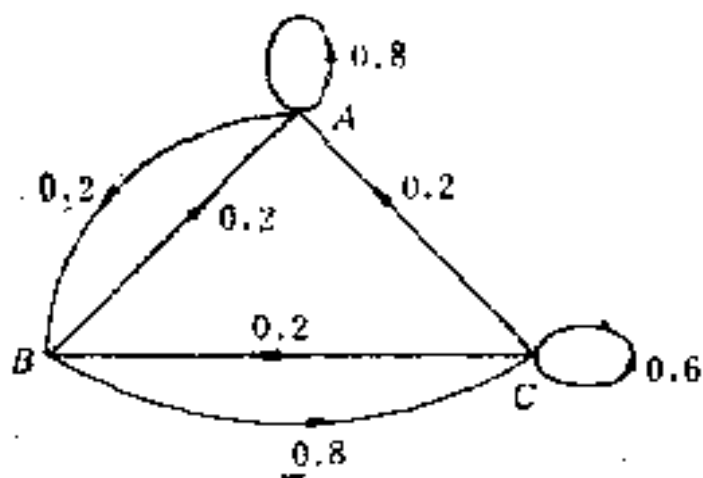


图 7-6

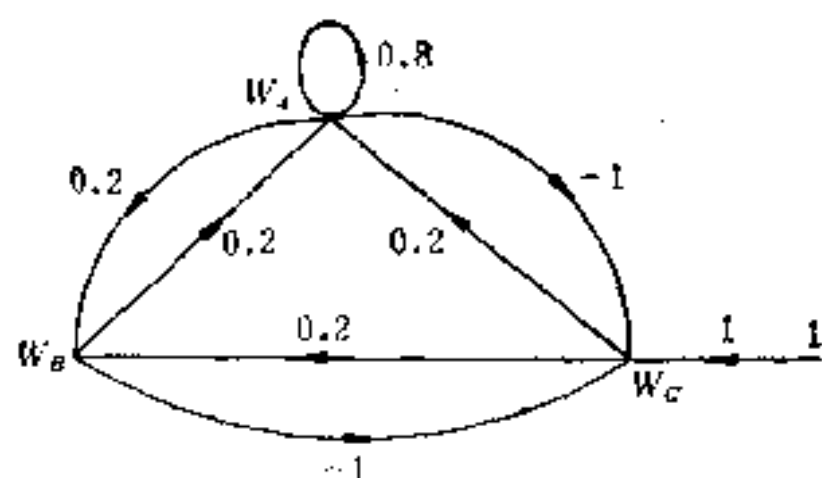


图 7-7

由图 7-7 可求得图行列式：

$$\Delta = 1 - (0.8 + 0.04 - 2 \times 0.2 - 2 \times 0.04) + (-0.2) \times 0.8 = 0.48 \quad (7-25)$$

图 7-7 中从源点至 w_A 、 w_B 和 w_C 的传输：

$$w_A = \frac{1}{\Delta} (0.2 + 0.04) = \frac{0.24}{0.48} = \frac{1}{2} \quad (7-26)$$

$$w_B = \frac{1}{\Delta} [0.2(1 - 0.8) + 0.04] = \frac{0.08}{0.48} = \frac{1}{6} \quad (7-27)$$

$$w_C = \frac{1}{\Delta} (1 - 0.8 - 0.04) = \frac{0.16}{0.48} = \frac{1}{3} \quad (7-28)$$

故三种牌号的产品的生产比例应为 3:1:2。

稳态概率向量 W 只给出了正则 Markov 过程经过无数次转移后在各种状态的概率。它不能表明 P^k 向 W 收敛的速度。我们也不能利用它了解各个时刻状态间的转移概率，如果能将 P^k 作为

k 的函数表示出来, 就可以达到上述目的。当 $k \rightarrow \infty$ 时, 就得到了稳态概率向量。

因为

$$\pi(k+1) = \pi(k)P \quad (7-29)$$

对式 (7-29) 两端取 Z 变换, 有

$$\frac{\Pi(Z) - \pi(0)}{Z} = \Pi(Z)P \quad (7-30)$$

式中 $\Pi(Z)$ 是 $\pi(k)$ 的 Z 变换。

由式 (7-30), 得出

$$\Pi(Z) = \pi(0)(I - ZP)^{-1} \quad (7-31)$$

对式 (7-31) 两端取 Z 的逆变换, 有

$$\pi(k) = \pi(0)[(I - ZP)^{-1} \text{ 的逆 } Z \text{ 变换}] \quad (7-32)$$

由式 (7-32) 可知:

$$P^k = (I - ZP)^{-1} \text{ 的逆 } Z \text{ 变换} \quad (7-33)$$

式 (7-33) 给出了作为 k 的函数的 P^k 的表示式。它不限于正则的 Markov 过程, 可适用于任何的 Markov 过程。

$(I - ZP)^{-1}$ 可用一般矩阵求逆的方法来计算, 但用信号流图方法求逆更为有效。我们只需要简单地将随机图中各条支路的传输乘以 Z , 即可用于计算 $(I - ZP)^{-1}$ 。 $(I - ZP)^{-1}$ 中第 i 行、第 j 列的元素, 就是图中从节点 i 至节点 j 的传输(这时, 需去掉节点 i 的所有入支路)。节点 i 至节点 $1, 2, \dots, n$ 的传输, 构成了 $(I - ZP)^{-1}$ 的第 i 的元素。

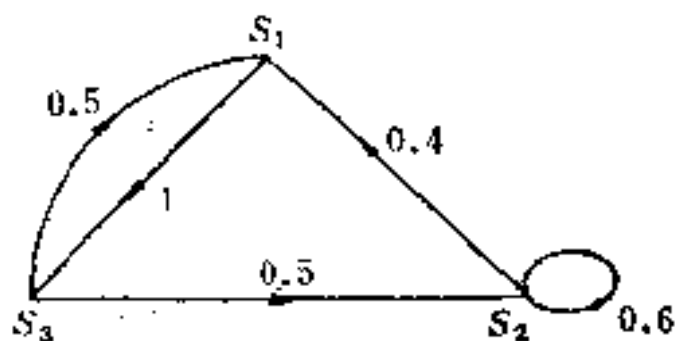


图 7-8

求得 $(I - ZP)^{-1}$ 后, 再进行逆 Z 变换, 即得到 P^k 的表示式。

例 7-4. 考虑图 7-8 所示的 Markov 过程。

$$I - ZP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Z \\ -0.4Z & 0 & 0 \\ -0.5Z & 0.5Z & 1 \end{bmatrix} \quad (7-34)$$

现将图 7-8 中每条支路的传输乘以 Z ，由图 7-8 求得图行列式

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - 0.6Z - 0.5Z^2 - 0.2Z^3 + 0.3Z^3 \\ &= 1 - 0.6Z - 0.5Z^2 + 0.1Z^3\end{aligned}$$

$(I - ZP)^{-1}$ 的第 1 行 第 1, 2, 3 列的元素分别为从节点 S_1 至 S_1, S_2, S_3 的传输。它们分别为

$$(1 - 0.6Z), 0.5Z^2, Z(1 - 0.6Z) \quad (7-35)$$

类似地, 第 2 行的元素分别为

$$0.4Z, (1 - 0.5Z^2), 0.4Z^2 \quad (7-36)$$

第 3 行的元素分别为

$$Z(0.5 - 0.1Z), 0.5Z, (1 - 0.6Z) \quad (7-37)$$

故

$$\begin{aligned}(I - ZP)^{-1} &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 - 0.6Z & 0.5Z^2 & 2(1 - 0.6Z) \\ 0.4Z & (1 - 0.5Z^2) & 0.4Z^2 \\ Z(0.5 - 0.1Z) & 0.5Z & 1 - 0.6Z \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(1 - Z)(1 - 0.174Z)(1 - 0.574Z)} \\ &\quad \times \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} -0.6 & 0 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + Z^2 \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.6 \\ 0 & -0.5 & 0.4 \\ -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (7-38)\end{aligned}$$

式 (7-38) 两端取逆 Z 变换后, 得出

$$P^k = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{4}{13} \end{bmatrix} + \frac{(-0.574)^{k-2}}{3.57}$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{bmatrix} 0.673 & 0.5 & -1.174 \\ -0.223 & -0.17 & 0.4 \\ -0.387 & -0.287 & 0.673 \end{bmatrix} + \frac{(0.174)t^{-2}}{20.35} \\ & \times \begin{bmatrix} 0.074 & -0.5 & 0.426 \\ -0.7 & 0.47 & 0.4 \\ 0.013 & -0.087 & 0.074 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7-39)$$

将不同的 k 值代入式 (7-39), 可得到对应的 P^k . 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 即得到稳态概率向量(它是 P^∞ 中的任一行):

$$P^\infty = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{4}{13} \end{bmatrix} \quad (7-40)$$

如果仅需要稳态概率向量, 可根据上述从随机图导出信号流程图 G_w 的步骤, 由 G_w 直接写出 w , 其结果应与式 (7-40) 相同. 与图 7-8 的随机图对应的 G_w 如图 7-9. 图 7-9 中, 选取节点 S_2 作为节点 i .

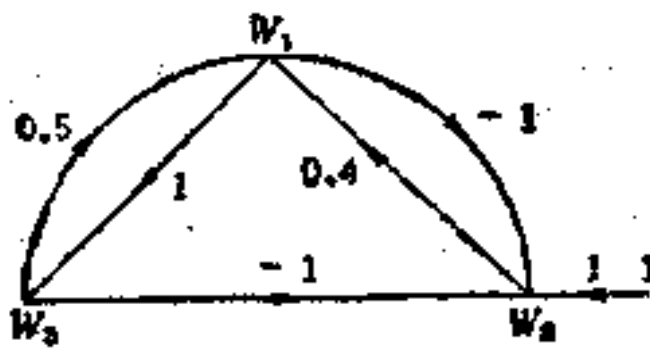


图 7-9

$$\text{从源点到 } w_1 \text{ 的传输} = w_1 = \frac{1}{\Delta} \cdot 0.4 \quad (7-41)$$

$$\text{从源点到 } w_2 \text{ 的传输} = w_2 = \frac{1}{\Delta} \cdot 0.5 \quad (7-42)$$

$$\text{从源点到 } w_3 \text{ 的传输} = w_3 = \frac{1}{\Delta} \cdot 0.4 \quad (7-43)$$

式中图行列式

$$\Delta = 1 - (0.5 + 0.4 + 0.4) = 1.3 \quad (7-44)$$

显见, w_1, w_2, w_3 正是式 (7-40) 中任一行向量.

7-2 半 Markov 过程

半 Markov 过程^[6]的概念是 1954 年提出的. 半 Markov 过程是一个概率系统, 它根据 Markov 过程的转移矩阵从某一状态 S_i 转移到另一状态 S_j (也可以是 S_i), 但转移时间则是一个取决于转移的随机变量. 该过程是一个更为普遍的概率模型. Markov 过程可作为它的特殊情况来处理(即转移时间是常数).

可以这样来想象半 Markov 过程: 当过程处于状态 S_i 后, 马上按转移矩阵选取下一状态 S_j . 但是, 在作出新的转移前, 将在状态 S_i 等待一个时间 τ_{ij} , τ_{ij} 是一随机变量. 该过程有一对应的概率密度函数 $h_{ij}(\tau)$:

$$h_{ij}(\tau) \geq 0, \quad \int_0^{\infty} h_{ij}(\tau) d\tau = 1 \quad (7-45)$$

显然, 需要有 $n \times n$ 的概率密度函数才能定义半 Markov 过程. 在状态 S_i 等待 τ_{ij} 时间后, 过程转移到状态 S_j . 然后, 重复下去.

如果忽略转移时间的随机性, 只考虑转移的瞬间, 则过程就是一般的 Markov 过程. 但是, 如果考虑到等待时间, 则过程将不满足 Chapman-Kolmogorov 方程(除非等待时间是负指数分布). 因此, 仅在转移瞬间, 过程才是 Markov 的. 这就是半 Markov 过程命名的由来.

为了进一步研究半 Markov 过程, 需要引进下列符号:

在状态 S_i 等待时间不超过 t 的概率

$$P(\tau_{ij} \leq t) = \int_0^t h_{ij}(\tau) d\tau \quad (7-46)$$

在状态 S_i 的无条件等待时间的概率密度函数

$$w_i(\tau) = \sum_{j=1}^n p_{ij} h_{ij}(\tau) \quad (7-47)$$

在状态 S_i 和状态 S_i 间的条件平均等待时间

$$\bar{\tau}_{ii} = \int_0^{\infty} \tau h_{ii}(\tau) d\tau \quad (7-48)$$

在状态 S_i 的无条件平均等待时间

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_i &= \sum_{j=1}^n p_{ij} \bar{\tau}_{ij} = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^n p_{ij} \tau h_{ij}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} w_i(\tau) \tau d\tau \end{aligned} \quad (7-49)$$

于是,在状态 S_i 的无条件等待时间不超过 t 的概率

$$W_i(t) = \int_0^t w_i(\tau) d\tau = P(\tau_i \leq t) \quad (7-50)$$

在状态 S_i 的无条件等待时间大于 t 的概率

$$\bar{W}_i(t) = 1 - W_i(t) = P(\tau_i > t) \quad (7-51)$$

现在令 $\phi_{ij}(t)$ 表示系统在时间为零时处于状态 S_i , 时间为 t 时处于状态 S_j 的概率。我们称 ϕ_{ij} 为区间转移概率。应该注意到 ϕ_{ij} 和 p_{ij} 的区别。后者是从 S_i 到 S_j 的一次(条件)转移概率,转移时间是一随机变量;而前者是时间为零时在 S_i , 时间为 t 时在 S_j 的(条件)转移概率,它可以包括多次转移。

$\phi_{ij}(t)$ 可用递推关系求得。系统在时间 t 处于状态 S_j 有两种可能: (1) 系统从状态 S_j 出发 ($i=j$), 并且在时间 t 内一直保持在状态 S_j ; (2) 系统从某一状态 S_i 出发 ($i \neq j$), 在 S_i 等待时间 $t < t$ 后, 一次转移到状态 S_k , 然后在其余的时间 $t - \tau$ 内从状态 S_k 转移(一次或多次)到状态 S_j 。在前一情况下的概率为 $\delta_{ij} \bar{W}_j(t)$, 这里 $\delta_{ij} = 0, i \neq j; \delta_{ij} = 1, i = j$ 。在后一情况下的概率为 $P_{ik} \int_0^t h_{ik}(\tau) \phi_{kj}(t - \tau) d\tau$ 。因为 k 可以是 $1, 2, \dots, n$ 中的任何一个数,故必须对所有的 k 求和,即 $\sum_{k=1}^n P_{ik} \int_0^t h_{ik}(\tau) \phi_{kj}(t - \tau) d\tau$ 。于是

$$\phi_{ij}(t) = \delta_{ij} \bar{W}_j(t) + \sum_{k=1}^n P_{ik} \int_0^t h_{ik}(\tau) \phi_{kj}(t - \tau) d\tau \quad (7-52)$$

递推方程 (7-52) 是积分方程。求它的解不是一件容易的事。现将式 (7-52) 两端进行 Laplace 变换，并注意到两个函数的卷积的 Laplace 变换等于各个函数分别进行变换之积的性质，可得

$$\begin{aligned}\phi_{ij}(s) &= \delta_{ij}\bar{W}_j(s) + \sum_{k=1}^n P_{ik}h_{ik}(s)\phi_{kj}(s) \\ &= \delta_{ij}\bar{W}_j(s) + \sum_{k=1}^n u_{ik}(s)\phi_{kj}(s)\end{aligned}\quad (7-53)$$

式中

$$u_{ik}(s) = P_{ik}h_{ik}(s) \quad (7-54)$$

式 (7-53) 已变成线性方程。我们自然地联想到用信号流图来表示它。对于任一给定的 j ($j = 1, 2, \dots, n$)，可写出下列方程组：

$$\begin{aligned}\phi_{1j}(s) &= \delta_{1j}\bar{W}_j(s) + u_{11}(s)\phi_{1j}(s) + u_{12}(s)\phi_{2j}(s) + \\ &\quad \dots + u_{1n}(s)\phi_{nj}(s) \\ &\dots\dots\dots \\ \phi_{ij}(s) &= \delta_{ij}\bar{W}_j(s) + u_{i1}(s)\phi_{1j}(s) + u_{i2}(s)\phi_{2j}(s) + \\ &\quad \dots + u_{in}(s)\phi_{nj}(s) \\ \phi_{jj}(s) &= \delta_{jj}\bar{W}_j(s) + u_{j1}(s)\phi_{1j}(s) + u_{j2}(s)\phi_{2j}(s) + \\ &\quad \dots + u_{jn}(s)\phi_{nj}(s) \\ &\dots\dots\dots \\ \phi_{nj}(s) &= \delta_{nj}\bar{W}_j(s) + u_{n1}(s)\phi_{1j}(s) + u_{n2}(s)\phi_{2j}(s) + \\ &\quad \dots + u_{nn}(s)\phi_{nj}(s)\end{aligned}\quad (7-55)$$

与式 (7-55) 对应的信号流图如图 7-10 所示。

于是，对于有 n 种状态的半 Markov 过程，可得到 n 个与图 7-10 类似的信号流图。每个信号流图可求出 n 个变量，故 n 个信号流图可求得 n^2 个变量 $\phi_{ij}(s)$ ($1 \leq i, j \leq n$)。

例如，对于有三种状态的半 Markov 过程，有图 7-11 所示的信号流图。

由图 7-11(a) 可求得

$$\phi_{11}(s) = \frac{1}{\Delta} \cdot \bar{W}_1 \cdot (1 - u_{32}u_{23} - u_{21} - u_{33} + u_{21}u_{33}) \quad (7-56)$$

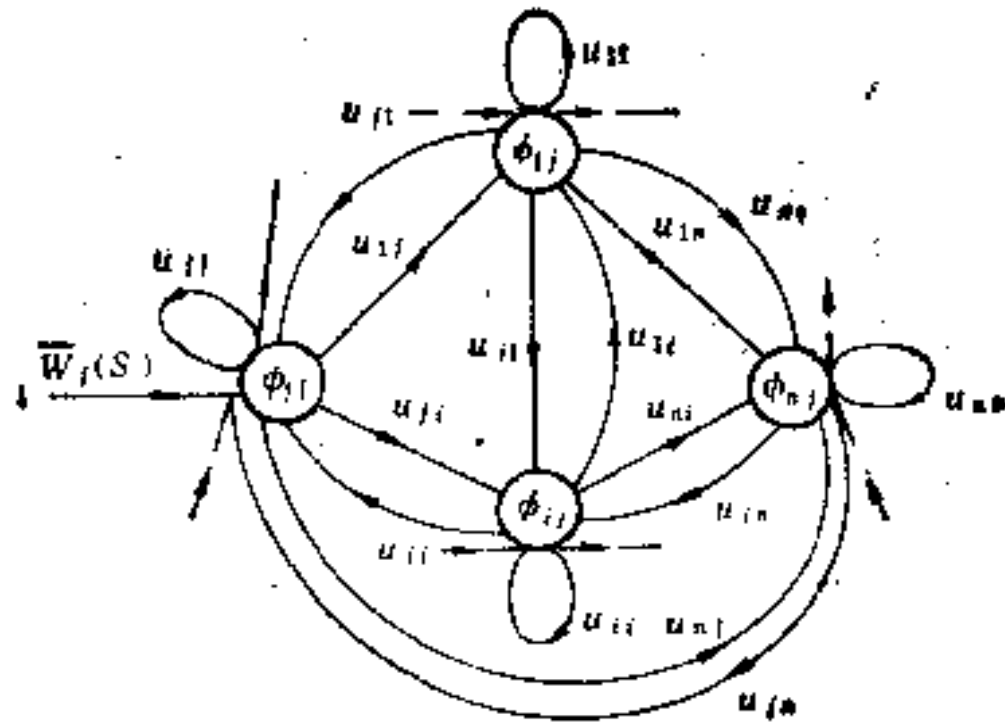


图 7-10

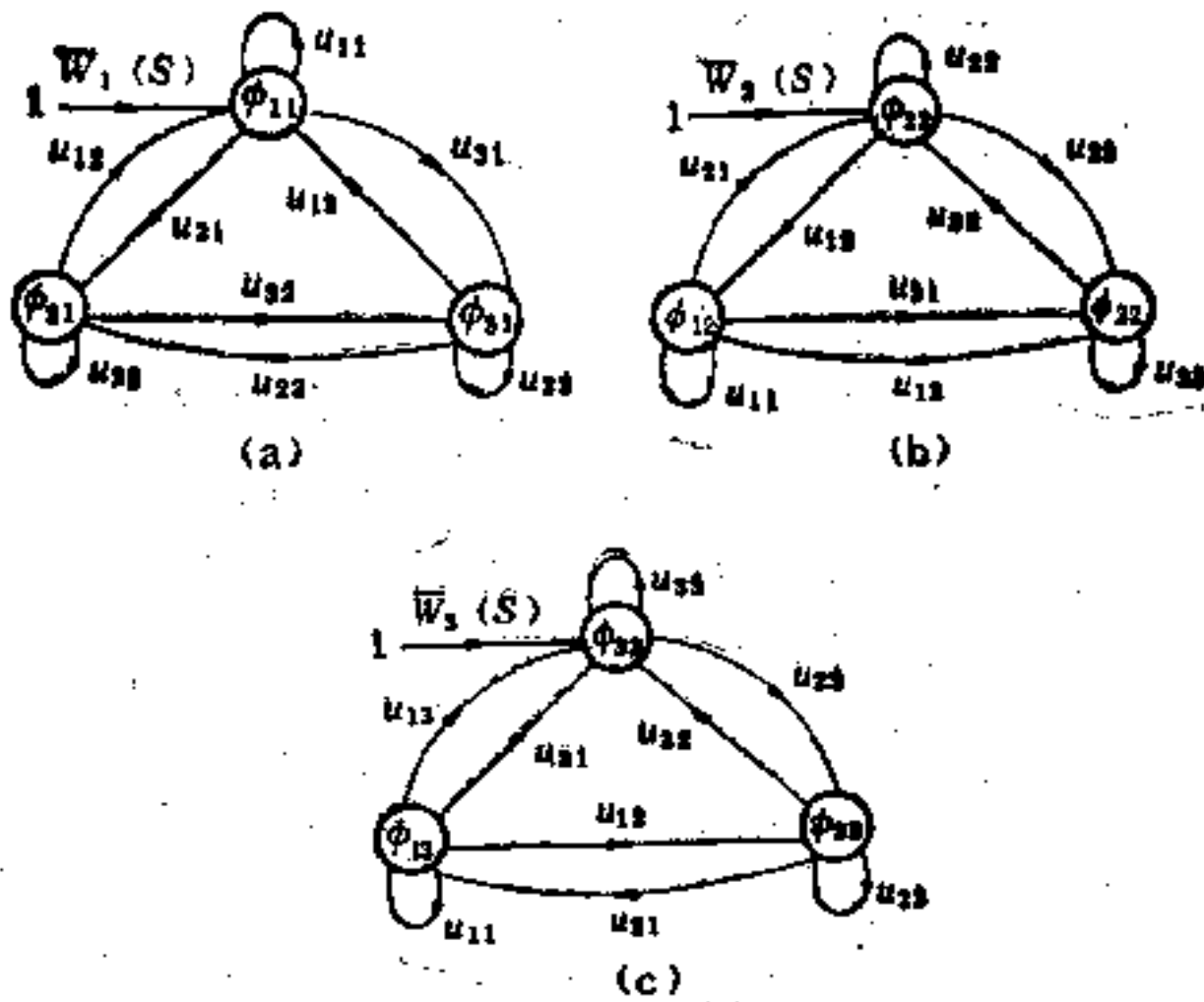


图 7-11

$$\phi_{21}(s) = \frac{1}{\Delta} \cdot \bar{W}_1 \cdot [u_{21}(1 - u_{33}) + u_{31}u_{23}] \quad (7-57)$$

$$\phi_{31}(s) = \frac{1}{\Delta} \cdot \bar{W}_1 \cdot [u_{31}(1 - u_{22}) + u_{21}u_{32}] \quad (7-58)$$

由图 7-11(b) 可求得

$$\phi_{12}(s) = \frac{1}{\Delta} \cdot \bar{W}_1 \cdot [u_{12}(1 - u_{33}) + u_{32}u_{13}] \quad (7-59)$$

$$\phi_{22}(s) = \frac{1}{\Delta} \cdot \bar{W}_2 \cdot (1 - u_{13}u_{31} - u_{11} - u_{33} + u_{11}u_{33}) \quad (7-60)$$

$$\phi_{32}(s) = \frac{1}{\Delta} \bar{W}_3 \cdot [u_{32}(1 - u_{11}) + u_{12}u_{31}] \quad (7-61)$$

由图 7-11(c) 可求得

$$\phi_{13}(s) = \frac{1}{\Delta} \cdot \bar{W}_3 \cdot [u_{13} \cdot (1 - u_{22}) + u_{23}u_{12}] \quad (7-62)$$

$$\phi_{23}(s) = \frac{1}{\Delta} \cdot \bar{W}_3 \cdot [u_{23} \cdot (1 - u_{11}) + u_{13}u_{21}] \quad (7-63)$$

$$\phi_{33}(s) = \frac{1}{\Delta} \cdot \bar{W}_3 \cdot (1 - u_{11} - u_{22} - u_{13}u_{21} + u_{11}u_{22}) \quad (7-64)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - (u_{11} + u_{22} + u_{33} + u_{12}u_{21} + u_{13}u_{31} + u_{23}u_{32} + u_{12}u_{23}u_{31} \\ & + u_{21}u_{13}u_{32}) + u_{11}(u_{22} + u_{33} + u_{23}u_{32}) + u_{22}(u_{11} + u_{33} \\ & + u_{13}u_{31}) + u_{33}(u_{11} + u_{22} + u_{12}u_{21}) - u_{11}u_{22}u_{33} \end{aligned} \quad (7-65)$$

这里,利用了 n 个信号流图来求 n^2 个变量 $\phi_{ij}(s)$ ($1 \leq i, j \leq n$) 是比较麻烦的,为简单起见,可利用图 7-12 所示的一个信号流图求出所有的 $\phi_{ij}(s)$ ($1 \leq i, j \leq n$)。图 7-12 中只画出了 i, j, k 三个节点,其余 $n - 3$ 个节点未表示出来。图 7-12 中从节点 i (所有进入 i 的支路去掉)到节点 θ_j 的传输就是 $\phi_{ij}(s)$ 。实际上,对于求 $\phi_{ij}(s)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 图 7-10 和图 7-12 是互为反向的,故图 7-10 中从 $\bar{W}_i(s)$ 的起点到节点 ϕ_{ij} 的传输,等于图 7-12 中从节点 i 到节点 θ_j 的传输 ($i = 1, 2, \dots, n$)。对于 $j = 1, 2, \dots, n$ ($j \neq i$) 的情况,在与图 7-10 类似的其余 $n - 1$ 个图中求 $\phi_{ij}(s)$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n, j \neq i$) 的传输相应地等价于在图 7-12 中求节点 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 到节点 θ_k ($k = 1, 2, \dots, n, k \neq j$) 的传输。因此,图 7-12 是求 $\phi_{ij}(s)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 时更为简单的图。例如,对于三种状态的情况,可用图 7-13 代替图 7-11。

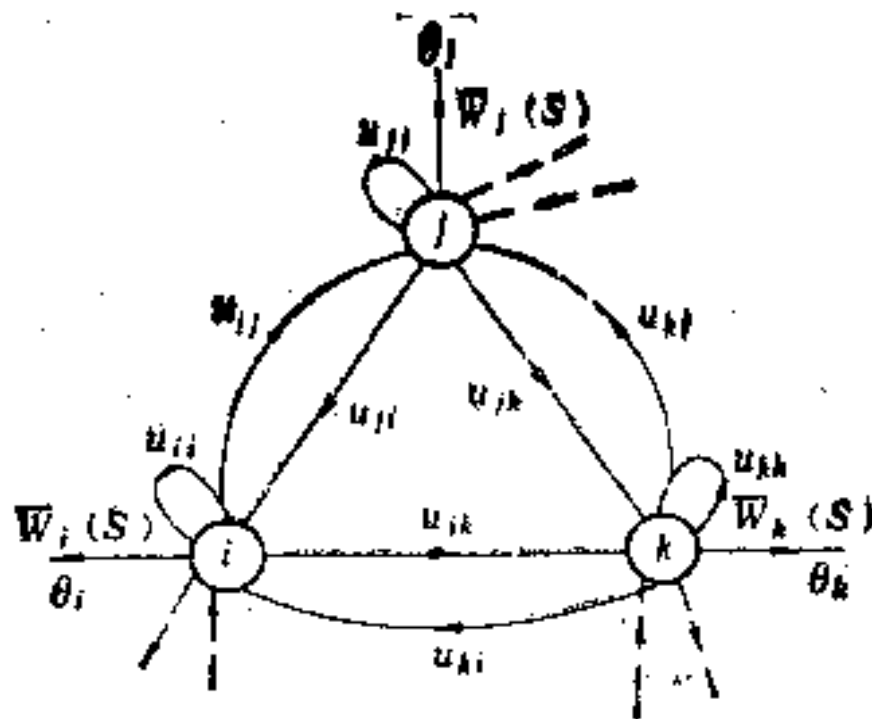


图 7-12

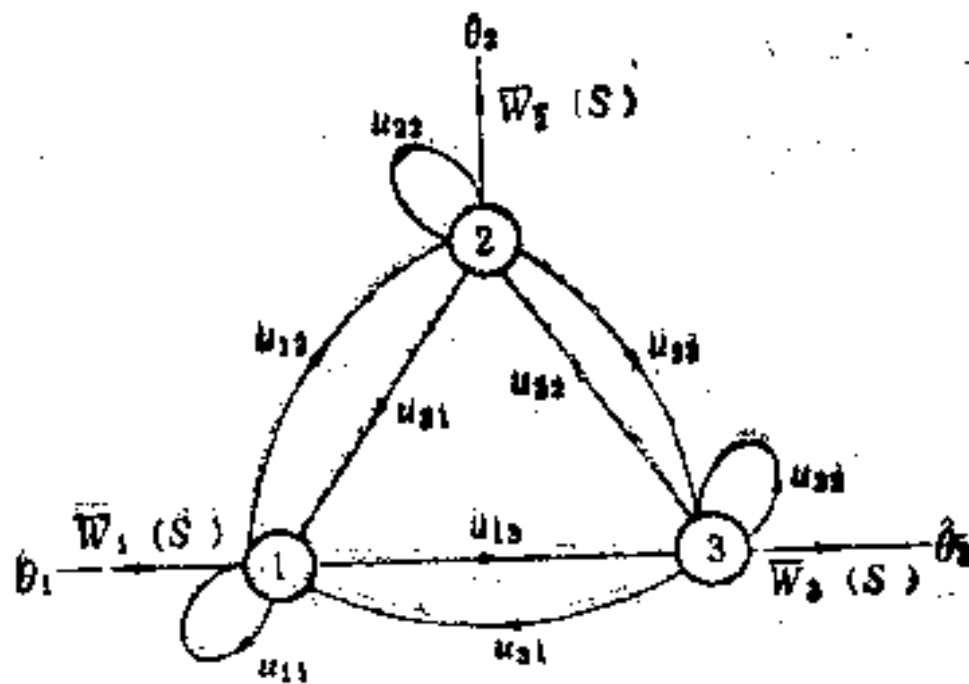


图 7-13

例如,由图 7-13 可写出:

$$\phi_{23}(s) = \frac{1}{\Delta} \cdot [u_{23}(1 - u_{11}) + u_{21}u_{13}] \cdot \bar{W}_1(s) \quad (7-66)$$

显然,式 (7-66) 与式 (7-63) 完全相同。类似地,可证明其余 $\phi_{ij}(i, j = 1, 2, 3, i \neq 2, j \neq 3)$ 也一一相同。

将式 (7-53) 写成矩阵形式,有

$$\Phi(s) = \bar{W}^d(s) + U(s)\Phi(s) \quad (7-67)$$

式中 $\bar{W}^d(s)$ 是 n 阶对角矩阵,它的第 i 个元素为 $\bar{W}_i(s)$ 。故

$$\Phi(s) = [I - U(s)]^{-1}\bar{W}^d(s) \quad (7-68)$$

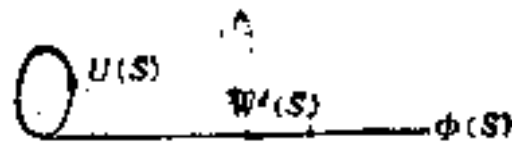


图 7-14

式(7-68)可用矩阵信号流图表示(图7-14)。

系统在 $t \rightarrow \infty$ 时的稳态性能由下式决定:

$$\Phi_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) \quad (7-69)$$

由 Laplace 变换的终值定理,可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi(s) \quad (7-70)$$

故

$$\Phi_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s[I - U(s)]^{-1} \lim_{s \rightarrow 0} \bar{W}^d(s) \quad (7-71)$$

由式(7-50)和式(7-51):

$$\bar{W}_i(t) = 1 - W_i(t) = 1 - \int_0^t W_i(\tau) d\tau \quad (7-72)$$

因此,

$$\bar{W}^d(s) = \frac{1 - W^d(s)}{s} \quad (7-73)$$

因为

$$\lim_{s \rightarrow 0} W^d(s) = I \quad (7-74)$$

故式(7-73)在 $s \rightarrow 0$ 时为不定式 $\frac{0}{0}$, 应用 L'Hôpital 规则

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \bar{W}^d(s) &= \frac{\frac{d}{ds} [1 - W^d(s)]}{\frac{d}{ds} [s]} \Bigg|_{s=0} \\ &= - \frac{d}{ds} W^d(s) \Big|_{s=0} = - \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} W^d(t) e^{-st} dt \Big|_{s=0} \\ &= \int_0^{\infty} t W^d(t) dt = M^d \end{aligned} \quad (7-75)$$

式中 M^d 为 n 阶对角矩阵。由式(7-49)可知, M^d 的第 i 个元素实际上就是在状态 S_i 的无条件平均等待时间 $\bar{\tau}_i$ 。

将式 (7-75) 代入式 (7-71) 中得出

$$\Phi_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s [I - U(s)]^{-1} M^d \quad (7-76)$$

Howard^[6] 曾证明 $\lim_{s \rightarrow 0} s [I - U(s)]^{-1}$ 是各行相同的矩阵, 且其任一行的第 j 行元素为

$$\frac{\pi_j}{\sum_{i=1}^n \pi_i \bar{r}_i} \quad (7-77)$$

故

$$\phi_j = \frac{\pi_j \bar{r}_j}{\sum_{i=1}^n \pi_i \bar{r}_i} \quad (7-78)$$

式中 π_j 是转移矩阵为 P 的 Markov 过程的稳态概率向量, $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i, \dots, \pi_n)$ 的第 j 个元素。

这就是说, 在经过若干次转移后, 系统停留在状态 S_j 的极限条件转移概率与初始状态无关。因此, 如果只考虑系统的稳态性能, 我们仅需计算 n 个变量 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ 。于是, 式 (7-53) 可表示成

$$\phi_j(s) = \delta_{ij} \bar{W}_j(s) + \sum_{k=1}^n u_{kj}(s) \phi_k(s) \quad (7-79)$$

我们仍可利用图 7-12 来求 $\phi_j(s)$ 。因为上面已经指出, 在稳态情况下, 系统停留在某一状态 S_j 的概率与初始状态无关, 故从图 7-12 中求任一点 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 至节点 θ_j 的传输即为 $\phi_j(s)$ 。

例 7-5. 机器看管问题。有两台相同的机器在运行, 一台机器备用。有一名修理工, 在同一时间内只能修理一台机器。故障可以随机发生, 平均故障率 $\lambda = 1$ 。机器的修理时间为指数分布, 均值为 $1/2$ 。因此, 修理率 $\mu = 2$ 。

设系统的状态用机器的故障台数表示。四种状态分别用 0, 1, 2, 3 表示。状态 0 是所有机器均处于良好状态; 状态 1, 2, 3

分别是有 1, 2, 3 台机器处于故障状态。设 r 代表有故障的机器台数, λ_r 和 μ_r 分别是 r 状态下的故障率和修理率。显然, 有下列关系:

- (1) 在 $r = 0$ 时, $\mu_0 = 0$ (因为没有机器可修理) 和 $\lambda_0 = 2$,
- (2) 在 $r = 1$ 时, $\mu_1 = 2, \lambda_1 = 2$, 因为备用机器投入运行,
- (3) 在 $r = 2$ 时, $\mu_2 = 2$, 但 $\lambda_2 = 1$, 因为只有一台机器在运行,
- (4) 在 $r = 3$ 时, $\mu_3 = 2$, 但 $\lambda_3 = 0$, 因为已没有机器在运行。

因此, 可得到表 7-1。

表 7-1

r	0	1	2	3
λ_r	2	2	1	0
μ_r	0	2	2	2

现在首先决定转移概率。因为在状态 0 一定转移到状态 1, 从状态 3 一定转移到状态 2。因此, $p_{01} = p_{32} = 1, p_{0j} = 0 (j \neq 1), p_{3j} = 0 (j \neq 2)$ 。在状态 $r = 1, 2$, 转移到状态 $r + 1$ 的概率是 $p_{r,r+1} = \lambda_r / (\lambda_r + \mu_r)$, 转移到状态 $r - 1$ 的概率是 $\frac{\mu_r}{\lambda_r + \mu_r}$ 。

所有其余的转移概率为零。故转移概率

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (7-80)$$

故障发生和排除的完全随机性导致在状态 r 的无条件等待时间的概率密度函数 W_r , 为均值是 $1/(\lambda_r + \mu_r)$ 的指数分布, 即 $W_r(\tau) = (\lambda_r + \mu_r)e^{-(\lambda_r + \mu_r)\tau}$, 由此可知

$$W_r(\tau) = \sum_k p_{rk} h_{rk}(\tau) \quad (7-81)$$

由式(7-50)和式(7-51)可求得 $W_r(t)$ 和 $\bar{W}_r(t)$ 。由 $\bar{W}_r(t)$ 可得出它的 Laplace 变换。在 r 为不同数值时的 $W_r(\tau)$, $W_r(s)$, $W_r(t)$, $\bar{W}_r(t)$, $\bar{W}_r(s)$ 如表 7-2。

表 7-2

r	$W_r(\tau)$	$W_r(s)$	$W_r(t)$	$\bar{W}_r(t)$	$\bar{W}_r(s)$
0	$2e^{-2\tau}$	$\frac{2}{s+2}$	$1 - e^{-2t}$	e^{-2t}	$1/(s+2)$
1	$4e^{-4\tau}$	$\frac{4}{s+4}$	$1 - e^{-4t}$	e^{-4t}	$1/(s+4)$
2	$3e^{-3\tau}$	$\frac{3}{s+3}$	$1 - e^{-3t}$	e^{-3t}	$1/(s+3)$
3	$2e^{-2\tau}$	$\frac{2}{s+2}$	$1 - e^{-2t}$	e^{-2t}	$1/(s+2)$

由式(7-80)和表 7-2 的 $W_r(s)$, 得出

$$\begin{aligned} u_{01} &= 1 \times \frac{2}{s+2} = \frac{2}{s+2}, & u_{10} &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{s+4} = \frac{2}{s+4}, \\ u_{12} &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{s+4} = \frac{2}{s+4}, & u_{21} &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{s+3} = \frac{2}{s+3}, \\ u_{23} &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{s+3} = \frac{1}{s+3}, & u_{32} &= 1 \times \frac{2}{s+2} = \frac{2}{s+2} \end{aligned} \quad (7-82)$$

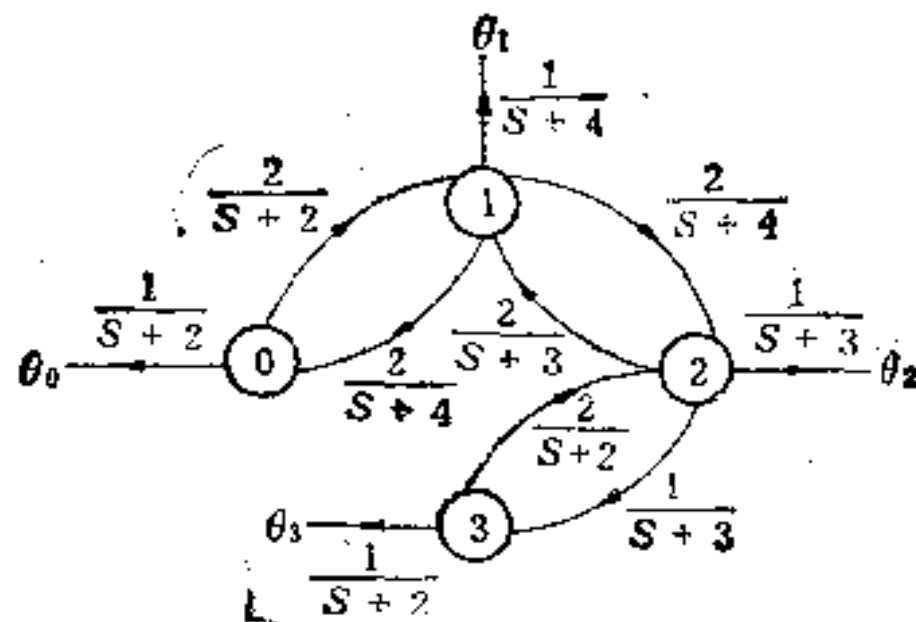


图 7-15

于是,得到图 7-15 所示的信号流图.

现在从图 7-15 中可求得 $\phi_{00}(s)$ (从 ϕ_0 到 θ_0 的传输), $\phi_{01}(s)$ (从 ϕ_0 到 θ_1 的传输), $\phi_{02}(s)$ (从 ϕ_0 到 θ_2 的传输), $\phi_{03}(s)$ (从 ϕ_0 到 θ_3 的传输). 依此类推,可求得 $\phi_{10}, \phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{13}, \phi_{20}, \phi_{21}, \phi_{22}, \phi_{23}, \phi_{30}, \phi_{31}, \phi_{32}, \phi_{33}$ 等.

由 $\phi_{00}(s), \phi_{10}(s), \phi_{20}(s)$ 或 $\phi_{30}(s)$ 与 s 之积再令 $s \rightarrow 0$, 即可求得稳态极限概率 $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_0(t)$. 现取 $\phi_{00}(s) \cdot s$ 之积的极限,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_0(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \phi_{00}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \left[1 - \frac{4}{(s+3)(s+4)} - \frac{2}{(s+2)(s+3)} \right] / \Delta \quad (7-83)$$

式中

$$\Delta = 1 - \left[\frac{4}{(s+2)(s+4)} + \frac{4}{(s+3)(s+4)} + \frac{2}{(s+2)(s+3)} \right] + \frac{8}{(s+2)^2(s+3)(s+4)} \quad (7-84)$$

由式 (7-84) 可知,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Delta = 0 \quad (7-85)$$

故式 (7-83) 为不定式,应用 L'Hôpital 规则:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_0(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{ds} \left\{ \frac{s}{s+2} \left[1 - \frac{4}{(s+3)(s+4)} - \frac{2}{(s+2)(s+3)} \right] \right\}}{\frac{d}{ds} (\Delta)} \\ &+ \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{2}{7} \end{aligned} \quad (7-86)$$

类似地,可求得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \phi_{11}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s+4} \left[1 - \frac{2}{(s+2)(s+3)} \right] / \Delta$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{2}{7} \quad (7-87)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_2(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \phi_{22}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \\ &\cdot \frac{1}{s+3} \left[1 - \frac{4}{(s+2)(s+4)} \right] / \Delta \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{2}{7} \quad (7-88) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_3(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \phi_{33}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \\ &\cdot \frac{1}{s+2} \left[1 - \frac{4}{(s+2)(s+4)} \right] \\ &= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7} \quad (7-89) \end{aligned}$$

故在长期运行条件下机器全部处于完好状态的概率为 $\frac{2}{7}$ 。机器有 1, 2, 3 台处于故障状态的概率分别为 $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{7}$ 和 $\frac{1}{7}$ 。

如果由式 (7-13), (7-48), (7-49) 和式 (7-78), 也可求得相同的结果。但是, 需要计算 Markov 过程的稳态概率向量以及各种状态下的无条件平均等待时间, 不及信号流图方法直观和方便。

下面, 将利用信号流图来分别讨论半 Markov 过程中的一些问题。从中可看出信号流图给这一过程提供了很有用的图形描述。

1. 考虑转移次数的区间转移概率

上面讨论的区间转移概率 $\phi_{ij}(t)$, 表明了系统在 $t=0$ 时处于状态 S_i , 在时间 t 处于状态 S_j 的概率。它没有说明从 S_i 到 S_j

究竟转移多少次。为了考虑转移次数,定义 $\phi_{ij}(k, t)$ 是在 0 到 t 时间内从 S_i 经 k 次转移至 S_j 的概率。

若系统在 0 到 t 时间内一直停留在状态 S_i , 显然有下列关系:

$$\phi_{ij}(0, t) = \delta_{ij} \bar{W}_i(t), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (7-90)$$

考虑到转移次数,有下列递推关系:

$$\phi_{ij}(k+1, t) = \sum_{k=1}^n p_{ik} \int_0^t h_{ik}(\tau) \phi_{kj}(k, t-\tau) d\tau \quad (7-91)$$

式 (7-91) 也是一个积分方程。与方程 (7-52) 相比, 它多了一个离散变量 k 。因此, 要将式 (7-91) 变为代数方程, 必须对连续变量 t 进行 Laplace 变换, 对离散变量 k 进行 Z 变换。变换的先后次序无关。我们先将式 (7-91) 对 t 进行 Laplace 变换, 得出

$$\phi_{ij}(k+1, s) = \sum_{k=1}^n p_{ik} h_{ik}(s) \phi_{kj}(k, s) \quad (7-92)$$

再将式 (7-92) 对 k 进行 Z 变换, 可得

$$Z^{-1}[\phi_{ij}(Z, s) - \phi_{ij}(0, s)] = \sum_{k=1}^n p_{ik} h_{ik}(s) \phi_{kj}(Z, s) \quad (7-93)$$

故

$$\phi_{ij}(Z, s) = \delta_{ij} \bar{W}_i(s) + Z \sum_{k=1}^n p_{ik} h_{ik}(s) \phi_{kj}(Z, s) \quad (7-94)$$

与式 (7-53) 相比, 式 (7-94) 的第二项中多了因子 Z 。因此, 图 7-13 仍然可以应用, 只需将进入节点 j 的支路传输再乘以 Z 即可。

由 $\phi_{ij}(t)$ 和 $\phi_{ij}(k, t)$ 的定义, 下列关系显然成立:

$$\phi_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{ij}(k, t) \quad (7-95)$$

由式 (7-95) 可得到下列关系:

$$\phi_{ij}(s) = \phi_{ij}(1, s) \quad (7-96)$$

例 7-6. 讨论某单状态的半 Markov 过程。它的等待时间的

概率密度函数

$$h_{11}(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}, \quad \tau \geq 0 \quad (7-97)$$

故

$$h_{11}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \cdot \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau = \frac{\lambda}{s + \lambda} \quad (7-98)$$

因此

$$W_1(s) = p_{11}h_{11}(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda} \quad (7-99)$$

由式(7-50), 有

$$W_1(s) = \int_0^s W_1(\tau) d\tau = \int_0^s \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau = 1 - e^{-\lambda s} \quad (7-100)$$

故

$$\begin{aligned} \bar{W}_1(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} [1 - W_1(s)] ds \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)t} dt = \frac{1}{s + \lambda} \end{aligned} \quad (7-101)$$

描述这一过程的信号流图如图 7-16 所示。



图 7-16

由图 7-16 可得出

$$\phi_{11}(Z, s) = \frac{1}{1 - \frac{Z\lambda}{s + \lambda}} \cdot \frac{1}{s + \lambda} = \frac{1}{s + \lambda} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{s + \lambda}\right) Z} \quad (7-102)$$

对式(7-102)先进行逆 Z 变换, 得出

$$\phi_{11}(k, s) = \frac{1}{s + \lambda} \left(\frac{\lambda}{s + \lambda}\right)^k = \frac{\lambda^k}{(s + \lambda)^{k+1}} \quad (7-103)$$

再对式(7-103)进行 Laplace 逆变换, 得出

$$\phi_{11}(k, t) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, t \geq 0 \quad (7-104)$$

式(7-104)是单状态半 Markov 过程中考虑转移次数的转移概率。将不同的 k 和 t 值代入式(7-104)，即可得到给定时间 t 内转移 k 次的概率。将式(7-104)代入式(7-95)，可得

$$\phi_{11}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!} \right) = 1 \quad (7-105)$$

因为这是单状态的半 Markov 过程，每次转移都要回到状态 S_1 ，故式(7-105)的结果是正确的。

例 7-6 中状态 S_1 的转移概率 $P_{11} = 1$ ，也就是说，过程一直保持在状态 S_1 。我们称这种状态为吸收状态。

2. 瞬态过程

设半 Markov 过程中有一个吸收状态 S_k ，即 $p_{kk} = 1$ 。提出这样的问题：如果系统从某一状态 S_i 出发 ($S_i \neq S_k$)，则进入状态 S_j 所需时间的密度函数是什么？

现考虑与吸收状态 S_k 有关的一部分信号流图，如图 7-17。

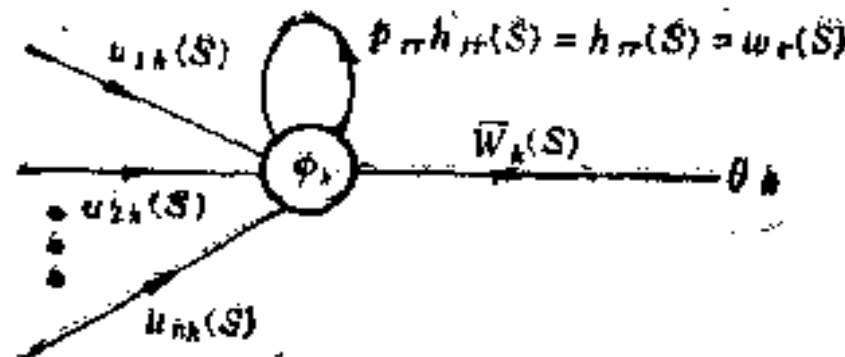


图 7-17

节点 ϕ_k 的自环传输对 $\bar{W}_k(s)$ 的影响是将 $\bar{W}_k(s)$ 变为

$$\frac{\bar{W}_k(s)}{1 - W_k(s)} = \frac{1}{s} \quad (7-106)$$

因此，图 7-17 可简化为图 7-18。

如果系统只有一个吸收状态 S_k ，则 $\phi_{ik}(t)$ 是在时间 t 以前系统进入状态 S_k 的概率。设 $d_{ik}(t)$ 是从状态 S_i 出发的瞬态过程中所需时间的概率密度函数。则 $d_{ik}(t)$ 正好是 $\phi_{ik}(t)$ 的导数。它们

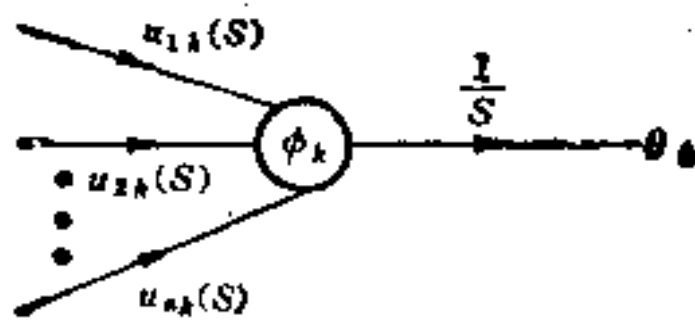


图 7-18

的 Laplace 变换间有下列关系:

$$d_{ik}(s) = s\phi_{ik}(s) \quad (7-107)$$

因为 $\phi_{ik}(s)$ 是信号流图中从节点 ϕ_i 到节点 θ_k 的传输, 故 $d_{ik}(s)$ 是从节点 ϕ_i 到 ϕ_k 的传输. 求出 $d_{ik}(s)$ 后, 进行 Laplace 逆变换可求出 $d_{ik}(t)$, 或计算 $s=0$ 时 $d_{ik}(s)$ 的导数可求出瞬态过程中所需时间的矩. 但是, 我们可直接利用信号流图求得瞬态过程中在每种状态所花费的平均时间.

设 $x_{ij}(t)$ 是一与状态和时间有关的函数. 如果系统从状态 S_i 出发, 并于时间 t 在状态 S_j , 则 $x_{ij}(t) = 1$; 否则, $x_{ij}(t) = 0$. 设 v_{ij} 是瞬态过程中花费在状态 S_j 的全部时间 (系统从状态 S_i 出发), 则

$$v_{ij} = \int_0^{\infty} x_{ij}(t) dt \quad (7-108)$$

显然, $x_{ij}(t)$ 等于 1 的概率是 $\phi_{ij}(t)$; $x_{ij}(t)$ 等于零的概率是 $1 - \phi_{ij}(t)$. 因此, $x_{ij}(t)$ 的期望值

$$\bar{x}_{ij}(t) = \phi_{ij}(t) \quad (7-109)$$

故 v_{ij} 的期望值

$$\begin{aligned} \bar{v}_{ij}(t) &= \int_0^{\infty} \bar{x}_{ij}(t) dt = \int_0^{\infty} \phi_{ij}(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \phi_{ij}(t) e^{-st} dt \Big|_{s=0} \\ &= \phi_{ij}(s) \Big|_{s=0} \end{aligned} \quad (7-110)$$

因此, 在状态 S_i 所花费时间的期望值就是信号流图中从节点 ϕ_i 到输出节点 θ_i 的传输 (在 $s=0$ 时算出).

因为有下列关系:

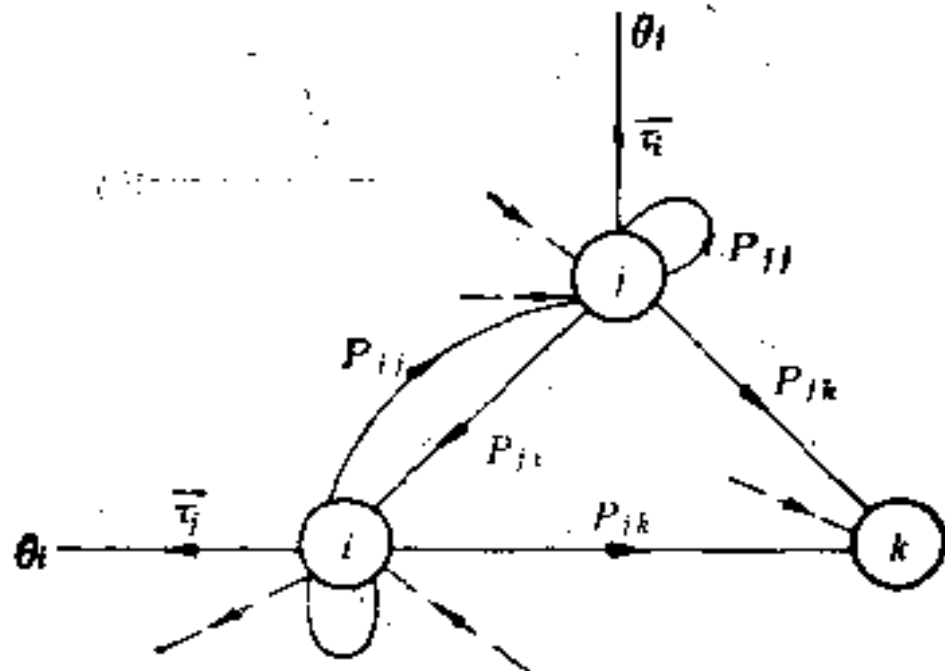


图 7-19

$$\lim_{s \rightarrow 0} h_{ij}(s) = 1 \quad \text{及} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \bar{W}_i(s) = \bar{\tau}_0 \quad (7-111)$$

因此，图 7-12 变成图 7-19。图 7-20 称为转移图。转移图中从节点 i 到节点 θ_i 的传输，就是在进入吸收状态 S_k 前从状态 i 转移到状态 i 的平均时间。瞬态过程中的全部期望时间就是每种瞬态的期望时间之和。因此，信号流图是决定瞬态过程中时间密度函数和平均值的有用工具。

3. 第一次通过时间

系统在初始时间 ($t = 0$) 处于状态 S_i ，则第一次转移到状态 S_j 所需的时间和转移次数是很重要的瞬态过程。当 $S_i = S_j$ 时，转移时间称为递归时间。用 $f_{ij}(k, t)$ 表示从状态 S_i 经过时间 t 并作 k 次转移后第一次转移到状态 S_j 的概率，则 $f_{ij}(k, t)$ 和 $\phi_{ij}(k, t)$ 间有下列关系：

$$\phi_{ij}(k, t) = \sum_{m=1}^n \int_0^t f_{ij}(m, \tau) \phi_{ij}(k-m, t-\tau) d\tau \quad (7-112)$$

系统的初始状态为 S_i ，在经过时间 t 和 k 次转移后到达状态 S_j 的概率可以看成是系统经过时间 τ 和 m 次转移后首次到达状态 S_j ，然后在 $t - \tau$ 时间内在状态 S_j 作 $k - m$ 次虚转移（即 S_j 转移到 S_j ），考虑到所有可能的 m 值（从 1 到 n ）求和并对 τ 在 0 到 t 时间内积分。

若 $k = 0$, 下式显然成立:

$$f_{ij}(0, t) = 0 \quad (7-113)$$

因为没有一次转移不可能从状态 S_i 转移到状态 S_j .

在进行变换前, 先将式 (7-112) 写成:

$$\phi_{ij}(k+1, t) = \sum_{m=0}^n \int_0^t f_{ij}(m+1, t) \phi_{ij}(k-m, t-\tau) d\tau \quad (7-114)$$

将式 (7-114) 两端进行 Laplace 变换:

$$\phi_{ij}(k+1, s) = \sum_{m=0}^n f_{ij}(m+1, s) \phi_{ij}(k-m, s) \quad (7-115)$$

再将式 (7-115) 进行 Z 变换:

$$\begin{aligned} & Z^{-1}[\phi_{ij}(Z, s) - \phi_{ij}(0, s)] \\ &= Z^{-1}[f_{ij}(Z, s) - f_{ij}(0, s)]\phi_{ij}(Z, s) \end{aligned}$$

由式 (7-113), 有:

$$f_{ij}(0, s) = 0 \quad (7-116)$$

因为

$$\phi_{ij}(0, s) = \delta_{ij} \bar{W}_i(s) \quad (7-117)$$

故

$$\phi_{ij}(Z, s) = \delta_{ij} \bar{W}_i(s) + f_{ij}(Z, s) \phi_{ij}(Z, s) \quad (7-118)$$

式 (7-118) 表明了 $\phi_{ij}(k, t)$ 和 $f_{ij}(k, t)$ 的变换间的关系。由式 (7-118) 求出 $f_{ij}(Z, s)$:

$$f_{ij}(Z, s) = \frac{\phi_{ij}(Z, s) - \delta_{ij} \bar{W}_i(s)}{\phi_{ij}(Z, s)} \quad (7-119)$$

例 7-7. 由例 7-6:

$$\bar{W}_1(s) = \frac{1}{s + \lambda}, \quad \phi_{11}(Z, s) = \frac{1}{s + \lambda - \lambda Z} \quad (7-120)$$

由式 (7-119):

$$f_{11}(Z, s) = 1 - \frac{\bar{W}_1(s)}{\phi_{11}(Z, s)} = 1 - \frac{\frac{1}{s + \lambda}}{\frac{1}{s + \lambda - \lambda Z}} = \frac{\lambda Z}{s + \lambda} \quad (7-121)$$

对式(7-121)进行反 Laplace 变换和反 Z 变换, 得出

$$f_{11}(k, t) = \delta(k-1) \cdot \lambda e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7-122)$$

式(7-122)说明了回到状态 1 需要一次转移, 回到状态 1 的时间是指数分布的, 均值为 $1/\lambda$.

如果从式(7-118)中求 $\phi_{ij}(Z, s)$, 则当 $i = j$ 时有

$$\phi_{ii}(Z, s) = \frac{\bar{W}_i(s)}{1 - f_{ii}(Z, s)} \quad (7-123)$$

当 $i \neq j$ 时有

$$\phi_{ij}(Z, s) = \frac{f_{ij}(Z, s)\bar{W}_j(s)}{1 - f_{jj}(Z, s)} \quad (7-124)$$

式(7-123)和式(7-124)是从第一次通过时间的分布求 $\phi_{ij}(k, t)$ 的, 可用下列信号流图来表示(图 7-20).

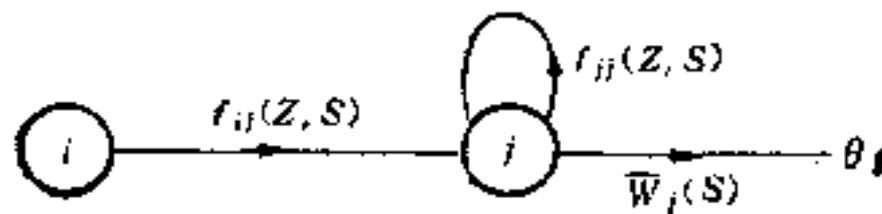


图 7-20

图 7-20 表明了求 $\phi_{ij}(Z, s)$ 的过程: 我们首先将状态 S_j 看成为吸收状态, 求出从节点 i 到节点 j 的传输, 这就是 $f_{ij}(Z, s)$. 然后, 再在原图中求节点 j 回到节点 j 的传输, 即为 $f_{jj}(Z, s)$. 如求 $\phi_{ii}(Z, s)$, 则只需计算 $f_{ii}(Z, s)$, 而不需要计算 $f_{ij}(Z, s)$.

7-3 分析随机网络的变换方法

上节讨论了半 Markov 过程的一些性质. 我们应用变换 (Laplace 变换式 Z 变换) 方法将积分方程组变为线性代数方程组, 然后利用信号流图方法进一步计算有关的变量. 本节我们将详细介绍一种称为 GERT(Graphical Evaluation and Review Technique) 的随机网络. 实质上, 这种网络也就是半 Markov 过程的图形表示. GERT 网络在工业系统中得到广泛的应用, 尤其是在计划管

理,质量控制,可靠性分析,以及投资决策等方面。

GERT网络是有一个或多个吸收状态的半 Markov 过程。网络中的节点表示系统的状态。支路则表示状态间的转移。支路用两个参数表征: 实现概率和转移时间的概率密度函数。

每个中间节点分输入侧和输出侧。对输入侧而言,当至该节点的任一支路实现后,节点即得到实现。对输出侧而言,有两种情况:(1)节点实现后,所有离开该节点的支路都实现。这种输出称为确定性的输出。(2)节点实现后,只能有一条离开该节点的支路得到实现,取决于支路的实现概率。但所有离开该节点的所有支路的实现概率之和为1。这种输出称为概率性的输出。节点的表示形式如图 7-21。

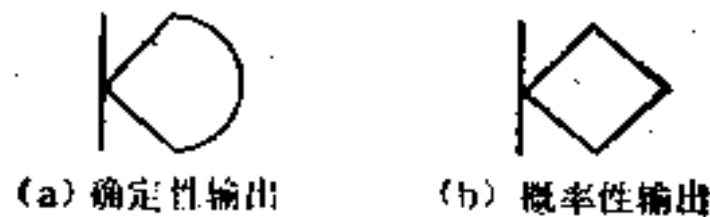


图 7-21

现在讨论一个简单的质量控制系统。

例 7-8. 有一部件在生产中可能有三种情况发生:(1)质量好,直接送到组装线。其概率为 P_1 , 所需时间的概率密度函数为 h_1 。(2)质量不太好,需要返工。其概率为 P_2 , 所需时间的概率密度函数为 h_2 。(3)质量差,作为废品处理。其概率为 P_3 , 时间的概率密度函数为 h_3 。返工后也有三种可能:(1)质量好,直接送组装线。其概率为 P_4 , 密度函数为 h_4 。(2)质量不太好,作为二等品。其概率为 P_5 , 密度函数为 h_5 。(3)质量差,成为废品。其概率为 P_6 , 密度函数为 h_6 。

根据给定情况,得到问题的 GERT 网络和图 7-22 所示。

显然,

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1 \text{ 及 } P_4 + P_5 + P_6 = 1. \quad (7-125)$$

GERT 网络分析的主要目的是需要回答下列典型的问题:

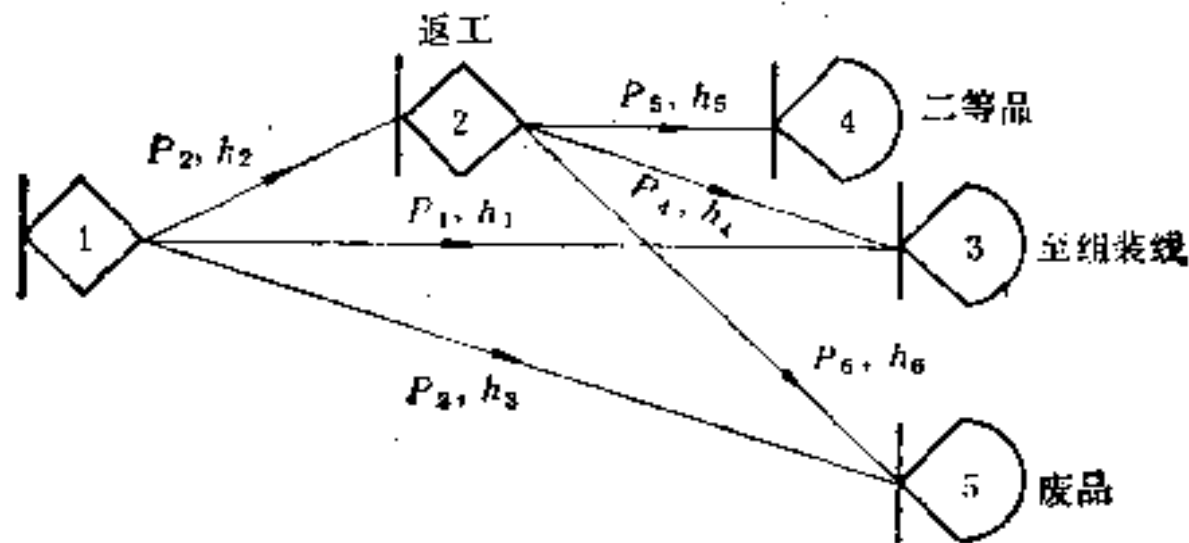


图 7-22

- (1) 部件送到组装线。作为二等品或废品处理的概率是多少?
- (2) 一个部件送到组装线所需时间的均值和方差是多少?
- (3) 如果部件报废,则损失多少时间?

下面,我们将提出解决上述问题的解析方法,基本的思想与上一节中讨论的相似。即用变换方法将积分方程组变为线性代数方程组,然后利用信号流图表示,再由简化规则或 Mason 增益公式写出源点到汇点的传输。

现考虑图 $G = (N, A)$, N 为节点集合,其中中间节点有两种类型(如图 7-21)。 A 为支路集合。节点 i 和节点 j 间的支路 (i, j) 表示一道工序。只有在节点 i 实现后,工序 (i, j) 才能实现, (i, j) 实现的概率为 p_{ij} 。 (i, j) 的实现(转移)时间 y_{ij} 是随机变量,它的条件概率(离散情况)或密度函数(连续情况)为 $f_{ij}(y_{ij})$ 。随机变量 y_{ij} 的矩母函数 $M_{ij}(s)$ 定义如下:

$$M_{ij}(s) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{sy_{ij}} f_{ij}(y_{ij}) dy_{ij} & (\text{连续随机变量}) \\ \sum e^{sy_{ij}} f_{ij}(y_{ij}) & (\text{离散随机变量}) \end{cases} \quad (7-126)$$

对随机变量 y_{ij} , 定义 W 函数如下:

$$W_{ij}(s) = p_{ij} M_{ij}(s) \quad (7-127)$$

应用式 (7-127) 的变换即可将积分函数变成简单的代数函数。因此,我们可定义一个网络 G' , 它在结构上完全和 G 一样,但

它利用单个支路参数 W_{ij} 代替了两个参数 P_{ij} 和 y_{ij} . G 和 G' 中的典型支路分别如图 7-23(a) 和 (b) 所示.

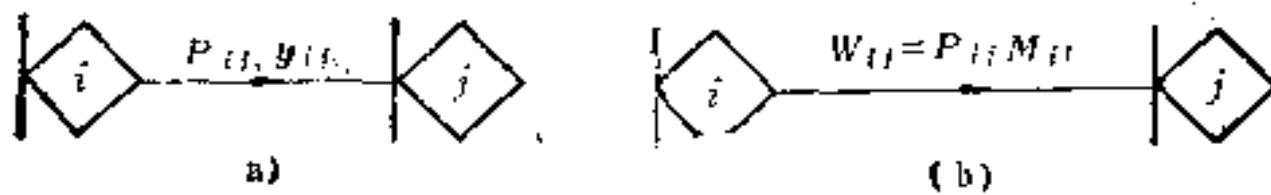


图 7-23

当 G 的各个工序的实现时间都是独立的随机变量时, G' 有下列的重要性质:

(1) 支路串联(图 7-24).

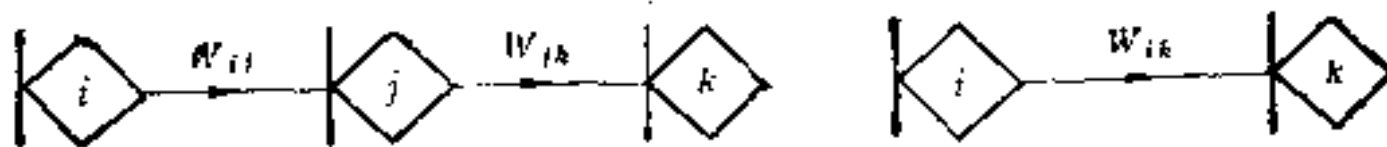


图 7-24

两条串联支路可用一条等效的支路代替. 由定义:

$$W_{ij}(s) = P_{ij}M_{ij}(s) \quad (7-128)$$

$$W_{jk}(s) = P_{jk}M_{jk}(s) \quad (7-129)$$

由于两个独立的随机变量的和的矩母函数等于各个矩母函数之积. 因此, 因为

$$P_{ik} = P_{ij}P_{jk} \quad (7-130)$$

及

$$M_{ik}(s) = M_{ij}(s) \cdot M_{jk}(s) \quad (7-131)$$

故

$$W_{ik}(s) = [P_{ij}M_{ij}(s)][P_{jk}M_{jk}(s)] = W_{ij}(s)W_{jk}(s) \quad (7-132)$$

上述结果可推广到更多支路串联的情况. 等效支路的 W 函数等于串联支路的 W 函数之积.

(2) 支路并联(图 7-25).

两条支路可用一条等效的支路代替. 设等效支路为 (i, j) . 由定义, $W_{ij}(s) = P_{ij}M_{ij}(s)$. 这时:

$$P_{ij} = P_a + P_b \quad (7-133)$$

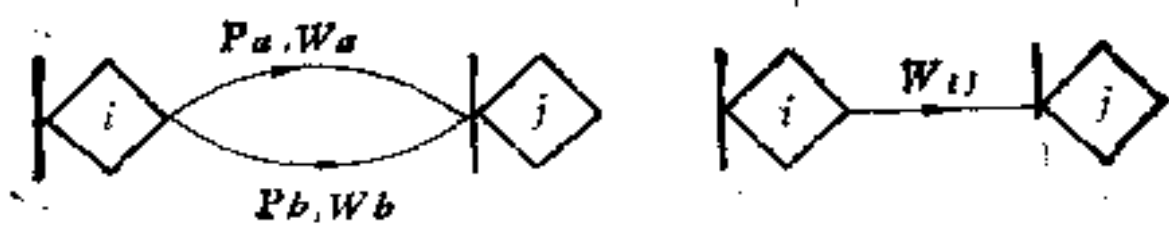


图 7-25

和

$$M_{ij}(s) = \frac{P_a M_a(s) + P_b M_b(s)}{P_a + P_b} \quad (7-134)$$

因此,

$$\begin{aligned} W_{ij}(s) &= (P_a + P_b) \left[\frac{P_a M_a(s) + P_b M_b(s)}{P_a + P_b} \right] \\ &= W_a(s) + W_b(s) \end{aligned} \quad (7-135)$$

上述结果可推广到更多支路并联的情况。等效支路的W函数等于各条并联的支路的W函数之和。

(3) 自环(图 7-26).

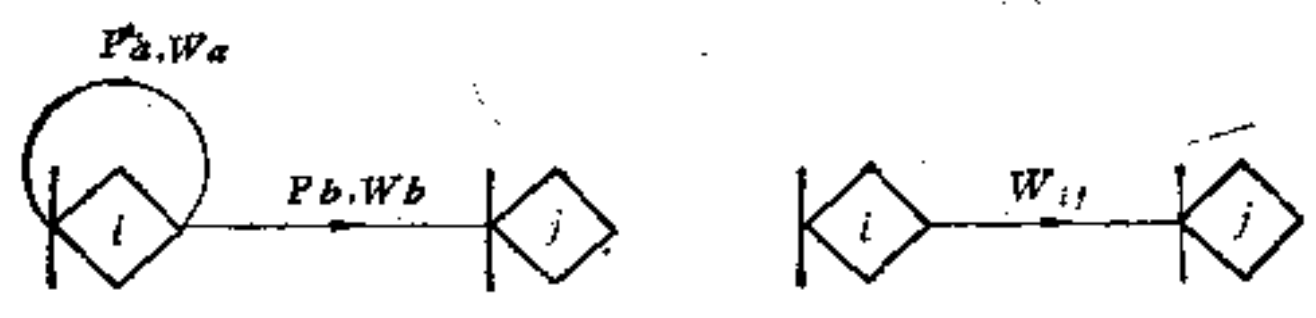


图 7-26

有一个自环和一条支路的网络可简化为只有一条支路的网络。图 7-26 左边的网络可变为图 7-27 所示的等效网络。

设 (i, j) 是图 7-27 所示网络的等效支路, 则由式 (7-132) 及式 (7-135):

$$\begin{aligned} W_{ij} &= W_b + W_a W_b + W_a^2 W_b + \dots = W_b \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} W_a^m \right) \\ &= W_b (1 - W_a)^{-1} \end{aligned} \quad (7-136)$$

故

$$W_{ij}(s) = W_b(s) / (1 - W_a(s))$$

上述三个性质完全与第一章中关于信号流图的简化规则相

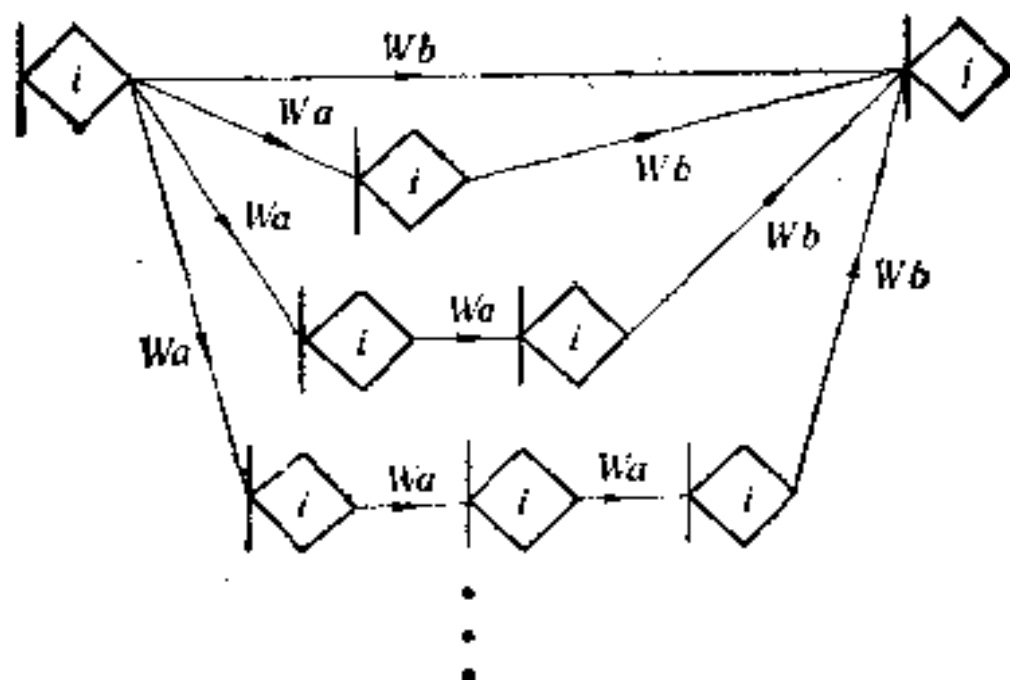


图 7-27

似。因此，可总结分析 GERT 网络的基本步骤如下：

- (1) 用随机网络表示系统。
- (2) 决定网络中所有支路的条件概率和矩母函数。
- (3) 计算每条支路的 W 函数。
- (4) 利用上述基本性质简化网络或由 Mason 增益公式求出从源点到汇点的传输函数 $W_E(s)$ 。
- (5) 由 $W_E(s)$ 可求得从源点到汇点的实现概率 P_E 和平均实现时间 μ ，以及平均实现时间 μ 的方差 σ^2 。

因为

$$W_E(s) = P_E \cdot M_E(s) \quad (7-137)$$

按定义[式 (7-126)]，从源点到汇点的实现时间 y_E 的矩母函数：

$$M_E(s) = \int_0^{\infty} e^{sy_E} f(y_E) dy_E \quad (7-138)$$

式中 $f(y_E)$ 是实现时间 y_E 的密度函数。

因此，

$$M_E(0) = \int_0^{\infty} e^{0y_E} f(y_E) dy_E = 1 \quad (7-139)$$

将式 (7-139) 代入式 (7-137)，可得

$$P_E = W_E(s) |_{s=0} \quad (7-140)$$

故实现概率 P_E 是 $s = 0$ 情况下的传输。我们只需将 $s = 0$ 代入

步骤(4)中求出的 $W_E(s)$ 内即可求得 P_E .

从源点到汇点的平均实现时间

$$\mu = \int_0^{\infty} y_E f(y_E) dy_E \quad (7-141)$$

而

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} M_E(s) \Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{sy_E} f(y_E) dy_E \Big|_{s=0} \\ &= \int_0^{\infty} y_E e^{sy_E} f(y_E) dy_E \Big|_{s=0} = \int_0^{\infty} y_E f(y_E) dy_E \quad (7-142) \end{aligned}$$

比较式(7-141)和式(7-142)可得

$$\mu = \frac{d}{ds} M_E(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{W(0)} \cdot \frac{d}{ds} W_E(s) \Big|_{s=0} \quad (7-143)$$

实现时间 μ 的方差

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_0^{\infty} (y_E - \mu)^2 f(y_E) dy_E = \int_0^{\infty} y_E^2 f(y_E) dy_E - \mu^2 \\ &= \frac{d^2}{ds^2} M_E(s) \Big|_{s=0} - \mu^2 = \frac{1}{W(0)} \cdot \frac{d^2}{ds^2} W_E(s) \Big|_{s=0} - \mu^2 \quad (7-144) \end{aligned}$$

例 7-9. 现讨论半导体材料的处理过程. 材料首先放入熔炉中以改变它的杂质. 熔炉的产物有三种可能: (1) 送入熔炉中重新处理; (2) 作为劣质材料处理; (3) 进一步加以切割. 在切割后也有三种可能: (1) 晶片成品; (2) 收集起来重新作为原材料; (3) 由于切割过程而丢失的材料. 图 7-28 给出材料处理过程的网络. 网络中各支路的数据如表 7-3 所示. 求出: 晶片产品的成品率? 晶片的平均生产时间以及它的方差?

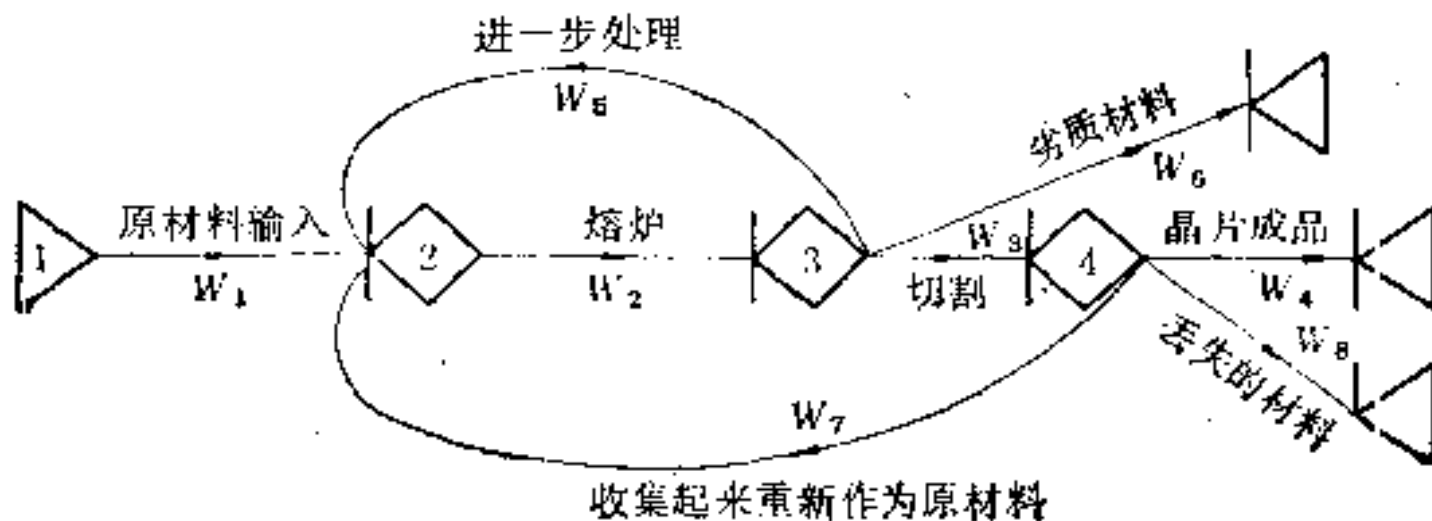


图 7-28

表 7-3

支 路	ρ	分布形式	参数(小时)	矩母函数
(1,2)	1	常数	$a = 1$	e^{-s}
(2,3)	1	正态	$m = 0.5$ $\sigma = 0.1$	$e^{0.5s + (1/2) \times 0.01s^2}$
(3,2)	0.12	正态	$m = 0.1$ $\sigma = 0.1$	$e^{0.1s + (1/2) \times 0.01s^2}$
(3,6)	0.03	常数	$a = 0.25$	$e^{-0.25s}$
(3,4)	0.85	正态	$m = 0.25$ $\sigma = 0.20$	$e^{0.25s + (1/2) \times (0.04)s^2}$
(4,5)	0.75	常数	$a = 0.20$	$e^{-0.2s}$
(4,7)	0.05	常数	$a = 0.05$	$e^{-0.05s}$
(4,2)	0.20	常数	$a = 0.10$	$e^{-0.1s}$

由图 7-28, 利用 Mason 增益公式可求得从节点 1 到节点 5 的传输:

$$W_E(s) = \frac{W_1 W_2 W_3 W_4}{1 - W_2 W_5 - W_1 W_3 W_7} \quad (7-145)$$

将表 7-3 中有关 W 函数代入式 (7-145), 得出

$$W_E(s) = \frac{0.6375 e^{1.95s + 0.025s^2}}{1 - 0.12 e^{0.6s + 0.01s^2} - 0.17 e^{0.85s + 0.025s^2}} \quad (7-146)$$

将 $s = 0$ 代入式 (7-146), 求得晶片产品的成品率

$$P_E = 0.8979 \quad (7-147)$$

故

$$M_E(s) = \frac{W_E(s)}{W_E(0)} = \frac{0.71 e^{1.95s + 0.025s^2}}{1 - 0.12 e^{0.6s + 0.01s^2} - 0.17 e^{0.85s + 0.025s^2}} \quad (7-148)$$

因此, 由式 (7-143) 得出晶片的平均生产时间

$$\mu = \frac{d}{ds} M_E(s) |_{s=0} = 2.255 \text{ (小时)} \quad (7-149)$$

平均生产时间 μ 的方差 σ^2 可由式(7-144)求得

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{d^2}{ds^2} M_E(s) |_{s=0} - \mu^2 = 5.477 - (2.255)^2 \\ &= 0.392 \text{ (小时)} \end{aligned} \quad (7-150)$$

用变换方法分析随机网络的实质是将积分方程组变为线性代数方程组，然后才能用信号流图方法得出从源点到汇点的传输的 W 函数。由 W 函数进行微分运算并以 $s = 0$ 代入才能求得平均时间及其方差。如果需要求得从源点到汇点的时间的密度函数 $f(y_E)$ ，则应将 $W_E(s)$ 进行逆变换。这是非常麻烦的。应指出，这里求矩母函数 $M(s)$ 所用的变换为 e^{sy} ，与 Laplace 变换 e^{-sy} 的区别是相差一个符号。

7-4 分析随机网络的时域方法

随机网络的分析，通常有两种方法：一种是上节中讨论的变换方法；另一种是模拟方法^[3]，即在计算机上根据给定的模型模拟若干次。后者是一种近似的方法。上述两种方法都不能求得网络中从源点到汇点所需时间的概率密度函数。1981年，Endy 和林本铭^[4]首次提出了分析随机网络的时域方法。在时域方法中，如果 W_{ij} 是从节点 i 到节点 j 的支路传输，则随机转移的信息可由下式表示：

$$w_{ij}(t) = p_{ij} h_{ij}(t) \quad (7-151)$$

式中 p_{ij} 是从节点 i 到节点 j 的转移概率， $h_{ij}(t)$ 是完成转移的随机时间的概率密度函数。

图 7-29 表示一个简单的随机网络。从源点 1 到汇点 2 的传输

$$\begin{aligned} T_{21} &= w_{13}(t) * w_{32}(t) + w_{13}(t) * w_{34}(t) * w_{42}(t) \\ &\quad + w_{14}(t) * w_{42}(t) \end{aligned} \quad (7-152)$$

注意,式(7-152)中的乘法是时域中的卷积,即

$$a(t) * b(t) = \int_0^{\infty} a(\tau)b(t - \tau)d\tau.$$

因此,计算式(7-152)后,可得到

$$T(t) = p_T h_T(t) \quad (7-153)$$

式中 p_T 是节点 1 转移到节点 2 的概率, $h_T(t)$ 是从节点 1 转移到节点 2 所需的随机时间的概率密度函数.

在时域中,乘法对应于卷积,除法对应于反卷积. 它们的计算量是相当大的. 时域方法的主要困难就在这里. 如果能使时域法中的乘法和除法运算次数减到最低限度, 则时域法将是一种有实用价值的方法. [4] 中针对具有单源点和单汇点的无环信号流图, 提出了一个使乘法运算次数为最少的启发式算法.

时域法的计算利用了第一章中信号流图的逐步化简原则, 即每次消去一个节点, 直到所有中间节点都消去为止. 最后, 可直接得到从源点到汇点的传输. 对于无环图, 每消去一个节点, 需要做 $m \times n$ 次乘法 (m 和 n 分别是该节点的入度和出度, mn 称为节点的度积, 简称 NDP). 如果图中有 N 个中间节点, 则有 $N!$ 种不同的节点消除顺序, (简称 NES), 每一种顺序对应于一定的乘法次数. 其中一定有乘法次数最少的一种顺序. 例如, 对于图 7-30 所

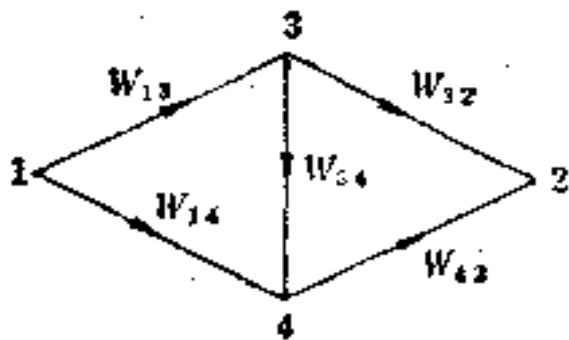


图 7-29

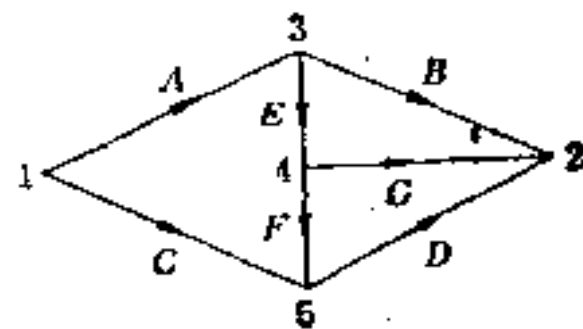


图 7-30

示的信号流图, 共有三个内节点 3, 4, 5. 因此, 有 $3! = 6$ 种不同的 NES:

$$(3, 4, 5) \rightarrow T_1 = AB + AEG + D(AEF + C) \quad (7-154)$$

$$(3, 5, 4) \rightarrow T_2 = AB + AE(G + FD) + CD \quad (7-155)$$

$$(4, 3, 5) \rightarrow T_3 = A(B + EG) + D(AEF + C) \quad (7-156)$$

$$(4, 5, 3) \rightarrow T_4 = A(B + EG + EFD) + CD \quad (7-157)$$

$$(5, 3, 4) \rightarrow T_5 = AB + AE(FD + G) + CD \quad (7-158)$$

$$(5, 4, 3) \rightarrow T_6 = A[B + E(G + FD)] + CD \quad (7-159)$$

上述六种增益表示式是等效的(即利用代数的交换、分配和结合律,可证明它们相等)。但它们所需的乘法次数并不相同,分别为6, 5, 5, 5, 5, 4。其中 NES = (5, 4, 3) 是乘法次数(4)最少的一种 NES。

为了进一步讨论节点消除顺序间的相互影响,定义 $\Delta(j)$ 为节点 j 消除前的所有节点的 NDP 与节点 j 消除后的所有节点的 NDP 之差,即节点 j 消除后对相邻节点的 NDP 所产生的影响。例如,图 7-31 所示的信号流图(a)中,节点 4 和 5 的 NDP 分别为 2 和 4,而节点 3 消去后的图(b)中,节点 4 和 5 的 NDP 分别为 2 和 2。故 $\Delta(3) = (2 + 4) - (2 + 2) = 2$ 。

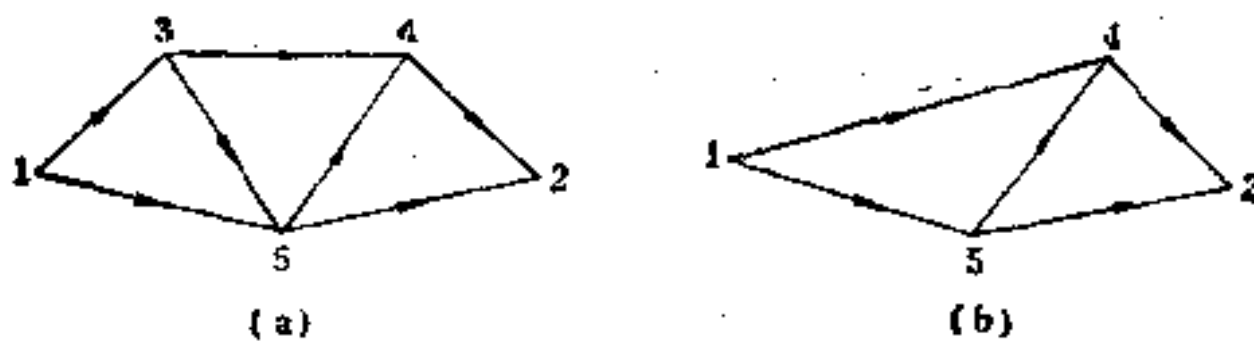


图 7-31

设 $NES = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ 是一个节点消除顺序(对图 G)。这里 s_i 是被消除的第 i 个节点。 G_i 是节点 $(s_1, s_2, \dots, s_{i-1})$ 被消除后得出的图。显然, G_1 就是图 G 。 G_2 是从图 G 中消除节点 s_1 后得出的图,依此类推。

[4] 中采用的决定 NES 的算法如下:

对图 $G_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 选择一个节点 s_i 为被消除节点。 s_i 满足下列条件: $NDP_i - \Delta(i) = \underset{j}{\text{Min}} [NDP_i - \Delta(j)]$ 。如同时有几个节点均满足上述条件,则选择 NDP 为最小的节点。如这时有两个以上的 NDP 为最小的节点,则可任选其中一个节点。

例 7-10. 求图 7-32 中的 NES. 图中有 5 个内节点, 故需迭代 5 次. 结果如表 7-4 所示.

表 7-4

迭代次数	I					II				III			IV		V
节点	3	4	5	6	7	3	4	5	6	4	5	6	4	5	4
NDP _j	4	4	2	3	3	2	4	2	2	2	2	2	2	1	1
$\Delta(j)$	0	-2	0	2	3	2	-2	0	1	0	0	1	0	1	0
NDP _j - $\Delta(j)$	4	6	2	1	0	0	6	2	1	2	2	1	2	0	1
乘法次数	3					2				2			1		1

在第 I 次迭代中, 节点 7 的 $NDP_j - \Delta(7) = 0$ 为最小, 故取节点 7 作为被消除的节点. 这时, 需做的乘法次数为 3. 第 II 次迭代中, 选取节点 3 作为被消除的节点. 在第 III, IV, V 次迭代中分别取节点 6, 5, 4 作为被消除节点. 因此, 得出了 $NES = (7, 3, 6, 5, 4)$, 所需的乘法次数 $= 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 9$ 次.

例 7-11. 通信系统中的信息传输和延迟问题 (如图 7-33). 信息源在节点 1, 接收点在节点 2.

给出各支路的数据如表 7-5.

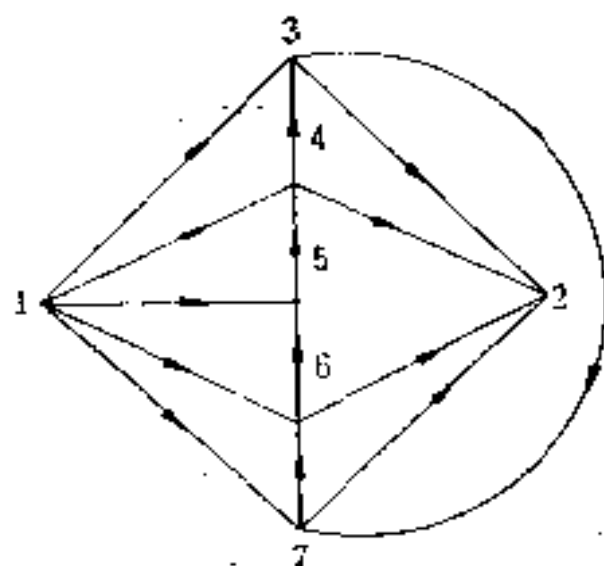


图 7-32

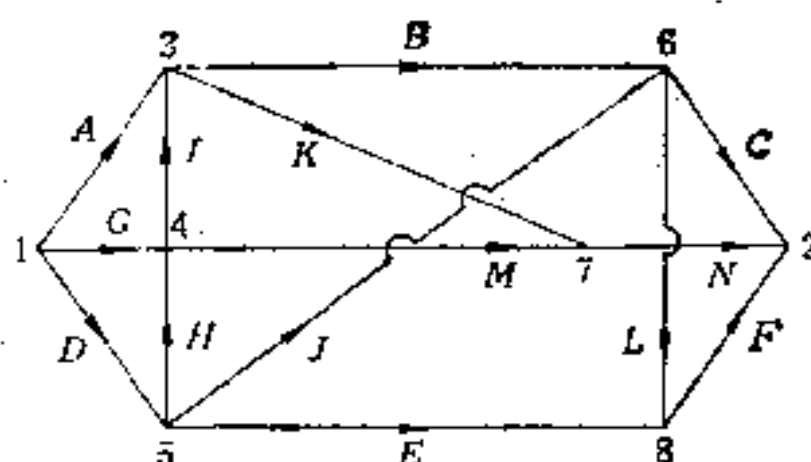


图 7-33

利用上述算法得出 $NES = (8, 6, 7, 5, 4, 3)$, 共需做 11 次乘法(卷积).

从节点 1 到节点 2 的实现概率 $p_T = 1$. $h_T(t)$ 和 $\int_0^{\infty} h_T(t) dt$ 的

表 7-5

支路	概率 p_i	传输时间的密度函数 $h_{ij}(t)$
A	0.3	e^{-t}
B	0.7	$\frac{1}{1.4} e^{-t/1.4}$
C	0.4	$\frac{1}{1.2} e^{-t/1.2}$
D	0.4	e^{-t}
E	0.25	$\frac{1}{1.9} e^{-t/1.9}$
F	1.00	$\frac{1}{1.3} e^{-t/1.3}$
G	0.3	$\frac{1}{1.2} e^{-t/1.2}$
H	0.5	e^{-t}
I	0.5	$\frac{1}{1.2} e^{-t/1.2}$
J	0.25	$\frac{1}{1.3} e^{-t/1.3}$
K	0.3	$\frac{1}{1.5} e^{-t/1.5}$
L	0.6	$\frac{1}{2} e^{-t/2}$
M	0.5	$\frac{1}{1.55} e^{-t/1.55}$
N	1.0	$\frac{1}{1.6} e^{-t/1.6}$

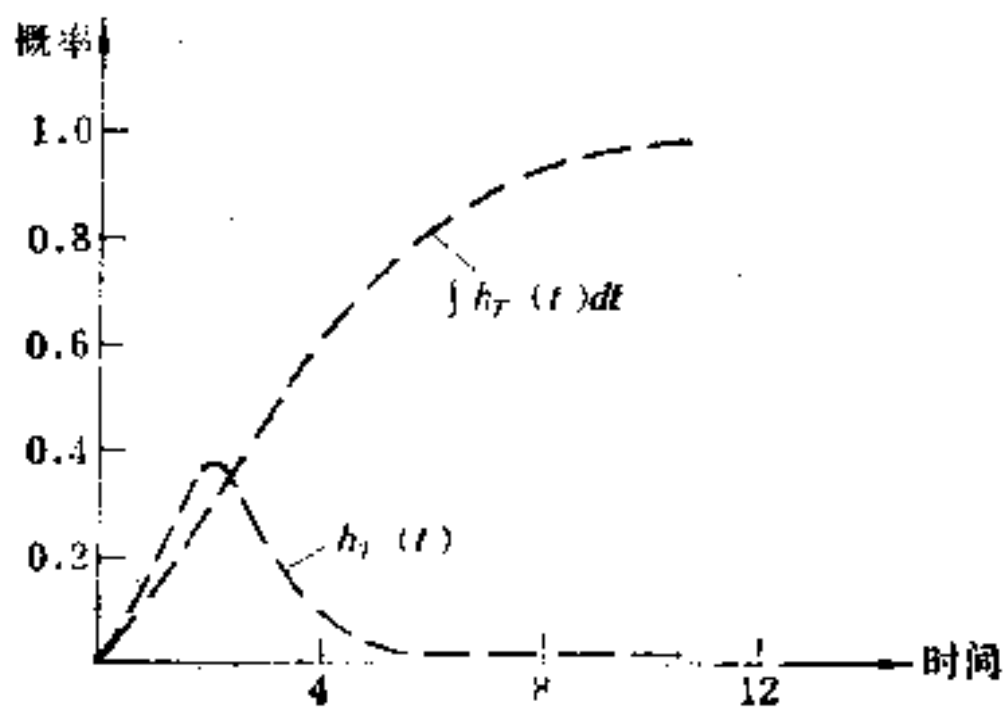


图 7-34

图形如图 7-34 所示。

7-4-1 Endy 和 Lin 算法的改进

[13] 中指出, 对于某些无环信号流图, Endy 和 Lin 的算法并不能使所需的乘法次数最少, 并提出了一个改进的算法。在说明该算法以前, 需要引进一些新的定义和记号。

减小节点。 如果节点 A 消除后, 另一节点 B 的 NDP 得到减小, 则称节点 A 是对节点 B 而言的减小节点(简称为 RN), 或称节点 A 为 B 的减小节点。

减小节点对。 如果节点 A 和 B 互为 RN, 则称节点 A 和 B 构成减小节点对(简称为 RNP)。

增加节点。 如果节点 A 消除后, 另一节点 B 的 NDP 得到增加, 则称节点 A 是对节点 B 而言的增加节点(简称为 IgN), 或称节点 A 为 B 的增加节点, 而节点 B 是 A 的被增加节点(简称为 IdN)。

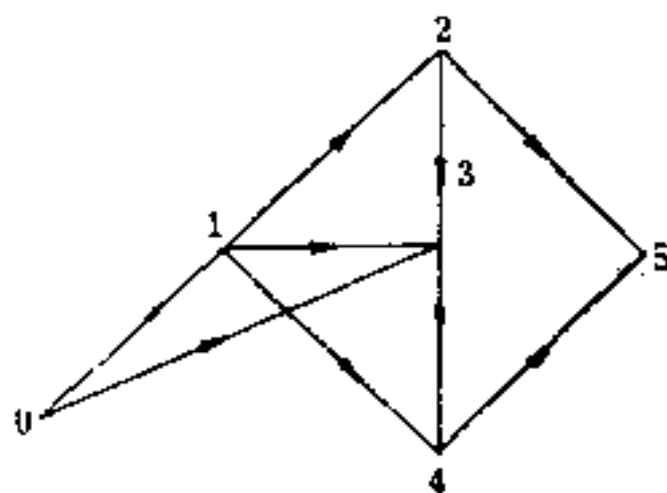


图 7-35

每个节点都是 IgN 的节点集合

用 S_{IgN} 表示。每个节点都是 IdN 的节点集合用 S_{IdN} 表示。

例如, 图 7-35 中, 当节点 1 消去后, 节点 3 的 NDP 由 3 变为 2 (减少 1), 故节点 1 是节点 3 的 RN。类似地, 当节点 3 消去后, 节点 1 的 NDP 减小 1, 而节点 4 的 NDP 增加 1。故节点 3 是节点 1 的 RN, 是节点 4 的 IgN。故节点 4 是节点 3 的 IdN。节点 1 和节点 3 构成了 RNP。因此, $S_{IgN} = (3)$ 和 $S_{IdN} = (4)$ 。

对于一个节点 j , 差值 $NDP_j - \Delta(j)$ 称为该节点的结果。

NDP 最小且结果最小的节点集合。 设信号流图有 N 个内节点组成的集合 $S_N = (N_j, j = 1, 2, \dots, N)$ 。然后, 对每个节点 N_j , 可算出结果 $F = NDP_j - \Delta(j)$, 并从中选出 NDP 最小且结果最小的节点集合。这个节点集合称为 NDP 最小且结果最小的节点集合, 并用 S_L 表示。图 7-35 中节点 1, 2, 3, 4, 5 的 NDP_j ,

表 7-6

节 点	1	2	3	4	5
NDP_j	2	4	3	3	3
$\Delta(j)$	0	2	1	0	0
$NDP_j - \Delta(j)$	2	2	2	3	3

$\Delta(j)$ 和 $NDP_j - \Delta(j)$ 如表 7-6 所示。

集合 $S_{IdNR(\overline{IgN})}$ 。 $S_{IdNR(\overline{IgN})}$ 是 S_{IdN} 的子集，其中每个节点是 RN，但不属于 S_{IgN} 。

集合 S_{LR} ，集合 $S_{LR(\overline{IgN})}$ 。对于 S_L 中的所有节点，其中的 RN 构成集合 S_{LR} 。不属于 S_{IgN} 的 RN 用 $LR(\overline{IgN})$ 表示。 $S_{LR(\overline{IgN})}$ 是 $LR(\overline{IgN})$ 的集合。

使无环信号流图的增益表示式中乘法次数为最少的改进算法如下：

第 1 步。检查信号流图中有无 IdN 。

(1) 如果有 IdN ，找出集合 $S_{IdN} = (N_p; p = 1, 2, \dots, w)$ ，这里 w 是 S_{IdN} 中的节点数。置 $p \leftarrow 1, q \leftarrow 0$ ，这里 p 是 w 个节点的顺序号， q 是 $S_{IdNR(\overline{IgN})}$ 中的节点数。转第 2 步。

第 2 步。检查 N_p 是否为 $S_{IdNR(\overline{IgN})}$ 的节点。

(1) 如果是，将 N_p 放入 $S_{IdNR(\overline{IgN})}$ ，并置 $q \leftarrow q + 1$ 。检查 $p = w$ ？

(1.1) 如果 $p = w$ ，则表明 S_{IdN} 中所有节点已检查完毕，转第 3 步。

(1.2) 如果 $p \neq w$ ，则表明 S_{IdN} 中所有节点未检查完毕，置 $p \leftarrow p + 1$ ，转第 2 步。

(2) 如果不是，检查 $p = w$ ？

(2.1) 如果 $p = w$ ，检查 $q > 0$ ？

(2.1.1) 如果 $q > 0$ ，转第 3 步。

(2.1.2) 如果 $q = 0$ ，转第 4 步。

(2.2) 如果 $p \neq w$ ，置 $p \leftarrow p + 1$ ，转第 2 步。

第3步. 从 $S_{IdN(\overline{IgN})}$ 中选择任一 NDP 最小且结果最小的节点作为本次迭代中被消除的节点. 停止.

第4步. 找出 $S_L = (N_i, i = 1, 2, \dots, l)$, 这里 l 是 S_L 中的节点数. 置 $i \leftarrow 1, j \leftarrow 0$, 这里 i 是 l 个节点的顺序号, j 是 S_L 中没有 $LR(\overline{IgN})$ 的节点数. 转第5步.

第5步. 检查 N_i 有无 $LR(\overline{IgN})$.

(1) 如果有, 检查 N_i 是否为 RNP 的节点.

(1.1) 如果是, 转第6步.

(1.2) 如果不是, 将 $LR(\overline{IgN})$ 放入 $S_{LR(\overline{IgN})}$, 并检查 $i = l$?

(1.2.1) 如果 $i = l$, 转第7步.

(1.2.2) 如果 $i \neq l$, 置 $i \leftarrow i + 1$, 转第5步.

(2) 如果没有, 置 $j \leftarrow j + 1$, 并检查 $j = l$?

(2.1) 如果 $j = l$, 检查 $j = l$?

(2.1.1) 如果 $j = l$, 表明 $S_{LR(\overline{IgN})}$ 为空集. 转第6步.

(2.1.2) 如果 $j \neq l$, 表明 $S_{LR(\overline{IgN})}$ 至少有一个节点. 转第7步.

步.

(2.2) 如果 $j \neq l$, 置 $i \leftarrow i + 1$. 转第5步.

第6步. 取 N_i 作为本次迭代中被消去的节点. 停止.

第7步. 从 $S_{LR(\overline{IgN})}$ 中任选一个 NDP 最小且结果最小的节点作为本次迭代中被消去的节点. 停止.

例 7-11. 求图 7-36 所示信号流图的 NES, 使所需的乘法运算次数最少.

第1次迭代. 信号流图有三个 IdN: 节点 3, 6, 7, 故 $S_{IdN} = (3, 6, 7)$. 节点 6 是节点 7 的 IgN. 节点 3 和 7 都不是 IgN. 节点 3 是节点 7 的 RN,

节点 7 是节点 3 的 RN. 故 $S_{IdNR(\overline{IgN})} = (3, 7)$. 节点 3 和 7 有相同的 NDP $\Delta = 4 - 1 = 3$, 因此, 可任选节点 3 或 7 作为本次

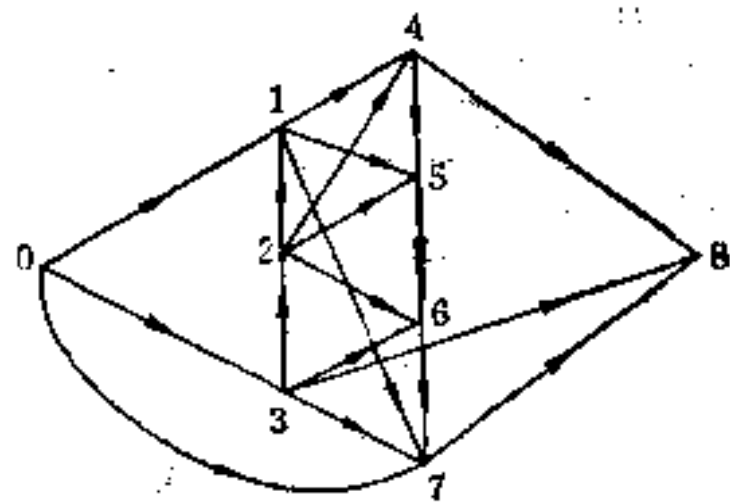


图 7-36

迭代中消除的节点，我们选择节点 3。

第 II 次迭代， $S_{IdN} = (6, 7)$ ，节点 6 是节点 7 的 IgN，节点 7 不是 RN，故 $S_{IdN(IgN)}$ 是空集。因此，求得 $S_L = (2)$ 。虽然节点 5 是节点 2 的 RN，但节点 5 是节点 6 的 IgN，因此， $S_{LR(IgN)}$ 是空集。故取节点 2 作为消去节点。

第 III 次迭代， $S_{IdN} = (6)$ ，但节点 6 不是 RN，故 $S_{IdNR(IgN)}$ 是空集。因此，求得 $S_L = (1)$ 。节点 1 没有 RN，故取节点 1 作为消去节点。

在第 IV, V, VI, VII 次迭代中， S_{IdN} 均为空集，节点 4, 5, 6, 7 分别是 S_L 中的节点，它们没有 RN。因此，节点 4, 5, 6, 7 分别是上述 4 次迭代中的消除节点。

迭代结果如表 7-7 所示。最后得出了 $NES = (3, 2, 1, 4, 5, 6, 7)$ ，所需乘法运算次数为 16 次。

表 7-7

迭代	I							II						III				
节点	1	2	3	4	5	6	7	1	2	4	5	6	7	1	4	5	6	7
NDP _j	6	4	4	4	3	3	4	6	4	4	3	3	3	3	4	3	2	3
$\Delta(j)$	0	-1	1	1	0	0	1	0	4	1	0	-1	0	4	1	-1	0	0
NDP _j - $\Delta(j)$	6	5	3	3	3	3	3	6	0	3	3	4	3	-1	3	4	2	3
乘法次数	4							4						3				

迭代	IV				V			VI		VII
节点	4	5	6	7	5	6	7	6	7	7
NDP _j	2	2	2	2	1	2	2	1	2	1
$\Delta(j)$	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
NDP _j - $\Delta(j)$	1	2	2	2	0	2	2	0	2	1
乘法次数	2				1			1		1

对于图 7-36，如果应用 Endy 和 Lin 的算法，得出的 $NES = (5, 2, 6, 7, 4, 1, 3)$ ，需要 18 次乘法运算，比改进的算法多了 2

次乘法运算.

实际上, Endy 和 Lin 的算法是改进算法在下列情况下的特殊形式:

1. 当 S_{IdN} 为空集时:

(1) S_{LR} (在这情况下 $S_{LR(\overline{IdN})}$ 为空集, 故 $S_{LR(\overline{IdN})}$ 简化为 S_{LR}) 为空集, 或至少有一个 S_L 的节点是 RNP 中的节点.

(2) S_{LR} 不是空集和 $S_L \cap S_{LR} \neq \emptyset$.

2. 当 S_{IdN} 不是空集时:

(1) $S_{IdNR(\overline{IdN})}$ 是空集及 (a) $S_{LR(\overline{IdN})}$ 是空集或 (b) 至少有一个 S_L 的节点是 RNP 中的节点.

(2) $S_{IdNR(\overline{IdN})}$ 不是空集及 $S_L \cap S_{IdNR(\overline{IdN})} \neq \emptyset$.

在其他情况下, Endy 和 Lin 的算法将不能保证乘法次数最少.

[13] 中还指出, 对于可分离的大图可利用分解方法分解为一些小图进行计算.

对于有环信号流图的问题, 因涉及除法(反卷积)运算, 情况要复杂得多. 可以应用逐步消去节点方法或用级联图表示图行列式的思路去进行, 参阅 [14], [15], [16].

参 考 文 献

- [1] Deo, N., Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1974, Ch. 15.
- [2] Elmaghraby, S. E., Some Network Models in Management Science, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 29, Springer-Verlag, 1970.
- [3] Elmaghraby, S. E., Activity Network: Project Planning and Control by Network Models, John Wiley & Sons, 1977.
- [4] Endy, C. E., and Lin, P. M. A Minimization Problem in Systems Characterized by Acyclic Signal Flow Graphs, *IEEE Trans., on Circuits and Systems*, Vol. CAS-28, No. 8, pp. 768—780, 1981.
- [5] Hemmady, J. G., An Analytical Methodology for Solving Complex Stochastic Network Problems, *IEEE Trans., Commun.*, Vol. CoM-20, pp. 81—87, Apr. 1972.
- [6] Howard, R. A., Systems Analysis of Semi-Markov Processes, *IEEE Trans., Mil. Electron.*, pp. 114—124, Apr. 1964.

- [7] Huggins, W. H., Signal Flow Graphs and Random Signals, *Proc. IRE*, Vol. 45, pp. 74—86, Jan. 1957.
- [8] Phillips, D. T., and G-Diaz, A. Fundamentals of Network Analysis, Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1981.
- [9] Pritsker, A. A. B., and Happ, W. W., GERT: Graphical Evaluation and Review Technique, Part I, *Fundamentals*, *The Journal of Industrial Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 267—274, 1966.
- [10] Pritsker, A. A. B., and Whitehouse, G. E., GERT: Graphical Evaluation and Review Technique, Part II, *Probabilistic and Industrial Engineering*, Vol. 17, No. 6, pp. 293—301, 1966.
- [11] Sittler, R. W., Systems Analysis of Discrete Markov Processes, *IRE Trans. on Circuit Theory*, Vol. CT-3, pp. 257—266, 1956.
- [12] Whitehouse, G. E., Systems Analysis and Design Using Network Techniques, Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1973.
- [13] Zhao, Y. C., An Improved Method for Reducing Multiplications in the Gain Expression of Acyclic Signal Flow Graphs, *IEEE Trans.*, Vol. CAS-30, No. 11, pp. 838—841, 1983.
- [14] Zhao, Y. C., On the Modeling of Semi-Markov Systems by Signal Flow Graphs, *Proceedings of 6th Int. Congress on Cybernetics and Systems*, pp. 445—490, 1984.
- [15] Zhao, Y. C., A Method for Reducing Multiplications and Divisions in the Gain Expression of Signal Flow Graphs, *Proceedings of 1983 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 630—632.
- [16] Zhao, Y. C., The Representation of Graph Determinant by Cascade Graph, *Proceedings of 1984 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 1155—1158.

索引

二 画
二阶节 162, 168

三 画
子图 22, 30, 33
电压子图 88
电流子图 88
完全子图 89
广义的 Blackman 公式 275
广义的 Bode 公式 275

四 画
支路 1, 18
入支路 1, 8, 34, 70
出支路 1, 8, 34, 71
反馈支路 3
级联支路 3, 32
积分支路 109, 124
支路传输 1, 156, 214
反向 12, 13~17
反向器 122, 158, 125
反向放大器 122
反向积分器 122
反向微分器 123
反向运算放大器 122
反馈环 123, 125
匹配节 118, 125
不变行列式 30, 32
不接触环 22
不接触环集 22, 57, 58, 91, 94, 97
开关分解方法 243
开关电容网络 247, 259
两相开关电容网络 247
多相开关电容网络 256
双二次节 1, 156
双二次传输函数 156, 161
区间转移概率 309, 319

无条件平均等待时间 309
无条件等待时间的概率密度函数 308

五 画

节点 1, 39
内节点 1
白节点 231, 238, 241
灰节点 236, 238, 241
黑节点 231, 238, 241
反馈节点 3
本征节点 48, 75, 77
级联节点 3
指数节点 48
减小节点 139
增加节点 339
 N_1 型节点 57, 62
 N_2 型节点 57, 62
节点分裂 44
节点因子 72, 73
节点吸收 8, 70
节点度积 335
节点回归差 45, 180
节点环传输 45, 180
节点消除顺序 335
汇点 1, 23, 334
加法器 157, 158

六 画

回归差 45
部分回归差 45, 47
零输入回归差 183
零输出回归差 183, 184
回环法 71, 78
有序的本征节点集 74
有序的本征节点因子 74
有序的本征节点的环差 74
过程

随机过程 296
 Markov 过程 296, 308
 半 Markov 过程 308, 319, 320, 326
 正则 Markov 过程 299, 304
 各态遍历 Markov 过程 299
 时不变的 Markov 过程 297
 吸收状态 322, 326
 传输 2, 36, 103, 106, 333
 传输函数 108, 137, 156
 多节点消除 32
 自环 11, 211

七 画

系统 266
 反馈系统 220
 采样系统 220
 离散系统 296
 随机系统 223
 单速采样系统 224
 多速采样系统 243
 多环反馈系统 67, 271, 292
 连接表 76
 连接增益 58
 状态方程 99, 104
 状态变量 98
 条件平均等待时间 307
 灵敏度 171, 290
 一阶灵敏度 203
 二阶灵敏度 203
 三阶灵敏度 206
 多参数灵敏度 176
 相对灵敏度 185
 标称灵敏度 172
 高阶灵敏度 203
 大变化灵敏度 207
 非标称灵敏度 172
 独立的灵敏度 214
 非独立的灵敏度 214

八 画

补图 58
 残图 3, 7, 10, 12, 8
 无环图 3
 反馈图 3, 10, 15

有环图 3
 电压图 84, 91, 92
 电流图 84, 91, 92
 收缩图 199
 连通图 22
 转移图 299, 324
 标号图 52
 随机图 299, 302
 灵敏度图 214, 215
 强连通图 199

图行列式 25, 29

矩阵信号流图的图行列式 280

图传输 12
 图的连接 57
 图的指数 48
 图的指数节点 48
 图的部分连接 58
 转移时间 308
 转移概率 297, 316, 334
 拓扑实现 145
 典型实现 146
 参考值 185, 287
 采样器 220
 直接传输 181, 184, 272
 实现概率 327
 环 2, 24, 37
 环传输 45

九 画

信号流图 1
 反向信号流图 190
 闭环信号流图 35, 38, 41, 97
 伴随信号流图 191
 采样信号流图 224
 标量信号流图 67
 矩阵信号流图 67, 280
 原始信号流图 81, 83
 复合信号流图 220
 紧凑信号流图 82, 83
 2b 信号流图 81
 两种节点的信号流图 57
 闭环原始信号流图 84, 85
 双二次直接形的信号流图 156
 信号流图的 Tellegen 定理 91

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵
 权矩阵 18
 幺模矩阵 22
 分支矩阵 18, 189
 汇总矩阵 18, 189
 连接矩阵 31
 奇异矩阵 21
 回归比矩阵 271
 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
 广义回归差矩阵 266, 283
 部分回归差矩阵 280
 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
 基本回路矩阵 85
 基本割集矩阵 85
 变元邻接矩阵 38, 39
 转移矩阵 297
 矩母函数 328, 333
 脉冲变换 222, 224
 树 80
 树支路 80
 树支路电压 80, 84
 树支路电流 81, 84
 树支路阻抗 81, 84
 结果 339, 341
 十 画
 流图 57
 核心环 147
 十 一 画
 符号网络函数 83, 85, 88, 96
 随机网络 326
 十 二 画
 最小本征集 48, 52, 56

最优拓扑法 68, 74
 最优拓扑法的路 74
 最优拓扑法的树 75
 割集 80
 链 80
 链支路 80
 链支路电压 81, 84
 链支路电流 81, 84
 链支路导纳 81, 84
 等效的非同构图 5

十 三 画

概率向量 298
 初始概率向量 298
 概率密度函数 308
 源点 1, 23, 29, 334
 路 2
 闭路 2
 前向路 2
 路传输 2, 65, 72

十 四 画

稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

覆盖表 49, 55
 覆盖集 88, 94, 95, 97

GERT 296, 326, 327, 331
 Laplace 变换 99, 222, 314, 334
 Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101,
 198, 211, 296, 331, 333
 Sedlar-Bekey 增益公式 233
 Z变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵
 权矩阵 18
 幺模矩阵 22
 分支矩阵 18, 189
 汇总矩阵 18, 189
 连接矩阵 31
 奇异矩阵 21
 回归比矩阵 271
 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
 广义回归差矩阵 266, 283
 部分回归差矩阵 280
 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
 基本回路矩阵 85
 基本割集矩阵 85
 变元邻接矩阵 38, 39
 转移矩阵 297
 矩母函数 328, 333
 脉冲变换 222, 224
 树 80
 树支路 80
 树支路电压 80, 84
 树支路电流 81, 84
 树支路阻抗 81, 84
 结果 339, 341
 十 画
 流图 57
 核心环 147
 十 一 画
 符号网络函数 83, 85, 88, 96
 随机网络 326
 十 二 画
 最小本征集 48, 52, 56

最优拓扑法 68, 74
 最优拓扑法的路 74
 最优拓扑法的树 75
 割集 80
 链 80
 链支路 80
 链支路电压 81, 84
 链支路电流 81, 84
 链支路导纳 81, 84
 等效的非同构图 5

十 三 画

概率向量 298
 初始概率向量 298
 概率密度函数 308
 源点 1, 23, 29, 334
 路 2
 闭路 2
 前向路 2
 路传输 2, 65, 72

十 四 画

稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

覆盖表 49, 55
 覆盖集 88, 94, 95, 97

 GERT 296, 326, 327, 331
 Laplace 变换 99, 222, 314, 334
 Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
 Sedlar-Bekey 增益公式 233
 Z 变换 305, 320, 325

矩阵
 权矩阵 18
 幺模矩阵 22
 分支矩阵 18, 189
 汇总矩阵 18, 189
 连接矩阵 31
 奇异矩阵 21
 回归比矩阵 271
 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
 广义回归差矩阵 266, 283
 部分回归差矩阵 280
 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
 基本回路矩阵 85
 基本割集矩阵 85
 变元邻接矩阵 38, 39
 转移矩阵 297
 矩母函数 328, 333
 脉冲变换 222, 224
 树 80
 树支路 80
 树支路电压 80, 84
 树支路电流 81, 84
 树支路阻抗 81, 84
 结果 339, 341

十 画

流图 57
 核心环 147

十一 画

符号网络函数 83, 85, 88, 96
 随机网络 326

十二 画

最小本征集 48, 52, 56

最优拓扑法 68, 74
 最优拓扑法的路 74
 最优拓扑法的树 75
 割集 80
 链 80
 链支路 80
 链支路电压 81, 84
 链支路电流 81, 84
 链支路导纳 81, 84
 等效的非同构图 5

十三 画

概率向量 298
 初始概率向量 298
 概率密度函数 308
 源点 1, 23, 29, 334
 路 2
 闭路 2
 前向路 2
 路传输 2, 65, 72

十四 画

稳态概率向量 300, 304, 307

十八 画

覆盖表 49, 55
 覆盖集 88, 94, 95, 97

GERT 296, 326, 327, 331
 Laplace 变换 99, 222, 314, 334
 Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
 Sedlar-Bekey 增益公式 233
 Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97
- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵
 权矩阵 18
 幺模矩阵 22
 分支矩阵 18, 189
 汇总矩阵 18, 189
 连接矩阵 31
 奇异矩阵 21
 回归比矩阵 271
 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
 广义回归差矩阵 266, 283
 部分回归差矩阵 280
 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
 基本回路矩阵 85
 基本割集矩阵 85
 变元邻接矩阵 38, 39
 转移矩阵 297
 矩母函数 328, 333
 脉冲变换 222, 224
 树 80
 树支路 80
 树支路电压 80, 84
 树支路电流 81, 84
 树支路阻抗 81, 84
 结果 339, 341

十 画

流图 57
 核心环 147

十一 画

符号网络函数 83, 85, 88, 96
 随机网络 326

十二 画

最小本征集 48, 52, 56

最优拓扑法 68, 74
 最优拓扑法的路 74
 最优拓扑法的树 75
 割集 80
 链 80
 链支路 80
 链支路电压 81, 84
 链支路电流 81, 84
 链支路导纳 81, 84
 等效的非同构图 5

十三 画

概率向量 298
 初始概率向量 298
 概率密度函数 308
 源点 1, 23, 29, 334
 路 2
 闭路 2
 前向路 2
 路传输 2, 65, 72

十四 画

稳态概率向量 300, 304, 307

十八 画

覆盖表 49, 55
 覆盖集 88, 94, 95, 97

GERT 296, 326, 327, 331
 Laplace 变换 99, 222, 314, 334
 Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
 Sedlar-Bekey 增益公式 233
 Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十 一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十 二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十 三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十 四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十 八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z变换 305, 320, 325

矩阵
 权矩阵 18
 幺模矩阵 22
 分支矩阵 18, 189
 汇总矩阵 18, 189
 连接矩阵 31
 奇异矩阵 21
 回归比矩阵 271
 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
 广义回归差矩阵 266, 283
 部分回归差矩阵 280
 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
 基本回路矩阵 85
 基本割集矩阵 85
 变元邻接矩阵 38, 39
 转移矩阵 297
 矩母函数 328, 333
 脉冲变换 222, 224
 树 80
 树支路 80
 树支路电压 80, 84
 树支路电流 81, 84
 树支路阻抗 81, 84
 结果 339, 341

十 画

流图 57
 核心环 147

十一 画

符号网络函数 83, 85, 88, 96
 随机网络 326

十二 画

最小本征集 48, 52, 56

最优拓扑法 68, 74
 最优拓扑法的路 74
 最优拓扑法的树 75
 割集 80
 链 80
 链支路 80
 链支路电压 81, 84
 链支路电流 81, 84
 链支路导纳 81, 84
 等效的非同构图 5

十三 画

概率向量 298
 初始概率向量 298
 概率密度函数 308
 源点 1, 23, 29, 334
 路 2
 闭路 2
 前向路 2
 路传输 2, 65, 72

十四 画

稳态概率向量 300, 304, 307

十八 画

覆盖表 49, 55
 覆盖集 88, 94, 95, 97

GERT 296, 326, 327, 331
 Laplace 变换 99, 222, 314, 334
 Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
 Sedlar-Bekey 增益公式 233
 Z 变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z变换 305, 320, 325

矩阵

- 权矩阵 18
- 幺模矩阵 22
- 分支矩阵 18, 189
- 汇总矩阵 18, 189
- 连接矩阵 31
- 奇异矩阵 21
- 回归比矩阵 271
- 回归差矩阵 266, 271, 276, 288
- 广义回归差矩阵 266, 283
- 部分回归差矩阵 280
- 零回归差矩阵 266, 272, 273, 277
- 基本回路矩阵 85
- 基本割集矩阵 85
- 变元邻接矩阵 38, 39
- 转移矩阵 297
- 矩母函数 328, 333
- 脉冲变换 222, 224
- 树 80
 - 树支路 80
 - 树支路电压 80, 84
 - 树支路电流 81, 84
 - 树支路阻抗 81, 84
- 结果 339, 341

十 画

- 流图 57
- 核心环 147

十一 画

- 符号网络函数 83, 85, 88, 96
- 随机网络 326

十二 画

- 最小本征集 48, 52, 56

- 最优拓扑法 68, 74
- 最优拓扑法的路 74
 - 最优拓扑法的树 75
- 割集 80
- 链 80
 - 链支路 80
 - 链支路电压 81, 84
 - 链支路电流 81, 84
 - 链支路导纳 81, 84
- 等效的非同构图 5

十三 画

- 概率向量 298
 - 初始概率向量 298
 - 概率密度函数 308
- 源点 1, 23, 29, 334
- 路 2
 - 闭路 2
 - 前向路 2
 - 路传输 2, 65, 72

十四 画

- 稳态概率向量 300, 304, 307

十八 画

- 覆盖表 49, 55
- 覆盖集 88, 94, 95, 97

- GERT 296, 326, 327, 331
- Laplace 变换 99, 222, 314, 334
- Mason 增益公式 1, 23, 29, 37, 68, 101, 198, 211, 296, 331, 333
- Sedlar-Bekey 增益公式 233
- Z 变换 305, 320, 325