

线性系统理论

段广仁 编著

哈尔滨工业大学出版社





1745085

线性系统理论

段广仁 编著



哈尔滨工业大学出版社



北师大图 B1357329

内 容 简 介

本书系统地阐述了以状态空间方法为主的线性系统的时间域理论。全书共分十二章：第一章介绍与本书密切相关的一些数学基础知识；第二章介绍线性系统的数学描述；第三章至第五章阐述线性系统的分析理论，分别介绍线性系统的运动分析、能控性和能观性分析以及稳定性分析；第六章至第十章阐述线性系统的设计理论，分别介绍线性系统的极点配置和特征结构配置、镇定与渐近跟踪、线性二次型最优控制、解耦控制、状态观测器等设计问题；第十一章概括性地介绍离散线性系统理论；第十二章介绍鲁棒性的概念和几个基本的鲁棒控制问题。

本书结构清楚，层次分明，论述严谨，重点突出，注重基本概念、基本原理和基本方法。在内容上以基本的分析和设计问题为主，同时介绍了线性系统理论的一些新进展和作者的一些相关研究成果。本书可作为高等工科院校自动控制及相近专业本科高年级学生和研究生的教材，也可供广大科研工作者、工程技术人员以及高等院校教师参考或自学。

线性系统理论

Xianxing Xitong Lilun

段广仁 编著

*

哈尔滨工业大学出版社 出版发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本787·1092 1/16 印张24.75 字数600千字

1996年11月第1版 1996年11月第1次印刷

印数 1—2 000

ISBN 7-5603-1181-4/O·80 定价: 32.00元

前 言

线性系统理论是现代控制理论中最基本、最重要也是最成熟的一个分支，是生产过程控制、信息处理、通讯系统、网络系统等多方面的基础理论。其大量的概念、方法、原理和结论对于系统和控制理论的许多学科分支，诸如最优控制、非线性控制、随机控制、系统辨识、信号检测和估计等都具有十分重要的作用。因而国内外许多高等院校都将线性系统理论作为系统和控制科学课程方面的一门最基础的课程。

有关线性系统理论方面的著作或教材现在已有很多。美国纽约州立大学石溪分校陈启宗教授著的《线性系统理论与设计》^[1]，在国内外影响很大；清华大学郑大钟教授著的《线性系统理论》^[2]，内容系统全面；还有其它许多这方面的著作和教材^[3-6]，都各具特点。

本书是作者近年来在哈尔滨工业大学从事自动控制专业研究生《线性系统理论》课程教学的基础上写成的。本书在写作过程中力求做到结构清楚，层次分明。作为高等院校自动控制或相近专业高年级本科生和研究生的教材，本书在选材上没有包含以多项式矩阵方法为主的复频域理论，而只是系统地介绍了以状态空间方法为主的时间域理论。考虑到高等院校研究生的《线性系统理论》课一般都只有60学时左右，因而，本书将重点放在了线性系统理论中最基本、最重要的分析和设计问题之上。另一方面，为了适合广大工程技术人员和科学工作者使用以及学生将来的进一步深入研究之需要，本书还包含了一些带有“*”号的选学内容。第一次接触线性系统理论的读者可跳过这些内容，这样并不影响对于基本内容的理解。

本书包含了一批作者近年来的工作，如第六章中的特征结构配置设计和整个第十二章关于鲁棒控制的介绍，此外还有1.6、5.4、6.6、7.4、9.2、9.3、10.3、10.5等各节的内容。这些内容是于作者的许多工作中筛选出来的，并与全书内容有机地融为一个系统的整体。另外，这些内容也在一定程度上反映了线性系统理论近年来的新进展和本书的时代性。

在作者的教学过程中，学生普遍反映的一个问题是这门课程的“数学性”太强。针对这一点，本书第一章介绍了本书后续内容中经常用到的一些数学基础知识，其中1.6节介绍的广义Sylvester矩阵代数方程为作者的成果，在后续的特征结构配置设计、模型参考渐近跟踪设计、观测器设计和鲁棒极点配置设计等内容中屡次用到。

离散系统理论在很大程度上是与连续系统理论平行的。作者认为初涉线性系统理论的读者可以首先只学习连续系统方面的内容，因而将离散线性系统理论中的一些最基本的问题作为选学内容单独列在第十一章之中，并使其自成体系。

鲁棒控制是近年来国际控制理论界中十分活跃的一个研究领域，目前已经有了相当丰富的内容。本书第十二章作为选学内容对鲁棒控制进行了简单的介绍。应该指出，鲁棒控制的内容非常广泛，即使一本内容丰富的鲁棒控制方面的专著也无法揽括鲁棒控制的全部内容。我们将鲁棒控制加入本书的目的是为一些未接触过鲁棒控制的读者提供一个入门的

机会。

许多现有教材都是将系统设计的内容归在一章中笼统讲述的。而本书则将系统设计的几个基本问题——极点配置与特征结构配置、镇定与跟踪、二次型最优调节、解耦控制、滤波器设计分成五章分别讨论，这样做可以使读者对控制系统设计有一个整体的认识，并对每一个具体的问题能有一个更加深入、全面的了解。

本书的每一章末尾都有一个小结和一定量的习题。小结中对全章的内容给出了简单扼要的概括和总结；为读者指出对于某些内容进行深入研究所需阅读的文献；提示读者在学习某些内容时应注意的一些问题；对某些理论和方法给出适当的评价；指出某些内容与其它章节内容的联系等等。在习题的配备上，除了一些基本的用以巩固一些基本原理和方法的计算题外，我们还有意识地配备了一定数目的思考题和证明题。它们对于加深基本概念和原理的理解是非常有益的。

在本书的写作过程中，许多地方得益于王恩平教授、郑大钟教授和刘豹教授等人的著作^[2-4]。这些著作作为本书的一些基本内容提供了部分素材。另外，本人的学生胡文远、马克茂和刘湘黔等人协助完成了书中部分内容的打字和校对工作。本人教过的许多研究生，特别是1995年秋季学期教过的全体研究生都对本书做了许多校对工作，同时还提出了许多宝贵意见。作者的同事陈兴林同志不仅协助审阅了本书的全部校样，而且在协助作者授课的过程中，对书中的许多内容还提出了建设性的意见。对于这些同志的热诚帮助和辛勤劳动，作者在此表示真诚的感谢！另外，在本书的写作过程中，作者得到了哈工大校领导、研究生院和航天学院领导以及控制工程系领导的大力支持，在此作者一并表示感谢！

由于作者水平有限，书中错误和不当之处在所难免。在此，作者诚挚的欢迎读者和同行提出批评指正意见。

段广仁
1996年6月
于哈尔滨工业大学

符号表

符号	含义
A, B, Φ, \dots	大写黑斜体字母表示矩阵
u, y, ϕ, \dots	小写黑斜体字母表示向量
u, y, α, \dots	小写斜体字母表示标量函数或标量
V, Ω, \dots	大写斜体英文字母或大写希腊字母表示集合
0	零数字、零向量或零矩阵
$\mathbf{C}^{m \times n}$	所有 $m \times n$ 复元素矩阵的全体
$\mathbf{R}^{m \times n}$	所有 $m \times n$ 实元素矩阵的全体
\mathbf{C}^n	所有 n 维复列向量的全体 (即 $\mathbf{C}^{n \times 1}$)
\mathbf{R}^n	所有 n 维实列向量的全体 (即 $\mathbf{R}^{n \times 1}$)
\mathbf{C}	所有复数的全体 (即 \mathbf{C}^1)
\mathbf{R}	所有实数的全体 (即 \mathbf{R}^1)
$\dim V$ 或 $\dim(V)$	子空间 V 的维数
\exists	存在
\in	元素属于
\forall	任取
\subset	集合含于
\supset	集合包含
\cup	集合的并
\cap	集合的交
$p \Rightarrow q$	p 蕴涵 q
$p \Leftarrow q$	q 蕴涵 p
$p \Leftrightarrow q$	p 等价 q
\dot{x}	$= \frac{d}{dt} x$
\ddot{x}	$= \frac{d}{dt} \dot{x}$
$\ddot{\ddot{x}}$	$= \frac{d}{dt} \ddot{x}$
$x^{(i)}$	$= \frac{d^i}{dt^i} x$
$\ x\ $	向量 x 的欧氏范数

I_n	n 阶单位矩阵
A^{-1}	矩阵 A 的逆,
A^T	矩阵 A 的转置
\bar{A}	矩阵 A 的共轭
A^*	矩阵 A 的共轭转置
$A > 0$	矩阵 A 正定
$A \geq 0$	矩阵 A 半正定
$A > B$	$A - B > 0$
$A \geq B$	$A - B \geq 0$
$\lambda_i(A)$	矩阵 A 的第 i 个特征值
$\lambda_{\max}(A)$ 或 $\bar{\lambda}(A)$	矩阵 A 的最大特征值
$\lambda_{\min}(A)$ 或 $\underline{\lambda}(A)$	矩阵 A 的最小特征值
$\rho(A)$	矩阵 A 的谱半径
$\sigma(A)$	矩阵 A 的谱 $\{\lambda \det(\lambda I - A) = 0\}$
$\sigma_i(A)$	矩阵 A 的第 i 个奇异值
$\sigma_{\max}(A)$ 或 $\bar{\sigma}(A)$	矩阵 A 的最大奇异值
$\sigma_{\min}(A)$ 或 $\underline{\sigma}(A)$	矩阵 A 的最小奇异值
$A^{1/2}$	由 $(A^{1/2})^T (A^{1/2}) = A$ 定义
$\ A\ _2$	矩阵 A 的谱范数
$\ A\ _F$	矩阵 A 的 Frobenius 范数
$\ A\ _1$	矩阵 A 的行和范数
$\ A\ _\infty$	矩阵 A 的列和范数
$\mu_i(A)$	由 $\ A\ _i (i = 1, 2, \infty)$ 导出的测度
$\operatorname{Re} A$ 或 $\operatorname{Re}(A)$	矩阵 A 的实部
$\operatorname{Im} A$ 或 $\operatorname{Im}(A)$	矩阵 A 的虚部
$\operatorname{tr} A$ 或 $\operatorname{tr}(A)$	矩阵 A 的迹
$\det A$ 或 $\det(A)$	矩阵 A 的行列式
$\operatorname{rank} A$ 或 $\operatorname{rank}(A)$	矩阵 A 的秩
$\operatorname{Adj} A$ 或 $\operatorname{Adj}(A)$	矩阵 A 的伴随矩阵
$\triangle\triangle\triangle$	证明结束符

目 录

绪论

0.1 现代控制理论概述	1
0.2 线性系统理论概述	4
0.3 本书的内容安排	9

第一章 数学基础

1.1 线性空间与线性变换	11
1.2 矩阵代数中的几个结果	16
1.3 多项式矩阵	20
1.4 有理分式矩阵及其互质分解	25
1.5 若当分解	29
1.6 广义Sylvester矩阵方程	35
小结	39
习题	40

第二章 线性系统的数学描述

2.1 线性系统的传递函数描述	44
2.2 线性系统的状态空间描述	46
2.3 两种描述形式的比较及相互转换	52
2.4 线性系统的代数等价性	59
2.5 复合系统的数学模型	61
小结	65
习题	65

第三章 线性系统的运动分析

3.1 运动分析的含义	69
3.2 状态转移矩阵及其性质	71
3.3 线性时变系统的运动分析	73
3.4 线性定常系统的运动分析	76
3.5 脉冲响应矩阵	80
小结	84
习题	84

第四章 线性系统的能控性和能观性

4.1 能控性和能观性的定义	87
4.2 线性时变系统的能控性判据	91
4.3 线性定常系统的能控性判据	95

4.4 对偶原理与能观性判据	99
4.5 线性系统的能控、能观性指数	103
4.6 单输入-单输出线性系统的能控规范型和能观规范型.....	107
4.7 多输入-多输出线性系统的能控规范型和能观规范型.....	114
4.8 线性系统的结构分解	125
*4.9 线性系统的实现问题	134
小结.....	139
习题.....	140
第五章 系统的运动稳定性	
5.1 Lyapunov意义下的运动稳定性	144
5.2 线性时变系统的稳定性判定	151
5.3 线性定常系统的稳定性	156
*5.4 二阶动力学系统的稳定性	162
*5.5 线性系统的外部稳定性	165
小结.....	167
习题.....	168
第六章 极点配置与特征结构配置	
6.1 线性系统的常规控制律	171
6.2 极点配置问题及其解的存在性	176
6.3 状态反馈极点配置问题的求解方法	181
6.4 状态反馈特征结构配置	186
*6.5 输出反馈特征结构配置	191
*6.6 模型匹配(Model Matching)问题	199
小结.....	203
习题.....	204
第七章 镇定问题与渐近跟踪问题	
7.1 镇定问题及其解的存在性	207
7.2 线性系统的状态反馈镇定律设计	210
7.3 渐近跟踪问题——定常参考信号的情形	214
*7.4 模型参考输出跟踪问题	218
小结.....	225
习题.....	225
第八章 线性二次型最优控制	
8.1 变分法简介	228
8.2 有限时间状态调节器问题	233
8.3 无限长时间状态调节器问题	240
*8.4 输出调节器问题	244
*8.5 输出跟踪问题	246

小结.....	250
习题.....	251
*第九章 线性系统中的解耦问题	
9.1 输入-输出解耦问题.....	253
9.2 输入-输出动态解耦——可解耦条件.....	257
9.3 输入-输出动态解耦——算法与算例.....	263
9.4 干扰解耦.....	268
9.5 跟踪系统中的干扰解耦.....	272
小结.....	280
习题.....	281
第十章 状态观测器设计	
10.1 全维状态观测器.....	283
10.2 降维状态观测器.....	288
10.3 Luengerger函数观测器.....	293
10.4 观测器——状态反馈控制系统与分离原理.....	298
*10.5 环路传递复现(LTR)问题.....	303
小结.....	307
习题.....	308
*第十一章 离散线性系统理论	
11.1 离散动态系统的数学描述.....	310
11.2 线性离散系统的运动分析.....	312
11.3 线性连续系统的时间离散化.....	315
11.4 离散时间系统的稳定性.....	319
11.5 离散时间系统的能控性和能观测性.....	324
11.6 连续系统时间离散化后保持能控和能观测的条件.....	329
11.7 离散系统的控制问题.....	333
小结.....	338
习题.....	339
*第十二章 鲁棒控制	
12.1 鲁棒性定义.....	342
12.2 鲁棒控制的研究内容.....	345
12.3 时域稳定鲁棒性分析.....	349
12.4 线性系统的输出反馈鲁棒镇定.....	356
12.5 鲁棒极点配置.....	361
12.6 鲁棒Luengerger观测器设计.....	369
小结.....	376
习题.....	377
参考文献	378

绪 论

0.1 现代控制理论概述

线性系统理论是现代控制理论的一个重要组成部分,因此,在了解线性系统理论之前,了解一下现代控制理论,弄清楚线性系统理论在现代控制理论中的位置与地位是非常必要的。

控制理论包括古典控制理论和现代控制理论两大部分。

0.1.1 从古典控制理论到现代控制理论

古典控制理论的起源可以追溯到本世纪20年代。在20-40年代之间,曾涌现出许多古典控制理论的先驱,如Minorsky、Nyquist、Hagen、Bode和Wiener等。他们的工作^[1]为古典控制理论奠定了基础,同时促进了二次大战中的许多武器和通信自动化系统的研制工作。大战后人们更多地总结了武器研制和设计方面的实践经验,陆续出版了古典控制理论方面的一些古典著作^[2-4],建立了较为系统的伺服理论。这对战后的许多实际自动控制工程起到了良好的指导作用,也为人类在较短的时间征服宇宙空间作出了贡献。二次大战后到50年代中期,控制理论又得到了新的发展,添加了根轨迹法、非线性系统的谐波近似法(描述函数法)、采样控制系统、自寻最优控制和部分最优控制、多变量系统、系统灵敏度分析和动态系统测试等新内容。到60年代初期,出现了划时代意义的状态空间方法、极大值原理和Kalman滤波技术以及Bellman动态规划。至此古典控制理论的发展与现代控制理论接轨。

概括性地讲,古典控制理论是具有下述特点的一门科学:

- ①以单变量线性定常系统为主要研究对象;
- ②以频率法作为研究控制系统动态特性的主要方法;
- ③以各种图表,如Nichols图、Bode图、Nyquist曲线、根轨迹Roth表等作为系统分析和综合的主要工具。

在特定输入下研究系统输出的运动规律称为系统的运动分析,而按一定动态性能要求,如稳定性、误差精度和各种动态指标——飞升时间、带宽、超调量和误差系数等,来改变这种运动规律,称为系统综合。值得指出的是,在古典控制理论的发展过程中,开始和后来都曾用过时域方法,如微分方程和差分方程描述等,但频率法却是主导的。同样,古典控制理论发展的后期,也曾研究过多变量系统和非线性系统,但从整体上看,它是以研究单变量线性定常系统为主的。

0.1.2 现代控制理论的形成与特点

现代控制理论起源于60年代,它以下述三个方面作为其形成的标志:

- ① 用于系统的整个描述、分析和设计过程的状态空间方法;
- ② 最优控制中的Pontriagin极大值原理和Bellman动态规划;
- ③ 随机系统理论中的Kalman滤波技术。

现代控制理论是在古典控制理论的基础上发展起来的。但不同于古典控制理论,它具有下述几方面的特点:

① 以多变量线性系统和非线性系统为研究对象。近代工业过程和航空、航天等许多领域中的实际系统都是非常复杂的,其中包含有多变量耦合、时变参数和非线性等等。这些复杂的系统都在现代控制理论的研究之列。事实上,作为现代控制理论形成标志之一、最优控制理论中的Pontriagin极大值原理,即是针对一般的非线性系统提出的。

② 以时域法,特别是以状态空间方法为主要研究方法。不同于古典控制理论,现代控制理论是在时间域上建立系统模型的状态空间描述,并在此基础上进行系统的各种定量和定性分析以及希望的控制规律设计。

③ 以现代数学为主要分析手段。古典控制理论以复变函数理论和拉氏变换为数学工具,而现代控制理论则涉及到现代数学的许多领域。研究对象从单变量线性定常系统过渡到多变量系统和非线性系统,必然对分析手段提出了更高的要求;系统描述从频域转为时域,为现代数学的介入提供了方便条件。现代控制理论中应用较多的数学分支是矩阵代数和微分方程理论。然而在现代控制理论已经得到了极大发展的今天,许多新的分支不断涌现。早在60年代看来和控制理论根本无缘的许多数学理论现已被用于现代控制理论新分支的研究之中。李代数理论用于离散事件系统,微分几何用于非线性系统都是这方面的例子。

④ 以计算机为主要实现工具。我们这里所讲的“实现”,并不是指将一个系统付诸于实际运行,而是指其分析和设计过程的实现。在古典控制理论中,由于研究对象简单,人们利用一些图、表通过手工即可完成分析和设计。但在现代控制理论中,单靠手工计算一般是无法完成较为复杂的研究对象的分析和设计的,而必须要利用计算机来实现分析和设计中的各种计算。目前,以计算机为主要工具,以现代控制理论为依据的一个现代控制理论分支——控制系统计算机辅助设计(CSCAD)已经日趋完善,并在实际中得到了重要的应用。计算机用于控制系统设计除在计算上显示了其极大的优越性外,还有许多其它的优点。如在计算机上很容易修改系统的参数,因而可对各种控制方案及不同的参数组合进行充分地比较,从中选出较好的控制方案。另外借助于计算机的图形显示功能,可对控制系统的动态特性获得更加深入的直观的理解。

尽管古典控制理论和现代理论各有其特点,但二者却是密切相关的。对此我们谈及下述两个方面:

① 任何事物都处于不断的发展变化之中,古典和现代控制理论从产生到发展至今天,已经在许多方面相互渗透。如以英国学者Rosenbrock学派的多变量频域理论^[1]和控制系统中的多项式矩阵方法^[2]都属于两者交叉的内容。

② 即使在古典控制理论的约定研究范围之内,也即单变量线性定常系统的分析和设计之中,尽管古典方法和现代方法从模型描述到设计方法各不相同,但二者的设计结果可在Laplace变换及其逆变换下相互转化。从这种意义上讲,二者在单变量系统的分析和设计上是统一的。

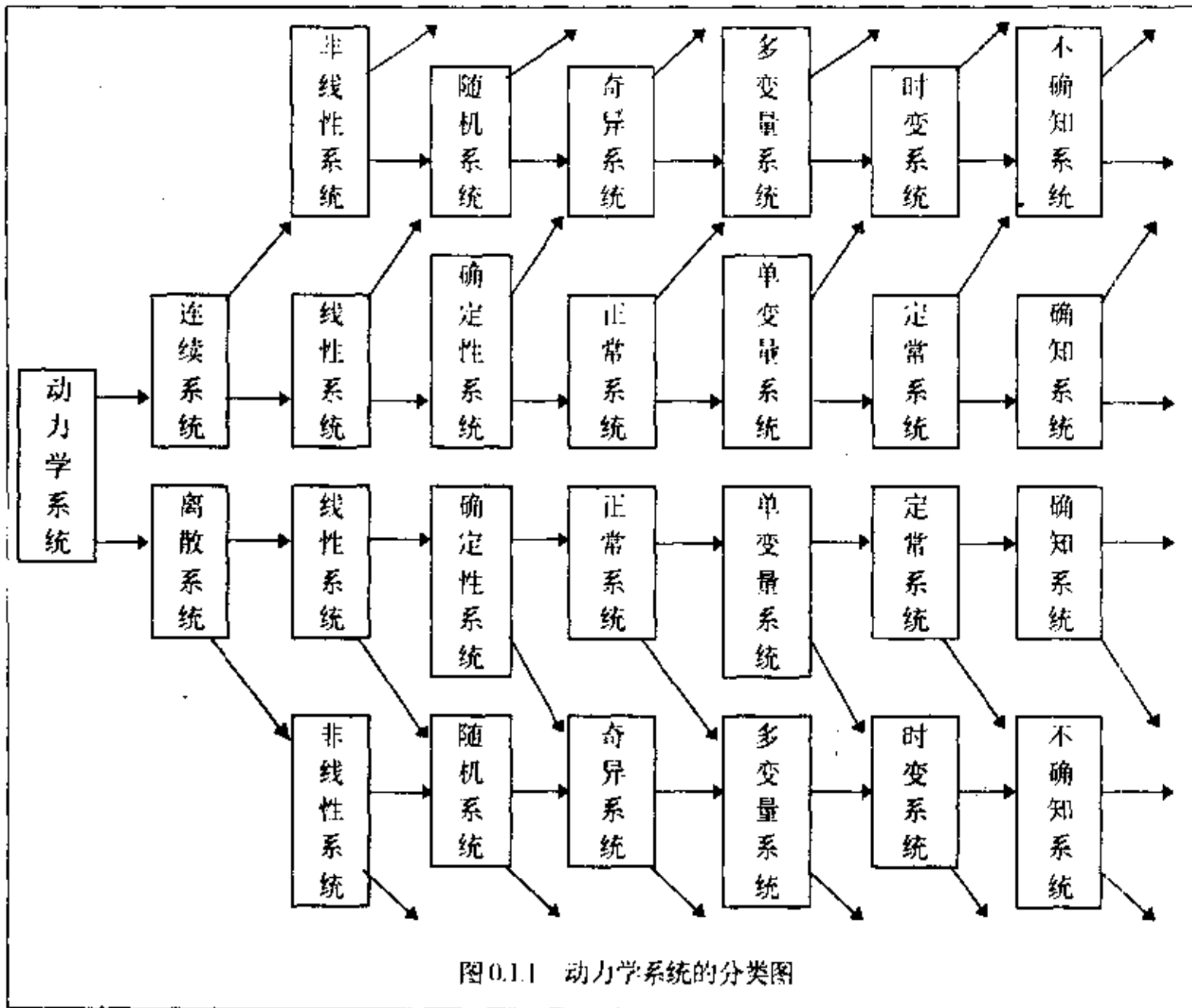
0.1.3 现代控制理论的研究内容与分支

控制理论的研究对象是系统，而所谓的控制是指系统的控制。从这一角度来看，现代控制理论的研究内容和分支在很大程度上要取决于系统的范畴。

系统的概念及其含义是比较广泛的。系统是由相互关联和相互作用的若干部分按一定规律组合而成的具有特定功能的一个整体。系统可具有完全不同的属性，如工程系统、生物系统、经济系统、社会系统等。但是，在系统理论中，常常抽去具体系统的物理或社会含义而把它抽象化为一个一般意义下的系统加以研究，这种处理方法有助于揭示系统的一般特性。系统的概念具有相对性，系统的每个组成部分也可以是一个系统，而系统自身又可以是一个更大系统的组成部分。系统最基本的特征是它的整体性，系统的行为和性能是由其整体所决定的，系统可以具有其组成部分所没有的功能。有着相同组成部分但它们的关联和作用不同的两个系统可呈现出截然不同的行为和功能。

系统有静态系统和动态系统之分。动态系统又称之为动力学系统，其含义是含有动力学行为。在模型描述上表现为含有系统变量的导数项或差分项。即系统模型可用微分或

论的系统类型产生了一系列分支,如线性系统理论、非线性系统理论、分布参数系统理论,随机系统理论(或Kalman滤波与随机最优控制),广义系统理论、大系统理论等等。另外涉及到不确定系统,还有系统辨识和自适应控制、鲁棒控制理论等一些分支。



0.2 线性系统理论概述

作为现代控制理论中最基本、最成熟的分支之一——线性系统理论,具有其基本的重要性。它一方面在过程控制、航空、航天等领域的应用中起到了重要作用,另一方面也为现代控制理论的其它分支提供了基础。在进入本书对于线性系统理论的系统探讨之前,我们先对其作一个概括性的介绍,以使读者能先对它在整体上有个端貌性的认识。但值得首先说明的是,按照线性系统的定义,广义线性系统和随机线性系统等一些分支均属于线性系统理论范畴,然而按习惯,通常所指的线性系统理论仅涉及到确定性的正常线性系统,而广义线性系统和随机线性系统理论则视为现代控制论的另外的独立分支。

0.2.1 线性系统理论的研究对象

顾名思义,线性系统理论的研究对象为线性动态系统,简称线性系统。它是实际系统

的一类理想化了的模型。当描述动态系统的数学方程具有线性属性时，称相应的系统为线性系统。线性系统是一类最简单且研究得最多的动态系统。线性系统的一个基本特征是满足叠加原理，即若表示系统的数学描述为 L ，那么对任意两个输入变量 u_1 和 u_2 以及任意两个有限常数 c_1 和 c_2 ，必有

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L(u_1) + c_2 L(u_2)$$

但是，应当指出，上述叠加原理的关系式通常只适用于有限项和，如果不附加假设就不能推广到无穷项和。线性系统满足叠加原理这一属性，导致了其在数学处理上的简便性，使得可以采用比较成熟的数学工具，如数学变换(傅里叶变换、拉普拉斯变换等)和线性代数，来研究它的运动和性质。

严格地说，一切实际的系统都是非线性的，真正的线性系统在现实世界中是不存在的。但是，很大一部分实际系统，它们的某些主要关系特性，在一定的范围内，可以充分地用线性系统来近似地代替。并且，实际系统与理想化了的线性系统间的差别，对于所研究的问题而言，已经小到无关紧要的程度而可忽略不计。因此，从这个意义上说，线性系统或者可线性化的系统又是大量存在的，而这正是研究线性系统的实际背景。对于一个实际的系统是否可将其按线性系统处理，一般难以给出普遍的和绝对的判断准则，需要对具体系统进行具体的分析。这里，不仅需要考虑系统本身的因素，而且也需要考虑所研究问题方面的因素，只有从这两个方面才能决定是否可把一个实际系统看成为线性系统。

将线性系统进行更细致的分类，可区分为线性定常系统和线性时变系统两类情况。线性定常系统也称为线性常系数系统，其特点是描述系统状态的线性微分或差分方程中的每一个系数都是不随时间变化的常数。如果系统的线性微分或差分方程的系数不全是常数，其中包含有为时间 t 的函数的系数，则这样的系统就为线性时变系统，通常也称为线性变系数系统。考虑到系统的运动状态的特性和描述此系统的微分方程或差分方程的类型有着密切的联系，而不同类型的微分方程在解的特性上有着重要的和实质性的差别，因此把线性系统作上述分类是必要的和有意义的。从实际的观点而言，线性定常系统也只是一种实际系统的理想化模型，它是对实际系统经过近似化和工程化处理后所导出的一类理想化系统。线性常系数系统是最易于研究的，而且为数很多的实际系统都可在一定的范围内足够精确地用线性常系数系统来代替，因此它是线性系统理论的主要研究对象。

0.2.2 线性系统理论的主要任务

简单地说，线性系统理论主要研究线性系统状态的运动规律和改变这种运动规律的可能性和方法，建立和揭示系统结构、参数、行为和性能间的确定的和定量的关系。通常，研究系统运动规律的问题称为分析问题，研究改变运动规律的可能性和方法的问题则为综合问题或设计。前者属于认知系统，后者则为改造系统。

(1) 系统数学模型的建立

不管是对系统进行分析还是综合，一个首要的前提是建立起系统的数学模型。在建立模型时，最重要的是要确定什么是需要反映和研究的主要系统属性，并在此基础上定出它的定量关系。随着所考察的问题的性质的不同，一个系统可以有不同类型的模型，它们代表了系统的不同侧面的属性。数学模型中的基本要素是变量、参量、常量和它们之间的关系。系统模型中的变量，包括状态变量、输入变量和输出变量，在有些情况下还需要考

虑扰动变量。参量可以是系统的参数或表征系统性能的参数，前者受系统环境的影响可产生变动，后者可随设计要求而人为地改变其取值。常量是指系统中不随时间改变的参数。而变量、参量和常量的关系，需要针对具体问题根据相应的物理原理来决定。线性系统的数学模型主要有两种形式，即时间域模型和频率域模型。时间域模型表现为微分方程组或差分方程组，可同时适用于常系数系统和变系数系统；频率域模型表现为传递函数和频率响应，只适用于常系数系统。对应于系统的这两种模型，发展和形成了线性系统理论中的两类不同方法——状态空间方法和复频域方法。建立系统的数学模型的基本途径有解析法和实验法，前者通过分析系统的机制直接运用物理原理来建立表征系统动态过程的数学描述，后者则是在通过实验取得数据和按照相应准则处理数据的基础上来导出最接近系统实际情况的简化数学描述。建模问题是系统研究中的一项非常基本和重要的问题，它已构成系统理论中的一个独立的分支。

(2) 系统分析

线性系统的分析包含两个大方面——定量分析和定性分析。

回忆一下古典控制理论，其中的一个重要内容即是系统动态过程分析，即分析系统对于一典型输入信号的响应并定义了飞升时间、超调量等一些描述响应特性的量。对多变量系统对象，分析清楚系统对于某个输入的响应和性能，无疑也是十分必要的。这种系统分析称为线性系统运动分析，它是一个已知系统的输入量来求其输出量的过程，为一种定量分析。

线性系统定量分析可以解析地给出系统在某种激励信号下的运动轨线，但其分析涉及到繁多和复杂的计算，常常需要借助于数字或模拟计算机来完成。另一方面，这种解析的运动规律给我们带来的对于系统的认识并不够深刻和明确。例如，为了保证系统能在实际的带有一定扰动的环境下正常地工作，人们希望当系统的响应受扰发生变化时，能够经“足够长”的时间之后再恢复到希望的响应轨迹上去。再如，为了对系统实施有效的控制，人们特别关心的一个问题是存不存在一个允许控制输入，使得系统在它的作用下能够产生希望的动作和运动。对于这两个问题，基于系统的定量分析结果是不能立即得到答案的。它们属于系统的定性分析问题。前者为系统的运动稳定性分析问题，后者为系统的能控、能观性分析中的问题。

(3) 系统设计

任何一个实际的系统都有特定的任务或性能要求。当一个系统不能满足希望的性能或不能完成所规定的任务时，就需要对系统进行干预、调节或控制来改变原有系统，使改变后的系统满足所规定的任务或性能要求。这样一个完整的过程称为控制系统设计或控制系统综合。

如何实现对于一个系统的干预或控制呢？每一个系统都有一定的输入变量和输出变量，它们分别代表了系统受外界作用和系统作用于外界环境的窗口，通过调整控制变量便达到改变原有系统结构及性能的目的。通常把控制量的调整规律称为控制规律，简称控制律。

控制律的选取有两大类。一类是不利用系统中变量信息的控制律，在形式上表现为关于时间的一个特定的一元函数，这类控制律称为开环控制律。而受其作用，调整运行的系统称为开环系统。显然，由于开环控制律不能“敏感”系统的变化，因而当系统模型不准

确或受扰发生变化时，开环控制系统就会产生大的控制误差。另一类控制规律是利用了系统的变量信息的控制律，称为反馈控制律。在反馈控制律作用下运行的系统称为相对于原来系统的闭环系统。不同于开环控制律，闭环控制律能够“敏感”系统变量的变化，实现对系统变化的调节，因而具有一定的抗扰动能力，得到了广泛的使用。

根据上面介绍的术语，所谓一个闭环控制系统设计问题，即是要设计给定系统的一个适当的反馈控制律，使得闭环系统具有希望的性能或可实现希望的任务要求。那么如何表征这种“希望的性能或任务要求”呢？这又需要所谓性能指标的概念，它是所谓系统希望性能和任务要求的确切描述。性能指标分为优化型指标和非优化型指标两大类。性能指标的不同决定了不同的设计问题。常见的优化型指标是一类二次型指标，求解满足这种指标的控制系统的设计问题称为二次型最优控制问题，于本书第八章中讲述。另外，如模型匹配问题，即要求闭环系统与一个给定的已知系统充分接近，所用的也是一种优化型指标。在线性系统设计的基本问题中，用得较多的还是非优化型指标，它们所注重的是闭环系统的某种性质，而与动态优化无关。如本书第六章中的极点配置问题，以一组希望的闭环极点为指标，反映了系统的稳定性和响应的快速性；第七章介绍的镇定问题和渐近跟踪问题分别以闭环系统的稳定性和系统输出渐近跟踪某一指定信号为指标。在一个实际系统的设计中，可能对控制系统提出各种各样的要求，而且往往还可能是多种要求并存。从这一角度讲，控制系统设计的内容可以是很广泛、很复杂的。但这种复杂的多目标设计问题在一般线性系统理论的教科书中不予讨论。

0.2.3 线性系统理论的发展过程

本世纪50年代中期，古典的线性系统理论已经发展成熟和完备，并在不少工程技术领域中得到了成功的应用。古典线性系统理论的数学基础是拉普拉斯变换，系统的基本数学模型为传递函数，主要的分析和综合方法是频率响应法。古典频率法对于单输入-单输出线性定常系统的分析和综合是很有成效的。但是，古典线性系统理论也具有明显的局限性，突出的是难于有效地处理多输入-多输出系统，并且难以揭示系统的更深刻的特性。

在50年代蓬勃兴起的航天技术的推动下，线性系统理论在1960年前后开始了从古典阶段到现代阶段的过渡，其重要标志之一是卡尔曼(R.E.Kalman)系统地把状态空间法引入到系统与控制理论中来^[21-23]。状态空间法的一个基本特点是，采用状态空间这种内部描述取代先前的传递函数那种外部输入-输出描述，并对系统的分析和综合直接在时间域内进行。状态空间法可同时适用于单输入-单输出系统和多输入-多输出系统、线性定常系统和线性时变系统。在状态空间法的基础上，卡尔曼进一步提出了能控性和能观测性这两个表征系统结构特性的重要概念，已经证明这是线性系统理论中的两个最基本的概念。能控性和能观测性的引入，导致了线性系统分析和综合在指导原则上的一种根本性的变化。它集中表现在用系统的“内部研究”代替了传统的“外部研究”，并使分析和综合过程建立在严格的理论基础之上。建立在状态空间法基础上的线性系统的分析和综合方法通常称为现代线性系统理论。

自60年代中期以来，线性系统理论不论是在研究内容还是在研究方法上，又有了一系列新的发展。出现了着重从几何方法角度来研究线性系统的结构和特性的线性系统的几何理论，出现了以抽象代数为工具的线性系统的代数理论，也出现了在推广古典频率法基础

上发展起来的多变量频域理论。与此同时，随着计算机技术的发展和普及，线性系统分析和综合中的计算问题(特别是病态问题和数值稳定性问题)，以及利用计算机对线性系统进行辅助分析和辅助设计的问题，也都得到了广泛和充分的研究。

线性系统理论是系统与控制理论中最为成熟和最为基本的一个组成分支。系统与控制理论的其它分支，如最优控制理论、最优估计理论、随机控制理论、非线性系统理论、人系统理论等，都不同程度地受到线性系统理论的概念、方法和结果的影响与推动。

0.2.4 线性系统理论的主要学派

随着所采用的数学工具和所采用的系统描述的不同，线性系统理论已形成了四个平行的分支，它们反映了线性系统理论中的一些主要学派。

(1) 线性系统的状态空间法

状态空间法是线性系统理论中一个最重要和影响最广的分支。在状态空间法中，用以表征系统动力学特性的数学模型，是反映输入变量、状态变量和输出变量间关系的一对向量方程，称为状态方程和输出方程。状态空间法是一种时间域方法，其主要的数学基础是线性代数，在系统的分析和综合中所涉及的计算主要为矩阵运算和矩阵变换，并且这类计算很适合在计算机上进行。不管是系统的分析还是系统的设计，状态空间法已发展了一整套完整的和成熟的理论和方法。线性系统理论的其它分支，也都是在状态空间的影响和推动下形成和发展起来的。本书所介绍的即是建立在这种方法之上的线性系统理论。

(2) 线性系统的几何理论

几何理论的特点是把对线性系统的研究化为状态空间中的几何问题，主要的数学工具是几何形式的线性代数，基本思想是把能控性和能观测性等系统结构特性表述为不同的状态子空间的几何性质。在几何理论中，具有关键意义的新概念是 $[A \ B]$ 不变子空间和能控子空间，它们在用几何方法解决主要的综合问题中起了决定性的作用。几何方法的优点是简捷明了，避免了状态空间法中的大量的矩阵演算，而在一定要计算时，几何方法的结果都能比较容易地化成相应的矩阵运算。但是，对于工程背景的系统理论的学习者和研究者，对线性系统的几何理论不免会感到比较抽象，因而需要具备一定的数学素养。几何理论是由加拿大著名学者旺纳姆(W. M. Wonham)在70年代初创立的，线性系统的几何理论的代表作是由Wonham著的《线性多变量控制——一种几何方法》^[20]。

(3) 线性系统的代数理论

线性系统的代数理论是用抽象代数工具研究线性系统的一种方法。代数理论的主要特点是，把系统各组变量间的关系看作为代数结构之间的映射关系，从而可以对线性系统的描述和分析实现完全的形式化和抽象化，变为纯粹的代数问题。代数理论的出现起源于卡尔曼60年代应用模论工具对域上的线性系统的研究。随后在他的模论方法的影响下，在比域更弱和更一般的代数系上，如环、群、泛代数、集合上，相继建立了线性系统代数理论。在这些研究中，找到了线性系统的不同于状态空间描述中的某些属性，并且试图把系统理论和计算机科学结合起来建立起统一的理论。

(4) 多变量频域方法

这种方法的实质是以状态空间法为基础，采用频率域的系统描述和频率域的计算方法来分析和综合线性定常系统。在多变量频域方法中，平行和独立地发展了两类综合方法。

一是频率域设计方法，它的特点是把多输入-多输出系统化为一系列单输入-单输出系统来处理，并把古典频率法的许多行之有效的设计技术和方法推广到多变量系统中来，由此导出的综合理论和方法将可以通过计算机辅助设计而方便地用于系统设计。这类综合技术主要是由罗森布罗克(H. H. Rosenbrock)、麦克法兰(A. G. J. MacFarlane)等英国学者提出的，习惯地称为英国学派。另一类是多项式矩阵设计方法，它的特点是采用传递函数矩阵的矩阵分式描述作为系统的数学模型，并在多项式矩阵计算和变换的基础上，建立了一整套分析和综合线性定常系统的理论和方法。多项式矩阵设计方法是由罗森布罗克、沃罗维奇(W. A. Wolovich)等在70年代初提出的^[10]，并在随后的发展中得到不断完备和广泛应用。与状态空间法相比，多变量频域方法具有物理直观性强、便于设计调整等优点。

0.3 本书的内容安排

本书讨论线性系统的时间域理论，即以状态空间方法为主的线性系统的分析和设计理论。全书共十二章，按内容可分为三个大部分——准备工作、主体内容和介绍性内容。

第一部分：准备工作

该部分的内容即本书的第一章——数学基础。应该说本书中涉及到的数学知识是很多的。我们自然不能面面俱到地介绍。在该章中，我们只是介绍了与本书内容联系最紧密、针对性最强的一些数学结果。

在第一节中我们介绍了线性空间与线性变换，它们是理解状态空间方法和代数等价系统的基础。第二节介绍的矩阵代数中的几个结果，在后面要多次用到。第三节至第六节中介绍的多项式矩阵的初等变换和有理分式的互质分解以及若当分解和广义Sylvester矩阵方程，构成了后面第六章中特征结构配置设计和第十章中的状态观测器设计等一些问题的数学基础。这里，矩阵分式 $(sI - A)^{-1}B$ 的右既约分算法和广义Sylvester矩阵方程的求解等取材于作者自己的工作。

第二部分：主体内容

该部分共有九章内容，按结构可划分如下：

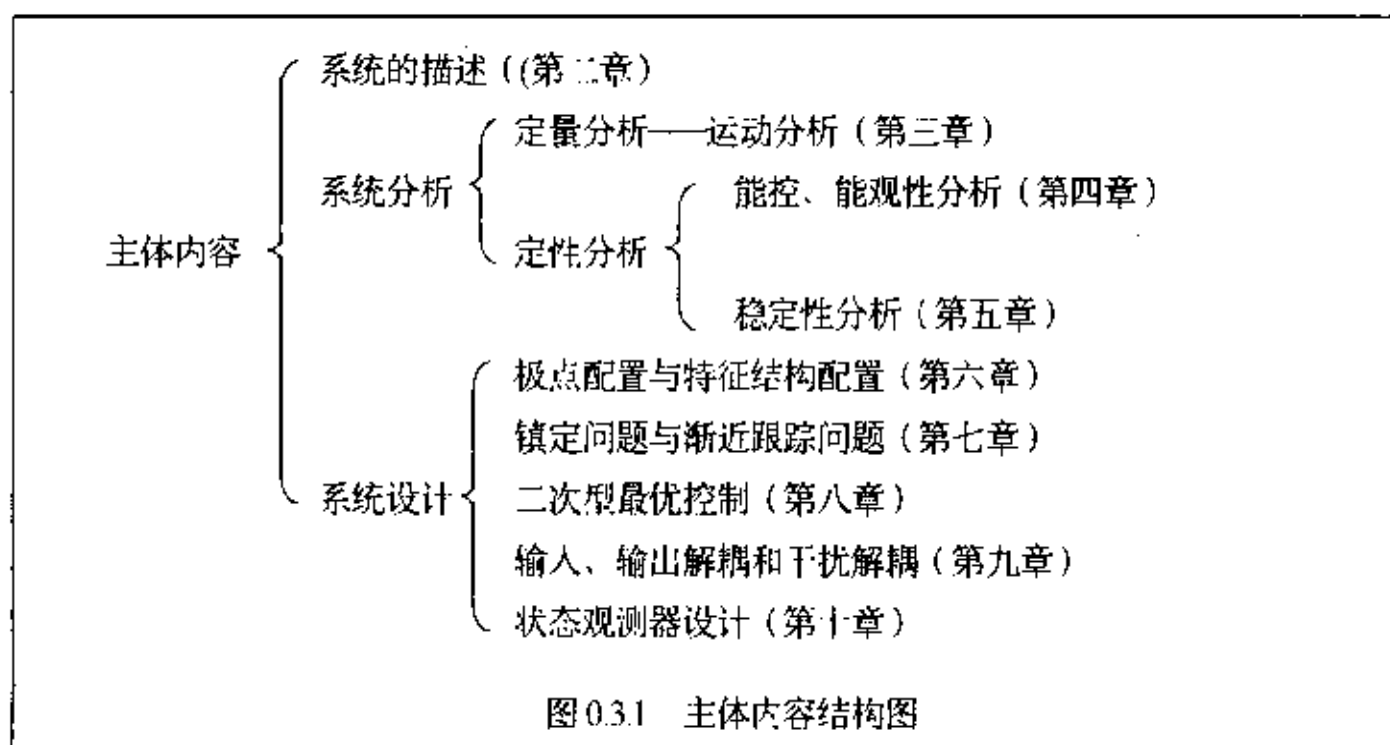


图 0.3.1 主体内容结构图

在线性系统的数学描述一章(第二章)中, 主要介绍线性系统的状态空间描述及其与传递函数描述间的关系, 并介绍了线性系统的代数等价性。

如图0.3.1所示, 在系统分析部分中有三方面内容。线性系统的运动分析一章(第三章)介绍了状态转移矩阵及线性系统的解析响应。线性系统的能控性和能观性一章(第四章)介绍了能控性和能观性的定义及其各种判据, 以及线性系统按能控性和能观性的各种分解。系统运动的稳定性一章(第五章)中, 主要介绍了Lyapunov意义下的稳定性及其判定问题, 同时简单介绍了外部稳定性的概念。作为选学内容, 还介绍了作者关于二阶动力学系统稳定性分析的一个结果。它对于读者理解Lyapunov稳定性和运用Lyapunov判据都有一定的帮助。

系统设计部分共有五方面内容。第一方面是极点配置与特征结构配置(第六章)。这里介绍的特征结构配置结果是作者自己的工作。特征结构配置在现有的许多线性系统方面的著作中是不讨论的, 但鉴于其重要性, 我们这里不但收录了这方面的两节内容, 而且还建议读者对其给予充分的重视。本章的最后一节(也是作者的工作)以模型匹配问题为例, 说明了特征结构配置结果在解决许多具有希望特定结构的系统设计问题方面的优越性。第二方面是镇定问题与渐近跟踪问题(第七章), 其中也介绍了作者关于模型参考输出跟踪问题的结果。第三方面内容是二次型最优控制(第八章), 介绍了有限时间和无限时间的状态和输出调节器及输出跟踪器。第四方面是线性系统中的解耦问题, 介绍了线性系统的输入-输出解耦问题和作者的以特征结构配置结果为基础的干扰解耦结果。系统设计部分的最后一个方面是状态观测器设计(第十章)。这里介绍了线性系统的全维和降维状态观测器以及最一般情形的Luenberger函数观测器, 并阐述了三者的关系。此外还介绍了作者在环路传递复观方面的结果。

第三部分: 介绍性内容

该部分包含离散线性系统理论(第十一章)和鲁棒控制(第十二章)两方面的内容。

该部分的第一方面是离散系统理论。如绪论中所言, 离散线性系统理论是与连续线性系统理论相平行的。本章分六个小节对离散系统理论中的模型描述、分析和设计等问题进行了简单的介绍。

该部分的第二方面是离散系统理论。鲁棒控制是70年代兴起的、至今仍十分活跃的一个非常广阔的研究领域。目前国际控制理论界已有这方面的著作^[4-6]。但就鲁棒控制的含义来看, 没有一本书能够包容研究领域中的全部内容。本书中的这一章是在作者关于鲁棒控制方面的工作中筛选、提炼出来的, 目的是给未触及鲁棒控制的读者提供一个入门的机会。在这一章中, 我们尝试性地提出了关于鲁棒性的较为一般性的定义, 探讨了鲁棒控制的研究内容, 并介绍了几方面典型的鲁棒控制问题——稳定鲁棒性分析与鲁棒镇定、鲁棒极点配置和鲁棒观测器设计。

对于第一次接触线性系统理论的读者可以跳过本书目录中带有*号的内容, 这包括第九章、第十一章、第十二章以及其它各章中的某些节。

第一章 数学基础

作为准备工作, 本章介绍以后各章中的一些常用的数学基础知识。对于一些结果, 我们只是给出了结论而略去证明。需要说明的是, 本章的许多内容都是孤立的, 在整体上不具有系统性。关于本章内容在以后各章的应用, 本章末尾的小结中有简要说明。

1.1 线性空间与线性变换

1.1.1 线性空间的定义

在集合上赋予一定的结构或一定的要求, 则这个集合就称为一个特定的空间。例如在一个集合 V 上赋予具有两种代数运算的代数结构, 则此集合 V 可称为实数域 \mathbf{R} 上或复数域 \mathbf{C} 上的线性空间或向量空间。这里的两种代数运算是指加法与数乘法, V 按加法为一个交换群。这些运算要满足通常的代数法则, 即乘法的结合律、加法与乘法的分配律等。下面我们给出线性空间的严格定义。

定义1.1.1 设 V 是一个非空集合, P 是一个数域。在集合 V 的元素之间定义了一种代数运算, 叫做加法; 这就是说, 给出了一种法则, 对于 V 中任意两个元素 x 和 y , 在 V 中都有唯一的一个元素 z 与它们对应, 称 z 为 x 与 y 的和, 记为 $z = x + y$ 。在数域 P 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算, 叫做数量乘法; 这就是说, 对于数域 P 中任一数 k 与 V 中的任意一个元素 x , 在 V 中都有一个唯一的元素 h 与它们对应, 称 h 为 k 与 x 的数量乘积, 记为 $h = kx$ 。如果加法与数量乘法满足下面的规则, 那么 V 为数域 P 上的线性空间。

加法规则:

① $x + y = y + x$

② $(x + y) + z = x + (y + z)$

③ 在 V 中有一个元素 0 , 对于 V 中的任何一个元素都有 $x + 0 = x$ 。具有这个性质的元素称为零元素。

④ 对于 V 中的每一个元素, 都有 V 中的元素 y , 使得 $x + y = 0$ 。此时称 y 为 x 的负元素。

数量乘法规则:

① $1x = x$

② $k(lx) = (kl)x$

数量乘法与加法混合运算规则:

① $(k + l)x = kx + lx$

② $k(x + y) = kx + ky$

在以上诸规则中, k, l 等表示数域 P 中的任意数; x, y, z, h 等表示集合 V 中的任意元素。

再如在 V 上赋予距离, 此距离满足通常所说的距离之性质, 则 V 称为距离空间。 V 上还可以赋予拓扑结构, 则 V 称为拓扑空间。 但这里主要讨论线性空间。

例1.1.1 如果用 \mathbf{R}^n 表示有序的实数组

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

全体的集合。 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, 在 \mathbf{R}^n 中规定加法和数乘为

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \quad a \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}$$

显然

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, \quad a \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$$

极易验算这种 “+” 和 “·” 满足通常的代数法则, 故 \mathbf{R}^n 是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间, 也称为向量空间。

同理, 如果用 \mathbf{C}^n 表示有序复数组

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

全体的集合, 则 \mathbf{C}^n 是复数域 \mathbf{C} 上的线性空间。

例1.1.2 将 $n \times m$ 个实数排成如下矩阵

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

用 $\mathbf{R}^{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 个实矩阵全体的集合。 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} \end{bmatrix}$$

或简记

$$A = [x_{ij}], \quad B = [y_{ij}]$$

规定

$$A + B = [x_{ij} + y_{ij}], \quad \alpha \cdot A = [\alpha x_{ij}], \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

则 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 也是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间。因此不难看出，实数域上的线性空间的本质是指它们内部的运算具有线性性。

定义1.12 如果 V 是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间， V_1 是 V 的一个子集，在 V_1 上的加法和数乘运算同于 V 上的运算，若 V_1 也是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间，则称 V_1 是 V 的子空间。

例1.13 设 V 是线性空间， $v \in V$ ，则不难验证

$$V_1 = \{v_1 | v_1 = av, \forall a \in \mathbf{R}\}$$

是 V 的子空间。它也称为由 v 成的子空间。

例1.14 设 a_1, a_2, \dots, a_m 是线性空间 V 中 m 个元，或称为 V 中的 m 个矢量，则

$$V_1 = \{v_1 | v_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m, \alpha_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, m\}$$

是 V 的子空间，也称 V_1 是由 a_1, a_2, \dots, a_m 所生成的子空间。

例1.15 设 V 是线性空间，显然 $0 \in V$ ，那么 $V_1 = \{0\}$ 是 V 的子空间，称为零子空间。

定义1.13 若 V 是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间， V_1, V_2 是 V 的两个子空间，若对 $\forall v \in V$ 都有唯一的 $v_1 \in V_1$ 和 $v_2 \in V_2$ ，满足

$$v = v_1 + v_2$$

则称 V 是 V_1 和 V_2 的直和空间，记为

$$V = V_1 \oplus V_2$$

反之，设 V_1, V_2 同为实数域 \mathbf{R} 上的线性空间， $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ ，将 v_1, v_2 按序排成 (v_1, v_2) ，并令

$$V = \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

再在 V 中规定同于向量的加法和数乘的运算，这时 V 仍是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间，它被称为 V_1, V_2 的乘积空间。

1.1.2 线性空间的基和维数

设 V 是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间，它的元即是向量。

定义1.14 设 u_1, u_2, \dots, u_m 是 V 中一组矢量(可以重复)，如果存在一组不全为0的实数 $a_i, i = 1, 2, \dots, m$ ，使

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m = 0$$

则称 u_1, u_2, \dots, u_m 为线性相关，否则称 u_1, u_2, \dots, u_m 为线性无关，此时必然有

$$a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$$

定义1.15 设 v_1, v_2, \dots, v_m 是 V 中一组矢量(可以重复)，称向量 u 是 v_1, v_2, \dots, v_m 的线性组合，是指有实数 $a_i, i = 1, 2, \dots, m$ 存在，使

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m$$

由上述定义可知, 如果 u_1, u_2, \dots, u_m 线性无关, 而 u, u_1, u_2, \dots, u_m 线性相关, 则 u 为 u_1, u_2, \dots, u_m 的线性组合, 且表示法是唯一的。

定义1.16 如果向量 e_1, e_2, \dots, e_n 为线性无关, 而 V 中每个向量均可由它们线性表示, 则称 e_1, e_2, \dots, e_n 构成线性空间 V 的一组基。而基 e_1, e_2, \dots, e_n 的个数称为 V 的维数, 记为 $\dim(V) = n$ 。当 $n < \infty$ 时, 称 V 为有穷维线性空间。当 $n = \infty$ 时, 则称 V 为无穷维线性空间。

例1.16 在欧氏空间 \mathbf{R}^n 中选取 n 个无关向量

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

它们便构成 \mathbf{R}^n 的一组基。因此, \mathbf{R}^n 也称为 n 维欧氏空间。

1.13 线性变换

定义1.17 设 V_1, V_2 均为实数域 \mathbf{R} 上的线性空间, T 是由 V_1 到 V_2 的一个映象, 当 T 满足

$$T(a+b) = Ta + Tb, \quad T(\beta a) = \beta Ta, \quad \forall a, b \in V_1, \beta \in \mathbf{R}$$

时, 称 T 为由 V_1 到 V_2 的线性变换或线性算子, V_1 称为 T 定义域。若令

$$TV_1 = \{Tv_1 \in V_1\} \subset V_2$$

则 TV_1 也是一个线性空间, 它被称为 T 的值域空间, 记为 $\text{Im}T = TV_1$ 。在 $V_1 = V_2$ 时, 称 T 为 V_1 上的线性变换。

例1.17 记

$$V_1 = C^1[a, b], \quad V_2 = C[a, b]$$

这里 $C^1[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 区间上一次可微函数的全体, $C[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 区间上连续函数的全体。容易验证 V_1, V_2 都是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间。定义

$$T = \frac{d}{dt}$$

亦不难验证 T 是 V_1 到 V_2 的线性变换, 有时也称为线性算子或微分算子。

定义1.18 设 V 为一线性空间, 若 T 是 V 上的线性变换, 构造集合

$$N = \{x \mid Tx = 0, x \in V\}$$

则 N 是 V 的一个子空间, 称为线性变换 T 的 **Ker** 空间, 记为

$$N = \text{Ker} T$$

例1.18 令

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n \right\} = \mathbf{R}^n$$

$$T: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

则 T 为 V 上的线性变换, 易知

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 2, 3, \dots, n \right\}$$

是 T 的 Ker 空间, 即

$$N = \text{Ker } T$$

显然, 若向量 e_1, e_2, \dots, e_n 构成 \mathbf{R}^n 的一组基, 则由上述基的定义可知, 对所有 $u \in \mathbf{R}^n$, 均可唯一表成

$$u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

我们称 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 为关于基 e_1, e_2, \dots, e_n 的坐标。若向量 e'_1, e'_2, \dots, e'_n 构成 \mathbf{R}^n 的另外一组基, 则

有

$$[e'_1 \ e'_2 \ \dots \ e'_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] P, \quad P \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

而对任意 $v \in \mathbf{R}^n$, 有

$$v = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [e'_1 \ e'_2 \ \dots \ e'_n] \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix}$$

由此可知

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix}$$

我们称 P 为基 e_1, e_2, \dots, e_n 与基 e'_1, e'_2, \dots, e'_n 之间的坐标变换。容易验证, 坐标变换 P 也是 V 上的线性变换。

1.2 矩阵代数中的几个结果

1.2.1 矩阵降秩条件

设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 则 A 的列是 m 维列向量, 共有 n 个; A 的行是 n 维行向量, 共有 m 个。

定义1.2.1 矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 中列向量的最大无关组的个数称为 A 的列秩; 其行向量的最大无关组的个数称为矩阵 A 的行秩。

对于矩阵而言, 容易证明下述命题。

命题1.2.1 矩阵的行秩与列秩相等。

鉴于上述结论, 我们有:

定义1.2.2 矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的行秩或列秩称为矩阵 A 的秩, 记为 $\text{rank}(A)$ 。

显而易见, 对于矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 而言, 有

$$\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

当 $\text{rank}(A) = m$ 时, 我们称 A 为行满秩矩阵; 当 $\text{rank}(A) = n$ 时, 我们称 A 为列满秩矩阵; 当 $\text{rank}(A) < \min\{m, n\}$ 时, 我们称 A 为降秩矩阵, 特别当 $\text{rank}(A) < m$ 时, 称 A 为行降秩的; 当 $\text{rank}(A) < n$ 时, 称 A 为列降秩的; 当 $\text{rank}(A) = m = n$ 时, 称矩阵 A 是可逆的或非奇异的。

关于矩阵的秩, 我们有下述结果。关于它们的证明, 请读者自己完成。

定理1.2.1 设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 则

- ① 矩阵 A 行降秩的充要条件是存在向量 $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \neq 0$, 满足 $\alpha^T A = 0$;
- ② 矩阵 A 列降秩的充要条件是存在向量 $\beta \in \mathbb{R}^n$, $\beta \neq 0$, 满足 $A\beta = 0$ 。

定理1.2.2 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 且 $A = QQ^T$, 则

- ① 矩阵 A 降秩的充要条件是矩阵 Q 行降秩;
- ② 矩阵 A 满秩的充要条件是矩阵 A 正定。

1.2.2 Vendermonde矩阵与友矩阵

Vendermonde矩阵与友矩阵是矩阵代数中的两类重要的矩阵, 在控制理论中经常用到。

(1) Vendermonde矩阵及其性质

设 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ 为一组复数, 定义

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

则形如式(1.2.1)的矩阵 P 称为Vandermonde矩阵。关于Vandermonde矩阵的行列式, 我们有:

引理1.2.1 $\det(P) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$

关于上述引理的证明参见文献[29, p78]。由上述引理立即可得下述推论。

推论1.2.1 Vandermonde矩阵 P 可逆的充要条件是 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ 互异。

关于Vandermonde矩阵的求逆, 我们有:

引理1.2.2^[30, 31] 设 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ 互异, 则 $T = P^{-1}$ 的第 i 行第 j 列元素 t_{ij} 由下述多项式展开式决定:

$$f_i(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(z - \lambda_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)} = \sum_{j=1}^n t_{ij} z^{j-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.2)$$

(2) 友矩阵及其性质

设 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 其特征多项式为

$$D(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \quad (1.2.3)$$

我们定义矩阵

$$A^c = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

为矩阵 A 的友矩阵(Companion matrix)。关于友矩阵的特征值和特征向量, 我们有下列结果:

引理1.2.3 设矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 具有互异特征值 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则其友矩阵 A^c 亦以 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ 为特征值, 且 A^c 与 λ_i 相对应的特征向量为

$$p_i = [1 \ \lambda_i \ \lambda_i^2 \ \cdots \ \lambda_i^{n-1}]^T \quad (1.2.5)$$

证明 由于 λ_i 为矩阵 A 的特征值, 故

$$D(\lambda_i) = \lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_i + a_0 = 0 \quad (1.2.6)$$

从而

$$(A^c - \lambda_i I)p_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -D(\lambda_i) \end{bmatrix} = 0 \quad (1.2.7)$$

上式说明, λ_i 为矩阵 A^c 的特征值, p_i 为其相应的特征向量。

△△△

根据上述引理及若当分解可得下述推论:

推论1.2.2 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 具有互异特征值, 则有

$$A^c = P \operatorname{diag}[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n] P^{-1} \quad (1.2.8)$$

其中, 矩阵 P 为由式(1.2.1)定义的Vandermonde矩阵。

上述事实告诉我们, Vandermonde矩阵为具有互异特征值的友阵的特征向量矩阵。另外, 推论1.2.2还告诉我们, 一个具有互异特征值的矩阵 A 与其友阵具有相同的约当标准型(对角形)。从而根据相似关系的传递性可得下述命题:

命题1.2.2 具有互异特征值的矩阵与其友阵是相似的。

值得说明, 本小节中关于友矩阵的结果可以推广到具有相重特征值的矩阵上去, 但由于关于矩阵的特征值的重数和特征向量链的概念要到第五节中才交代, 此处从略。

最后, 我们给出关于友矩阵求逆的下述结果:

定理1.2.2 由式(1.2.4)给出的友矩阵可逆的充要条件是 $a_0 \neq 0$, 且

$$[A^c]^{-1} = \begin{bmatrix} -a_1/a_0 & -a_2/a_0 & \cdots & -a_{n-1}/a_0 & -1/a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

证明 直接验证 $A^c \cdot [A^c]^{-1} = I$ 即可。

△△△

1.2.3 Cayley-Hamilton定理与化零多项式

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 矩阵 A 的特征多项式定义为

$$D(s) = \det(sI - A) \quad (1.2.14)$$

它是关于 s 的一个 n 阶多项式。下述的著名定理揭示了矩阵 A 的乘幂之间的相关关系, 在许多场合都有重要应用。

Cayley-Hamilton定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D(s)$ 为矩阵 A 的特征多项式, 则 $D(A) = 0$ 。

关于上述定理的证明, 请读者参阅有关矩阵代数方面的书籍, 此处从略。

记

$$D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_0 \quad (1.2.15)$$

则由Cayley-Hamilton定理可得

$$A^n = -(a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_0I) \quad (1.2.16)$$

即 A^n 可表为 $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I$ 的线性组合。利用式(1.2.16)递推可得下述命题:

命题1.2.3 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则对于一切 $m \geq n$, A^m 均可表为 $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I$ 的线性组合。

从Cayley-Hamilton定理可知, 对于任意一个 n 阶方阵 A , 总存在一个多项式 $f(s)$ 满足 $f(A) = 0$, 这样的多项式称为矩阵 A 的一个化零多项式。Cayley-Hamilton定理指出, 矩阵 A 的特征多项式为 A 的一个化零多项式。显然, 一个矩阵的化零多项式并不唯一, 而且有无穷多个。在其所有化零多项式中, 次数最低且最高次幂项系数为1的多项式称为矩阵 A 的最小多项式。一个矩阵的任何化零多项式均可被其最小多项式整除。

作为化零多项式概念的推广, 我们还有:

定义1.2.3 设 $0 \neq z \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 如果 s 的多项式 $f(s)$ 满足 $z^T f(A) = 0$, 则称其是 z^T 相对 A 的化零多项式。阶次最低的首一的 z^T 相对 A 的化零多项式称为 z^T 相对 A 的极小多项式。

命题1.2.4 设 $0 \neq z \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f(s)$ 为 z^T 相对 A 的极小多项式, λ 为其零点, 则

- ① λ 为矩阵 A 的特征值;
- ② 当记 $f(s) = p(s)(s - \lambda)$ 时, $\psi^T = z^T p(A)$ 为矩阵 A 的属于 λ 的左特征向量。

证明 由定义有

$$z^T f(A) = z^T p(A)(A - \lambda I) = 0$$

即

$$\psi^T A = \lambda \psi^T$$

注意到 $p(s)$ 的阶次低于 $f(s)$ 的阶次, 又 $f(s)$ 为 z^T 相对 A 的极小多项式, 因而有 $\psi^T = z^T p(A) \neq 0$, 从而上式说明 λ 为矩阵 A 的特征值, $\psi^T = z^T p(A)$ 为相应的左特征向量。

△△△

1.2.4 豫解矩阵与Leverrier算法

在上小节中引入了矩阵的特征多项式的概念。对于阶数较高的矩阵, 直接依定义去求其特征多项式是比较困难的。另外, 在许多问题中也常常需要求取矩阵 $(sI - A)^{-1}$, 该矩阵称之为矩阵 A 的豫解矩阵。

由公式

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{D(s)} \quad (1.2.17)$$

可将豫解矩阵 $(sI - A)^{-1}$ 的求取转化为 $D(s)$ 和 $\text{Adj}(sI - A)$ 的求取。而著名的Leverrier算法则为我们求取 $D(s)$ 和 $\text{Adj}(sI - A)$ 提供了方便的递推算法。

定理1.2.3 记 $D(s)$ 如式(1.2.15)所示,

$$\text{Adj}(sI - A) = R_{n-1}s^{n-1} + R_{n-2}s^{n-2} + \cdots + R_1s + R_0$$

则 $R_j, a_j, j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 可由下述Leverrier算法来完成

$$\begin{aligned}
R_{n-1} &= I & a_{n-1} &= -\frac{\text{tr}(R_{n-1}A)}{1} \\
R_{n-2} &= R_{n-1}A + a_{n-1}I & a_{n-2} &= -\frac{\text{tr}(R_{n-2}A)}{2} \\
R_{n-3} &= R_{n-2}A + a_{n-2}I & a_{n-3} &= -\frac{\text{tr}(R_{n-3}A)}{3} \\
&\vdots & & \vdots \\
R_1 &= R_2A + a_2I & a_1 &= -\frac{\text{tr}(R_1A)}{n-1} \\
R_0 &= R_1A + a_1I & a_0 &= -\frac{\text{tr}(R_0A)}{n}
\end{aligned}$$

上述Levernier算法的特点是按 i 的反序号 $i = n-1, n-2, \dots, 1, 0$ 递推地获得 $D(s)$ 和 $\text{Adj}(sI - A)$ 的系数。如将上述算法紧凑地写出来, 则为下述形式

$$\begin{aligned}
R_{n-k} &= R_{n-k+1}A + a_{n-k+1}I, \quad R_n = 0, \quad a_n = 1 \\
a_{n-k} &= -\frac{\text{tr}(R_{n-k}A)}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

基于Levernier算法, 我们可以很容易获得豫解矩阵的另外一种表达式。

推论1.2.3 设 A 为 n 阶方阵, 则其豫解矩阵 $(sI - A)^{-1}$ 具有下述表示

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{p_k(s)}{D(s)} A^k$$

其中

$$\begin{cases}
p_0(s) = s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_2s + a_1 \\
p_1(s) = s^{n-2} + a_{n-2}s^{n-3} + \dots + a_3s + a_2 \\
\vdots \\
p_{n-2}(s) = s + a_{n-1} \\
p_{n-1}(s) = 1
\end{cases}$$

Levernier算法给出了计算 $D(s)$ 和 $\text{Adj}(sI - A)$ 的方法。下述定理进一步给出了基于 $D(s)$ 和 $\text{Adj}(sI - A)$ 来计算矩阵 A 的最小多项式的一种途径。

定理1.2.4 设 $m(s)$ 为 $\text{Adj}(sI - A)$ 中所有元素的首一最大公约式, 则 $D(s)/m(s)$ 为矩阵 A 的最小特征多项式。

1.3 多项式矩阵

设 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 如果它的所有元素 $a_{ij} = a_{ij}(s)$ 均为变量 s 的实系数多项式, 则称 A 为一个 $m \times n$ 阶的实数域上的多项式矩阵, 记为 $A(s)$ 。在本节中我们讨论多项式矩阵及其相关的一些问题。

1.3.1 基本概念

一个 $m \times n$ 阶的多项式矩阵 $A(s)$ 具有下述一般表示

$$A(s) = A_l s^l + A_{l-1} s^{l-1} + \cdots + A_1 s + A_0 \quad (1.3.1)$$

其中 $A_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, l$ 均为定常的实矩阵, 在 $A_l \neq 0$ 的条件下, l 代表了 $A(s)$ 的次数。显而易见, 通常的定常矩阵均为零次多项式矩阵。

定义1.3.1 对于 $m \times n$ 阶的多项式矩阵 $A(s)$, 如果至少有一个 r 级子式不恒等于零, 而所有 r 级以上子式均恒等于零, 则称 r 为多项式矩阵 $A(s)$ 的秩, 记为 $\text{rank } A(s) = r$ 。

当 $m = 1$ 或 $r = 1$ 时, 多项式矩阵 $A(s)$ 化为多项式行向量或多项式列向量。设 $x_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$, 为一组多项式向量, 如果存在不全为零的多项式 $\alpha_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$, 使得

$$\alpha_1(s)x_1(s) + \alpha_2(s)x_2(s) + \cdots + \alpha_r(s)x_r(s) = 0 \quad (1.3.2)$$

成立时, 称多项式向量组 $x_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$ 线性相关。当仅限于 $\alpha_i(s) \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, r$ 时式(1.3.2)才成立, 则称多项式向量组 $x_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$ 线性独立或线性无关。

与数字矩阵的情形相仿, 对于多项式矩阵 $A(s)$, 我们亦有以下命题:

命题1.3.1 设 $A(s)$ 为 $m \times n$ 阶多项式矩阵, r 为一不大于 m 或 n 的正整数, 则 $A(s)$ 的秩为 r 的充要条件是 $A(s)$ 中有 r 个列(行)线性独立, 而其任何 $r+1$ 个列(行)均线性相关。

当 $\text{rank } A(s) = m$ 或 $\text{rank } A(s) = n$ 时, 我们称多项式矩阵 $A(s)$ 为行满秩或列满秩的。此时多项式矩阵 $A(s)$ 的所有行或所有列构成一个线性无关组。特别对于 $m = n$ 的情形, $A(s)$ 满秩的充要条件是 $\det A(s)$ 不恒为零。对于数字矩阵, 满秩与可逆是等价的。但对多项式矩阵的情形, 可逆性则与 s 的取值有关。

定义1.3.2 如果对于 $\forall s \in \mathbb{C}$, 多项式矩阵 $A(s)$ 均为可逆的, 则必有 $\det A(s)$ 是一个不为零的常数。这样的多项式矩阵称为幺模阵。

由上述定义和公式

$$[A(s)]^{-1} = \frac{\text{Adj } A(s)}{\det A(s)}$$

易得下述命题:

命题1.3.2 多项式方阵 $A(s)$ 为幺模阵的充要条件是其逆存在且仍为多项式矩阵。

1.3.2 初等变换

与数字矩阵类似, 多项式矩阵亦有初等变换。所谓多项式矩阵的初等行(或列)变换, 是指下列三种典型操作:

- (1) 矩阵的两行(或两列)互换位置;
- (2) 矩阵的某一行(或某一列)乘以非零的常数 c ;
- (3) 矩阵的某一行(或某一列)加上另一行(或列)的 $\phi(s)$ 倍, 此处 $\phi(s)$ 为一个多项式。

和数字矩阵的初等变换一样, 我们可以引进初等矩阵, 使得对一个矩阵的初等行(或列)变换可以通过适当的初等矩阵左乘(或右乘)该矩阵来完成。下面以行变换为例来说明初等行变换矩阵。

情形I 将多项式矩阵 $A(s)$ 的 i, j 两行互换, 得多项式矩阵 $A_1(s)$ 。这一过程可通过下

$$\left. \begin{aligned} P^{-1}(i, j) &= P(i, j) \\ P^{-1}[i, (c)] &= P[i, (1/c)] \\ P^{-1}[i, j(\phi)] &= P[i, j(-\phi)] \end{aligned} \right\} \quad (1.3.9)$$

与初等行变换矩阵相对应的初等列变换矩阵分别记之为 $Q(i, j)$ 、 $Q[i, (c)]$ 和 $Q[i, j(\phi)]$ 。至于它们的定义形式请读者自行写出。

命题1.3.3 多项式方阵 $A(s)$ 为么模阵的充要条件是 $A(s)$ 可表成一系列初等行(或列)变换矩阵之积。

1.3.3 Smith标准型

定义1.3.3 如果可以用一系列初等变换将多项式矩阵 $A(s)$ 化为多项式矩阵 $B(s)$ ，则称多项式矩阵 $A(s)$ 和 $B(s)$ 相互等价。

等价是多项式矩阵之间的一种关系，这种关系显然具有下述三个性质：

- ① 反身性，即每一个多项式矩阵均与自身等价；
- ② 对称性，即 $A(s)$ 与 $B(s)$ 等价可推出 $B(s)$ 与 $A(s)$ 等价；
- ③ 传递性，即 $A(s)$ 与 $B(s)$ 等价， $B(s)$ 与 $C(s)$ 等价，可推出 $A(s)$ 与 $C(s)$ 亦等价。

根据命题1.3.3，多项式矩阵 $A(s)$ 和 $B(s)$ 等价，可用下式描述

$$B(s) = P(s)A(s)Q(s) \quad (1.3.10)$$

其中， $P(s)$ 和 $Q(s)$ 为两个适当阶的么模阵。

本小节的主要结果是下述事实。

定理1.3.1 设 $A(s)$ 为 $m \times n$ 的多项式矩阵，令

$$r = \text{rank } A(s) \leq \min\{m, n\}$$

则 $A(s)$ 等价于下述Smith标准型：

$$A_e(s) = \begin{bmatrix} d_1(s) & & & & & & 0 \\ & d_2(s) & & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & d_r(s) & & & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.11)$$

其中 $d_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$ 是不为零的首一多项式，且 $d_{j+1}(s)$ 可被 $d_j(s)$ 整除 ($j = 1, 2, \dots, r-1$)。

证明 下述证明实际上是一个一般过程，可视为化多项式矩阵为Smith标准型的一个算法。

① 如果 $A(s) = 0$ ，则其本身就是标准型。否则 $A(s)$ 至少有一个不为零的三阶

$$\begin{aligned} a_{i1}(s) &= a_{11}(s)q_{i1}(s) + r_{i1}(s), \quad i = 2, 3, \dots, m \\ a_{1k}(s) &= a_{11}(s)q_{1k}(s) + r_{1k}(s), \quad k = 2, 3, \dots, m \end{aligned}$$

如果余式 $r_{i1}(s)$ 和 $r_{1k}(s)$, $i = 2, 3, \dots, m$, $k = 2, 3, \dots, m$ 均恒为零, 则进入下面第④步。否则可在不恒等于零的余式中找出次数最低的, 例如 $r_{i_0 1}(s)$, 将第 i_0 行加上第一行的 $q_{i_0 1}(s)$ 倍, 然后回到第②步。因余式 $r_{i1}(s)$, $r_{1k}(s)$ 的次数一定比 $a_{11}(s)$ 的次数低, 从而进行一次第②、③步操作, (1,1)元素的次数至少降低一次。因而经过有限次之后, 所有的余式必恒等于零。

④ 将第 i 行减去第一行的 $q_{i1}(s)$ 倍, $i = 2, 3, \dots, m$, 将第 k 列减去第一列的 $q_{1k}(s)$ 倍, $k = 2, 3, \dots, m$, 便可得到下述形式的多项式矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}(s) & \cdots & a_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2}(s) & \cdots & a_{mn}(s) \end{bmatrix} \quad (1.3.12)$$

其中 $a_{11}(s)$ 的次数低于所有其它非零的 $a_{ik}(s)$ 的次数。如果 $a_{ik}(s)$, $i = 2, 3, \dots, m$, $k = 2, \dots, m$ 均可被 $a_{11}(s)$ 整除, 进行下一步。否则 $a_{ik}(s)$ 中有不能被 $a_{11}(s)$ 整除的, 例如 $a_{i_0 k_0}(s)$, 此时可将第 i_0 行加到第 1 行, 再回到第③步。这样反复进行有限次之后, 便可将(1.3.12)化成所有的 $a_{ik}(s)$, $i = 2, \dots, m$, $k = 2, \dots, m$, 均可被 $a_{11}(s)$ 整除的情形。

⑤ 进一步对(1.3.12)中右下角的子矩阵进行①~④的操作, 可将原矩阵化为

$$\begin{bmatrix} a_{11}(s) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & a'_{33}(s) & \cdots & a'_{3n}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & a'_{m3}(s) & \cdots & a'_{mn}(s) \end{bmatrix}$$

其中所有的非零的 $a'_{ik}(s)$, $i, k = 3, 4, \dots, m$ 均可被 $a'_{22}(s)$ 整除。再注意到(1.3.12)中右下角的子矩阵的所有元均能被 $a_{11}(s)$ 整除, 则对该子矩阵进行初等变换所得到的任意矩阵仍然能被 $a_{11}(s)$ 整除。故 $a'_{22}(s)$ 可被 $a_{11}(s)$ 整除。

⑥ 继续进行①~⑤的操作, 经过有限次之后必可将原矩阵化为

$$\begin{bmatrix} a^*_{11}(s) & & & & 0 \\ & a^*_{22}(s) & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a^*_r(s) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.13)$$

其中 $a^*_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$ 为不恒为零的多项式, 且 $a^*_i(s)$ 可整除 $a^*_{i+1, i+1}(s)$, $i = 1, 2, \dots, r-1$ 。

⑦ 对式(1.3.13)进行某一行乘以一个非零常数的操作, 可将其中的 $a_{ii}^*(s)$, $i=1, 2, \dots, r$, 均化为首一的多项式。然后令 $d_i(s) = a_{ii}^*(s)$, $i=1, 2, \dots, r$, 便得矩阵 $A(s)$ 的Smith标准型(1.3.11).

△△△

下述命题为上述定理和命题1.3.3的直接推论。

命题1.3.4 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 为数字矩阵; 且条件

$$\text{rank}[sI - A \quad B] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.3.14)$$

成立, 则存在适当阶的么模阵 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 满足

$$P(s)[A - sI \quad B]Q(s) = [0 \quad I] \quad (1.3.15)$$

在许多场合下, 我们需要求取满足上式的么模阵。对此我们有下述算法:

算法1.3.1 [化 $[A - sI \quad B]$ 为Smith标准型]

第一步: 组成增广矩阵

$$E(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B & I_n \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \end{bmatrix}$$

第二步: 在条件(1.3.14)下将 $E(s)$ 化为下述形式

$$E'(s) = \begin{bmatrix} [0 \quad I] & G(s) \\ H(s) & * \end{bmatrix}$$

第三步: 取 $P(s) = G(s)$, $Q(s) = H(s)$ 即为所求。

1.4 有理分式矩阵及其互质分解

众所周知, 两个多项式 $p(s)$ 和 $q(s)$ 之比 $p(s)/q(s) = w(s)$ 称为一个有理分式。如果一个与变量 s 相关的 $n \times r$ 的矩阵 $W(s)$, 其每一元 $w_{ij}(s)$ 均为变量 s 的有理分式, 则 $W(s)$ 称为一个有理分式矩阵。与标量的情形类似, 任何一个有理分式矩阵总可以表成

$$W(s) = N(s)D^{-1}(s) \quad (1.4.1)$$

或

$$W(s) = L^{-1}(s)H(s) \quad (1.4.2)$$

的形式, 其中 $N(s)$ 、 $D(s)$ 、 $L(s)$ 和 $H(s)$ 分别为 $n \times r$ 、 $r \times r$ 、 $n \times n$ 和 $n \times r$ 阶的多项式矩阵。式(1.4.1)称为 $W(s)$ 的右分解; 式(1.4.2)称为 $W(s)$ 的左分解。

有理分式矩阵的分解是不唯一的, 对此我们容易证得下述命题:

命题1.4.1 设 $W(s)$ 、 $N(s)$ 、 $D(s)$ 、 $L(s)$ 和 $H(s)$ 如上所述。 $U(s)$ 和 $V(s)$ 分别为两个 $r \times r$ 和 $n \times n$ 的可逆多项式矩阵, 令

$$\tilde{N}(s) = N(s)U(s), \quad \tilde{D}(s) = D(s)U(s)$$

$$\tilde{L}(s) = V(s)L(s), \quad \tilde{H}(s) = V(s)H(s)$$

则

$$W(s) = \tilde{N}(s)\tilde{D}^{-1}(s)$$

和

$$W(s) = \tilde{L}^{-1}(s)\tilde{H}(s)$$

成立。

在一个有理分式的众多的分解之中，其中一类称之为互质分解或既约分解的情形至关重要。为介绍这一概念，我们先从互质多项式矩阵入手。

1.4.1 互质多项式矩阵

定义1.4.1 设 $A(s)$ 、 $B(s)$ 和 $C(s)$ 分别为 $m \times n$ 、 $m \times p$ 和 $p \times n$ 的多项式矩阵，如果它们三者之间存在下述关系

$$A(s) = B(s)C(s) \quad (1.4.3)$$

则称 $B(s)$ 为 $A(s)$ 的左因子， $A(s)$ 为 $B(s)$ 的右倍式。

定义1.4.2 设 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 为两个同行数的多项式矩阵。如果多项式矩阵 $B(s)$ 同为 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的左因子，则称 $B(s)$ 为 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的左公因子。如果多项式矩阵 $D(s)$ 是 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的左公因子，且同时是 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的所有左公因子的右倍式，即对于 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的任意左公因子 $B(s)$ ，均有满足

$$D(s) = B(s)Z(s)$$

的多项式矩阵 $Z(s)$ 存在，则称 $D(s)$ 是 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的最大左公因子。

定义1.4.3 设 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 分别为 $m \times n_1$ 和 $m \times n_2$ ($n_1 + n_2 \geq m$) 的多项式矩阵。如果 $[A_1(s) \ A_2(s)]$ 的Smith标准型为 $[I_m \ 0]$ ，则称 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 左互质。

由命题1.3.4可知，对于数字矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ， $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ，当条件(1.3.14)满足时有 $(sI - A)$ 和 B 左互质。

下述定理揭示了矩阵互质的本质。

定理1.4.1 设 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 分别为 $m \times n_1$ 和 $m \times n_2$ 的多项式矩阵，且 $\text{rank}[A_1(s) \ A_2(s)] = m$ ，则下述三个条件等价：

- ① $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 左互质；
- ② $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的 $m \times m$ 的左最大公因子为幺模阵；
- ③ 存在 $n_1 \times m$ 和 $n_2 \times m$ 的多项式矩阵 $B_1(s)$ 和 $B_2(s)$ 满足

$$A_1(s)B_1(s) + A_2(s)B_2(s) = I_m \quad (1.4.4)$$

以上介绍了多项式矩阵的左因子和左互质的概念。对应的可以完全类似地定义多项式矩阵的右因子和右互质的概念。例如，对应于定义1.4.3和定理1.4.1，我们有：

定义1.4.3' 设 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 分别为 $m_1 \times n$ 和 $m_2 \times n$ ($m_1 + m_2 \geq n$) 的多项式矩阵。

如果矩阵 $\begin{bmatrix} A_1(s) \\ A_2(s) \end{bmatrix}$ 的Smith标准型为 $\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ ，则称 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 右互质。

定理1.4.1' 设 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 分别为 $m_1 \times n$ 和 $m_2 \times n$ 的多项式矩阵，且

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ A_2(s) \end{bmatrix} = n$$

则下面三个条件等价:

- ① $A_1(s)$ 与 $A_2(s)$ 右互质;
- ② $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的 $n \times n$ 最大右公因子为幺模阵;
- ③ 存在 $n \times m_1$ 和 $n \times m_2$ 的多项式矩阵 $B_1(s)$ 和 $B_2(s)$ 满足

$$B_1(s)A_1(s) + B_2(s)A_2(s) = I \quad (1.4.5)$$

关于定理1.4.1和定理1.4.1'的证明,有兴趣的读者可参阅有关文献^[2, 3]。

直接利用定义我们还有关于多项式矩阵互质的下述判据。

定理1.4.2 设 $N(s)$ 和 $D(s)$ 分别为 $n \times r$ 和 $r \times r$ 的多项式矩阵, 且 $D(s)$ 非奇异。则 $N(s)$ 和 $D(s)$ 右互质的充要条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} = r, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.4.6)$$

1.4.2 有理分式矩阵的互质分解

定义1.4.4 设 $W(s)$ 为一个 $n \times r$ 的有理分式矩阵, 且具有分解(1.4.1)和(1.4.2)。当 $N(s)$ 和 $D(s)$ 右互质时, 式(1.4.1)称为 $W(s)$ 的右互质分解; 当 $L(s)$ 和 $H(s)$ 左互质时, 式(1.4.2)称为 $W(s)$ 的左互质分解。互质分解也常称既不可简约分解或既约分解。

尽管有理分式矩阵的互质分解是有理分式矩阵分解中的很少的一类, 但它仍然是非唯一的。下面的定理同时指出了有理分式矩阵互质分解的不唯一性及有理分式矩阵的不同的互质分解之间的关系。

定理1.4.3 给定一个 $n \times r$ 的有理分式矩阵 $W(s)$, 则

- ① $N_1(s)D_1^{-1}(s)$ 和 $N_2(s)D_2^{-1}(s)$ 同时为 $W(s)$ 的右互质分解的充要条件是存在幺模阵 $U(s)$, 使得

$$D_1(s) = D_2(s)U(s), \quad N_1(s) = N_2(s)U(s) \quad (1.4.7)$$

- ② $L_1^{-1}(s)H_1(s)$ 和 $L_2^{-1}(s)H_2(s)$ 同为 $W(s)$ 的左互质分解的充要条件是存在幺模阵 $V(s)$ 使得

$$L_1(s) = V(s)L_2(s), \quad H_1(s) = V(s)H_2(s) \quad (1.4.8)$$



证明 这里只证结论①, 结论②可类似地证明。

充分性 设

$$W(s) = N_2(s)D_2^{-1}(s)$$

为一右互质分解, 则由定理1.4.2可知

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N_2(s) \\ D_2(s) \end{bmatrix} = r \quad (1.4.9)$$

当条件(1.4.7)成立时, 显然有

$$W(s) = N_1(s)D_1^{-1}(s) \quad (1.4.10)$$

又由于

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N_1(s) \\ D_1(s) \end{bmatrix} = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} N_2(s) \\ D_2(s) \end{bmatrix} U(s) \right) = \text{rank} \begin{bmatrix} N_2(s) \\ D_2(s) \end{bmatrix} = r$$

则再由定理1.4.2可知, 式(1.4.10)亦为 $W(s)$ 的一右互质分解。

必要性 取

$$U(s) = D_2^{-1}(s) D_1(s) \quad (1.4.11)$$

则 $U(s)$ 非奇异, 且使得式(1.4.7)成立。因此下面只须证得 $U(s)$ 为么模阵即可。为此, 根据命题1.4.2我们只须证得 $U(s)$ 和 $U^{-1}(s)$ 均为多项式矩阵即可。

由于 $N_2(s)$ 和 $D_2(s)$ 右互质, 则由定理1.4.1可知存在矩阵 $Z(s)$ 和 $Y(s)$ 满足

$$Z(s)D_2(s) + Y(s)N_2(s) = I \quad (1.4.12)$$

再利用式(1.4.7)可将上式化为

$$Z(s)D_1(s)U^{-1}(s) + Y(s)N_1(s)U^{-1}(s) = I$$

于上式两端同时右乘矩阵 $U(s)$, 可得

$$U(s) = Z(s)D_1(s) + Y(s)N_1(s) \quad (1.4.13)$$

由于上式右端为一多项式矩阵, 故 $U(s)$ 必为多项式矩阵。再由 $N_1(s)$ 和 $N_2(s)$ 的右互质条件可知, 存在多项式矩阵 $T(s)$ 和 $R(s)$, 满足

$$T(s)D_1(s) + R(s)N_1(s) = I$$

将式(1.4.7)代入上式, 可得

$$T(s)N_2(s)U(s) + R(s)N_2(s)U(s) = I$$

于上式两端同时右乘矩阵 $U^{-1}(s)$, 可得

$$U^{-1}(s) = T(s)D_2(s) + R(s)N_2(s) \quad (1.4.14)$$

由此可知, $U^{-1}(s)$ 亦为多项式矩阵。

△△△

关于一般的有理分式矩阵 $W(s)$ 的既约分解的求取, 请参阅有关文献^[2-3]。

下面我们将考虑一类特殊的有理分式的右既约分解的求取问题。

1.4.3 矩阵 $(sI - A)^{-1}B$ 的右既约分解

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 为两个数字矩阵, 则

$$W(s) = (sI - A)^{-1}B \quad (1.4.15)$$

为一个 $n \times r$ 的多项式项阵。由命题1.4.3可知, 在条件

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} \equiv n, \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.4.16)$$

下, 式(1.4.15)可化为

算法1.4.1 [右既约分解式(1.4.17)的求取]

第一步: 利用算法1.3.1求取幺模阵 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 满足

$$P(s)[sI - A \quad B]Q(s) = [0 \quad I] \quad (1.4.18)$$

第二步: 将幺模阵 $Q(s)$ 做如下分块

$$Q(s) = \begin{bmatrix} Q_{11}(s) & Q_{12}(s) \\ Q_{21}(s) & Q_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (1.4.19)$$

其中 $Q_{11}(s)$ 和 $Q_{21}(s)$ 分别为 $n \times r$ 和 $r \times r$ 的多项式矩阵。

第三步: 取

$$N(s) = Q_{11}(s), \quad D(s) = Q_{21}(s) \quad (1.4.20)$$

则 $N(s)$ 与 $D(s)$ 满足右既约分解式(1.4.17)。

上述算法中的第一步中 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 的存在性是由命题1.4.1保证的。下面证明算法1.4.1的结论。

命题1.4.2 在(1.4.16)成立的条件下, 由算法1.4.1给出的多项式矩阵 $N(s)$ 和 $D(s)$ 右互质, 且 $D(s)$ 满秩, 另外使得式(1.4.17)成立。

证明

① 由于 $Q(s)$ 为幺模阵, 故必有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Q_{11}(s) \\ Q_{21}(s) \end{bmatrix} = r, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.4.21)$$

从而, $N(s) = Q_{11}(s)$ 和 $D(s) = Q_{21}(s)$ 右互质。

② 由式(1.4.20)和(1.4.21), 可知

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} = r, \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

由此与题设利用反证法可证得 $D(s)$ 满秩。

③ 由式(1.4.18)和式(1.4.19), 可得

$$P(s) \begin{bmatrix} A - sI & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11}(s) \\ Q_{21}(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (1.4.22)$$

由上式亦利用式(1.4.20), 有

$$(A - sI)N(s) + BD(s) = 0 \quad (1.4.23)$$

于上式两端同时左乘 $(A - sI)^{-1}$ 、右乘 $D^{-1}(s)$, 便得式(1.4.17)。

△△△

1.5 若当分解

若当分解是矩阵论中的一个最基本的结果。若当分解的特殊情况——对角分解, 是为人们所熟悉的简单情形。一般情形的若当分解涉及到矩阵特征值的代数重数与几何重数, 较为复杂。

矩阵的若当分解的导出本是以矩阵的特征值和特征向量为基础的。然而这里我们不准备介绍这一过程，而是反过来先承认矩阵的若当分解，在此基础上理解矩阵的特征结构及其一些相关概念和关系。对于若当分解的机理感兴趣的读者可以参阅线性代数方面的书籍^[29]

众所周知，矩阵的若当分解是指下述事实：

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，则存在矩阵 $J, V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ， V 可逆，满足

$$A = VJV^{-1} \quad (1.5.1)$$

其中， V 为矩阵 A 的特征向量矩阵， J 为矩阵 A 的若当标准型。

下面围绕式(1.5.1)来介绍一些与矩阵 A 的特征结构相关联的概念。

1.5.1 特征值的几何重数与代数重数

式(1.5.1)中的矩阵 J 为一个若当矩阵。一个若当矩阵的一般形式为

$$J = \text{Diag}[J_1 \ J_2 \ \cdots \ J_l] \quad (1.5.2)$$

$$J_i = \text{Diag}[J_{i1} \ J_{i2} \ \cdots \ J_{iq_i}] \quad (1.5.3)$$

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{p_{ij} \times p_{ij}}, \quad j = 1, 2, \dots, q_i \quad (1.5.4)$$

其中， λ_i 为矩阵 A 的特征值； J_{ij} 为矩阵 A 的与特征值 λ_i 相关联的若当块。

式(1.5.4)中的 q_i 称矩阵 A 的特征值 λ_i 的几何重数。直观地讲，一个矩阵的某特征值的几何重数即是该矩阵的若当标准型中与该特征值相关联的若当块的个数。

由式(1.5.1)易知

$$\text{rank}(A - \lambda_i I) = \text{rank}(J - \lambda_i I)$$

再注意到 $(J - \lambda_i I)$ 的特殊形式，可得

$$\text{rank}(A - \lambda_i I) = n - q_i \quad (1.5.5)$$

上式实际上即为矩阵 A 的特征值 λ_i 的几何重数 q_i 的基本定义式，它说明 q_i 为 $(A - \lambda_i I)$ 的零空间的维数。

由式(1.5.3)、(1.5.4)可见，在矩阵 A 的若当标准型中，与第 i 个特征值 λ_i 相关的若当块共有 q_i 个，即 $J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{iq_i}$ ，它们的阶数分别为 $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iq_i}$ 。定义

$$a_i = p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{iq_i} \quad (1.5.6)$$

则 a_i 称为矩阵 A 的第 i 个特征值 λ_i 的代数重数。直观地讲，一个矩阵的某特征值的代数重数即是该矩阵的若当标准型中与该特征值相关的所有若当块的阶数之和。从这一点显见矩阵 A 的代数重数 $a_i, i = 1, 2, \dots, l$ 满足关系

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_l = n \quad (1.5.7)$$

由式(1.5.1)易知

$$\det(sI - A) = \det(sI - J)$$

再注意到矩阵 J 的特殊形式可知存在多项式 $p_i(\lambda)$ 满足关系

$$\begin{cases} \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} p_i(\lambda) \\ p_i(\lambda_i) \neq 0 \end{cases} \quad (1.5.8)$$

上式实际上即为矩阵 A 的特征值 λ_i 的代数重数 α_i 的基本定义式。

当我们清楚了矩阵特征值的代数重数与几何重数及其它们在矩阵的若当标准型中的位置，便可以很容易证明下述命题了。

命题1.5.1 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，其若当矩阵的结构如上所述。记

$$\sigma_i = \min\{p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{i q_i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

则

$$f(s) = \prod_{i=1}^l (s - \lambda_i)^{\sigma_i}$$

为矩阵 A 的最小多项式。

根据特征值的几何重数与代数重数，我们可以刻画两类重要的矩阵：一类是各特征值的几何重数与代数重数相等的矩阵，这类矩阵称为是非退化矩阵或简单矩阵，有时也称为可对角化矩阵，因为它们的若当标准型是对角阵；另一类是各特征值的几何重数均为1的矩阵，也即各若当块对应的特征值互异的矩阵，我们称这类矩阵为循环矩阵。由命题可得下述推论：

推论1.5.1 循环矩阵的特征多项式与其最小多项式等同。

1.5.2 广义特征向量链

对于若当分解式(1.5.1)，当矩阵 A 的若当标准型 J 具有式(1.5.2)~(1.5.4)的形式时，我们可对应地将特征向量矩阵 V 按列做如下分块：

$$\begin{cases} V = [V_1 & V_2 & \dots & V_l] \\ V_i = [V_{i1} & V_{i2} & \dots & V_{i q_i}] \\ V_{ij} = [v_{ij}^1 & v_{ij}^2 & \dots & v_{ij}^{p_{ij}}] \end{cases} \quad (1.5.9)$$

显然，矩阵 V_i 是与矩阵 A 的第 i 个特征值 λ_i 相对应的部分，其子块 V_{ij} 是与若当块 J_{ij} 相对应的部分。

式(1.5.9)中的列向量 $v_{ij}^1, v_{ij}^2, \dots, v_{ij}^{p_{ij}}$ 称为矩阵 A 的第 i 个特征值 λ_i 的第 j 组广义特征向量链， p_{ij} 为该组广义特征向量链的长度。显然，一个矩阵的某特征值的广义特征向量链的组数等于该矩阵的若当标准型中与该特征值相关联的若当块的数目，即该特征值的几何重数。每组广义特征向量链的长度等于它所对应的若当块的阶数。

下面让我们从式(1.5.1)~(1.5.4)和式(1.5.7)~(1.5.9)来导出广义特征向量链的定义式。

将式(1.5.1)改成下述形式

$$AV = VJ \quad (1.5.10)$$

则进一步利用(1.5.2)~(1.5.4)和(1.5.7)~(1.5.9), 可将式(1.5.10)分解为

$$AV_j = V_j J_j, \quad j = 1, 2, \dots, q_i, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (1.5.11)$$

再注意到 V_j 和 J_j 的具体形式, 式(1.5.11)可进一步分解成

$$\begin{cases} (A - \lambda_i I)v_j^1 = 0 \\ (A - \lambda_i I)v_j^2 = v_j^1 \\ \vdots \\ (A - \lambda_i I)v_j^{p_j} = v_j^{p_j-1} \end{cases} \quad (1.5.12)$$

$$j = 1, 2, \dots, q_i, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

如果令 $v_j^0 = 0$, 则上式可统一地表为

$$\begin{aligned} (A - \lambda_i I)v_j^k &= v_j^{k-1}, \quad v_j^0 = 0 \\ k &= 1, 2, \dots, p_j, \quad j = 1, 2, \dots, q_i, \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

式(1.5.12)或式(1.5.13)即为广义特征向量链的定义式。

由上述广义特征向量链的定义, 我们可以很容易证得关于友矩阵的下述结果:

命题1.5.2 对于由式(1.2.4)表出的友矩阵 A° , 若 λ 为其几何重数为1、代数重数为 k 的特征值, 则属于 λ 的广义特征向量链为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ (n-1)\lambda^{n-2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \binom{n-1}{2}\lambda^{n-2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \binom{n-1}{3}\lambda^{n-4} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \binom{n-1}{k-1}\lambda^{n-k} \end{bmatrix} \quad (1.5.14)$$

其中

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1}$$

1.5.3 若当分解的求取

这里我们直接给出若当分解的求取步骤, 至于其中的道理请读者自己思考。

已知某实方阵 A , 求其若当分解的算法可以描述如下:

算法1.5.1 [若当分解的求取]

第一步: 利用初等变换化矩阵 $(sI - A)$ 为对角型 $\Lambda(s)$;

第二步: 将 $\Lambda(s)$ 的对角线上的元素分解成互不相同的一次因式方幂的乘积;

第三步: 列出 $\Lambda(s)$ 的对角线上的所有互异一次因式 $(\lambda - \lambda_1)$, $(\lambda - \lambda_2)$, \dots , $(\lambda - \lambda_l)$, 则 λ_i , $i = 1, 2, \dots, l$ 即为矩阵 A 的各互异特征值。

第四步: 找出每个一次因式 $(\lambda - \lambda_i)$ 在 $\Lambda(s)$ 的对角线上的出现次数 q_i , 则 q_i 即为 A 的特征值 λ_i 的几何重数;

第五步: 按 $i = 1, 2, \dots, l$ 的顺序, 找出一一次因子 $(\lambda - \lambda_i)$ 在 $A(s)$ 的对角线的出现 q_i 次的幂次 $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iq_i}$, 它们即为 A 阵的若当标准型 J 中与 λ_i 相关的 q_i 个若当子块的阶次;

第六步: 根据 $l, \lambda_i, q_i, p_{ij}, j = 1, 2, \dots, q_i, i = 1, 2, \dots, l$ 的值和式(1.5.2)~(1.5.4)列写出 A 矩阵的若当标准型;

第七步: 对于每个 $j = 1, 2, \dots, q_i$ 和 $i = 1, 2, \dots, l$, 求解向量 v_{ij}' 满足

$$(A - \lambda_i I)^{p_{ij}} v_{ij}' = 0, \quad (A - \lambda_i I)^{p_{ij}-1} v_{ij}' \neq 0 \quad (1.5.15)$$

并使得 $v_{ij}', j = 1, 2, \dots, q_i, i = 1, 2, \dots, l$ 线性无关。然后取 $v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ij}', j = 1, 2, \dots, q_i$;

第八步: 对于每个 $i, i = 1, 2, \dots, l$, 按公式

$$\begin{cases} v_{ij}^{p_{ij}-1} = (A - \lambda_i I) v_{ij}^{p_{ij}} \\ v_{ij}^{p_{ij}-2} = (A - \lambda_i I) v_{ij}^{p_{ij}-1} \\ \vdots \\ v_{ij}^1 = (A - \lambda_i I) v_{ij}^2 \end{cases} \quad (1.5.16)$$

$$j = 1, 2, \dots, q_i$$

求出第 i 个特征值 λ_i 的 q_i 组广义特征向量链 $\{v_{ij}^1, v_{ij}^2, \dots, v_{ij}^{p_{ij}}\}, j = 1, 2, \dots, q_i$;

第九步: 基于上步中获得的 $v_{ij}^k, k = 1, 2, \dots, p_{ij}, j = 1, 2, \dots, q_i, i = 1, 2, \dots, l$ 和式(1.5.7)~(1.5.9)构成矩阵 A 的特征向量矩阵 V ;

第十步: 计算 AV 和 VJ , 并通过验证 $AV = VJ$ 是否成立检验结果的正确性。

下面我们通过一例来进一步说明上述算法的应用过程。

例1.5.1 求取下述矩阵 A 的若当分解

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这里我们只写出各个步骤的结果:

第一步:

$$\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & \lambda^2 - 4\lambda + 4 & \\ & & & & & \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 \end{bmatrix}$$

第二步:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda - 0 & & \\ & & & & (\lambda - 2)^2 & \\ & & & & & (\lambda - 2)^3 \end{bmatrix}$$

第三步: $A(\lambda)$ 中的互异一次因式为 $(\lambda - 2)$ 和 $(\lambda - 0)$, 故该六阶矩阵只有两个互异特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$;

第四步: 因子 $(\lambda - 2)$ 在 $A(\lambda)$ 中出现两次, 故 $q_1 = 2$; 因子 $(\lambda - 0)$ 出现一次, 故 $q_2 = 1$;

第五步: $(\lambda - 2)$ 出现两次的幂次分别为 2 和 3, 故 $p_{11} = 2, p_{12} = 3$; $(\lambda - 0)$ 出现一次的幂次亦为 1, 故 $p_{21} = 1$;

第六步: 列写若当矩阵

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

第七步: 通过求取

$$(A - 2I)^2 v'_{11} = 0, \quad (A - 2I)v'_{11} \neq 0$$

可得

$$v'_{11} = [0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1]^T$$

再通过求取

$$(A - 2I)^3 v'_{12} = 0, \quad (A - 2I)^2 v'_{12} \neq 0$$

可得

$$v'_{12} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

且易见 v'_{11}, v'_{12} 线性无关, 再通过求取

$$(A - 0I)v'_{21} = 0$$

可得

$$v'_{21} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1]^T$$

第八步: 经计算得

$$v_{11}^1 = (A - 2I)v'_{11} = [0 \ 0 \ 2 \ -2 \ 0 \ 0]^T$$

$$v_{12}^2 = (A - 2I)v'_{12} = [2 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$v_{12}^1 = (A - 2I)v'_{12} = [1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

第九步: 列写特征向量矩阵

$$V = \begin{bmatrix} v_{11}^1 & v_{11}^2 & v_{12}^1 & v_{12}^2 & v_{12}^3 & v_{21}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

第十步: 直接验证 $AV = VJ$, 可知结果正确。

1.6 广义Sylvester矩阵方程

在线性系统理论中, 有几类矩阵代数方程是非常重要的。如Lyapunov矩阵方程、Riccati矩阵方程。本节将讨论的是一类推广的Sylvester矩阵方程。它们具有下述一般形式

$$AV + BW = VF \quad (1.6.1)$$

其中 A 、 B 分别为 $n \times n$ 和 $n \times r$ 的实矩阵; V 和 W 分别为 $n \times n$ 和 $r \times n$ 的复矩阵; F 为 n 阶的若当矩阵。当特别取定 W 阵, 并令 $C = -BW$, 则式(1.6.1)化为下述常规的Sylvester矩阵方程

$$AV - VF = C \quad (1.6.2)$$

Sylvester 矩阵方程(1.6.1)和(1.6.2)在线性系统的极点配置、特征结构配置和观测器设计等方面均起着重要的作用。

1.6.1 求解问题与假设条件

广义Sylvester矩阵方程(1.6.1)的许多应用都基于该方程的求解。该方程的求解问题可以描述如下:

给定已知的 $n \times n$ 阶和 $n \times r$ 阶定常实矩阵 A 和 B 以及 n 阶若当矩阵 F , 求取满足矩阵方程(1.6.1)的解析解, 即满足(1.6.1)的矩阵 V 和 W 的解析表达式。如果方程(1.6.1)的一种解析解包含了方程(1.6.1)的一切解, 便称该解析解为完全的。

下面我们将在下述假设条件下给出方程(1.6.1)的两种完全解析通解。

假设A1: 对于任何 $s \in \mathbb{C}$, 矩阵 $[sI - A \ B]$ 行满秩。

假设A2: 若当矩阵 F 含有 l 个互异特征值, 其第 i 个特征值 s_i 的几何重数为 q_i , 且与其相关联的 q_i 个若当块 $F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{iq_i}$ 的阶数分别为 $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iq_i}$ 。从而特征值 s_i 的代数重数为

$$m_i = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{iq_i} \quad (1.6.3)$$

且应有

$$m_1 + m_2 + \dots + m_l = n \quad (1.6.4)$$

上述假设A1实际上是本书后面第四章将要介绍的 $[A \ B]$ 为能控的条件; 假设A2称为矩阵 F 的若当结构条件, 对应于 F 阵的这一结构假设条件, 我们可以赋予矩阵 V 一种相应的

结构形式, 将它按列分块如下:

$$\begin{cases} V = [V_1 & V_2 & \cdots & V_l] \\ V_i = [V_{i1} & V_{i2} & \cdots & V_{iq_i}] \\ V_{ij} = [v_{ij}^1 & v_{ij}^2 & \cdots & v_{ij}^{p_{ij}}] \end{cases} \quad (1.6.5)$$

同样, 对于矩阵 W 也可以作下述对应的结构分块

$$\begin{cases} W = [W_1 & W_2 & \cdots & W_l] \\ W_i = [W_{i1} & W_{i2} & \cdots & W_{iq_i}] \\ W_{ij} = [w_{ij}^1 & w_{ij}^2 & \cdots & w_{ij}^{p_{ij}}] \end{cases} \quad (1.6.6)$$

按照矩阵 V 、 W 的上述分块结构, 在假设 A2 下, 矩阵 V 与向量组 $\{v_{ij}^k\}$ 之间、矩阵 W 与向量组 $\{w_{ij}^k\}$ 之间便定义了一种一一对应的关系, 而且方程(1.6.1)可分解成下述一组向量形式

$$\begin{aligned} (A - s_i I)v_{ij}^k + Bw_{ij}^k &= v_{ij}^{k-1}, \quad v_{ij}^0 = 0 \\ k &= 1, 2, \dots, p_{ij}; \quad j = 1, 2, \dots, q_i; \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

或

$$\begin{aligned} [A - s_i I \quad B] \begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix} &= v_{ij}^{k-1}, \quad v_{ij}^0 = 0 \\ k &= 1, 2, \dots, p_{ij}; \quad j = 1, 2, \dots, q_i; \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

从而确定方程(1.6.1)的解析解的问题便可以转化为求取满足式(1.6.7)或式(1.6.8)的向量 v_{ij}^k 和 w_{ij}^k 的表达式的问题。

1.6.2 完全解析解之一

由1.3节可知, 在假设 A1 下, 存在么模阵 $P(s) \in C^{n \times n}$ 和 $Q(s) \in C^{(n+r) \times (n+r)}$ 满足下式

$$P(s)[A - sI \quad B]Q(s) = [0 \quad I] \quad (1.6.9)$$

下面的定理基于么模阵 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 给出了方程(1.6.1)的完全参数解。

定理1.6.1 设矩阵 B 列满秩, 且假设 A1、A2 成立, 则方程(1.6.1)的一切解可由下述公式给出:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix} &= Q(s_i) \begin{bmatrix} f_{ij}^k \\ P(s_i)v_{ij}^{k-1} \end{bmatrix}, \quad v_{ij}^0 = 0 \\ k &= 1, 2, \dots, p_{ij}; \quad j = 1, 2, \dots, q_i; \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

其中 $f_{ij}^k \in C^r$, $k = 1, 2, \dots, p_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, q_i$, $i = 1, 2, \dots, l$ 为一组任意选取的参数向量, $P(s)$ 和 $Q(s)$ 为满足式(1.6.9)的么模阵。

证明 为完成定理的证明, 我们需要证明下面两个事实:

事实一 对于任意的参数向量 $f_{ij}^k \in C^r$, $k = 1, 2, \dots, p_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, q_i$, $i = 1, 2, \dots, l$,

由式(1.6.10)给出的 $\{v_{ij}^k\}$ 和 $\{w_{ij}^k\}$ 均满足向量方程(1.6.7)或(1.6.8):

事实二 满足向量方程(1.6.7)的任何一组 $\{v_{ij}^k\}$ 和 $\{w_{ij}^k\}$ 均可表为(1.6.10)的形式。

下面我们先来证明事实一。

现设式(1.6.10)成立, 则由式(1.6.9)和式(1.6.10), 有

$$\begin{aligned} [A - s_i I \quad B] \begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix} &= [A - s_i I \quad B] Q(s_i) \begin{bmatrix} f_{ij}^k \\ P(s_i) v_{ij}^{k-1} \end{bmatrix} = \\ P^{-1}(s_i) [0 \quad I] \begin{bmatrix} f_{ij}^k \\ P(s_i) v_{ij}^{k-1} \end{bmatrix} &= v_{ij}^{k-1}, \quad v_{ij}^0 = 0 \\ k &= 1, 2, \dots, p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, q_i, \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned}$$

此即为式(1.6.8)。事实一得证。

下面证明事实二。

现设式(1.6.8)成立, 与其两端同时左乘 $P(s_i)$, 可得

$$\begin{aligned} P(s_i) [A - s_i I \quad B] \begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix} &= P(s_i) v_{ij}^{k-1} \\ k &= 1, 2, \dots, p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, q_i, \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (1.6.11)$$

如果记

$$\begin{bmatrix} f_{ij}^k \\ l_{ij}^k \end{bmatrix} = Q^{-1}(s_i) \begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (1.6.12)$$

则由式(1.6.11)及(1.6.9), 可得

$$[0 \quad I] \begin{bmatrix} f_{ij}^k \\ l_{ij}^k \end{bmatrix} = P(s_i) v_{ij}^{k-1}, \quad v_{ij}^0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (1.6.13)$$

由此可导出

$$l_{ij}^k = P(s_i) v_{ij}^{k-1}, \quad v_{ij}^0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (1.6.14)$$

将上式代入式(1.6.12), 并于式(1.6.12)两端同时左乘 $Q(s_i)$, 便可得欲证之式(1.6.10)。

△△△

定理1.6.1以迭代的形式给出了方程(1.6.1)的完全解析解(1.6.10)。该解的求取主要依赖于满足式(1.6.9)的么模阵 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 的求取。关于 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 的求取, 一般可利用算法1.3.1通过对矩阵 $[A - sI \quad B]$ 进行初等变换求得。

解析解(1.6.10)中的参向量 $\{f_{ij}^k\}$ 代表了方程(1.6.1)的解中的自由度。特别地选取这些参数, 可以得到方程(1.6.1)的满足某种特定性质的解。

1.6.3 完全解析解之二

由1.4节可知, 在假设A1下, 有下述矩阵右有理分解式

$$(sI - A)^{-1}B = N(s)D^{-1}(s) \quad (1.6.15)$$

其中 $N(s) \in \mathbb{C}^{n \times r}$, $D(s) \in \mathbb{C}^{r \times r}$ 为右互素的矩阵多项式。关于满足上式的 $N(s)$ 和 $D(s)$ 的求取, 我们在1.4节中已给出了具体的方法——算法1.4.1。下面我们利用上述右既约分解式给出方程(1.6.1)的另一种完全解析解。

定理1.6.2 设矩阵 B 满秩, 且假设 A_1 、 A_2 成立, 则矩阵方程(1.6.1)的一切解可由下述公式表出:

$$\begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} f_{ij}^k + \dots + \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} f_{ij}^1 \quad (1.6.16)$$

$$k = 1, 2, \dots, p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, q_i, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

其中, $f_{ij}^k \in \mathbb{C}^r$, $k = 1, 2, \dots, p_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, q_i$, $i = 1, 2, \dots, l$ 为任意选取的参数向量, $N(s)$ 和 $D(s)$ 为满足右既约分解式(1.6.15)的矩阵多项式。

证明 首先我们证明由公式(1.6.16)给出的向量满足方程(1.6.7)。为此我们将右既约分解式(1.6.15)改写为

$$(A - sI)N(s) + BD(s) = 0$$

于上式两端同时关于 s 求导, 得

$$(A - sI) \frac{d}{ds} N(s) + B \frac{d}{ds} D(s) = N(s) \quad (1.6.17)$$

再于上式两端同时关于 s 求导, 得

$$(A - sI) \frac{d^2}{ds^2} N(s) + B \frac{d^2}{ds^2} D(s) = 2 \frac{d}{ds} N(s)$$

再一次于上式两端关于 s 求导, 并重复这一过程, 最后可得到 k 个如下关系式(包含(1.6.17)在内)

$$(A - sI) \frac{d^l}{ds^l} N(s) + B \frac{d^l}{ds^l} D(s) = l \frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}} N(s), \quad l = 0, 1, 2, \dots, k-1 \quad (1.6.18)$$

将上式中的 s 换成 s_i , 并于其两端同时右乘向量 $(1/l!) f_{ij}^{k-l}$, 得

$$(A - s_i I) \frac{1}{l!} \frac{d^l}{ds^l} N(s_i) f_{ij}^{k-l} + B \frac{1}{l!} \frac{d^l}{ds^l} D(s_i) f_{ij}^{k-l} = \frac{1}{(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}} N(s_i) f_{ij}^{k-l} \quad (1.6.19)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, k-1, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

如果我们将式(1.6.20)中的所有式子两端对应相加, 再利用式(1.6.16)可得式(1.6.7)。此即说明由式(1.6.16)给出的向量满足向量方程(1.6.7)。

下面我们需要证明解(1.6.16)的完全性。这一点可如下简单推得。

注意到式(1.6.10)和式(1.6.16)均为矩阵方程(1.6.1)的解, 且二者含有相同数目的自由参数 $\{f_{ij}^k\}$, 式(1.6.10)又是方程(1.6.1)的一个完全解, 故式(1.6.16)亦为方程(1.6.1)的完全解。

△△△

不同于定理1.6.1, 定理1.6.2给出了广义Sylvester矩阵方程(1.6.1)的一个直接的显式的完全解析解。只要当满足右既约分解式(1.6.15)的 $N(s)$ 和 $D(s)$ 求出后, 该完全解析解便立刻可以

写出来。通过特别地选取解中的参数向量 $\{f_{ij}^k\}$ ，可得到方程的具有某种意义的特殊解。

例1.6.1 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

则由算法1.4.1易得

$$N(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D(s) = \begin{bmatrix} 0 & s-1 \\ s^2 & -1 \end{bmatrix}$$

从而由定理1.6.2易得，以该组矩阵构成的广义Sylvester矩阵方程的完全解析通解为

$$V = \begin{bmatrix} N(-1)f_{11}^1 & \frac{d}{ds}N(-1)f_{11}^1 + N(-1)f_{11}^2 & N(-3)f_{21}^1 \\ D(-1)f_{11}^1 & \frac{d}{ds}D(-1)f_{11}^1 + D(-1)f_{11}^2 & D(-3)f_{21}^1 \end{bmatrix}$$

如果特别取

$$f_{11}^1 = f_{21}^1 = [1 \ 0]^T, \quad f_{11}^2 = [0 \ 1]^T$$

可得该方程的一组特解为

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

小 结

在第二章中我们将发现，一个动态系统的状态空间是一个线性空间。这里我们介绍线性空间是希望读者能够更好、更准确地理解状态空间方法。线性变换是与线性空间紧密相关的一个概念。它是我们理解第二章介绍的线性系统代数等价性的基础。

第二节中的几方面内容都是矩阵代数中最基本的结果。由于后面多次用到，故在这里加以叙述。第三节介绍的多项式矩阵及其初等变换为第四节的有理分式及其互质分解提供了基础，同时它也和第四节中介绍的矩阵分式 $(sI - A)^{-1}B$ 的右既约分解一样，为第六节中介绍的广义矩阵方程的求解提供了直接的条件。

若当分解对于许多人都不陌生。然而若深究起来，其中涉及到矩阵特征值的几何重数与代数重数和矩阵的广义特征向量链的概念，确实是较难掌握的。对于矩阵 A 的每一个几何重数为 q 、代数重数为 a 的特征值，存在 q 组线性无关的广义特向量链，其各组广义特征向量链的长度之和等于 a 。以所有这些特征向量链构成的特征向量矩阵为变换阵，矩阵 A 相似于其若当标准型。这就是一般情形下若当分解的含义。特别当矩阵 A 的所有特征值互异或矩阵 A 为非退化时，若当分解化为对角分解。由于这一结果在后面多次使用，而且它还

是后面1.6节和第六章中的特征结构配置问题的基础，因而在1.5节对其进行了介绍。但这里我们只是对与其相关的概念和结果做了简单交代，而远非对其从机理上讲解。

Sylvester矩阵方程、Lyapunov矩阵方程和Riccati矩阵方程这三类矩阵方程在线性系统理论中起着举足轻重的作用。后两类方程将分别在第五章和第八章中涉及。1.6节介绍的广义Sylvester矩阵方程在线性系统的极点配置、特征结构配置和状态观测器设计等问题中均有直接的应用。这里介绍的关于Sylvester矩阵方程的结果为作者的工作。对这一问题感兴趣的读者可进一步参阅作者的工作^[32, 38]。

习 题

1.1 检验下列集合对于所指的线性运算是否构成实数域上的线性空间：

(1) 设 A 是一个实数矩阵， A 的实系数多项式 $f(A)$ 的全体，对于矩阵的加法和数量乘法；

(2) 全体实对称(反对称、上三角)矩阵对于矩阵的加法和数量乘法；

(3) 全体正实数，对于如下定义的数量乘法：

$$a \oplus b = ab, \quad k \cdot a = a^k$$

1.2 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{bmatrix}, \quad w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

(1) 证明矩阵 A 的全体实系数多项式构成实数域上的一个线性空间，记为 V_w ；

(2) 求 V_w 的维数及一组基。

1.3 已知 \mathbf{R}^4 的两组基

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = [1 & 0 & 0 & 0]^T \\ \varepsilon_2 = [0 & 1 & 0 & 0]^T \\ \varepsilon_3 = [0 & 0 & 1 & 0]^T \\ \varepsilon_4 = [0 & 0 & 0 & 1]^T \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_1 = [2 & 1 & -1 & 1]^T \\ \eta_2 = [0 & 3 & 1 & 0]^T \\ \eta_3 = [5 & 3 & 2 & 1]^T \\ \eta_4 = [6 & 6 & 1 & 3]^T \end{cases}$$

(1) 求取由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵；

(2) 求 $\xi = [1 \ 0 \ 0 \ -1]^T$ 在两组基下的坐标。

1.4 已知齐次方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

试确定其解空间的基与维数。

1.5 设

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = [2 & 1 & 3 & 1]^T \\ \varepsilon_2 = [1 & 2 & 0 & 1]^T \\ \varepsilon_3 = [-1 & 1 & -3 & 0]^T \\ \varepsilon_4 = [1 & 1 & 1 & 1]^T \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_1 = [2 & 1 & 3 & -1]^T \\ \eta_2 = [-1 & 1 & -3 & 1]^T \\ \eta_3 = [4 & 5 & 3 & -1]^T \\ \eta_4 = [1 & 5 & -3 & 1]^T \end{cases}$$

试求出上述两组向量所生成的 \mathbf{R}^4 的子空间的基与维数。

1.6 判别下面所定义的变换 T ，哪些是线性的，哪些不是：

(1) 在线性空间 V 中， $T\xi = \xi + \alpha$ ，其中 $\alpha \in V$ 是固定向量；

(2) 在线性空间 V 中， $T\xi = \alpha$ ，其中 $\alpha \in V$ 是一固定向量；

(3) 在 \mathbf{R}^3 中， $T(x_1, x_2, x_3)^T = (x_1^2, x_2 + x_3, x_3^2)^T$ ；

(4) 把复数域看作是复数域上的线性空间， $T\xi = \bar{\xi}$ ；

(5) 在 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 中， $T(X) = BXC$ ，其中 $B, C \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为两个固定矩阵。

1.7 已知 \mathbf{R}^3 中的变换 $T: T(x_1, x_2, x_3)^T = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)^T$ ，

(1) 证明 T 为一线性变换；

(2) 确定 T 在基 $\varepsilon_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ 、 $\varepsilon_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$ 、 $\varepsilon_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ 下的矩阵。

1.8 证明下述六个函数

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= e^{\alpha x} \cos bx, & \varepsilon_2 &= x e^{\alpha x} \sin bx, & \varepsilon_3 &= x e^{\alpha x} \cos bx \\ \varepsilon_4 &= x e^{\alpha x} \sin bx, & \varepsilon_5 &= \frac{1}{2} x^2 e^{\alpha x} \cos bx, & \varepsilon_6 &= \frac{1}{2} x^2 e^{\alpha x} \sin bx \end{aligned}$$

的所有实系数线性组合构成实数域上一个六维空间，并求微分变换 D 在基 $\varepsilon_i, i=1,2,3,4,5,6$ 下的矩阵。

1.9 设三维线性空间 V 上的线性变换 T 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(1) 求 T 在基 $\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ 下的矩阵；

(2) 求 T 在基 $\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵；

(3) 求 T 在基 $\varepsilon_3 + \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ 下的矩阵。

1.10 给定 \mathbf{R}^3 的两组基

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = [1 & 0 & 1]^T \\ \varepsilon_2 = [2 & 1 & 0]^T \\ \varepsilon_3 = [1 & 1 & 1]^T \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_1 = [1 & 2 & 1]^T \\ \eta_2 = [2 & 2 & -1]^T \\ \eta_3 = [2 & -1 & -1]^T \end{cases}$$

定义线性变换

$$T\varepsilon_i = \xi_i, \quad i = 1, 2, 3$$

(1) 写出由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵;

(2) 写出 T 分别在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 和 η_1, η_2, η_3 下的矩阵.

1.11 判断下列多项式是否非奇异:

$$(1) Q(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 3s + 4 & s + 1 \\ s + 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) Q(s) = \begin{bmatrix} s + 2 & s + 3 \\ s^2 + 3s + 2 & s^2 + 4s + 3 \end{bmatrix}$$

$$(3) Q(s) = \begin{bmatrix} s + 3 & s + 4 & 1 \\ 1 & s + 1 & s + 2 \\ 0 & s^2 + s & s \end{bmatrix}$$

1.12 判断下列各个多项式向量组是否为线性无关:

$$(1) \begin{bmatrix} s^2 + 7s + 12 \\ s + 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s^2 + 5s + 4 \\ s + 1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 0 \\ s + 3 \\ s + 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ s + 2 \\ s^2 + s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s + 1 \\ s \\ 3 \end{bmatrix}$$

1.13 判断下列各多项式矩阵是否为幺模阵:

$$(1) Q(s) = \begin{bmatrix} s + 4 & 1 \\ s^2 + 2s + 1 & s^2 + s \end{bmatrix} \quad (2) Q(s) = \begin{bmatrix} s + 1 & 1 & s + 1 \\ 0 & s + 2 & 3 \\ s + 3 & 1 & s + 3 \end{bmatrix}$$

1.14 令 P 和 $Q(s)$ 分别为 n 阶常量阵和多项式矩阵, 现知 $Q(s)$ 为幺模阵, 则能否断言 $PQ(s)$ 也必为幺模阵, 说明理由.

1.15 化下述多项式矩阵为Smith标准型:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (s+1)^2 & -s^2 + s + 1 \\ 0 & 0 & -(s+1) & s - 1 \\ s + 1 & s^2 & s^2 + s + 1 & s \end{bmatrix}$$

1.16 判断下列矩阵对是否互质:

$$(1) D(s) = \begin{bmatrix} s + 1 & 0 \\ s^2 + s - 2 & s - 1 \end{bmatrix}, \quad N(s) = [s + 2 \quad s + 1]$$

$$(2) D(s) = \begin{bmatrix} 0 & -(s+1)^2(s+2) \\ (s+2)^2 & (s+2) \end{bmatrix}, \quad N(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ -s & s^2 \end{bmatrix}$$

1.17 证明任何幺模阵的Smith标准型为单位阵.

1.18 求取下述矩阵的若当分解:

$$(1) A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3) A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

1.19 设 A 和 B 为同维的非奇异方阵, 证明 AB 的特征值必等同于 BA 的特征值, 并确定二者的特征向量之间的关系。

1.20 已知

$$(1) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

求 A^{100} 。

1.21 已知

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

试求取广义Sylvester方程(1.6.1)的完全解析解。

1.22 可否利用定理1.6.1或定理1.6.2获得Sylvester方程(1.6.2)的解? 试推导之。

第二章 线性系统的数学描述

线性系统的时间域理论,是指以时间域数学模型为系统描述的,直接在时间域内分析和综合线性系统的运动和特性的理论。在系统和控制理论发展的早期阶段,时间域理论只能用来分析单输入-单输出系统的运动,系统的描述是反映输出-输入关系的单变量高阶微分方程,分析的方面主要限于运动的稳定性。60年代以后,卡尔曼将状态和状态空间的概念和方法系统地引入到系统和控制理论中来,极大地推动了时间域理论的发展,把时间域理论发展成为既适用于单输入-单输出系统,又适用于多输入-多输出系统;既可处理定常系统,又可处理时变系统;既能用来分析系统,又能进行系统综合的完整的和成熟的理论和方法。这一理论的特点是,采用状态空间描述作为系统的数学模型,并以状态空间方法为核心。本章中,我们首先来讨论建立系统的状态空间描述问题,包括状态和状态空间的概念、状态空间描述的组成和形式,以及状态空间描述在变换下的特性等。在随后的各章中,我们将在状态空间描述的基础上逐步阐明系统的结构性质和采用状态空间法分析、综合线性系统时要解决的各种问题。

2.1 线性系统的传递函数描述

在讨论线性系统的状态空间描述之前,先来介绍一下我们熟知的传递函数描述。

在控制系统的分析与设计中,第一步就是建立系统的数学模型,对所研究的对象给予适当的数学描述。用传递函数描述系统就是一种行之有效的方法。

传递函数描述的是系统的输入-输出关系。用它描述系统时,假定对系统结构的内部信息一无所知,能够得到的只是系统的输入信息和输出信息。在这种情况下,对我们来说,系统的内部结构就像一个“黑箱”一样。因此,传递函数只能刻画系统的输入-输出特性,它被称为系统的输入-输出描述或外部描述。

使用传递函数方法描述系统所用的数学工具主要是拉普拉斯(Laplace)变换。因此,它主要适用于描述定常线性系统。对于单输入-单输出线性定常系统,传递函数是指在初始条件为零的前提下,输出的拉普拉斯变换与输入的拉普拉斯变换之比。

怎样求一个系统的传递函数呢?一般说来,如果所研究的对象内部的确就是一个“黑箱”,那么就可以通过输入、输出数据采用系统辨识方法确定它,但有关这部分内容已超过了本书所讨论的范围。现在已知系统的动力学模型的前提下,研究确定它的传递函数的问题。

2.1.1 单变量情形的简单回顾

已知由下列常系数微分方程描述的定常线性系统:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t) \quad (2.1.1)$$

其中 $y(t)$ 叫做系统的输出, $u(t)$ 叫做系统的输入, t 表示时间, 诸 a_i 和 b_j , $i = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, m$, 都是实常数。假设 $y(t)$ 以及它的直到 $n-1$ 阶导数和 $u(t)$ 以及它的直到 $m-1$ 阶导数的初始值全为零, 并且取 $t_0 = 0$ 为初始时刻 (这并不失一般性), 这时, 对方程(2.1.1)两边取拉普拉斯变换, 得

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)U(s)$$

或者

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.1.2)$$

其中 $Y(s)$ 和 $U(s)$ 分别为 $y(t)$ 和 $u(t)$ 的拉普拉斯变换, s 为拉普拉斯算符。

令

$$G(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.1.3)$$

那么, 依定义和等式(2.1.3), 称 $G(s)$ 为系统(2.1.1)的传递函数。如果 $m \leq n$, 则 $G(s)$ 为 s 的真有理分式, 这时称系统(2.1.1)为物理能实现的。今后, 我们总是讨论物理能实现的系统。因此, 一个系统的传递函数如果是有理分式, 它必是真有理分式。

多项式

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

叫做系统(2.1.1)的特征多项式, 代数方程

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

叫做系统(2.1.1)的特征方程。特征方程的根或者说特征多项式的零点叫做系统(2.1.1)的极点。多项式

$$b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0$$

的零点叫做系统(2.1.1)的零点。如果系统(2.1.1)有相同的零点和极点, 则称这个系统有零极相消。零极相消后剩下的系统的极点和零点分别称为传递函数 $G(s)$ 的极点和零点。如果相消后剩下的系统的极点和零点都在复平面的左半开平面内, 那么称这个系统为最小相位的。

系统(2.1.1)的特征多项式的次数称为系统的阶。按照这个定义, 系统(2.1.1)是 n 阶的。一个系统的阶, 实际上是指刻画其动力学行为所需要的独立变量的最少个数。

用传递函数描述系统(2.1.1)时, 有

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

因此, 如果给了一个传递函数, 那么也就相当于确定了一个系统。从系统的这种描述法可知, 传递函数的确刻画了系统的输入-输出关系, 反映了系统的外部信息。因此, 从传递函数本身无法了解系统的内部结构, 两个内部结构完全不同的系统其传递函数可以完全一样。

2.1.2 传递函数矩阵及有关定义

考察多输入-多输出的线性定常系统, 令输入变量组为 $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$, 输出变量组为 $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, 且假设系统的初始条件为零. 用 $\hat{y}_i(s)$ 和 $\hat{u}_j(s)$ 分别表示 y_i 和 u_j 的拉普拉斯变换, $g_{ij}(s)$ 表示系统的由第 j 个输入端到第 i 个输出端的传递函数, 其中 $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r$, 那么由系统的线性属性(即满足叠加原理)可以导出

$$\begin{cases} \hat{y}_1(s) = g_{11}(s)\hat{u}_1(s) + g_{12}(s)\hat{u}_2(s) + \dots + g_{1r}(s)\hat{u}_r(s) \\ \hat{y}_2(s) = g_{21}(s)\hat{u}_1(s) + g_{22}(s)\hat{u}_2(s) + \dots + g_{2r}(s)\hat{u}_r(s) \\ \vdots \\ \hat{y}_m(s) = g_{m1}(s)\hat{u}_1(s) + g_{m2}(s)\hat{u}_2(s) + \dots + g_{mr}(s)\hat{u}_r(s) \end{cases}$$

其向量方程的形式则为

$$\hat{y}(s) = \begin{bmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{y}_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \dots & g_{1r}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(s) & \dots & g_{mr}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{u}_r(s) \end{bmatrix} = G(s)\hat{u}(s)$$

我们称由上式所定义的 $G(s)$ 为系统的传递函数矩阵. 容易看出, $G(s)$ 为 $m \times r$ 的一个有理分式矩阵. 并且, 当 $G(s)$ 的元传递函数 $g_{ij}(s)$ ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r$) 除严格真外, 还包含真有理分式时, 即它的一个或一些传递函数中分母和分子多项式具有相等的最高幂次时, 称 $G(s)$ 为真有理分式矩阵; 而当 $g_{ij}(s)$ 均为严格真有理分式时, 即 $g_{ij}(s)$ 的分子多项式的最高幂次均小于分母多项式的最高幂次时, 称 $G(s)$ 为严格真有理分式矩阵. 通常, 当且仅当 $G(s)$ 为真的或严格真的时, 它才是物理上可以实现的. 作为一个判别准则, 当且仅当

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \text{零阵}$$

或

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \text{非零常数矩阵}$$

成立时, 相应的传递函数矩阵 $G(s)$ 为严格真的或真的.

2.2 线性系统的状态空间描述

在以后的分析中将看到, 外部描述一般只是对系统的一种不完整的描述, 它不能反映黑箱内部的某些部分. 内部描述则是系统的一种完整的描述, 它能完全表征系统的一切动力学特性. 只有在系统满足一定属性的前提下, 这两类描述之间才具有等价的关系. 有关这方面的详细的讨论将在第三章中给出.

2.2.1 状态与状态空间

系统的状态空间描述是建立在状态和状态空间概念的基础上的. 状态和状态空间本身, 并不是一个新的概念, 长期以来在质点和刚体动力学中得到了广泛的应用. 但是, 随着将它们引入到系统和控制理论中来, 并使之适合于描述系统的动态过程, 这两个概念才

有了更为一般性的含义。

定义2.2.1 完全地表征系统时间域行为的一个最小内部变量组称为动力学系统的状态。组成这个变量组的变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 称为系统的状态变量，其中 $t \geq t_0$ ， t_0 为初始时刻。由状态变量构成的列向量

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq t_0 \quad (2.2.1)$$

称为系统的状态向量，简称为状态。状态向量取值的向量空间称为状态空间。

为了正确理解状态和状态空间的含义，有必要对其定义作如下几点解释：

① 状态变量组可完全地表征系统行为的属性体现在：只要给定这组变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 在初始时刻的值，以及输入变量 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)$ 在 $t \geq t_0$ 各瞬时的值，则系统中任何一个变量在 $t \geq t_0$ 时的运动行为也就随之完全确定了。

② 状态变量组的最小性体现在：状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是为完全表征系统行为所必须的系统变量的最少个数，减少变量数将破坏表征的完全性，而增加变量数将是完全表征系统行为所不需要的。

③ 状态变量组在数学上的特征体现在： $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 构成系统变量中线性无关的一个极大变量组。考虑到状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 只能取为实数值，因此状态空间是建立在实数域上的向量空间，且维数即为 n 。对于确定的某个时刻，状态表示为状态空间中的一个点；而状态随时间的变化过程，则构成了状态空间中的一条轨迹。

④ 状态变量组包含了系统的物理特征：当组成状态的变量个数 n 为有穷正整数时，相应的系统为有穷维系统，且称 n 为系统的阶次；当 n 为无穷大时，相应的系统则是无穷维系统。一切集中参数系统都属于有穷维系统，而一切分布参数系统则属于无穷维系统。

由上述定义可知，系统中变量的个数必大于 n ，而其中仅有 n 个是线性无关的。这一点决定了状态变量在选取上的不唯一性。那么两个不同的状态变量组之间具有什么关系呢？下述命题对此给出了明确的回答。

命题2.2.1 一个动态系统的任意选取的两个状态变量组之间为线性非奇异变换的关系。

证明 设 \mathbf{x} 和 $\bar{\mathbf{x}}$ 为任意选取的两个状态向量，且记

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$$

则据状态的定义可知， $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ 为线性无关，因此可将 x_1, \dots, x_n 的每一个变量表为 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ 的线性组合，且这种表示必是唯一的

$$\begin{cases} x_1 = p_{11}\bar{x}_1 + \dots + p_{1n}\bar{x}_n \\ \vdots \\ x_n = p_{n1}\bar{x}_1 + \dots + p_{nn}\bar{x}_n \end{cases}$$

通过引入系数矩阵, 则上式还可表为

$$\mathbf{x} = P\bar{\mathbf{x}} \quad (2.2.2)$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

同理, 由于 x_1, \dots, x_n 也为线性无关, 因此又有 n 阶矩阵 Q 满足

$$\bar{\mathbf{x}} = Q\mathbf{x} \quad (2.2.4)$$

从而由式(2.2.2)和式(2.2.4)可立即导出

$$PQ = QP = I \quad (2.2.5)$$

上式表明 P 和 Q 互为逆, 也即任意选取的两个状态 \mathbf{x} 和 $\bar{\mathbf{x}}$ 为线性非奇异变换关系。

△△△

2.2.2 动态系统的状态空间描述

引入了状态和状态空间的概念之后, 就可以建立动力学系统的状态空间描述了。从结构的角度讲, 一个动力学系统可用图2.2.1所示的方块图来表示, 其中 x_1, \dots, x_n 是表征系统行为的状态变量组, u_1, \dots, u_r 和 y_1, \dots, y_m 分别为系统的输入变量组和输出变量组。

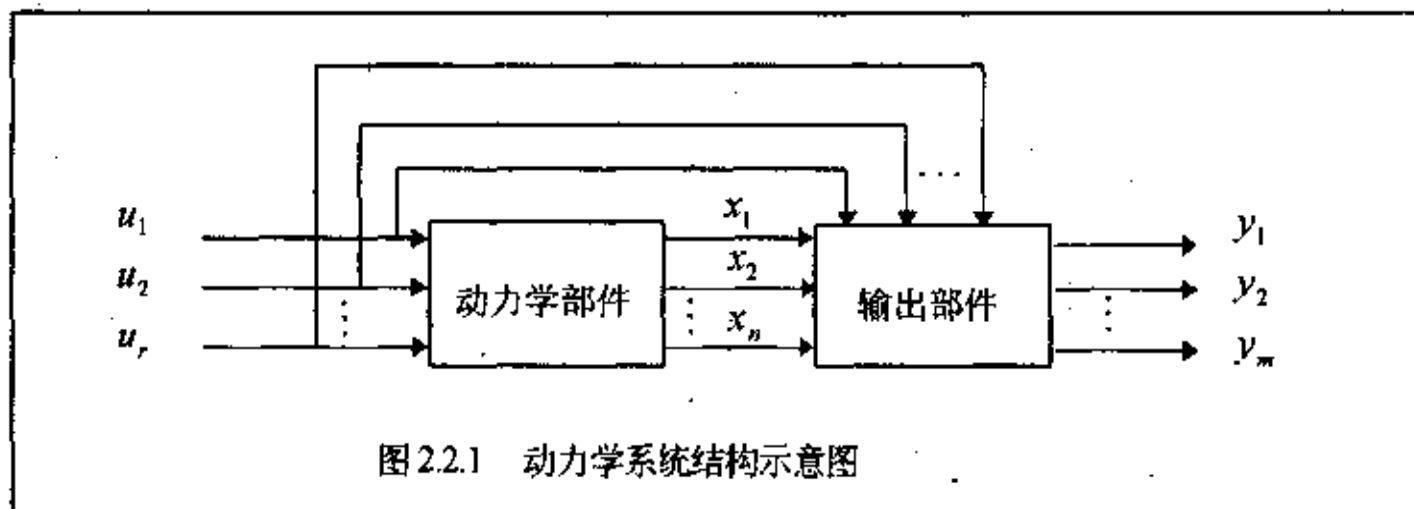


图 2.2.1 动力学系统结构示意图

与输入-输出描述不同, 状态空间描述把系统动态过程的描述考虑为一个更为细致的过程: 输入引起系统状态的变化, 而状态和输入则决定了输出的变化。

输入引起状态的变化是一个运动的过程, 数学上必须采用微分方程或差分方程来表征, 并且称这个数学方程为系统的状态方程。就连续动态过程而言, 考虑最为一般的情况, 则其状态方程为如下的一个一阶非线性时变微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \end{cases} \quad t \geq t_0 \quad (2.2.6)$$

在引入向量表示的基础上, 还可将状态方程简洁地表示为向量方程的形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad t \geq t_0 \quad (2.2.7)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}, f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

状态和输入决定输出的变化是一个变量间的转换过程，描述这种转换过程的数学表达式为变换方程，并且称其为系统的输出方程或量测方程。最为一般情况下，一个连续动力学系统的输出方程具有如下的形式

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ y_m = g_m(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \end{cases} \quad (2.2.9)$$

或表为向量方程的形式，则为

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.2.10)$$

其中

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad (2.2.11)$$

系统的状态空间描述由状态方程和输出方程所组成。联合写出来，则为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), & t \geq t_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{cases}$$

由于采用向量方程的形式，当状态变量、输入变量和输出变量的数目增加时，并不增加状态空间描述在表达形式上的复杂性。

2.2.3 线性系统的状态空间描述与相关概念

如果限于考虑线性的连续动态过程，那么此时在系统的状态方程和输出方程中，向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 将都具有线性的关系，从而线性系统的状态空间描述可表为如下一般形式

$$L_T: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, & t \geq t_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.2.12)$$

与一般情形一样，这里， $\mathbf{x}(t)$ 是 n 维向量，叫做系统的状态向量， n 称为系统的阶； $\mathbf{u}(t)$ 是 r 维向量，叫做系统的控制输入向量， r 称为系统的输入维数； $\mathbf{y}(t)$ 是 m 维向量，叫做系统的量测输出向量， m 称为系统的输出维数；另外， $\mathbf{A}(t)$ 是 $n \times n$ 阶矩阵，叫做系统矩阵； $\mathbf{B}(t)$ 是 $n \times r$ 阶矩阵，叫做控制分布矩阵或输入矩阵； $\mathbf{C}(t)$ 是 $m \times n$ 阶矩阵，叫做量测矩阵或输出矩阵； $\mathbf{D}(t)$ 是 $m \times r$ 阶矩阵，叫做前馈矩阵。这些矩阵统称为系统的系数矩阵，它们的每个元都是 t 的分段连续函数。

如果系统的输入维数 $r = 1$ ，则称系统为单输入系统；如果系统的输出维数 $m = 1$ ，则称系统为单输出系统；如果 $m = r = 1$ ，则称系统为单输入-单输出系统，或简称为单变量

系统。

在系统 L_T 中, 如果 $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $C(t)$ 和 $D(t)$ 都是与时间无关的常值矩阵, 那么这个系统称为定常的, 此时它可表为

$$L: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & t \geq t_0 \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.2.13)$$

与定常系统相对应, 系统 L_T 称为时变的。

由于线性系统(2.2.12)或(2.2.13)完全由系统的参数矩阵决定, 因而在许多情形下我们将它们简单地记成 $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$ 和 $[A, B, C, D]$ 。

对于定常线性系统(2.2.13), 我们称系统矩阵 A 的特征值、特征向量、若当标准型、特征方程和特征多项式为系统(2.2.13)的特征值、特征向量、若当标准型、特征方程和特征多项式。系统的特征值也称为系统的极点。

我们知道, 对于单输入-单输出系统而言, 有零点的概念。但对于多变量系统而言, 却有下列三种不同的零点概念。

定义2.2.1 对于系统(2.2.13), 我们称满足

$$\text{rank}[sI_n - A \quad B] < n \quad (2.2.14)$$

的 s 为系统的输入解耦零点; 称满足

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix} < n \quad (2.2.15)$$

的 s 为系统的输出解耦零点; 称满足

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI_n - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} < n + \min\{r, m\} \quad (2.2.16)$$

的 s 为系统的传输零点。

上述各种系统的零点概念与后续将要遇到的能控、能观性和可稳、可检测性等许多重要概念有着密切的关系。

线性系统(2.2.12)和(2.2.13)或它们的一些特例为本书所研究的对象, 在后面要屡次出现。这里要指出的是, 本小节中关于线性系统(2.2.12)和(2.2.13)的有关变量的记号与系统的阶次和输入-输出维数在全书中都是有效的, 因而, 在很多情况下当我们再提及这些系统时, 都不再指明其变量的含义和维数。

2.2.4 线性系统状态空间描述的列写举例

涉及到系统的状态空间描述的求取, 通常可以采用两条途径, 一是分析的途径, 适用于结构和参数为已知的系统。它先直接运用相应的物理原理组成系统的动力学方程, 然后通过选取合适的状态变量组, 进一步把系统原始方程化为上述形式的状态方程和输出方程。另一是辨识的途径, 适用于结构和参数难于搞清楚的系统。它通过实验手段取得数据并采用适当方法确定系统的输入-输出模型, 然后再由所得到的系统输入-输出描述来导出相应的状态空间描述。通过实验手段取得数据, 进而确定系统的输入-输出模型的过程称为系统辨识和参数估计, 其内容已超出了本书的范围。由系统的输入-输出描述来导出相

应的状态空间描述的过程称为系统的实现，在第四章中将有所涉及。

下面我们就一个简单的系统讨论其状态空间描述的求取问题，意在阐明列写系统的状态方程和输出方程的一般步骤。

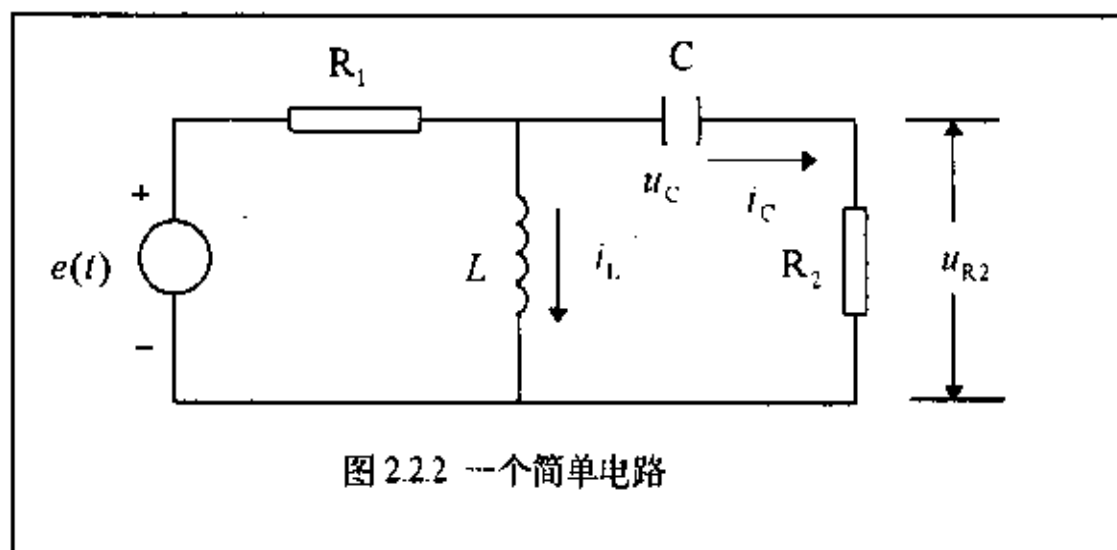


图 2.2.2 一个简单的电路

例 2.2.1 考察图 2.2.2 所示的简单电路，电路各组成元件的参数值为已知，输入变量取为电压源 $e(t)$ ，输出变量取为电阻的端电压 u_{R2} 。

第一步：确定状态变量

根据电路理论可知，此电路最多有 2 个线性无关的变量；因此，可选取独立储能元件的变量，即电容端电压 u_C 和流经电感的电流 i_L 作为电路的状态变量。

第二步：列出原始电路方程

运用电路定律，可列出图中左、右两个回路的电路方程为

$$R_1(i_L + i_C) + L \frac{di_L}{dt} = e(t) \quad \text{和} \quad u_C + R_2 i_C = L \frac{di_L}{dt}$$

考虑到规定 u_C 和 i_L 为状态变量，并有 $i_C = C du_C / dt$ ，所以可将上述方程改写为只包含未知变量 u_C 和 i_L 的方程组

$$R_2 C \frac{du_C}{dt} - L \frac{di_L}{dt} = -u_C \quad \text{和} \quad R_1 C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di_L}{dt} = -R_1 i_L + e(t)$$

第三步：导出状态方程

首先，以 du_C / dt 和 di_L / dt 为待定变量求解上述联立方程，得到

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} u_C - \frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} i_L + \frac{1}{(R_1 + R_2)C} e(t)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} u_C - \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} e(t)$$

进而，将其表为向量方程的形式，就导出了此电路的状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} & -\frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} e(t)$$

第四步：导出输出方程

根据电路关系式，有

$$u_{R2} = R_2 i_C = R_2 C \frac{du_C}{dt} = \frac{-R_2}{R_1 + R_2} u_C + \frac{-R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t)$$

将其改写后即得到此电路的输出方程

$$u_{R2} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] e(t)$$

2.3 两种描述形式的比较及相互转换

2.3.1 两种描述形式的比较

前两节研究了线性系统的两种描述方法，即传递函数方法和状态空间方法，现对这两种描述方法作一下比较。

首先，两种方法使用的数学工具不同。传递函数方法以拉氏变换为工具，一般说来仅能描述定常线性系统，而状态空间方法以现代数学为工具，既可以描述定常线性系统，又可以描述时变线性系统。其实，状态空间方法还适用于描述各种类型的非线性系统。

其次，对于很复杂的线性系统，有时建立它的状态方程和量测方程是很麻烦的，这时借助于对系统输入-输出信号的量测，采用系统辨识方法可能会比较容易地确定系统的传递函数或脉冲响应函数，而要辨识系统完整的状态方程和量测方程有时是做不到的。

第三，传递函数是经典控制理论中实现分析和综合的基础，它可借助于一些简单的方法完成反馈控制系统的设计，例如，根轨迹或伯德(Bode)图都是行之有效的设计方法。利用这些方法往往可以通过手工计算和做图来完成系统的分析和设计。状态空间方法是现代控制理论中系统设计的基础，它能够解决那些经典理论所不能处理的问题。不过，用状态空间方法设计系统时，往往要借助于数字电子计算机。

最后需要指出的是，传递函数方法仅仅描述了系统的输入-输出关系，反映了系统的外部特性，从系统的传递函数中看不到系统的内部结构性质。为说明这一点，我们来研究一例。

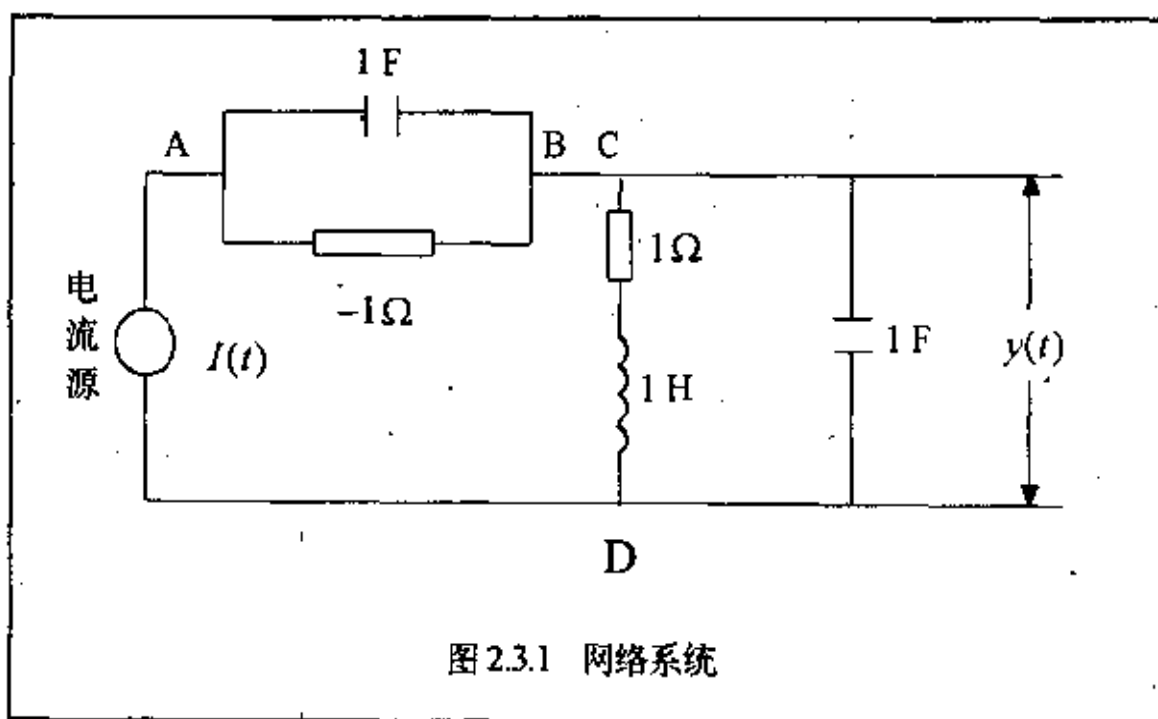


图 2.3.1 网络系统

例2.3.1 对于图 2.3.1 所示的网络系统，设系统的输入电流为 $I(t)$ ，输出电压为 $y(t)$ 。由 C 点到 D 点之间平行板电容的两端电压为 $x_1(t)$ ，流经电阻电感的电流为 $x_2(t)$ ，由 A 点到 B 点之间平行板电容的两端电压为 $x_3(t)$ 。显然， $y(t) = x_1(t)$ 。

由克希霍夫电流定律得出

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) + x_2(t) &= I(t) \\ \dot{x}_3(t) - x_3(t) &= I(t)\end{aligned}$$

再由克希霍夫电压定律得

$$x_1(t) = \dot{x}_2(t) + x_2(t)$$

于是得到系统的状态方程和量测方程为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

由此看出，它是一个三阶系统。这个系统的特征方程为

$$(s-1)(s^2+s+1)=0$$

另一方面，我们容易求得该系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

它所代表的是一个稳定的二阶系统。

从上例可以看出，如果仅着眼于该系统的输出特性，似乎感到系统的性能很好，即使在非零初始条件下，表面看来系统的输出也将随着时间的增长而趋于零。但实际上，这个系统的传递函数根本没有反映出A点到B点这个环节的特性，而这个环节恰恰是对整个系统的正常工作影响极大的一部分。在这个环节里，由于电容支路和电阻支路的极性相反，因此，当电容器初始电压不等于零时，即使电流源不存在，A、B两点之间的电压也将随着时间的增长而趋于无穷大，结果可能导致电容被击穿，使整个系统不能工作。但这一点从系统的传递函数中是看不出来的，在状态空间方法中反应为系统的特征多项式有一个不稳定极点。因此，在某些时候，传递函数方法不能完全地描述系统。然而，用状态空间方法描述系统，它不仅能够反映系统的输入-输出关系，也可描述在任何初始条件下系统内部结构的动力学行为。所以，状态空间方法能更完善地描述系统。

总而言之，传递函数方法和状态空间方法各有所长。人们为了有效地进行系统的分析与综合而设计反馈控制系统时，应该熟悉这两种描述方法。对于给定的具体问题，用哪种方法处理方便，就采用哪种方法。

对于线性定常系统，状态空间描述和传递函数描述在一定条件下是可以相互转换的，下面考虑二者的转换问题。

2.3.2 化输入-输出描述为状态空间描述

由输入-输出描述确定状态空间描述的问题称为实现问题。关于实现问题的一般理论将在第四章中有所涉及。本节限于单输入-单输出的线性定常系统，讨论由系统的输入-输

出时域描述导出其状态空间描述的方法，目的是使对状态空间描述及其与输入-输出描述间的关系有一个更为具体和更为直观的了解。

问题的提法：考虑一个单输入-单输出线性定常系统，令 y 和 u 分别为其输出变量和输入变量，则输出和输入间的因果关系可用如下的一个单变量高阶微分方程来描述

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = \\ b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

其中， $y^{(i)} = d^i y / dt^i$ ， $u^{(j)} = d^j u / dt^j$ ， $m \leq n$ 。另一方面，如上一节中所指出过的，线性定常系统的状态空间描述必具有如下的形式

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \quad (2.3.2)$$

由于所考虑的为单输入-单输出系统，所以这里 b 为 $n \times 1$ 阵， c 为 $1 \times n$ 阵，而 d 为标量。于是，我们的目的即是由输入-输出时域描述(2.3.1)导出状态空间描述(2.3.2)，这一问题归结为选取适当的状态变量组并确定各个系数矩阵 A 、 b 、 c 和 d 。显然，随着按不同方式来选取系统的状态变量组，状态空间描述中的系数矩阵组 (A, b, c, d) 也将相应地不同。下面，我们来给出两种典型的方法。

方法一 为便于讨论，引入微分算子符号 $p = d/dt$ ，可进而把(2.3.1)的输入-输出描述表示为如下的形式

$$y = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} u \quad (2.3.3)$$

并且容易看出，当 $m = n$ 时，上式中的有理分式是真的；当 $m < n$ 时，这个有理分式是严格真的。考虑到对应于这两种情况下的状态空间描述有着不同形式，所以下面分别加以讨论。

(1) $m < n$ 的情形

首先，将式(2.3.3)进一步改写为

$$\begin{cases} \tilde{y} = \frac{1}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} u \\ y = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) \tilde{y} \end{cases} \quad (2.3.4)$$

或将其表示为如下的形式

$$\begin{cases} \tilde{y}^{(n)} + a_{n-1} \tilde{y}^{(n-1)} + \dots + a_1 \tilde{y}^{(1)} + a_0 \tilde{y} = u \\ y = b_m \tilde{y}^{(m)} + b_{m-1} \tilde{y}^{(m-1)} + \dots + b_1 \tilde{y}^{(1)} + b_0 \tilde{y} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

选取状态变量组

$$x_1 = \tilde{y}, \quad x_2 = \tilde{y}^{(1)}, \quad \dots, \quad x_n = \tilde{y}^{(n-1)} \quad (2.3.6)$$

就可得到

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \tilde{y}^{(1)} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \tilde{y}^{(2)} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = \tilde{y}^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u \end{cases} \quad (2.3.7)$$

和

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_m x_{m+1} \quad (2.3.8)$$

再表 $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ 为状态向量, 那么通过把上述方程(2.3.7)和(2.3.8)表为向量方程的形式, 可导出此种情况下对应于输入-输出描述(2.3.1)的状态空间描述为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.3.9)$$

$$y = [b_0 \ \cdots \ b_m \ 0 \ \cdots \ 0] x$$

例2.3.2 给定系统的输入-输出描述为

$$y^{(3)} + 16y^{(2)} + 194y^{(1)} + 640y = 160u^{(1)} + 720u$$

则利用式(2.3.9)即可定出相应的一个状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -194 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [720 \ 160 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(2) $m = n$ 的情形

先将式(2.3.3)中的有理分式进行严格真化, 可导出

$$y = \left[b_n + \frac{(b_{n-1} - b_n a_{n-1})p^{n-1} + \cdots + (b_0 - b_n a_0)}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \right] u \quad (2.3.10)$$

由此可有

$$\begin{cases} \tilde{y}^{(n)} + a_{n-1}\tilde{y}^{(n-1)} + \cdots + a_1\tilde{y}^{(1)} + a_0\tilde{y} = u \\ y = (b_{n-1} - b_n a_{n-1})\tilde{y}^{(n-1)} + \cdots + (b_0 - b_n a_0)\tilde{y} + b_n u \end{cases} \quad (2.3.11)$$

注意到(2.3.11)的第一个方程等同于(2.3.5)的第一个方程, 所以在按式(2.3.6)的状态变量组的选取下, 可知其状态方程同于 $m < n$ 的情况. 而由(2.3.11)的第二个方程可进而得到

$$y = (b_0 - b_n a_0)x_1 + \cdots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1})x_n + b_n u \quad (2.3.12)$$

由此即可导出此种情况下对应于输入-输出描述(2.3.1)的状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.3.13)$$

$$y = [(b_0 - b_n a_0) \cdots (b_{n-1} - b_n a_{n-1})] \mathbf{x} + b_n u$$

例2.3.3 给定系统的输入-输出描述为

$$y^{(3)} + 16y^{(2)} + 194y^{(1)} + 640y = 4u^{(3)} + 160u^{(1)} + 720u$$

则利用(2.3.13)即可定出其相应的一个状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -194 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [-1840 \quad -616 \quad -64] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 4u$$

方法二 为易于理解,不妨区分为 $m=0$ 、 $m=n$ 的两种情况进行讨论。实质上, $m=n$ 的情况代表了一般的情况。当 m 为小于 n 的任意正整数时,即等价于所讨论的情况中,系数 $b_k = 0$, $k = n, n-1, \dots, m+1$ 。

(1) $m=0$ 的情形

此时,输入-输出描述(2.3.1)可写为

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_0u \quad (2.3.14)$$

取状态变量组

$$x_1 = y, x_2 = y^{(1)}, \dots, x_n = y^{(n-1)} \quad (2.3.15)$$

则可导出

$$y = x_1 \quad (2.3.16)$$

和

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y^{(1)} = x_2 \\ \dot{x}_2 = y^{(2)} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + b_0u \end{cases} \quad (2.3.17)$$

令状态向量 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$, 并将上述方程表为向量方程的形式,即得到此种情况下的状态空间描述为

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{array} \right] x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]x$$
(2.3.18)

(2) $m=n$ 的情形

此时系统的输入-输出描述具有如下的形式

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_nu^{(n)} + \cdots + b_1u^{(1)} + b_0u$$
(2.3.19)

把状态变量组取为 y 和 u 及它们的各阶导数的下述组合

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0u \\ x_2 = y^{(1)} - \beta_0u^{(1)} - \beta_1u \\ x_3 = y^{(2)} - \beta_0u^{(2)} - \beta_1u^{(1)} - \beta_2u \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} - \beta_0u^{(n-1)} - \beta_1u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2}u^{(1)} - \beta_{n-1}u \end{cases}$$
(2.3.20)

并按规律写出 x_{n+1} 的表达式

$$x_{n+1} = y^{(n)} - \beta_0u^{(n)} - \beta_1u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-1}u^{(1)} - \beta_nu$$

其中, $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_n$ 为一组待定常数, 则由式(2.3.20)及 x_{n+1} 的表达式可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y^{(1)} - \beta_0u^{(1)} = x_2 + \beta_1u \\ \dot{x}_2 = y^{(2)} - \beta_0u^{(2)} - \beta_1u^{(1)} = x_3 + \beta_2u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} - \beta_0u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-2}u^{(1)} = x_n + \beta_{n-1}u \\ \dot{x}_n = y^{(n)} - \beta_0u^{(n)} - \beta_1u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-1}u^{(1)} = x_{n+1} + \beta_nu \end{cases}$$
(2.3.21)

另外, 将式(2.3.20)的各行依次乘以 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$, 并注意到 x_{n+1} 的表达式可得

$$\begin{cases} a_0y = a_0x_1 + a_0\beta_0u \\ a_1y^{(1)} = a_1x_2 + a_1\beta_0u^{(1)} + a_1\beta_1u \\ a_2y^{(2)} = a_2x_3 + a_2\beta_0u^{(2)} + a_2\beta_1u^{(1)} + a_2\beta_2u \\ \vdots \\ a_{n-1}y^{(n-1)} = a_{n-1}x_n + a_{n-1}\beta_0u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\beta_{n-1}u \\ y^{(n)} = x_{n+1} + \beta_nu^{(n)} + \beta_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + \beta_0u^{(1)} + \beta_nu \end{cases}$$
(2.3.22)

$$(\beta_n + a_{n-1}\beta_{n-1} + \dots + a_1\beta_1 + a_0\beta_0)u = b_n u^{(n)} + \dots + b_1 u^{(1)} + b_0 u \quad (2.3.23)$$

令

$$\begin{cases} \beta_0 = b_n \\ \beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0 \\ \beta_2 = b_{n-2} - a_{n-1}\beta_1 - a_{n-2}\beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n = b_0 - a_{n-1}\beta_{n-1} - a_{n-2}\beta_{n-2} - \dots - a_1\beta_1 - a_0\beta_0 \end{cases} \quad (2.3.24)$$

则式(2.3.23)化为

$$x_{n+1} + a_{n-1}x_n + \dots + a_1x_2 + a_0x_1 = 0$$

利用上式, 式(2.3.21)可改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + \beta_n u \end{cases}$$

再注意到 $\beta_0 = b_n$ 及

$$y = x_1 + \beta_0 u \quad (2.3.25)$$

表 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, 就可得到此种情况下的状态空间描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{x} + b_n u \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

例2.3.4 给定系统的输入-输出描述为

$$y^{(3)} + 16y^{(2)} + 194y^{(1)} + 640y = 4u^{(3)} + 160u^{(1)} + 720u$$

先利用式(2.3.24)定出

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_3 = 4 \\ \beta_1 &= b_2 - a_2\beta_0 = -64 \\ \beta_2 &= b_1 - a_2\beta_1 - a_1\beta_0 = 408 \\ \beta_3 &= b_0 - a_2\beta_2 - a_1\beta_1 - a_0\beta_0 = 4048 \end{aligned}$$

从而由式(2.3.26)即可导出相应的状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -194 & -16 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -64 \\ 408 \\ 4048 \end{bmatrix} u$$

2.3.3 化状态空间描述为传递函数描述

现在我们来导出由状态空间描述的系数矩阵所表示的 $G(s)$ 关系式。

定理2.3.1 线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0, \quad t \geq t_0 \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.3.27)$$

的传递函数矩阵为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.3.28)$$

并且, 当 $D \neq 0$ 时 $G(s)$ 为真的, 当 $D = 0$ 时 $G(s)$ 为严格真的, 且有

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = D \quad (2.3.29)$$

证明 对式(2.3.27)作拉普拉斯变换, 可导出

$$\begin{cases} s\hat{x}(s) = A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \\ y(s) = C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s) \end{cases} \quad (2.3.30)$$

进而, 由式(2.3.30)的第一个关系式又得到

$$(sI - A)\hat{x}(s) = B\hat{u}(s) \quad (2.3.31)$$

且考虑到 $(sI - A)$ 作为多项式矩阵必是非奇异的, 因此, 式(2.3.31)可改写为

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) \quad (2.3.32)$$

而把式(2.3.32)代入式(2.3.30)的第二个关系式, 即得到

$$\hat{y}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]\hat{u}(s) \quad (2.3.33)$$

从而, 由此就可导出式(2.3.28)。再考虑到

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \quad (2.3.34)$$

且 $\text{adj}(sI - A)$ 每个元多项式的最高幂次均都小于 $\det(sI - A)$, 所以必有

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (sI - A)^{-1} = 0 \quad (2.3.35)$$

于是, 由式(2.3.28)和式(2.3.35)即可导出式(2.3.29)。进一步易知, 当 $D \neq 0$ 时, $G(\infty)$ 为非零常阵, 故由式(2.3.28)给出的 $G(s)$ 为真的; 而当 $D = 0$ 时, $G(\infty)$ 为零矩阵, 所以相应地 $G(s)$ 为严格真的。

△△△

2.4 线性系统的代数等价性

用状态空间描述系统时, 首先需要选取一组状态变量, 建立状态方程和量测方程。然而一个系统的状态变量的选择及其相应的状态方程和量测方程并不唯一, 也就是说, 利用状态空间法描述一个确定的系统时, 由于所选取的状态变量的不同会得到不同的状态空间模型。那么这些模型之间有什么联系呢? 它们是否都能够反映该系统的基本特性呢? 这显然是我们应该考虑的一个重要问题。

2.4.1 代数等价系统

当我们利用状态空间法描述一个系统时,所谓“选取两组不同的状态向量”是什么含义?一个 n 维的线性系统的状态空间 V 是 n 维的,它的两组不同的状态向量 x 和 \bar{x} 均完全表征了系统的动力学行为,因而 x 和 \bar{x} 应为 V 中的包含有相同“信息量”的两个向量,从而从线性变换的观点来看, x 和 \bar{x} 之间应该由一个满秩线性变换相联系。对此命题2.2.1已经给出了肯定的回答,即对于某 n 维线性系统的两个不同状态向量 x 和 \bar{x} ,必存在 n 阶可逆矩阵 P 满足

$$\bar{x} = Px \quad (2.4.1)$$

设有一定常线性系统, x 和 \bar{x} 均为其状态向量,则该系统分别以 x 和 \bar{x} 为状态向量的状态空间描述可一般地表为

$$L: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.4.2)$$

和

$$L': \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases} \quad (2.4.3)$$

再由命题2.2.1可知存在可逆矩阵 P 满足式(2.4.1)。由式(2.4.1)两端同时关于时间 t 求导,并利用系统 L 和 L' 的表达式,可得

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \bar{B} = PB, \bar{C} = CP^{-1}, \bar{D} = D \quad (2.4.4)$$

定义2.4.1 已知两个同维的由式(2.4.2)和式(2.4.3)表示的线性定常系统 L 和 L' ,如果存在一个适当阶的定常可逆矩阵 P ,使得系统 L 和 L' 的系统参数矩阵满足式(2.4.4),则称系统 L 和 L' 为代数等价的。

根据上述定义和上面的推导,有下述命题:

命题2.4.1 同一线性定常系统的两个不同的状态空间描述为代数等价的。

值得注意的是,上述命题仅指出同一系统的不同状态空间描述之间是代数等价的,但这并不排除两个不同系统的状态空间描述为代数等价的可能性。

2.4.2 代数等价系统的公有属性

既然在相当广泛的意义上讲,相互代数等价的状态空间模型所描述的是同一系统的特性,那么它们之间必然要具有许多共同属性。下面对此给出些确定的结论。

命题2.4.2 相互代数等价的线性定常系统具有相同的特征多项式、特征方程和极点。

证明 只要注意到下述关系即可

$$\det(sI - \bar{A}) = \det[P(sI - A)P^{-1}] = \det(sI - A)$$

△△△

命题2.4.3 相互代数等价的线性定常系统具有相同的输入解耦零点、输出解耦零点和传输零点。

证明 注意到式(2.4.4),我们有

$$\text{rank}[sI - \bar{A} \quad \bar{B}] = \text{rank}[sI - PAP^{-1} \quad PB] =$$

$$\begin{aligned} \text{rank}(P[sI - A \quad BP]P^{-1}) &= \\ \text{rank}[sI - A \quad BP] &= \\ \text{rank}\left([sI - A \quad B] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}\right) &= \\ \text{rank}[sI - A \quad B] & \end{aligned}$$

完全类似地可获得

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$$

和

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & D \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

△△△

命题2.4.4 相互代数等价的线性定常系统具有相同的传递函数。

证明 注意到代数等价条件(2.4.4), 可得

$$\begin{aligned} \bar{W}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + D &= CP^{-1}(sI - PAP^{-1})^{-1}PB + D = \\ C(sI - A)^{-1}B + D &= W(s) \end{aligned}$$

△△△

代数等价系统的公有属性揭示了“代数等价”这一概念的内在本质。随着后继内容的不断深入, 我们将陆续地介绍代数等价系统的公有属性。在今后的讨论中, 像系统的零、极点这类代数等价系统的公有量亦称之为线性定常系统在坐标变换下的不变量, 而像输入-输出传递特性这类代数等价系统的不变性亦称为定常线性系统在坐标变换下的不变性。

2.5 复合系统的数学模型

由两个或两个以上的子系统按一定方式连接构成的系统称为组合系统。组合的基本方式可分为串联、并联和反馈三种类型。一个比较复杂的实际系统, 常常就是包含几种连接方式的一个组合系统。本节中, 仅就上述三种基本组合方式, 分别讨论相应的组合系统的状态空间描述。

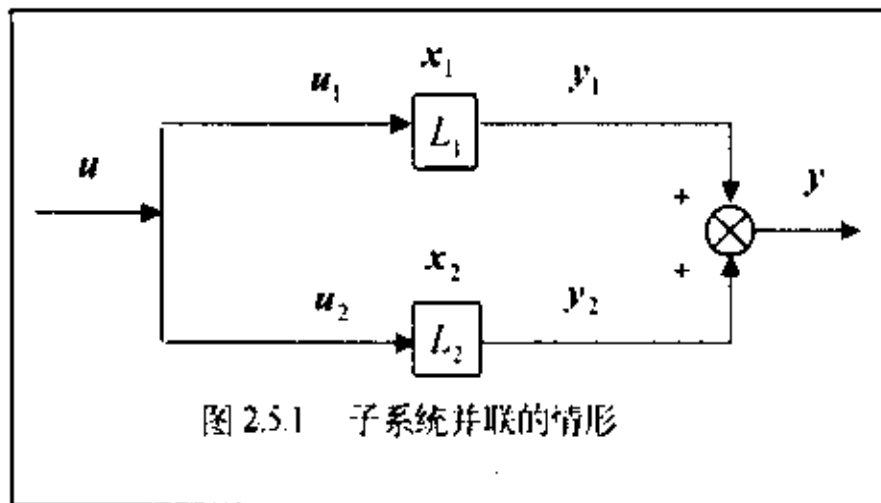
2.5.1 子系统并联的情形

考虑由两个子系统

$$L_i \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i \\ y_i = C_i x_i + D_i u_i, \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (2.5.1)$$

经并联构成的组合系统, 如图2.5.1所示。

不难看出, 两个子系统可进行并联的条件为



$$\left. \begin{aligned} \dim(u_1) &= \dim(u_2) \\ \dim(y_1) &= \dim(y_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.2)$$

式中符号 $\dim(\cdot)$ 表示向量 (\cdot) 的维数。在实现了并联后，系统在变量上的特点为

$$u_1 = u_2 = u, \quad y_1 + y_2 = y \quad (2.5.3)$$

于是，对并联组合系统，由式(2.5.1)和式(2.5.3)可导出其动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + (D_1 + D_2) u \end{cases} \quad (2.5.4)$$

表 $[x_1^T \ x_2^T]^T$ 为组合系统的状态，并将式(2.5.4)加以改写，即得到并联组合系统的状态空间描述为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y &= [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [D_1 + D_2] u \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

现推广讨论由 N 个子系统并联构成的组合系统，则通过与上述相类同的推导可导出组合系统的状态空间描述的一般表达式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} u \\ y &= [C_1 \ \cdots \ C_N] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + [D_1 + \cdots + D_N] u \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

进一步，子系统的传递函数矩阵为

$$G_i(s) = C_i (sI - A_i)^{-1} B_i + D_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.5.7)$$

那么，利用 $u_1 = u_2 = \cdots = u_N$ 和 $y = y_1 + y_2 + \cdots + y_N$ 就可导出并联组合系统的传递函数矩阵为

$$G(s) = \sum_{i=1}^N G_i(s) \quad (2.5.8)$$

2.5.2 子系统串联的情形

考虑图2.5.2所示的由两个子系统 L_1 和 L_2 经串联构成的组合系统，其中子系统的状态空间描述由式(2.5.1)表示。

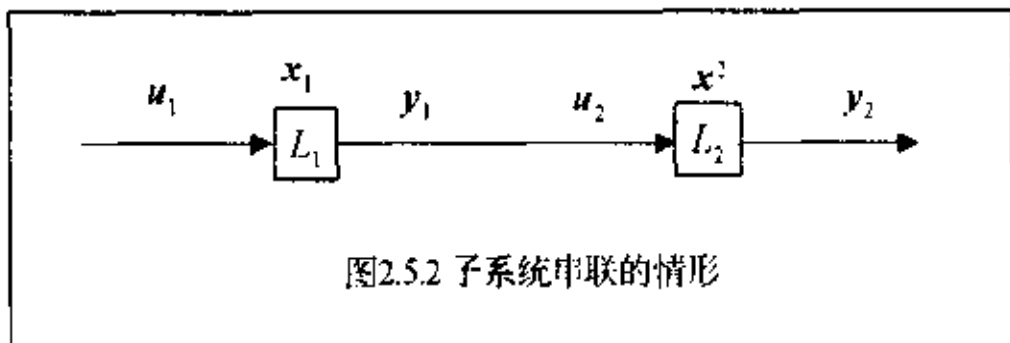


图2.5.2 子系统串联的情形

两个子系统可以作串联连接的条件为

$$\dim(y_1) = \dim(u_2) \quad (2.5.9)$$

而在实现 L_1-L_2 顺序的串联连接后组合系统在变量上的特点为

$$u = u_1, \quad u_2 = y_1, \quad y_2 = y \quad (2.5.10)$$

由此，利用式(2.5.1)和式(2.5.10)可导出串联组合系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 + B_2 D_1 u \\ y = C_2 x_2 + D_2 C_1 x_1 + D_2 D_1 u \end{cases} \quad (2.5.11)$$

或将其写成为标准化的形式，即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [D_2 C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (D_1 D_2) u \quad (2.5.12)$$

类似地，也可导出由 N 个子系统顺序串联构成的组合系统的状态空间描述，但其形式相当复杂，此处从略。利用

$$u_1 = u, \quad u_2 = y_1, \quad \dots, \quad u_N = y_{N-1}, \quad y_N = y \quad (2.5.13)$$

可导出串联组合系统的传递函数矩阵为

$$G(s) = G_N(s)G_{N-1}(s)\cdots G_1(s) \quad (2.5.14)$$

其中，子系统的传递函数矩阵 $G_i(s)$ 由式(2.5.7)给出。

2.5.3 具有子系统反馈的情形

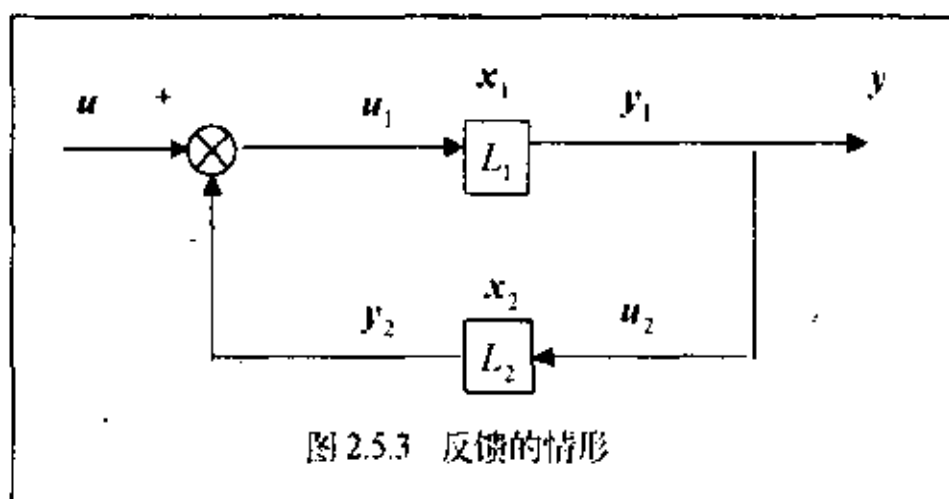


图 2.5.3 反馈的情形

考虑由两个子系统 L_1 和 L_2 按图2.5.3所示方式构成的反馈系统，其中子系统的状态空间描述由式(2.5.1)表示 ($D_i = 0$)。

对于图示反馈系统，其构成条件为

$$\left. \begin{aligned} \dim(u_1) &= \dim(y_2) \\ \dim(u_2) &= \dim(y_1) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.15)$$

而其在变量上的特点为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u - y_2 \\ y_1 &= y = u_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.5.16)$$

于是, 由式(2.5.1) (其中 $D_i = 0$) 和式(2.5.16), 即可导出按图2.5.3所示方式构成的反馈系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u - B_1 C_2 x_2 \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ y = C_1 x_1 \end{cases} \quad (2.5.17)$$

或将其表示为标准的形式, 即

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

下面再来推导反馈系统的传递函数矩阵的表达式。已知子系统的传递函数矩阵为

$$G_i(s) = C_i (sI - A_i)^{-1} B_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.5.19)$$

再据式(2.5.16), 有

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) = \hat{y}_1(s) &= G_1(s) [\hat{u}(s) - G_2(s) \hat{y}(s)] = \\ &= G_1(s) \hat{u}(s) - G_1(s) G_2(s) \hat{y}(s) \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

将上式化简之, 得到

$$[I + G_1(s) G_2(s)] \hat{y}(s) = G_1(s) \hat{u}(s) \quad (2.5.21)$$

进而, 若 $(I + G_1(s) G_2(s))$ 可逆, 那么即可得到反馈系统的传递函数矩阵

$$G(s) = [I + G_1(s) G_2(s)]^{-1} G_1(s) \quad (2.5.22)$$

类似地, 根据式(2.5.16)也可有

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(s) = \hat{u}(s) - \hat{y}_2(s) &= \hat{u}(s) - G_2(s) \hat{u}_2(s) = \\ &= \hat{u}(s) - G_2(s) G_1(s) \hat{u}_1(s) \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

和

$$\hat{y}(s) = \hat{y}_1(s) = G_1(s) \hat{u}_1(s) \quad (2.5.24)$$

从而由式(2.5.23)和式(2.5.24), 且假定 $(I + G_2(s) G_1(s))$ 可逆, 又可导出反馈系统的传递函数矩阵的另一表达式为

$$G(s) = G_1(s) [I + G_2(s) G_1(s)]^{-1} \quad (2.5.25)$$

需要指出, 在上述子系统的反馈连接的讨论中, 所以引入假定 $D_i = 0$ ($i = 1, 2$): 只是为了使式(2.5.18)给出的状态空间描述的形式不致于过分复杂, 而且这也是符合大多数实际问题的。

小 结

本章的重点是线性系统的状态空间描述，要掌握与其相关的各种基本概念，弄清它与传递函数描述的联系与差别。本章的难点是对于状态空间概念的理解。为什么这种系统描述方法称之为状态空间方法？为什么同一物理系统可以有不同的状态空间描述？这些是学完本章后必须搞清楚的问题。

状态空间法用一阶微分方程组(2.2.7)和(2.2.10)描述系统，线性系统的描述形式是一个一阶线性微分方程组(2.2.12)。这些方程可作为动态方程的条件是，对于任何的状态初值和控制输入有唯一的满足方程的输出。在研究动态方程的解时，解的唯一性是极为重要的。

状态空间法为什么用一阶微分方程组来描述系统？其主要原因有三个方面：

- ① 每一个高阶微分方程均可以化成一组一阶微分方程，这一点在2.2节中已经看到；
- ② 用以描述一阶微分方程组的表示法甚为简洁，以致于系统的阶次都不显含在系统的一般表达式之中；
- ③ 一阶微分方程组可以很容易在计算机上仿真。

线性系统的代数等价性是由线性系统状态的不唯一性引出的一个重要概念。一般说来，相互代数等价的线性定常系统代表了同一物理系统在不同状态向量下的数学模型。因而代数等价系统的公有属性反映了它所代表的物理系统的属性。代数等价系统的许多其它方面的属性将在以后各章中进一步揭示。

对于学过古典调节原理的读者而言，已经习惯了动态系统的方块图表示及其以方块图为基础的系统分析和综合。或许读者于本章第五节已经发现这样的事实，即我们的抽象模型可以是某一个局部的子系统，又可以代表非常庞大和复杂的大系统。

古典调节原理和我们这门课程在对于许多问题处理的出发点和手法方面有着很大的区别。这也是初涉本课程的读者值得留意的。

习 题

- 2.1 为什么说传递函数描述只适用于线性定常系统，而不适合时变系统？
- 2.2 对于线性时变系统，可否类似地定义代数等价性？试说明原因。
- 2.3 设有一物理系统可用线性定常系统模型描述，则其两种不同的线性定常描述是否代数等价？
- 2.4 考虑具有输入 u 和输出 y 的线性系统。在此系统上，可以利用输入 $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$ 及 $u_3(t)$ 实施三种试验。每一实验均具有相同之初始状态 $x(0)$ ，观测所得相应的输出为 $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$ 及 $y_3(t)$ 。若 $x(0) = 0$ ，试问下列三种预测正确否？
 - (1) 若 $u_3 = u_1 + u_2$ ，则 $y_3 = y_1 + y_2$ ；
 - (2) 若 $u_3 = (u_1 + u_2) / 2$ ，则 $y_3 = (y_1 + y_2) / 2$ ；
 - (3) 若 $u_3 = u_1 - u_2$ ，则 $y_3 = y_1 - y_2$ ；

当 $x(0) \neq 0$ 时, 预测结果又将如何?

2.5 列写出图2.1所示电路的状态方程和输出方程。其中, 状态变量、输入变量和输出变量分别指定为 $x_1 = u_c$, $x_2 = i$, $u = e(t)$, $y = i$ 。

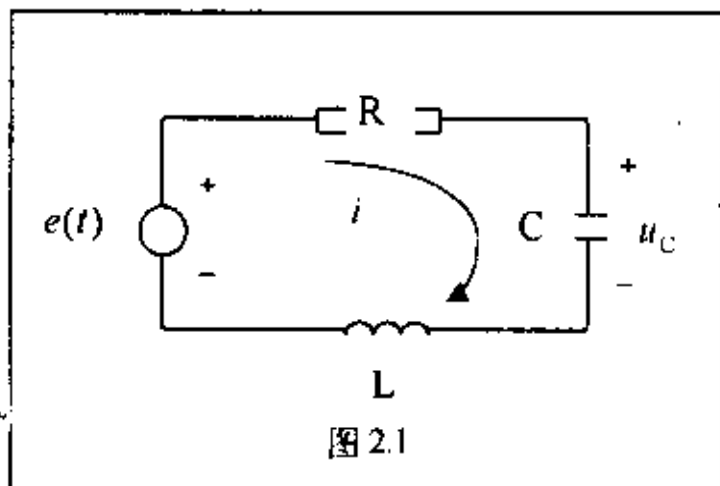


图 2.1

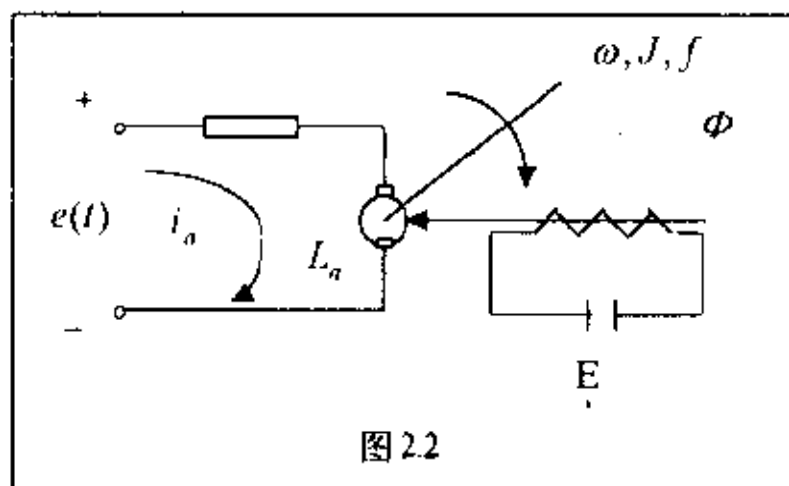


图 2.2

2.6 图2.2所示为处于电枢控制的电动机, 已知磁通 Φ 为常量, 反电势的关系式为 $c_e \omega$, 电磁力矩的关系式为 $c_M i_a$, 其中 c_e 和 c_M 为常数。现规定状态变量 $x_1 = i_a$, $x_2 = \omega$, 输入变量 $u = e(t)$, 列出电动机的状态方程。

2.7 图2.3所示为登月舱在月球上软着陆时的示意图, 其运动方程可表示为 $m\ddot{y} = -km - mg$; 其中 m 为登月舱质量, g

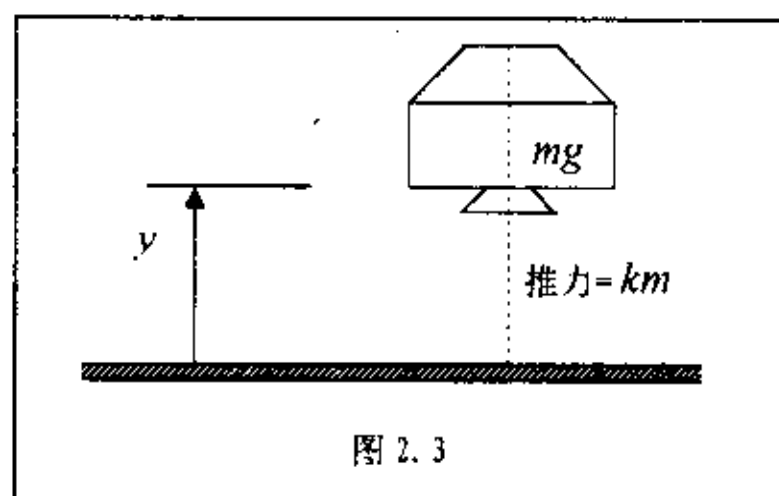


图 2.3

为月球表面的重力常数, k 为常数, $(-km)$ 代表反向推力, y 为登月舱相对于月球表面的距离。现规定状态变量为 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ 和 $x_3 = m$, 输入变量为 $u = \dot{m}$, 列写出系统的状态方程。

2.8 图2.4所示为某系统的方块图, 其中 u 和 y 分别为输入变量和输出变量。现规定状态变量为 $x_1 = y$ 和 $x_2 = \dot{y}$, 列出系统的状态方程和输出方程。

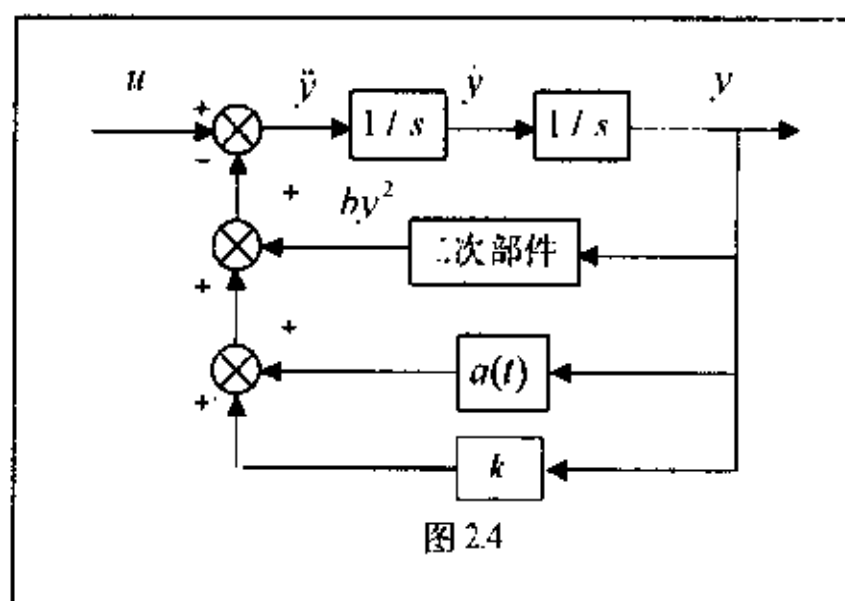


图 2.4

2.9 求出下列各输入-输出描述的一个状态空间描述:

(1) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 6y = 5u$

(2) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 6y = 7\dot{u} + 5u$

(3) $3\ddot{y} + 6\dot{y} + 12y = 6\dot{u} + 3u$

2.10 求出下列各输入-输出描述的一个状态空间描述:

$$(1) \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{2s^2 + 18s + 40}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$(2) \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{3(s+5)}{(s+3)^2(s+1)}$$

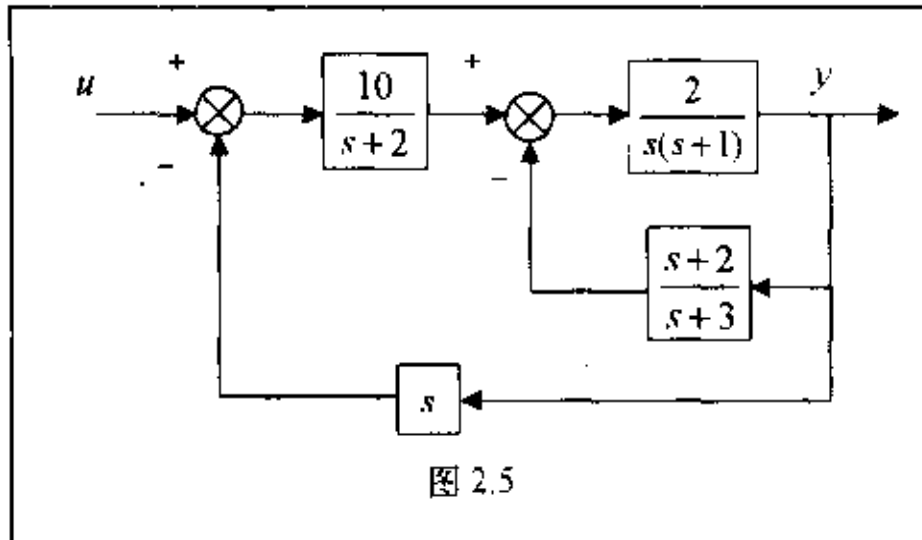


图 2.5

2.11 图2.5为某系统的方块图，其中 y 和 u 分别为其输出变量和输入变量，求出它的一个状态空间描述。

2.12 计算下列状态空间描述的传递函数 $G(s)$ ：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 2]x + 4u$$

2.13 给定系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

现取 $y = x_2 + 3x_3$ ，列出相应的输出 y -输入 u 标量微分方程。

2.14 计算下列状态空间描述的传递函数矩阵 $G(s)$ ：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 1]x$$

2.15 给定同维的方阵 A 和 \tilde{A} 为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ \vdots & & & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 \\ \vdots & & & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

试确定一个变换阵 P 使成立 $\tilde{A} = P^{-1}AP$ 。

2.19 给定反馈如图2.6所示，其中

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \quad G_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

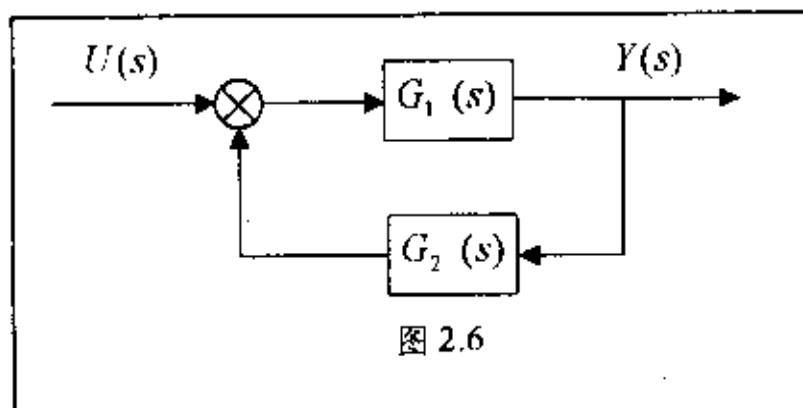
试确定反馈系统的传递函数矩阵 $G(s)$ 。

2.20 给定图2.6的反馈系统, 其中

$$G_1(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)(s+3)}$$

$$G_2(s) = \frac{s+2}{s+4}$$

试定出反馈系统的状态方程和输出方程。



第三章 线性系统的运动分析

系统的状态空间描述的建立为分析系统的行为和特性提供了可能性。对系统进行分析的目的，是要揭示系统状态的运动规律和基本特性。通常把对系统的分析区分为定量分析和定性分析两个方面。在定量分析中，我们要对系统的运动规律进行精确的研究，即定量地确定系统由外部激励作用所引起的响应。在定性分析中，则着重对决定系统行为和综合系统结构具有重要意义的几个关键性质，如能控性、能观测性和稳定性等进行定性研究。

本章以线性系统为对象，讨论系统的定量分析问题，指出它的运动规律，阐明它的运动性质，介绍它的分析方法。有关线性系统的定性分析问题，则分别在第四章和第五章中进行研究。

3.1 运动分析的含义

3.1.1 问题的提出及其解的存在唯一性

前已阐明，对于线性系统，描述其状态运动过程的状态方程为

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.1.1)$$

或

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0 \quad (3.1.2)$$

其中，式(3.1.1)相应于系统为时变的情况，而式(3.1.2)则对应于系统为定常的情况。分析系统的运动的目的，就是要从其数学模型出发，来定量地和精确地定出系统运动的变化规律，以便为系统的实际运动过程作出估计。从数学上看，这个命题可归结为，相对于给定的初始状态 x_0 和外输入作用 u ，来求解状态方程(3.1.1)或(3.1.2)的解 $x(t)$ ，即由初始状态和外输入作用所引起的响应。

尽管系统的运动是对初始状态和外输入作用的响应，但运动的形态却主要是由系统的结构和参数所决定的，也即是由参数矩阵对 $[A(t) \ B(t)]$ 或 $[A \ B]$ 所决定的。状态方程的解 $x(t)$ 给出了系统运动形态对系统的结构和参数的依赖关系。利用这一关系，使我们有可能来分析系统的结构特性，或者通过引入附加的部分改变系统的参数或结构，使系统运动形态在性能上达到期望的要求。这后一方面，就是系统的综合问题，将在第六至十章中进行系统讨论。

容易理解，只有当状态方程的满足初始条件的解存在且唯一时，对系统运动的分析才有意义。从数学上看，这就要求状态方程中的系数矩阵和输入作用满足一定的假设，它们是保证方程的解存在且唯一所必须的。

就线性时变系统(3.1.1)而言，如果系统矩阵 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的所有元在时间定义区间 $[t_0, t_a]$

上均为 t 的实值连续函数, 而输入 $u(t)$ 的元在时间定义区间 $[t_0, t_a]$ 上是连续实函数, 则其状态方程的解 $x(t)$ 存在且唯一。通常, 这些条件对于实际的物理系统总是能满足的。但是, 从数学的观点而言, 上述条件或许太强了, 下述引理给出了较弱的条件。

引理3.1.1 系统(3.1.1)对于任何 $x(0)$ 有解且解为唯一的充要条件是:

① $A(t)$ 的各元 $a_{ij}(t)$ 在 $[t_0, t_a]$ 上是绝对可积的, 即

$$\int_{t_0}^{t_a} |a_{ij}(t)| dt < \infty, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.1.3)$$

② $B(t)$ 的各元 $b_{ik}(t)$ 在 $[t_0, t_a]$ 上是平方可积的, 即

$$\int_{t_0}^{t_a} [b_{ik}(t)]^2 dt < \infty, \quad i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p \quad (3.1.4)$$

③ $u(t)$ 的 $u_k(t)$ 各元在 $[t_0, t_a]$ 上是平方可积的, 即

$$\int_{t_0}^{t_a} [u_k(t)]^2 dt < \infty, \quad k = 1, \dots, p \quad (3.1.5)$$

利用许瓦尔兹(Schwarz)不等式, 有

$$\sum_{k=1}^p \int_{t_0}^{t_a} |b_{ik}(t)u_k(t)| dt \leq \sum_{k=1}^p \left[\int_{t_0}^{t_a} [b_{ik}(t)]^2 dt \cdot \int_{t_0}^{t_a} [u_k(t)]^2 dt \right]^{1/2} \quad (3.1.6)$$

从而上述条件②和③即等价于 $B(t)u(t)$ 的元在区间 $[t_0, t_a]$ 上绝对可积。对于线性定常系统(3.1.2), 系数矩阵 A 和 B 均为常阵, 因此只要其元的值为有限值, 那么上述条件①和②总是满足的。

在下面各节的讨论中, 我们总是假定系统满足上述解的存在唯一性条件, 并在这一前提下分析系统状态的运动规律。

3.1.2 线性系统响应的特点

线性系统的一个基本属性是其满足叠加原理。利用这一属性, 不妨可把系统在初始状态和输入向量作用下的运动, 分解为两个单独的分运动, 即由初始状态引起的自由运动和由输入作用引起的强迫运动。自由运动就是系统(3.1.1)(或(3.1.2))的自治方程

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.1.7)$$

的解, 用 $\phi(t, t_0, x_0, 0)$ 来表示, 并称其为零输入响应。强迫运动则是系统(3.1.1) (或(3.1.2))在零初始状态下的强迫方程

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = 0, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.1.8)$$

的解, 用 $\phi(t, t_0, 0, u)$ 来表示, 称之为零状态响应。系统由初始状态和输入作用所引起的整体响应 $\phi(t, t_0, x_0, u)$ 就是两者的叠加, 即

$$\phi(t, t_0, x_0, u) = \phi(t, t_0, x_0, 0) + \phi(t, t_0, 0, u) \quad (3.1.9)$$

在下面各节的分析中可以看到, 这样做无论是对简化分析的过程还是对增加讨论的直观性, 都将是有帮助的。

3.2 状态转移矩阵及其性质

线性系统的运动分析以状态转移矩阵为基础。为此本节介绍状态转移矩阵及其性质。为引入状态转移矩阵的定义，我们先来讨论一下线性齐次方程的解空间。

3.2.1 线性齐次方程的解空间

为了讨论系统的运动，我们先来研究状态方程的解。

由于 $A(t)$ 、 $B(t)$ 的每个元素都是 t 的分段连续函数，因此，依常微分方程的定性理论可知，对任意 $x(t_0)$ 和 $u(\cdot)$ ，状态方程(3.1.1)都有唯一解。在讨论方程(3.1.1)的解之前，首先研究自由系统(即齐次方程)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (3.2.1)$$

的解。

定理3.2.1 齐次方程(3.2.1)的所有解的集合组成实数域上的 n 维向量空间。

证明 令 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为方程(3.2.1)的任意两个解，则对于任意实数 a_1 和 a_2 ， $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ 也是方程(3.2.1)的解，这可直接由验算证明。事实上

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) &= a_1\dot{x}_1(t) + a_2\dot{x}_2(t) = \\ &= a_1A(t)x_1(t) + a_2A(t)x_2(t) = \\ &= A(t)(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) \end{aligned}$$

因此，方程(3.2.1)解的集合组成实数域上的线性空间，称为解空间。下面证明这个解空间是 n 维的。

令 e_1, e_2, \dots, e_n 为实的 n 维欧几里德空间中一组线性独立的向量， $x_i(t)$ 是方程(3.2.1)相应于初始条件为 e_i 的解， $i=1, 2, \dots, n$ 。现证明方程(3.2.1)的解都能被 $x_i(t)$ 线性表出，且 $x_i(t)$ ， $i=1, 2, \dots, n$ ，线性独立。如果这一结论正确，则定理就得到证明。

为说明 $x_i(t)$ ， $i=1, 2, \dots, n$ ，线性独立，我们使用反证法。

设 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 线性相关，则有不全为零的 n 个实数 a_1, a_2, \dots, a_n ，使得对 $t \geq t_0$ 有

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i(t) \equiv 0 \quad (3.2.2)$$

特别当 $t = t_0$ 时，有

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i(t_0) = \sum_{i=1}^n a_i e_i = 0 \quad (3.2.3)$$

而这与 e_1, e_2, \dots, e_n 线性独立矛盾。因此， $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 在其定义域上必线性独立。

令 $x(t)$ 是方程(3.2.1)的任意一个解，并且 $x(t_0) = e_0$ 。因为 e_1, e_2, \dots, e_n 线性独立，所以

必能唯一地表成 e_i , $i=1,2,\dots,n$ 的线性组合

$$e_0 = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

这里, a_1, a_2, \dots, a_n 不全为零。显然, $\sum_{i=1}^n a_i x_i(t)$ 是以 e_0 为初始条件时方程(3.2.1)的解。因此, 从解的唯一性有

$$x(t) = \sum_{i=1}^n a_i x_i(t) \quad (3.2.4)$$

△△△

3.2.2 状态转移矩阵的定义

定义3.2.1 设 $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$ 是方程(3.2.1)的一组线性独立的解, 那么矩阵

$$\Psi(t) = [\psi_1(t) \quad \psi_2(t) \quad \dots \quad \psi_n(t)] \quad (3.2.5)$$

称为方程(3.2.1)的基本解阵。

依据定义不难证明方程(3.2.1)的基本解阵 $\Psi(t)$ 有如下性质:

性质I 如果 $\Psi(t)$ 满足方程

$$\dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t) \quad (3.2.6)$$

且对某个 t_0 , $\Psi(t_0)$ 非奇异, 那么 $\Psi(t)$ 必为方程(3.2.1)的基本解阵。

另外我们还有:

性质II 对任意 t , 基本解阵 $\Psi(t)$ 都是非奇异的。

证明 事实上, 若有 t_0 , 使得 $\Psi(t_0)$ 是奇异的, 则 $\psi_1(t_0), \psi_2(t_0), \dots, \psi_n(t_0)$ 必线性相关, 从而存在 n 个不全为零的实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 使得

$$\sum_{i=1}^n a_i \psi_i(t_0) = 0 \quad (3.2.7)$$

由于 $\sum_{i=1}^n a_i \psi_i(t)$ 是方程(3.2.1)的解, 相应的初始条件为 $\sum_{i=1}^n a_i \psi_i(t_0)$ 。因此, 一定有

$$\sum_{i=1}^n a_i \psi_i(t) \equiv 0, \quad t \geq t_0$$

而这与 $\psi_1(t_0), \psi_2(t_0), \dots, \psi_n(t_0)$ 线性独立矛盾。因此, 对任意 t , $\Psi(t)$ 总非奇异。

△△△

定义3.2.2 令 $\Psi(t)$ 是方程(3.2.1)的基本解阵, 则矩阵

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0), \quad t \geq t_0 \quad (3.2.8)$$

称为系统的状态转移矩阵。

3.2.3 状态转移矩阵的性质

关于状态转移矩阵这个名字的由来将在下面说明。根据基本解阵的性质可直接推得状态转移矩阵的一些重要性质。

命题3.2.1 设 $\Phi(t, t_0)$ 为系统(3.2.1)的状态转移矩阵, 则它具有下述性质:

① 自反性: 对任意 t , 有

$$\Phi(t, t) = I_n \quad (3.2.9)$$

② 反身性: 对任意 t_0 和 t , 有

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t) \quad (3.2.10)$$

③ 传递性: 对任意 t_0, t_1 和 t_2 , 有

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) \quad (3.2.11)$$

状态转移矩阵是基于基本解阵来定义的, 但一个系统的基本解阵却是不唯一的, 那么一个系统的状态转移矩阵是否与方程(3.2.1)的基本解阵的选择有关呢? 答案是否定的。下述命题说明了状态转移矩阵的唯一性, 即一个系统的状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 只取决于系统矩阵 $A(t)$, 而与方程(3.2.1)的基本解阵的选取无关。

命题3.2.2 设 $\Phi(t, t_0)$ 为系统(3.2.1)的状态转移矩阵, 且系统(3.2.1)满足解的存在唯一性条件, 则 $\Phi(t, t_0)$ 与方程(3.2.1)的基本解阵的选取无关, 且由下述矩阵微分方程唯一决定

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I_n \quad (3.2.12)$$

证明 事实上, 若令 $\Psi_1(t)$ 和 $\Psi_2(t)$ 为方程(3.2.1)的任意两个不同的基本解阵, 由定义及基本解阵的性质可知, 必存在 $n \times n$ 阶非奇异常数矩阵 P , 使得 $\Psi_2(t) = \Psi_1(t)P$ 。于是, 根据状态转移矩阵的定义, 有

$$\Phi(t, t_0) = \Psi_2(t)\Psi_2^{-1}(t_0) = \Psi_1(t)PP^{-1}\Psi_1^{-1}(t_0) = \Psi_1(t)\Psi_1^{-1}(t_0)$$

由此可见, $\Phi(t, t_0)$ 的解与基本解阵的选择无关。另外由

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \dot{\Psi}_2(t)\Psi_2^{-1}(t_0) = A(t)\Psi_2(t)\Psi_2^{-1}(t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$$

及状态转移矩阵的性质(3.2.9)可知, $\Phi(t, t_0)$ 由矩阵微分方程(3.2.12)唯一决定。

△△△

由上述命题可知, 状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 也是齐次方程(3.2.1)的一个基本解阵。事实上, 若令

$$\begin{cases} e_1 = [1 & 0 & 0 & \cdots & 0]^T \\ e_2 = [0 & 1 & 0 & \cdots & 0]^T \\ \vdots \\ e_n = [0 & 0 & 0 & \cdots & 1]^T \end{cases} \quad (3.2.13)$$

那么, 状态转移矩阵的第 i 列组成的矢量就是以 e_i 为初始条件方程(3.2.1)的唯一解。因此又可以说, 状态转移矩阵是方程(3.2.1)的一个特殊的基本解阵。

3.3 线性时变系统的运动分析

上一节讨论了状态转移矩阵及其性质。这一节将基于状态转移矩阵来建立线性系统的

运动规律，即线性系统的响应表达式。在3.1节中，我们曾根据线性系统的叠加原理将线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & x(t_0) = x_0, & t \in [t_0, t_a] \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases} \quad (3.3.1)$$

的状态响应分为零输入响应和零初始状态响应，且分别记为 $\phi(t, t_0, x_0, 0)$ 和 $\phi(t, t_0, 0, u)$ 。下面对线性系统(3.3.1)的各种响应分别进行讨论。

3.3.1 时变线性系统的零输入响应

由3.1节知，线性系统(3.3.1)的零输入状态响应 $\phi(t, t_0, x_0, 0)$ 为下述线性齐次微分方程

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \quad (3.3.2)$$

的解。对此我们有下述定理：

定理3.3.1 设线性系统(3.3.1)满足解的存在唯一性条件，记 $\Phi(t, t_0)$ 为其状态转移矩阵，则

$$\phi(t, t_0, x_0, 0) = \Phi(t, t_0)x_0 \quad (3.3.3)$$

证明 由定义知 $\phi(t, t_0, x_0, 0)$ 为满足方程

$$\dot{\phi}(t, t_0, x_0, 0) = A(t)\phi(t, t_0, x_0, 0)$$

及其初始条件

$$\phi(t_0, t_0, x_0, 0) = x_0$$

的解。以式(3.3.3)代入上述二式，并利用状态转移矩阵的性质可得二恒等式，因而结论成立。

△△△

上述定理说明了 $\phi(t, t_0, x_0, 0)$ 是初值 x_0 在算子 $\Phi(t, t_0)$ 下的像。以 $\Phi(t_2, t_1)$ 作用于 $x(t_1)$ 便可获得 $x(t_2)$ ，这便是 $\Phi(t, t_0)$ 被称为状态转移矩阵的由来。

有了线性系统(3.3.1)的零输入状态响应，则其零输入的输出响应，即下述自由系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, & x(t_0) = x_0, & t \geq t_0 \\ y = C(t)x \end{cases} \quad (3.3.4)$$

的输出，便容易获得了。如果我们类似地将系统(3.3.1)的零输入时的输出响应记为 $\psi(t, t_0, x_0, 0)$ ，则显然有

$$\psi(t, t_0, x_0, 0) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 \quad (3.3.5)$$

3.3.2 时变线性系统的零初始状态响应

由3.1节知，线性系统(3.3.1)在零初始状态下的状态响应 $\phi(t, t_0, 0, u)$ 为下述零初始条件的受迫运动系统

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (3.3.6)$$

的解。对此我们有

定理3.3.2 设系统(3.3.1)满足解的存在唯一性条件，记 $\Phi(t, t_0)$ 为其状态转移矩阵，则

$$\phi(t, t_0, 0, u) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.3.7)$$

证明 由变限定积分求导法则和状态转移矩阵的性质有

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t, t_0, 0, u) &= \int_{t_0}^t \dot{\Phi}(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + \Phi(t, t) B(t) u(t) = \\ &= A(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + B(t) u(t) = \\ &= A(t) \phi(t, t_0, 0, u) + B(t) u(t) \end{aligned}$$

再注意到

$$\phi(t_0, t_0, 0, u) = 0$$

从而 $\phi(t, t_0, 0, u)$ 为(3.3.6)的解。

△△△

线性系统(3.3.1)在零初始状态下的输出响应为系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & x(t_0) = 0, & t \geq t_0 \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases} \quad (3.3.8)$$

的输出, 记为 $\psi(t, t_0, 0, u)$ 。由定理3.3.2易知

$$\psi(t, t_0, 0, u) = C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + D(t)u \quad (3.3.9)$$

3.3.3 时变线性系统的整体响应

根据线性系统的叠加原理, 线性系统(3.3.1)的由状态初值 x_0 和控制输入 $u(t)$ 所引起的整体状态响应, 记为 $\phi(t, t_0, x_0, u)$ 和整体输出响应, 记为 $\psi(t, t_0, x_0, u)$, 分别为

$$\phi(t, t_0, x_0, u) = \phi(t, t_0, 0, u) + \phi(t, t_0, x_0, 0)$$

和

$$\psi(t, t_0, x_0, u) = \psi(t, t_0, 0, u) + \psi(t, t_0, x_0, 0)$$

从而由上两小节的讨论可得

$$\phi(t, t_0, x_0, u) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.3.10)$$

$$\psi(t, t_0, x_0, u) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + D(t)u \quad (3.3.11)$$

例3.3.1 给定线性时变系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad t \in [1, 10]$$

求其在单位阶跃函数 $1(t-1)$ 作用下以 $x_1(1) = 1$ 和 $x_2(1) = 2$ 为初始状态的状态响应。

解 我们首先来求状态转移矩阵, 为此我们来考虑零输入时的状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = tx_1 \end{cases}$$

对其求解可以得到

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(t_0) \\ x_2(t) = 0.5t^2 x_1(t_0) - 0.5t_0^2 x_1(t_0) + x_2(t_0) \end{cases}$$

取两组不同的初值 $x_1(t_0) = 0$ 、 $x_2(t_0) = 1$ 和 $x_1(t_0) = 2$ 、 $x_2(t_0) = 0$ ，可以得到两个线性无关解

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ t^2 - t_0^2 \end{bmatrix}$$

从而系统的一个基本解阵可取为

$$\Psi = [\psi_1 \quad \psi_2] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 - t_0^2 \end{bmatrix}$$

由此可得

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5t^2 - 0.5t_0^2 & 1 \end{bmatrix}$$

下面我们来计算系统的响应

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5t^2 - 0.5t_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5t^2 - 0.5\tau^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.4 线性定常系统的运动分析

线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(t_0) = x_0, \quad t \geq 0 \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3.4.1)$$

的运动分析问题是与矩阵指数函数 e^{At} 紧密相关的。因此我们先来介绍一下矩阵指数 e^{At} 函数的定义、性质和求取方法。

3.4.1 矩阵指数函数

给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，则如下定义的矩阵

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k t^k \quad (3.4.2)$$

称为矩阵 A 的指数函数。下述定理给出了矩阵指数函数的一些基本性质。

定理3.4.1 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，则

- ① $\lim_{t \rightarrow 0} e^{At} = I$
- ② $e^{A(t+\tau)} = e^{At} \cdot e^{A\tau} = e^{A\tau} \cdot e^{At}, \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R}$
- ③ e^{At} 为可逆矩阵，且 $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

④ 对于与 A 可交换的 n 阶方阵 F 有 $e^{(A+F)t} = e^{At} \cdot e^{Ft} = e^{Ft} \cdot e^{At}$

⑤ $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At} A$

⑥ $(e^{At})^m = e^{A(mt)}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

⑦ 如果 $A = PFP^{-1}$, 则 $e^{At} = Pe^{Ft}P^{-1}$

⑧ $e^{At} = L^{-1}(sI - A)^{-1}$ (此处 L 为拉氏变换算符)

关于上述定理的证明, 请读者自己完成. 下面我们讨论矩阵指数函数的求取问题.

方法I 基于Levirier算法求取 e^{At}

这种方法的基本思想是, 先利用Levirier算法求取矩阵 $(sI - A)^{-1}$, 然后利用定理3.4.1中性质8求取 e^{At} . 对此读者可自行研究某些算例.

方法II 基于若当分解求取 e^{At}

这种方法的基本思想是, 先对矩阵 A 进行若当分解, 然后利用定理3.4.1中性质7求取 e^{At} .

当矩阵 A 具有互异特征值的情形, 容易导出下述结果.

命题3.4.1 设 A 具有互异特征值 λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, p_i 为 A 的与 λ_i 相对应的特征向量, 记

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n] \quad (3.4.3)$$

则

$$e^{At} = [e^{\lambda_1 t} p_1 \ e^{\lambda_2 t} p_2 \ \dots \ e^{\lambda_n t} p_n] P^{-1} \quad (3.4.4)$$

一般情况下, 矩阵 A 的若当分解为

$$A = P \operatorname{diag}[J_1 \ J_2 \ \dots \ J_l] P^{-1}$$

其中 J_i , $i = 1, 2, \dots, l$ 为若当块. 此时有

$$e^{At} = P \operatorname{diag}[e^{J_1 t} \ e^{J_2 t} \ \dots \ e^{J_l t}] P^{-1}$$

再结合下述命题便可求解 e^{At} .

命题3.4.2 设 J 为一 p 阶若当块, λ 为其特征值, 则

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{1}{(p-1)!}t^{p-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(p-2)!}t^{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

方法III 利用Cayley-Hamilton定理计算 e^{At}

根据Cayley-Hamilton定理, e^{At} 可表为下述形式

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} \quad (3.4.5)$$

其中的系数 $\alpha_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, 可根据下述命题计算.

命题3.4.3 设 A 为 n 阶方阵, 且具有互异特征值 λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, 则当取

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

时有式(3.4.5)成立。

当A具有重特征值但为循环阵时，比如其特征值为 λ_1 (三重)、 λ_2 (二重)和 $\lambda_3, \dots, \lambda_{n-3}$ ，此时有

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \\ \alpha_4(t) \\ \alpha_5(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \lambda_1^{n-3} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & \frac{(n-1)}{1!} \lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \hline 0 & 1 & 2\lambda_2 & 3\lambda_2^2 & \cdots & \frac{(n-1)}{1!} \lambda_2^{n-2} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \hline 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_{n-3} & \lambda_{n-3}^2 & \lambda_{n-3}^3 & \cdots & \lambda_{n-3}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2!} t^2 e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{1!} t e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{1!} t e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_{n-3} t} \end{bmatrix} \quad (3.4.7)$$

注：关于上述方法中有关结果的证明请读者参考有关书籍自己完成。

3.4.2 线性定常系统的响应

首先我们来确定定常线性系统的状态转移矩阵。

定理3.4.2 定常线性系统(3.4.1)的状态转移矩阵为

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)} \quad (3.4.8)$$

证明 由3.2节可知，定常线性系统(3.4.1)的状态转移矩阵由下述矩阵微分方程问题唯一决定：

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t, t_0) = A\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) = I, \quad \forall t_0 \geq 0, t \geq t_0 \end{cases} \quad (3.4.9)$$

而由矩阵指数函数的性质5和1可得问题(3.4.8)的解为 $e^{A(t-t_0)}$ 。

△△△

对于线性时变系统，其状态转移矩阵为一个二元函数，但由定理3.4.1可见，线性定常系统的状态转移矩阵却为一单元函数。

利用式(3.4.8)和3.3节中的结果，我们有下述定理：

定理3.4.3 给定线性定常系统(3.4.1)，则它的

① 零输入状态响应和零输入输出响应分别为

$$\phi(t, t_0, x_0, 0) = e^{A(t-t_0)} x_0 \quad (3.4.10)$$

和

$$\psi(t, t_0, x_0, 0) = Ce^{A(t-t_0)} x_0 \quad (3.4.11)$$

② 零初始状态下的状态和输出响应分别为

$$\phi(t, t_0, 0, u) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (3.4.12)$$

和

$$\psi(t, t_0, 0, u) = \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du \quad (3.4.13)$$

③ 整体的状态和输出响应分别为

$$\phi(t, t_0, x_0, u) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (3.4.14)$$

和

$$\psi(t, t_0, x_0, u) = Ce^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du \quad (3.4.15)$$

由式(3.4.10)和式(3.4.11)可见, 定常线性系统的零输入响应只与初始状态和系统的运行时间长度有关, 而与系统的运行起始点无关. 下面再针对一种特殊但常见的情形给出定常线性系统(3.4.1)的零输入响应的另一表达式.

推论3.4.1 设矩阵 A 具有互异特征值 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n, p_i \in \mathbb{C}^n, i=1, 2, \dots, n$ 为对应的右特征向量, 记

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n] \quad (3.4.16)$$

则

$$\phi(t, t_0, x_0, 0) = [e^{\lambda_1(t-t_0)} p_1 \ e^{\lambda_2(t-t_0)} p_2 \ \dots \ e^{\lambda_n(t-t_0)} p_n] P^{-1} x_0. \quad (3.4.17)$$

证明 由命题3.4.1和定理3.4.2可得.

△△△

上述推论说明, 线性系统(3.4.1)的零输入状态响应不但与系统极点有关, 而且还与系统矩阵 A 的特征向量有关.

我们知道, 相互代数等价的线性定常系统在一定程度上代表了同一物理系统的不同描述, 因而, 尽管相互代数等价的系统的状态响应可以不同, 但它们的输出响应应该是相同的.

命题3.4.4 相互代数等价的定常线性系统具有相同的零初始状态下的输出响应和零输入条件下的输出响应.

例3.4.1 已知系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad t \geq 0$$

求其在初始状态 $x(0) = [1 \ -1]^T$ 下的零输入响应和在 $u = 1(t)$ 作用下的零初始状态响应.

解 由题设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

且容易算得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$, 矩阵 A 与 λ_1 和 λ_2 相对应的两个特征向量

分别为

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

故

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

所以有

$$e^{At} = [e^{\lambda_1 t} p_1 \quad e^{\lambda_2 t} p_2] P^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

最后由定理3.4.2可得

$$\phi(t, t_0, x_0, 0) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}, t \geq 0$$

$$\phi(t, t_0, 0, u) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}, t \geq 0$$

3.5 脉冲响应矩阵

单变量线性系统的脉冲响应对于我们应该是不陌生的。这一节我们将其推广到多变量系统的情形。从某种意义上说，脉冲响应属于线性系统的一种外部描述形式，我们之所以在这里介绍它，主要有两个原因：一是脉冲响应矩阵的表达式用到了前面介绍的线性系统的响应公式；二是利用脉冲响应矩阵可以很容易、很直接地写出线性系统在零初始状态下的输出响应。

3.5.1 单变量情形的简单回顾

除了传递函数之外，描述系统输入-输出关系的另一个物理量就是脉冲响应函数。事实上，假若单变量系统传函 $G(s)$ 的拉普拉斯反变换为 $g(t)$ ，那么对 $Y(s) = G(s)U(s)$ 求拉普拉斯反变换得出

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.5.1)$$

若令

$$h(t-\tau) = \begin{cases} g(t-\tau), & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases} \quad (3.5.2)$$

那么，式(3.5.1)可以改写为

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.5.3)$$

积分(3.5.1)或(3.5.3)反映了系统的输入-输出关系。按照这种表示，如果给定输入 $u(t)$ 之后，系统的输出就被式(3.5.1)或(3.5.3)决定。显然，这个输出 $y(t)$ 是系统对输入 $u(t)$ 的响应。

定义单位脉冲函数 $\delta(t)$:

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} \infty, & t = \tau \\ 0, & t \neq \tau \end{cases}$$

并且对每个分段连续的实函数 $f(t)$ 都有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau)d\tau = f(t) \quad (3.5.4)$$

则当系统的输入是一个单位脉冲函数时, 即 $u(t) = \delta(t)$ 时, 系统的响应为

$$y(t) = h(t) = g(t) \quad (3.5.5)$$

由此可见, 函数 $h(t)$ 是系统对单位脉冲输入的响应, $h(t - \tau)$ 称为单位脉冲响应函数。显然, 系统的脉冲响应函数是它的传递函数的拉普拉斯反变换。因此, 脉冲响应函数和传递函数从不同角度描述了系统的输入-输出关系。前者描述了系统输入-输出的时域关系, 后者描述了它们的频域关系。

3.5.2 脉冲响应矩阵的定义与系统的输出响应

定义3.5.1 考虑一个具有 r 个输入端和 m 个输出端的线性定常系统, 假设系统具有零初始状态, 令在 τ 时刻加于第 j 个输入端一个单位脉冲函数 $\delta(t - \tau)$, 而令其它输入端的输入为零, 则用 $g_{ij}(t - \tau)$ 表示第 i 个输出端在时刻 t 的脉冲响应。而以脉冲响应 $g_{ij}(t - \tau)$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r$ 为元所构成的 $m \times r$ 阶矩阵

$$G(t - \tau) = \begin{bmatrix} g_{11}(t - \tau) & g_{12}(t - \tau) & \cdots & g_{1r}(t - \tau) \\ g_{21}(t - \tau) & g_{22}(t - \tau) & \cdots & g_{2r}(t - \tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(t - \tau) & g_{m2}(t - \tau) & \cdots & g_{mr}(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (3.5.6)$$

称为系统的脉冲响应矩阵。并且, 由于系统满足因果律, 且总是假定系统的输出在输入加入之前的所有瞬时为零, 所以 $G(t - \tau)$ 具有性质:

$$G(t - \tau) = 0, \quad \forall \tau \text{ 和 } \forall t < \tau \quad (3.5.7)$$

当系统的输入向量 u 的元为任意形式的时间函数时, 可将其用一系列脉冲函数来逼近, 即表为

$$u_j \approx \sum_k u_j(t_k)\delta(t - t_k)\Delta t, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (3.5.8)$$

而相应的系统输出为

$$y(t) \approx \sum_k G(t - t_k)u(t_k)\Delta t \quad (3.5.9)$$

现令 $\Delta t \rightarrow 0$, 那么上式中的近似相等就趋于精确相等, 且和式可用积分代替, 因而可得到根据脉冲响应矩阵来计算任意输入时的系统输出的一个基本关系式

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t - \tau)u(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (3.5.10)$$

进一步, 如果按习惯的做法取初始时刻 $t_0 = 0$, 那么上式还表为

$$y(t) = \int_0^t G(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3.5.11)$$

对上式作自变量置换, 则又可将(3.5.11)表示为另一形式

$$y(t) = \int_0^t G(\tau)u(t-\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3.5.12)$$

由式(3.5.11)和式(3.5.12)所给出的积分关系式通常称为卷积或折积。

3.5.3 状态空间模型的脉冲响应矩阵

为了建立脉冲响应矩阵和状态空间描述间的关系, 考虑如下的线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3.5.13)$$

其中 A 、 B 、 C 和 D 分别是 $n \times n$ 、 $n \times r$ 、 $m \times n$ 和 $m \times r$ 的实值常阵。

定理3.5.1 由式(3.5.13)所描述的线性定常系统的脉冲响应矩阵为

$$G(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau) \quad (3.5.14)$$

或将其写成为常用的形式为

$$G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad (3.5.15)$$

证明 利用系统(3.5.13)的输出响应表达式(3.4.15), 有

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad (3.5.16)$$

如前面所指出的, 在定义脉冲响应矩阵时, 总是假定系统具有零初始状态。由此, 令式(3.5.16)中 $x_0 = 0$ 并加以改写, 可进而得到

$$y(t) = \int_{t_0}^t [Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)]u(\tau)d\tau \quad (3.5.17)$$

再将式(3.5.17)和脉冲响应矩阵的基本关系式(3.5.10)加以比较, 即可导出

$$G(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau) \quad (3.5.18)$$

将上式作自变量置换, 又可把式(3.5.18)改写为

$$G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad (3.5.19)$$

△△△

说明3.5.1 注意到 $e^{A(t-\tau)} = \Phi(t-\tau)$ 和 $e^{At} = \Phi(t)$, 所以脉冲响应矩阵的表达式(3.5.14)和式(3.5.15)还可表为如下的形式

$$G(t-\tau) = C\Phi(t-\tau)B + D\delta(t-\tau) \quad (3.5.20)$$

和

$$G(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t) \quad (3.5.21)$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 是线性定常系统(3.5.13)的状态转移矩阵。

定理3.5.2 两个代数等价的线性定常系统具有相同的脉冲响应矩阵。

证明 利用定理3.5.1可知, 系统 (A, B, C, D) 的脉冲响应矩阵为

$$G(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau) \quad (3.5.22)$$

而系统 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ 的脉冲响应矩阵为

$$\bar{G}(t - \tau) = \bar{C}e^{\bar{A}(t-\tau)}\bar{B} + \bar{D}\delta(t - \tau) \quad (3.5.23)$$

但已知两个系统是代数等价的, 即存在可逆矩阵 P 使成立

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{C} = CP^{-1}, \quad \bar{D} = D \quad (3.5.24)$$

和

$$e^{A(t-\tau)} = Pe^{A(t-\tau)}P^{-1} \quad (3.5.25)$$

于是可导出

$$\begin{aligned} \bar{G}(t - \tau) &= \bar{C}e^{\bar{A}(t-\tau)}\bar{B} + \bar{D}\delta(t - \tau) = \\ &= CP^{-1}Pe^{A(t-\tau)}P^{-1}PB + D\delta(t - \tau) = \\ &= Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t - \tau) = G(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

△△△

3.5.4. 脉冲响应矩阵与传递函数矩阵

这里我们来讨论线性定常系统的脉冲响应矩阵与传递函数矩阵这两个输入-输出特性表达式间的关系。对此, 可证明如下的结论。

定理3.5.3 用 $G(t)$ 和 $\hat{G}(s)$ 分别表示给定的线性定常系统的脉冲响应矩阵和传递函数矩阵, 则两者之间成立如下的关系式

$$\hat{G}(s) = L[G(t)], \quad t \geq 0 \quad (3.5.27)$$

和

$$G(t) = L^{-1}[\hat{G}(s)], \quad t \geq 0 \quad (3.5.28)$$

证明 考虑到

$$G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad (3.5.29)$$

和

$$L[e^{At}] = (sI - A)^{-1}, \quad L[\delta(t)] = 1 \quad (3.5.30)$$

就可导出

$$L[G(t)] = C(sI - A)^{-1}B + D = \hat{G}(s) \quad (3.5.31)$$

类似地, 按相反的步骤则可导出式(3.5.28)。

△△△

利用由式(3.5.27)和式(3.5.28)所给出的关系, 进而有如下的结论。

定理3.5.4 给定两个线性定常系统 (A, B, C, D) 和 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$, 设两者具有相同的输出和输入维数, 但它们的状态维数可不一定相同, 则此两系统具有相同脉冲响应矩阵(即相同传递函数矩阵)的充分必要条件是

$$D = \bar{D} \quad (3.5.32)$$

和

$$CA^i B = \overline{CA^i B}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5.33)$$

证明 $G(t) = \overline{G}(t)$ 或 $\hat{G}(t) = \overline{\hat{G}}(t)$, 当且仅当

$$D + C(sI - A)^{-1} B = \overline{D} + \overline{C}(sI - \overline{A})^{-1} \overline{B} \quad (3.5.34)$$

考虑到预解矩阵的关系式

$$(sI - A)^{-1} = Is^{-1} + As^{-2} + A^2s^{-3} + \dots \quad (3.5.35)$$

则上述条件(3.5.34)还可进而表为

$$\begin{aligned} D + CBs^{-1} + CABs^{-2} + CA^2Bs^{-3} + \dots = \\ \overline{D} + \overline{CB}s^{-1} + \overline{CAB}s^{-2} + \overline{CA^2B}s^{-3} + \dots \end{aligned} \quad (3.5.36)$$

显然, 欲使上式对任意的 s 均成立, 当且仅当

$$D = \overline{D} \text{ 和 } CA^i B = \overline{CA^i B}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5.37)$$

△△△

注意, 上述定理更加明确地指出了线性系统的状态空间描述和传递函数描述之间的差异。

小 结

在古典控制理论中, 系统的运动分析, 即系统的过渡过程分析, 或称古典的时域分析, 占有相当重要的位置。在古典理论中, 人们定义了各种典型环节和典型输入信号, 通过分析各种典型环节在各种典型输入信号作用下的响应便可达到系统运动分析的目的。在本章中, 研究对象变成了以状态空间法描述的多变量耦合系统, 因而典型环节和典型输入信号已不再有意义。但借助于状态转移矩阵和线性系统的叠加性原理, 我们可以最一般地给出线性系统响应的解析表达式。基于这种一般的表达式, 我们自然可以很容易地借助计算机获得系统在任何初值和输入作用下的各个状态变量的一般过渡过程。

本章的重点是状态转移矩阵及线性系统的响应, 要理解并牢记状态转移矩阵的性质和线性系统的各个响应表达式, 它们在后续的课程中会经常用到。

线性系统的解主要借助于状态转移矩阵来表示。状态转移矩阵具有反身性、自反性和传递性。在时变的情况下, 状态转移矩阵很难计算, 但在定常情况下, 它退化为一个矩阵指数函数, 可以用本章第四节介绍的各种方法计算之。在以上两种情况下, 如果我们只关心系统的某一特解, 则可避开状态转移矩阵的求取而在计算机上直接积分得到。

脉冲响应矩阵是线性系统描述的另外一种形式, 它是系统输出对零初始状态和脉冲输入的响应。这里我们要清楚其定义及其与其它描述形式的转换。

习 题

3.1 如何从线性系统的响应公式来理解线性系统的叠加原理? 进一步利用线性系统的响应公式解释第二章的习题2.4。

3.2 为什么说系统的状态转移矩阵的各列是相应齐次线性系统的解？它们的初值是什么？

3.3 对于 n 阶线性时变齐次系统，为求其解我们引入了状态转移矩阵，而求得状态转移矩阵，却须求得系统的 n 个线性无关解，因此状态转移矩阵的引入对于线性时变系统的求解没有意义。这种理解正确否？

3.4 对于下列给出的常阵 A ，定出它们的矩阵指数函数 e^{At} ：

$$(1) A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (5) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

3.5 用三种方法计算下列矩阵 A 的矩阵指数函数 e^{At} ：

$$(1) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

3.6 试求下列各系统的状态变量解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ ：

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u(t) = e^{-t}, t \geq 0$$

3.7 对于给定的某系统，已知

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

试定出相对于下列各个 $u(t)$ 时的状态响应 $x(t)$ ：

$$(1) u(t) = \delta(t) \quad (2) u(t) = 1(t) \quad (3) u(t) = t \quad (4) u(t) = \sin t$$

3.8 已知某系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{3t}) & \frac{1}{4}(-e^{-t} + e^{3t}) \\ -e^{-t} + e^{3t} & \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{3t}) \end{bmatrix}$$

试定出其系统矩阵 A 。

3.9 利用拉普拉斯变换证明：线性定常系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ ， $x(0) = x_0$ 的状态运动的一般表达式为

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

3.10 给定矩阵微分方程为

$$\dot{X} = AX + XA^T, X(0) = P_0$$

其中 X 为 $n \times n$ 变量阵。试证明此矩阵方程的解为

$$X(t) = e^{At} P_0 e^{A^T t}$$

3.11 给定线性时变系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \quad t \geq t_0$$

设其状态转移矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ \Phi_{21}(t, t_0) & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

试证明当 $A_{21} = 0$ 时必有 $\Phi_{21}(t, t_0) \equiv 0$ 。

3.12 给定二维线性定常系统

$$\dot{x} = Ax, \quad t \geq 0$$

现知对应于两个不同初态时的状态响应为

$$(1) \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ 时 } x(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix} \quad (2) \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 时 } x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

试据此定出系统的矩阵 A 。

3.13 设 A 为方常阵, 且其特征值两两相异, 证明必成立

$$\det(e^{At}) = e^{(\operatorname{tr} A)t}$$

3.14 利用定理3.4.1证明命题3.4.4。另外, 对于零初始状态的响应情形亦考虑利用脉冲响应矩阵理论证之。

第四章 线性系统的能控性和能观性

能控性和能观性是线性系统理论中的一对极为重要的概念，这对概念深刻地刻画了线性系统的结构性质，在线性系统的设计中有着重要的应用。本章介绍能控性和能观性的定义和判据、能控性和能观性指数、能控和能观规范型以及依据能控性和能观性的结构分解。

4.1 能控性和能观测性的定义

4.1.1 问题的提出

我们首先从物理的直观性来讨论能控性和能观测性的基本含义。这种直观的讨论，对于理解能控性和能观测性的严格定义是很有帮助的。

研究系统的目的是为了更好地了解系统和控制系统。那么“更好地了解一个系统”和“更好地控制一个系统”的含义是什么呢？

了解系统的含义是多方面的，这其中可以包括系统的组成、结构、属性和运动规律等。我们这里暂时不考虑这些具体的、复杂的方面，而只关心其抽象的，也是最简单的一面。由第二章可知，一个系统的状态向量完全刻画了系统的运动，因而从一种简单、抽象的意义上讲，为把握系统的运动，只要获取其所有状态就可以了。

同样，控制一个系统的含义也是很广泛的。对于各种不同属性的系统，人们可以提出各种不同的控制目标 and 设计要求，利用合适的方法来完成它的设计。关于这些内容，我们将于第六章讨论。现在我们要探究的是一种最自然、最基本的情况。任何一个系统在不同时刻都有其特定的状态。它在现时刻的当前状态反映了它在当前时刻的全部信息。随着时间的流逝，它的状态按着其自身的规律在不断地变化。那么，作为一种最基本的控制要求，我们关心一个系统的当前状态是否可以经过一定时间后被转移到某种特定的希望状态。

上述所述的“了解系统”和“控制系统”分别对应于动态系统的能观性和能控性这两个方面。对于以状态空间法描述的系统，其输入和输出构成系统的外部变量，而其状态为内部变量。根据上面所述，我们可以将控制系统的能控性和能观性问题描述如下：

能控性问题 已知某系统的当前时刻及其状态，试问是否存在一个容许控制，使得系统在该控制的作用下于有限时间后到达某希望的特定状态？

能观性问题 已知某系统及其在某时间段上的输入和输出，试问可否依据这一时间段上的输入和输出决定出系统这一时间段上的状态？

简单地说，上述能控性问题即是研究系统的内部状态变量可否由控制输入完全影响的问题。如果系统的每一个状态变量的运动都可由输入来影响和控制，而由任意的始点达到

原点，那么就称该系统是能控的，或者更确切地说是状态能控的。能观性问题是研究系统的外部变量，即系统的输入和输出是否完全反映系统状态的问题。如果系统的所有状态变量的任意形式的运动均可由输出完全反映，则称系统是状态能观测的，简称为能观测。下面我们来研究几个具体系统的能控性和能观性问题。

例4.1.1 给定系统的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad -6]x$$

将其表为标量方程组的形式，有

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -5x_2 + 2u \\ y &= -6x_2 \end{aligned}$$

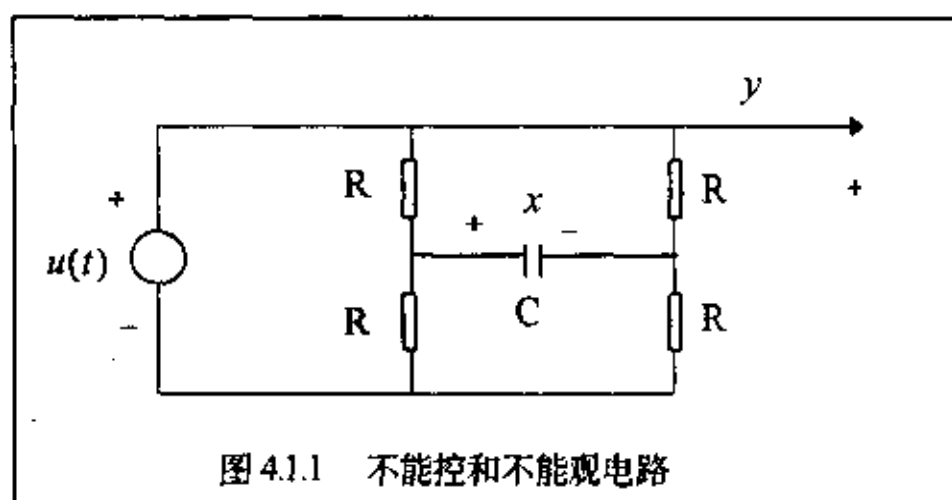


图 4.1.1 不能控和不能观电路

这表明：状态变量 x_1 和 x_2 都可通过选择输入 u 而由始点达到原点，因而系统为完全能控；但输出 y 只能反映状态变量 x_2 ，状态变量 x_1 和输出 y 既无直接联系也无间接联系，所以系统是不完全能观测的。

例4.1.2 考察图4.1.1所示的电路，系统的状态变量为电容端

电压 x ，输入为电压源 $u(t)$ ，输出为电压 y 。

从电路不难看出：如果初始状态 $x(t_0) = 0$ ，那么不管输入 $u(t)$ 是什么，对所有 $t \geq t_0$ 必恒有 $x(t) = 0$ ，即 x 不受 $u(t)$ 影响；另一方面，如果输入 $u(t) = 0$ ，则不论电容的初始端电压 $x(t_0)$ 是多少，对所有 $t \geq t_0$ 恒有 $y(t) = 0$ ，即 $x(t)$ 不能由 $y(t)$ 反映。这表明，此电路是状态不能控和状态不能观测的。

例4.1.3 考虑图4.1.2所示的两个电路。在图(a)的电路中，两个状态变量为两电容的端电压 x_1 和 x_2 ，输入 u 能够做到使 x_1 或者 x_2 转移到任意目标值，但不能将 x_1 和 x_2 分别转移到不同的任意目标值。如若初始状态 $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$ ，则不论将输入 u 取为何种形式，对所有 $t \geq t_0$ ，总只能是 $x_1(t)$ 等于 $x_2(t)$ ，即不可能做到使 $x_1(t) \neq x_2(t)$ 。这表明此电路不完全能控。在图(b)的电路中，如若取输入 $u(t) = 0$ ，那么当两个状态变量的初始状态 $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ 且为任意值时，必定有 $i = 0$ ，也即对所有 $t \geq t_0$ 总是有 $y(t) = 0$ 。这说明，此种情况下的电路状态运动是由输出不能反映的，所以此电路为不完全能观测。

4.1.2 能控性的定义

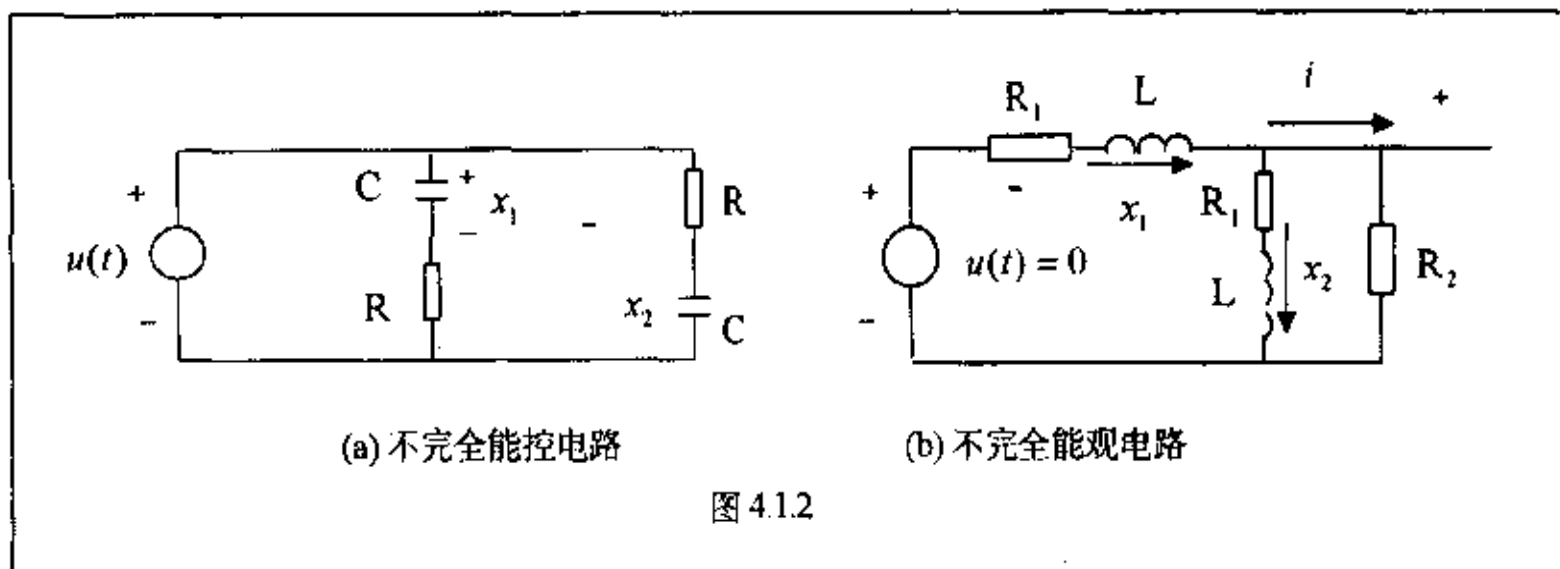


图 4.1.2

应当指出，上述对能控性和能观测性所作的直观说明，只是对这两个概念的直观的而不严密描述，而且也只能用来解释和判断非常直观和非常简单的系统的能控性和能观测性。为了揭示能控性和能观测性的本质属性，并用于分析和判断更为一般和较为复杂的系统，有待于对这两个概念建立严格的定义，并在此基础上来导出相应的判别准则和基本属性。

考虑线性时变系统的状态方程

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in J \quad (4.1.1)$$

其中， x 为 n 维状态向量， u 为 r 维输入向量， J 为时间定义区间， A 和 B 分别为 $n \times n$ 和 $n \times r$ 阶的元为 t 的分段连续函数的矩阵。下面我们从定义一个状态的能控开始，引入系统为完全能控和不完全能控的定义。

定义4.1.1 对于线性时变系统(4.1.1)，如果对取定初始时刻 $t_0 \in J$ 的一个非零初始状态 x_0 ，存在一时刻 $t_1 \in J$ ， $t_1 > t_0$ 和一个无约束的容许控制 $u(t)$ ， $t \in [t_0, t_1]$ ，使得系统在这个控制的作用下，系统由 x_0 出发的运动轨线经过时间 $t_1 - t_0$ 后由 x_0 转移到 $x(t_1) = 0$ ，则称此 x_0 是系统在 t_0 时刻的一个能控状态。

定义4.1.2 对于线性时变系统(4.1.1)，如果状态空间中的所有非零状态都是在 t_0 ($t_0 \in J$)时刻的能控状态，则称系统(4.1.1)在时刻 t_0 是完全能控的。如果对于任何 $t_0 \in [T_1, T_2]$ ，系统均是在 t_0 时刻为能控的，则称系统(4.1.1)在区间 $[T_1, T_2]$ 上是完全能控的。

定义4.1.3 对于线性时变系统(4.1.1)，取定初始时刻 $t_0 \in J$ ，如果状态空间中存在一个或一些非零状态在时刻 t_0 是不能控的，则称系统(4.1.1)在时刻 t_0 是不完全能控的。

下面我们对能控性的上述定义作几点说明：

说明4.1.1 定义中只要求在可找到的输入 u 的作用下，使 t_0 时刻的非零状态 x_0 在 J 上的一段有限时间内转移到状态空间的坐标系原点，而对于状态转移的轨迹并不加以限制和规定。这就是说，能控性是表征系统状态运动的一个定性特性。

说明4.1.2 定义中提到的所谓无约束的容许控制，无约束表示对输入的每个分量的幅值不加以限制，即可取为任意大到所要求的值，容许控制则表示输入的所有分量均是在 J 上平方可积的。

说明4.1.3 上述各定义中都是相对于 J 中的一个取定时刻 t_0 来定义的,这对于时变系统是完全必要的。如果所考虑的为线性定常系统,则其能控与否和 t_0 时刻的选取无关。

说明4.1.4 上述定义中都规定为由非零状态转移到零状态,如果将其变更为由零状态达到非零状态,则称这种情况为状态能达的。对于连续的线性定常系统,能控性和能达性是等价的。对于离散系统和时变系统,严格地说两者是不等价的。可以出现这样的情况,系统是不完全能控的,但却是完全能达的。

说明4.1.5 系统为不完全能控的情况是一种“奇异”的情况,系统中组成元件的参数值的很小的变动(这在实际情况中是完全可能的)都可使其成为完全能控。所以,对于一个实际的系统,系统为能控的概率几乎等于1。换句话说,如果随机地选取系统的系数矩阵 A 和 B 的元,那么使系统为完全能控的概率几乎等于1。例如,图4.1.1的电路,如果其各个电阻的参数值产生很小的变动而使电路的对称性被破坏,则此电路就由不能控变成了能控。

4.1.3 能观测性定义

能观测性表征系统的状态是否可由系统的输入和输出完全反映,所以应同时考虑系统的状态方程和输出方程

$$L: \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & x(t_0) = x_0, & t \in J \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases} \quad (4.1.2)$$

其中 $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $C(t)$ 和 $D(t)$ 分别为 $n \times n$ 、 $n \times r$ 、 $m \times n$ 和 $m \times r$ 的满足状态方程解的存在唯一性条件的时变矩阵。进一步,由上一章中的分析可知(4.1.2)的状态方程的解的表达式为

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (4.1.3)$$

其中 $\Phi(t, \tau)$ 为系统的状态转移矩阵。将式(4.1.3)代入(4.1.2)的输出方程,可得到输出响应的表达式为

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t) \quad (4.1.4)$$

在研究能观测性问题中,输出 y 和输入 u 都已假定为已知,只有内部变量即初始状态 x_0 是未知的。因此,若定义

$$\bar{y}(t) = y(t) - C(t)\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau - D(t)u(t) \quad (4.1.5)$$

则可将式(4.1.4)进而改写为

$$\bar{y}(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 \quad (4.1.6)$$

这表明,所谓能观测性即是研究 x_0 可否由 \bar{y} 来完全估计。由于 \bar{y} 和 x_0 的任意性,这又等价于研究 $u = 0$ 时由 y 来估计 x_0 的可能性,也即系统的零输入方程

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, & x(t_0) = x_0, & t_0, t \in J \\ y = C(t)x \end{cases} \quad (4.1.7)$$

的能观测性。因而下面我们只需从式(4.1.7)出发来给出系统能观测性的有关定义。

定义4.1.4 对于线性时变系统(4.1.7), 如果对取定初始时刻 $t_0 \in J$ 的一个非零初始状态 x_0 , 存在一个有限时刻 $t_1 \in J, t_1 > t_0$, 使得由区间 $[t_0, t_1]$ 上的系统输出 $y(t)$ 可以唯一地决定系统的初始状态 x_0 , 则称此 x_0 在时刻 t_0 为能观测的。

关于系统(4.1.7)的某初始状态 x_0 在时刻 t_0 为不能观测的定义, 我们有:

定义4.1.5 对于线性时变系统(4.1.7), 取定初始时刻 $t_0 \in J$ 及其一个非零初始状态 x_0 , 如果对于任何有限时刻 $t_1 \in J, t_1 > t_0$, 均有 $y(t) = 0, t \in [t_0, t_1]$, 则称此 x_0 在时刻 t_0 为不能观测的。

定义4.1.6 对于线性时变系统(4.1.7), 如果状态空间中的所有状态都是时刻 $t_0 (t_0 \in J)$ 的能观测状态, 则称系统(4.1.7)在时刻 t_0 是完全能观测的。如果对于任何 $t_0 \in [T_1, T_2]$, 系统均是在 t_0 时刻为能观测的, 则称系统(4.1.1)在区间 $[T_1, T_2]$ 上是完全能观测的。

定义4.1.7 对于线性时变系统(4.1.7), 取定初始时刻 $t_0 \in J$, 如果状态空间中存在一个或一些非零状态在时刻 t_0 是不能观测的, 则称系统(4.1.7)在时刻 t_0 是不完全能观测的。

对于上述定义也可像对能控性那样给出类似的解释。这里再特别提到一点, 即系统为不完全能观测的情况也只是一种“奇异”的情况, 如果随机地选取系统的系数矩阵 A 和 C 的元, 那么使系统为完全能观测的概率几乎等于1。

4.2 线性时变系统的能控性判据

前一节给出了线性系统能控性的定义。但如果直接从这个定义出发检验系统是否能控往往是比较困难的, 因此本节讨论能控性的判别准则。

4.2.1 Gram矩阵判据

首先给出一个一般性的判别定理。

定理4.2.1 系统(4.1.1)在 t_0 时刻能控的充分必要条件是存在某个有限时刻 $t_1 > t_0$, 使得矩阵

$$W_c(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_1, \tau) d\tau \quad (4.2.1)$$

是正定的, 这里 $\Phi(t, \tau)$ 是系统(4.1.1)的状态转移矩阵。

证明 充分性 假设存在 $t_1 > t_0$, 使得 $W_c(t_1, t_0) > 0$, 因而 $W_c(t_1, t_0)$ 是非奇异的。又设 x_0 是系统(4.1.1)在 t_0 时刻的任意初始状态, 定义

$$u(t) = -B^T(t) \Phi^T(t_1, t) W_c^{-1}(t_1, t_0) \Phi(t_1, t_0) x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.2.2)$$

另一方面, 由系统的状态方程的解的表达式有

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \quad (4.2.3)$$

将前面定义的控制输入 $u(\cdot)$ 代到这个解的表达式中, 即得 $x(t_1) = 0$ 。于是, 根据系统的能控性定义可知系统(4.1.1)在 t_0 时刻是完全能控的。

必要性 用反证法证明之。假设系统(4.1.1)是完全能控的，但不管 t_1 多么大， $W_c(t_1, t_0)$ 总是奇异的。下面我们由此导出矛盾。

从能控性的定义可知，存在某个时刻 $t_1^* > t_0$ ，使得对每个初始状态 x_0 ，都能找到一个定义在时间间隔 $[t_0, t_1^*]$ 上的容许控制，使得系统由 x_0 出发的运动轨线在这个控制作用下在 t_1^* 时刻达到零状态，即 $x(t_1^*) = 0$ 。依假设，对于这个 t_1^* ， $W_c(t_1^*, t_0)$ 是奇异的，于是有非零 n 维向量 z ，使得

$$z^T W_c(t_1^*, t_0) z = 0 \quad (4.2.4)$$

即

$$\int_{t_0}^{t_1^*} z^T \Phi(t_1^*, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_1^*, \tau) z d\tau = 0 \quad (4.2.5)$$

由此得出

$$z^T \Phi(t_1^*, \tau) B(\tau) \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t_1^* \quad (4.2.6)$$

其中，“ $\stackrel{\text{a.e.}}{=}$ ”表示几乎处处相等。

另一方面，由于系统(4.1.1)完全能控，因而对初始状态 $x_0 = -\Phi(t_0, t_1^*) z$ ，也能找到定义在时间间隔 $[t_0, t_1^*]$ 上的容许控制 $u_0(t)$ ，使得

$$0 = \Phi(t_1^*, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t_1^*} \Phi(t_1^*, \tau) B(\tau) u_0(\tau) d\tau \quad (4.2.7)$$

将所取的 x_0 代到上式，得

$$z = \int_{t_0}^{t_1^*} \Phi(t_1^*, \tau) B(\tau) u_0(\tau) d\tau \quad (4.2.8)$$

对上式两边左乘 z^T ，有

$$\|z\|^2 = \int_{t_0}^{t_1^*} z^T \Phi(t_1^*, \tau) B(\tau) u_0(\tau) d\tau = 0 \quad (4.2.9)$$

由此推出 $z = 0$ ，这与 z 为非零向量矛盾。这个矛盾表明 $W_c(t_1^*, t_0)$ 是非奇异的，从而是正定的。

△△△

这个定理说明判断一个线性系统的能控性问题，归结为判别矩阵 $W_c(t, t_0)$ 在某个时刻的正定性问题。因此，一个系统的概念与一个代数问题联系起来。通常把矩阵 $W_c(t, t_0)$ 叫做系统的能控性Gram矩阵，它由系统矩阵 $A(t)$ 和控制分布矩阵 $B(t)$ 决定。由此可见，系统的能控性是它本身所固有的性质，反映了系统的结构特性，而不依赖于具体的瞬时状态和外部的控制输入。

从上述证明中可见，如果存在某个时刻 t_1 使得 $W_c(t_1, t_0)$ 非奇异的话，那么控制函数

$$u_0(t) = -B^T(t) \Phi^T(t_1, t) W_c^{-1}(t_1, t_0) \Phi(t_1, t_0) x_0 \quad (4.2.10)$$

能把系统(4.1.1)的初始状态 $x(t_0) = x_0$ 控制到 $x(t_1) = 0$ 。其实，能够实现这样的状态转移的

控制函数并非唯一，但是可以证明由(4.2.10)定义的容许控制是实现这种状态转移的所有控制函数中所消耗的“能量”最小的一个，这一点可由下述命题确切表出。

命题4.2.1 令 $u(t)$ 是任意一个能把系统(4.1.1)的初始状态 $x(t_0) = x_0$ 控制到 $x(t_1) = 0$ 的容许控制， $u_0(t)$ 由式(4.2.10)给出，则

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2 dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \|u_0(t)\|^2 dt = x_0^T \Phi^T(t_1, t_0) W_c^{-1}(t_1, t_0) \Phi(t_1, t_0) x_0 \quad (4.2.11)$$

证明 事实上，已经知道由(4.2.10)定义的容许控制将 x_0 转移到 $x(t_1) = 0$ ，而 $u(t)$ 是另一个把 x_0 转移到零状态的容许控制，因此有

$$0 = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u_0(\tau)d\tau \quad (4.2.12)$$

及

$$0 = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (4.2.13)$$

式(4.2.13)两边分别减去式(4.2.12)两边，得

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)[u(\tau) - u_0(\tau)]d\tau = 0 \quad (4.2.14)$$

在式(4.2.14)两边左乘 $x_0^T \Phi^T(t_1, t_0)W_c^{-1}(t_1, t_0)$ ，并利用等式(4.2.10)，得

$$\int_{t_0}^{t_1} u_0^T(\tau)[u(\tau) - u_0(\tau)]d\tau = 0 \quad (4.2.15)$$

进而得出

$$\int_{t_0}^{t_1} u_0^T(\tau)u(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \|u_0(\tau)\|^2 d\tau \quad (4.2.16)$$

由于

$$0 \leq \int_{t_0}^{t_1} \|u(\tau) - u_0(\tau)\|^2 d\tau = \int_{t_0}^{t_1} [\|u(\tau)\|^2 - 2u_0^T(\tau)u(\tau) + \|u_0(\tau)\|^2] d\tau \quad (4.2.17)$$

将(4.2.16)代入(4.2.17)，得

$$0 \leq \int_{t_0}^{t_1} [\|u(\tau)\|^2 - \|u_0(\tau)\|^2] d\tau \quad (4.2.18)$$

或

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq \int_{t_0}^{t_1} \|u_0(\tau)\|^2 d\tau \quad (4.2.19)$$

这就是所希望的不等式(4.2.11)。

△△△

4.2.2 基于状态转移矩阵的判据

通过检查能控性矩阵 $W_c(t, t_0)$ 的正定性来判断系统的能控性不是一件容易的事情，即便是对很简单的系统也是如此。读者可回想4.1节中给出的三个例子，实际上就是从计算系统的能控性矩阵出发来定义所希望的容许控制的。然而就是对这样一些简单系统，计算能控性矩阵也要经过复杂的积分运算，更何况是对一些比较复杂的系统，尤其是对时变系统，要想计算 $W_c(t, t_0)$ 的解析表达式几乎是不可能的。因此，定理4.2.1往往仅有理论意

义, 实际上用它作为判别系统能控性的准则并不方便, 因而我们需要寻找其它的判别准则。

定理4.2.2 假设 $A(t)$ 和 $B(t)$ 都是 t 的连续函数矩阵, 则系统(4.1.1)在 t_0 时刻能控的充分必要条件是存在某个有限时刻 $t_1 > t_0$, 使得矩阵 $\Phi(t_1, \tau)B(\tau)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上行线性独立, 即对任意 n 维非零向量 z , 都有

$$z^T \Phi(t_1, \tau)B(\tau) \neq 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t_1 \quad (4.2.20)$$

证明 充分性 假设式(4.2.20)成立, 但是系统(4.1.1)在 t_0 时刻不能控。那么由定理4.2.1可知, 对任意 $t_1 > t_0$, $W_c(t_1, t_0)$ 都是奇异的。因此, 对每个 $t_1 > t_0$, 总存在非零向量 z , 使得

$$z^T W_c(t_1, t_0)z = 0 \quad (4.2.21)$$

即

$$\int_{t_0}^{t_1} z^T \Phi(t_1, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_1, \tau)z d\tau = 0 \quad (4.2.22)$$

由于 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的诸元都是连续的, 因此必有

$$z^T \Phi(t_1, \tau)B(\tau) \equiv 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t_1 \quad (4.2.23)$$

而这与式(4.2.20)矛盾, 这个矛盾表明系统(4.1.1)在 t_0 时刻是能控的。

必要性 现在假设系统(4.1.1)在 t_0 时刻是能控的, 但是对任意时刻 $t_1 > t_0$, $\Phi(t_1, \tau)B(\tau)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上总是线性相关的, 即式(4.2.20)对任意 $t_1 > t_0$ 都不成立, 那么无论 t_1 多么大, 总有非零向量 z 使得

$$z^T W_c(t_1, t_0)z = 0 \quad (4.2.24)$$

这说明 $W_c(t_1, t_0)$ 是奇异的。由定理4.2.1知, 这与系统(4.1.1)在 t_0 时刻能控矛盾。这一矛盾表明至少存在某个 $t_1 > t_0$ 使得(4.2.20)成立。从而必要性得证。

△△△

4.2.3 基于系统参数矩阵的判据

对于充分光滑的系统, 还可以给出一个检验系统能控性的充分条件。

定理4.2.3 假设系统(4.1.1)中的 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的每个元分别是 $n-2$ 和 $n-1$ 次连续可微函数, 记

$$B_1(t) = B(t) \quad (4.2.25)$$

$$B_i(t) = -A(t)B_{i-1}(t) + \dot{B}_{i-1}(t), \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (4.2.26)$$

令

$$Q_c(t) = [B_1(t) \quad B_2(t) \quad \dots \quad B_n(t)] \quad (4.2.27)$$

如果存在某个时刻 $t_1 > t_0$, 使得 $\text{rank} Q_c(t_1) = n$, 那么系统(4.1.1)在 t_0 时刻能控。

证明 假设系统(4.1.1)在 t_0 时刻不能控, 那么由定理4.2.2可知, 对任意 $t_1 > t_0$, 总存在相应的非零向量 z , 使得

$$z^T \Phi(t_1, t)B(t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.2.28)$$

对式(4.2.28)两边进行微分, 得出

$$z^T \frac{d}{dt} (\Phi(t_1, t)B(t)) = z^T (\dot{\Phi}(t_1, t)B(t) + \Phi(t_1, t)\dot{B}(t)) = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.2.29)$$

由状态转移矩阵的性质有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(t_1, t) &= -\Phi(t_1, t)\dot{\Phi}(t, t_1)\Phi(t_1, t) = \\ &= -\Phi(t_1, t)A(t)\Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t) = -\Phi(t_1, t)A(t) \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

将等式(4.2.30)代入(4.2.29), 得

$$z^T \Phi(t_1, t) [-A(t)B(t) + \dot{B}(t)] = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.2.31)$$

即

$$z^T \Phi(t_1, t) B(t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.2.32)$$

对上式继续进行微分, 并利用式(4.2.26)推知, 对 $i=1, 2, \dots, n$ 都有

$$z^T \Phi(t_1, t) B_i(t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.2.33)$$

在式(4.2.33)中令 $t = t_1$, 得

$$z^T B_i(t_1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

从而有 $z^T Q_c(t_1) = 0$, 即 $\text{rank } Q_c(t_1) < n$. 由 t_1 的任意性导致与定理的假设矛盾, 这个矛盾表明系统(4.1.1)在 t_0 时刻是能控的.

△△△

4.3 线性定常系统的能控性判据

4.3.1 定常系统能控性的特殊性

当矩阵 $A(t)$ 和 $B(t)$ 为定常时, 系统(4.1.1)化为

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \quad (4.3.1)$$

引理4.3.1 设定常线性系统(4.3.1)在某 $t_0 \in [0, \infty)$ 时刻完全能控, 则它必在 $[0, \infty)$ 上完全能控.

证明 由于系统(4.3.1)是定常的, 因此它的状态转移矩阵为 $e^{A(t-\tau)}$. 因为它在 t_0 时刻完全能控, 所以存在某个 $t_1 > t_0$, 使得矩阵

$$W_c(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} BB^T e^{A^T(t_1-\tau)} d\tau \quad (4.3.2)$$

是正定的. 现在令 $\sigma = \tau + t_1^*$, $t_1^* \geq -t_0$, 于是对 $W_c(t_1, t_0)$ 的被积函数作变量替换, 得

$$W_c(t_1, t_0) = \int_{t_0+t_1^*}^{t_1+t_1^*} e^{A(t_1+t_1^*-\sigma)} BB^T e^{A^T(t_1+t_1^*-\sigma)} d\sigma = W_c(t_1+t_1^*, t_0+t_1^*) > 0$$

由 t_1^* 的任意性并由定理4.2.1可知, 系统(4.3.1)在任意时刻 $t \geq 0$ 都是完全能控的, 因此它在 $[0, \infty)$ 上完全能控.

△△△

这个引理说明，对于定常线性系统，只要它在某个时刻完全能控，则它必定在整个时间轴上完全能控。因此，对定常系统只说它能控或不能控就够了，时间限制可以去掉。如果定常线性系统能控，也可以说 $[A \ B]$ 为能控对，或者说 $[A \ B]$ 能控。

4.3.2 能控性矩阵判据

关于定常线性系统的能控性有更简单的判别准则。

定理4.3.1 定常线性系统(4.3.1)能控的充分必要条件是

$$\text{rank}[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] = n \quad (4.3.3)$$

证明 充分性是定理4.2.3的直接推论，因此只需证必要性便可。由于(4.3.1)能控，因此它在 $t_0 = 0$ 时刻能控。于是对任意初始状态 x_0 ，都有 $t_1 > 0$ 以及定义在 $[0 \ t_1]$ 上的容许控制 $u(\cdot)$ ，使得

$$0 = e^{At_1} x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (4.3.4)$$

或者

$$x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (4.3.5)$$

由3.4节 e^{At} 的求取方法III知，有连续函数 $\rho_k(\tau)$ ，使得

$n-1$

$$\text{rank}[B \ AB \ \cdots \ A^{k-1}B] = n \quad (4.3.11)$$

推论4.3.2 设定常线性系统(4.3.1)是单输入的, 即 $(A, B, C) = (A, b, C)$, 那么它能控的充分必要条件是

$$\det[b \ Ab \ \cdots \ A^{n-1}b] \neq 0 \quad (4.3.12)$$

4.3.3 PBH判据

定理4.3.2 定常线性系统(4.3.1)能控的充分必要条件是, 对每个 $\lambda \in \sigma(A)$ 都有

$$\text{rank}[A - \lambda I_n \ B] = n \quad (4.3.13)$$

其中 $\sigma(A)$ 表示 A 的特征值集合。

证明 必要性 设系统(4.3.1)能控, 但存在某个 $\lambda_0 \in \sigma(A)$, 使得

$$\text{rank}[A - \lambda_0 I_n \ B] < n \quad (4.3.14)$$

从而必有非零向量 z (它可能是复的), 使得

$$z^T[A - \lambda_0 I_n \ B] = 0 \quad (4.3.15)$$

于是有

$$z^T(A - \lambda_0 I_n) = 0 \quad (4.3.16)$$

$$z^T B = 0 \quad (4.3.17)$$

这说明 z^T 是 A 的相应于特征值 λ_0 的右特征向量, 且与矩阵 B 的每个列向量正交, 从而有

$$z^T A^k B = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.3.18)$$

于是

$$z^T[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] = 0 \quad (4.3.19)$$

因为 $z^T \neq 0$, 所以

$$\text{rank}[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] < n \quad (4.3.20)$$

而这与系统能控矛盾。这个矛盾表明(4.3.13)对一切 $\lambda \in \sigma(A)$ 成立。

充分性 假设式(4.3.13)成立, 而系统(4.3.1)不能控, 那么必存在非零向量 z , 使得

$$z^T[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] = 0 \quad (4.3.21)$$

即

$$z^T A^k B = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.3.22)$$

显然, $z^T A^k (k = 1, 2, \dots, n-1)$ 都是 B 的左零空间中的元。于是可以断定, 存在一个最小的整数 k , $0 \leq k < n-1$, 使得向量 $z^T, z^T A, \dots, z^T A^{k-1}$ 线性独立。这时有不全为零的实常数 a_0, a_1, \dots, a_{k-1} , 使得

$$z^T A^k + a_{k-1} z^T A^{k-1} + \cdots + a_1 z^T A + a_0 z^T = 0 \quad (4.3.23)$$

这说明

$$f(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_0 \lambda + a_0 \quad (4.3.24)$$

是 z^T 相对 A 的极小多项式。令 λ_0 是 $f(\lambda)$ 的一个零点, 则由命题1.2.3知, λ_0 是 A 的一个特

征值, 这是因为 $f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式的一个因子, 于是重新写 $f(\lambda)$ 为

$$f(\lambda) = (\lambda^{k-1} + \beta_{k-2}\lambda^{k-2} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0)(\lambda - \lambda_0) \quad (4.3.25)$$

这里 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-2}$ 是 $k-1$ 个复常数, 于是有

$$z^T f(A) = z^T (A^{k-1} + \beta_{k-2}A^{k-2} + \dots + \beta_1A + \beta_0I_n)(A - \lambda_0I_n) = 0 \quad (4.3.26)$$

令

$$\psi^T = z^T (A^{k-1} + \beta_{k-2}A^{k-2} + \dots + \beta_1A + \beta_0I_n) \quad (4.3.27)$$

由命题1.2.3知, $\psi^T \neq 0$, 且 ψ^T 是 A 的相应于特征值 λ_0 的左特征向量. 从而由式(4.3.21)和式(4.3.26)可得出 $\psi^T B = 0$ 及 $\psi^T (A - \lambda_0I) = 0$, 所以必有

$$\text{rank}[A - \lambda_0I_n \quad B] < n \quad (4.3.28)$$

这与假设(4.3.13)矛盾, 这个矛盾表明系统(4.3.1)是能控的.

△△△

由该定理可得下述明显推论.

推论4.3.3 定常线性系统(4.3.1)能控的充分必要条件是它没有输入解耦零点.

从定理4.3.2还可以发现, 定常线性系统(4.3.1)能控的充分必要条件是, 如果对每个 $\lambda \in \sigma(A)$, 若有

$$z^T (A - \lambda I_n) = 0 \quad (4.3.29)$$

$$z^T B = 0 \quad (4.3.30)$$

则必有 $z^T = 0$. 这就是说, 下述推论成立.

推论4.3.4 系统(4.3.1)能控的充分必要条件是, 对于系统矩阵 A 的每个特征向量 z , 总有

$$z^T B \neq 0 \quad (4.3.31)$$

另外, 再注意到 $\text{rank}[A - \lambda_0I_n] < n$ 的充要条件是 $\lambda_0 \in \sigma(A)$, 由定理4.3.2还可以得到下述推论:

推论4.3.5 系统(4.3.1)能控的充分必要条件是

$$\text{rank}[A - \lambda I_n \quad B] = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (4.3.32)$$

按照系统的能控性, 可以对定常线性系统的系统矩阵 A 的特征值(或者说系统的极点)进行分类.

定义4.3.1 如果 $\lambda_0 \in \sigma(A)$, 并且满足

$$\text{rank}[A - \lambda_0I_n \quad B] < n \quad (4.3.33)$$

则 λ_0 叫做系统(4.3.1)的一个不能控振型.

显然, 系统的不能控振型必是系统的极点, 同时又是系统的输入解耦零点.

定理4.3.1和定理4.3.2都是定常线性系统能控性的代数判据. 今后我们称矩阵

$$Q_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (4.3.34)$$

为定常线性系统的能控性矩阵. 它是一个 $n \times nr$ 阶矩阵, 在线性系统理论中起着特别重要的作用.

4.4 对偶原理与能观性判据

和能控性一样，仅仅从定义出发判别系统的能观测性也是不方便的，需要寻找比较方便的判别准则，这就是这一节所要讨论的主要问题。

4.4.1 Gram矩阵判据

对于能观测性判别，首先可以给出如下的定理。

定理4.4.1 已知线性系统(4.1.7)，它在 t_0 时刻完全能观测的充分必要条件是，存在某个有限时刻 $t_1 > t_0$ ，使得矩阵

$$W_0(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \quad (4.4.1)$$

是正定的。

证明 充分性 假设存在某个有限时刻 $t_1 > t_0$ ，使得矩阵 $W_0(t_1, t_0)$ 是正定的，因而它是非奇异的。若任取 t_0 时刻系统的初始状态为 $x(t_0) = x_0$ ，那么，求解系统的状态方程得出

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x_0 \quad (4.4.2)$$

将式(4.4.2)代入系统的输出方程得由 x_0 产生的输出响应为

$$y(t) = C(t) \Phi(t, t_0) x_0 \quad (4.4.3)$$

然后，在式(4.4.3)两边同时左乘 $\Phi^T(t, t_0) C^T(t)$ ，再从 t_0 到 t_1 对 t 进行积分，得出

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) y(t) dt = W_0(t_1, t_0) x_0 \quad (4.4.4)$$

由于矩阵 $W_0(t_1, t_0)$ 是非奇异的，故由上式唯一决定 x_0 为

$$x_0 = W_0^{-1}(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) y(t) dt \quad (4.4.5)$$

因此由定义可知，系统在 t_0 时刻完全能观测。

必要性 假设系统(4.1.7)在 t_0 时刻完全能观测。和充分性的证明一样，对任意 $t_1 > t_0$ 都有

$$W_0(t_1, t_0) x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) y(t) dt \quad (4.4.6)$$

其中， x_0 是系统在 t_0 时刻的任意初始状态。假设对任意 $t_1 > t_0$ ， $W_0(t_1, t_0)$ 都是奇异的，那么由代数方程(4.4.6)可知，对任意固定的 $t_1 > t_0$ ，利用时间间隔 $[t_0, t_1]$ 上的量测 $y(t)$ 都不能唯一决定系统在 t_0 时刻的初始状态 x_0 ，这与系统(4.1.7)在 t_0 时刻完全能观测矛盾。这个矛盾表明，至少存在某个时刻 t_1 ，使得 $W_0(t_1, t_0)$ 是非奇异的，因而它是正定的。

△△△

通常，将矩阵 $W_0(t_1, t_0)$ 叫做系统(4.1.7)的能观测性Gram矩阵，它是由系统矩阵 $A(t)$ 和输出矩阵 $C(t)$ 决定的。因此说，系统的能观测性也是系统的一种结构性质，它与系统的具

体输入和输出无关。同时还可以看出，只要系统在 t_0 时刻是完全能观测的，利用系统的能观测性矩阵就可以决定系统在 t_0 时刻的初始状态，其表达式同式(4.4.5)。

4.4.2 对偶原理

下面我们将利用定理4.4.1来讨论线性系统的能控性和能观性之间的关系。

从定理4.4.1知道，检验系统的能观测性的问题归结为检验能观测性矩阵 $W_0(t_1, t_0)$ 的正定性问题，即把一个系统理论问题化成了一个纯代数问题，这一点也完全和能控性一样。另外，从系统的能控性矩阵 $W_c(t_1, t_0)$ 和能观测性矩阵 $W_0(t_1, t_0)$ 的结构来看，它们在形式上有某些相似之处，因此，系统的能控性和能观测性之间应该有一些联系，这种联系就是对偶原理所揭示的。对偶原理和能控性、能观测性的概念是卡尔曼(R. E. Kalman)发现的。

为了讨论对偶原理，首先引入系统(4.1.2)的对偶系统

$$L^*: \begin{cases} \dot{x}^*(t) = -A^T(t)x^*(t) + C^T(t)v(t) \\ z(t) = B^T(t)x^*(t) \end{cases} \quad (4.4.7)$$

其中： $A(t)$ 、 $B(t)$ 和 $C(t)$ 分别为系统 L 的系统矩阵、控制分布矩阵和量测矩阵； $x^*(t)$ 是对偶系统 L^* 的 n 维状态向量；也叫做系统 L 的状态向量 $x(t)$ 的协状态； $v(t)$ 是 m 维控制输入向量； $z(t)$ 是 n 维量测输出向量。

为得出对偶原理，我们先来指出相互对偶的系统之间的联系。

引理4.4.1 定常线性系统 L 的状态转移矩阵和它的对偶系统 L^* 的状态转移矩阵是互为转置逆的关系。

证明 记线性系统 L 的状态转移矩阵为 $\Phi(t, t_0)$ ，它的对偶系统 L^* 的状态转移矩阵为 $\Psi(t, t_0)$ ，那么依定义有

$$\dot{\Psi}(t, t_0) = -A^T(t)\Psi(t, t_0) \quad (4.4.8)$$

$$\Psi(t_0, t_0) = I_n \quad (4.4.9)$$

由于

$$\Psi^T(t_0, t)\Psi^T(t, t_0) = I_n \quad (4.4.10)$$

因此

$$\frac{d}{dt}(\Psi^T(t_0, t)\Psi^T(t, t_0)) = 0 \quad (4.4.11)$$

于是

$$\dot{\Psi}^T(t_0, t)\Psi^T(t, t_0) + \Psi^T(t_0, t)\dot{\Psi}^T(t, t_0) = 0 \quad (4.4.12)$$

或者

$$\dot{\Psi}^T(t_0, t) = -\Psi^T(t_0, t)\dot{\Psi}^T(t, t_0) \cdot \Psi^T(t_0, t) \quad (4.4.13)$$

将等式(4.4.8)代入等式(4.4.13)的右边，得

$$\dot{\Psi}^T(t_0, t) = A(t)\Psi^T(t_0, t) \quad (4.4.14)$$

且显然

$$\Psi^T(t_0, t_0) = I_n \quad (4.4.15)$$

根据式(4.4.14)、(4.4.15)和状态转移矩阵的定义以及常微分方程解的唯一性定理可知

$$\Psi^T(t_0, t) = \Phi(t, t_0) \quad (4.4.16)$$

此即所证之结论。

△△△

基于上述引理，我们现在可以证明线性系统的下述对偶原理。

定理4.4.2 [对偶原理] 系统 L 在 t_0 时刻完全能控的充分必要条件是它的对偶系统 L^* 在 t_0 时刻完全能观测；系统 L 在 t_0 时刻完全能观测的充分必要条件是它的对偶系统 L^* 在 t_0 时刻完全能控。

证明 根据定义和引理4.4.1，系统 L 的能控性矩阵为

$$\begin{aligned} W_c(t_1, t_0) &= \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_1, \tau) d\tau = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \Psi^T(\tau, t_1) B(\tau) B^T(\tau) \Psi(\tau, t_1) d\tau = \Psi^T(t_0, t_1) W_o^*(t_1, t_0) \Psi(t_0, t_1) \end{aligned}$$

这里， $W_o^*(t_1, t_0)$ 是系统 L^* 的能观测性矩阵。因为矩阵 $\Psi(t_0, t_1)$ 是非奇异的，所以矩阵 $W_c(t_1, t_0)$ 和 $W_o^*(t_1, t_0)$ 的正定性是等价的。因此，系统 L 在 t_0 时刻完全能控的充分必要条件是它的对偶系统 L^* 在 t_0 时刻完全能观测。

同样可以证明，系统 L 在 t_0 时刻完全能观测的充分必要条件是它的对偶系统 L^* 在 t_0 时刻完全能控。

△△△

4.4.3 能观性判据

利用对偶原理和定理4.2.2可以得到下述关于能观性判定的状态转移矩阵判据。

定理4.4.2 已知系统 L ，假设 $A(t)$ 和 $C(t)$ 的诸元均为连续的，则其在时刻 t_0 能观的充分必要条件是，存在某个有限时刻 t_1 ，使得矩阵 $C(\tau)\Phi(\tau, t_1)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上列线性独立，即对任意的非零向量 z ，有

$$C(\tau)\Phi(\tau, t_1)z \neq 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t_1 \quad (4.4.17)$$

利用对偶原理和定理4.2.2 对右半上述的系统很容易得到下述的关于系统 L 能观测的

如果存在某个时刻 $t_1 > t_0$, 使得 $\text{rank } Q_0(t_1) = n$, 那么系统 L 在 t_0 时刻是完全能观测的。

和能控性的情形一样, 对于定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.4.20)$$

如果系统在某个时刻完全能观测, 则它必在 $[0, \infty)$ 上也是完全能观测的, 所以就不用再强调“在 t_0 时刻”系统是否为完全能观测了。

定理4.4.4 定常线性系统(4.4.20)能观测的充分必要条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (4.4.21)$$

该定理和定理4.3.1是对偶的, 通过对偶原理不难得到它的证明, 请读者补证。通常称矩阵

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.4.22)$$

为定常线性系统(4.4.20)的能观测性矩阵。

推论4.4.1 已知定常线性系统(4.4.20), 如果 A 的极小多项式是 k 次的, 那么系统完全能观测的充分必要条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} = n \quad (4.4.23)$$

推论4.4.2 如果定常线性系统(4.4.20)是单输出的, 即 $C = c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, 那么它完全能观测的充分必要条件是

$$\det \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (4.4.24)$$

下面的定理和定理4.3.2是对偶的, 称之为能观测判定的PBH判据。

定理4.4.5 定常线性系统(4.4.20)完全能观测的充分必要条件是, 对每个 $\lambda \in \sigma(A)$ 都有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I_n \\ C \end{bmatrix} = n \quad (4.4.25)$$

证明 由对偶原理可知, 系统(4.4.20)完全能观测的充分必要条件是它的对偶系统

绪 论

0.1 现代控制理论概述

线性系统理论是现代控制理论的一个重要组成部分，因此，在了解线性系统理论之前，了解一下现代控制理论，弄清楚线性系统理论在现代控制理论中的位置与地位是非常必要的。

控制理论包括古典控制理论和现代控制理论两大部分。

0.1.1 从古典控制理论到现代控制理论

古典控制理论的起源可以追溯到本世纪20年代。在20-40年代之间，曾涌现出许多古典控制理论的先驱，如Minorsky、Nyquist、Hagen、Bode和Wiener等。他们的工作^[1]为古典控制理论奠定了基础，同时促进了二次大战中的许多武器和通信自动化系统的研制工作。大战后人们更多地总结了武器研制和设计方面的实践经验，陆续出版了古典控制理论方面的一些古典著作^[2-4]，建立了较为系统的伺服理论。这对战后的许多实际自动控制工程起到了良好的指导作用，也为人类在较短的时间征服宇宙空间作出了贡献。二次大战后到50年代中期，控制理论又得到了新的发展，添加了根轨迹法、非线性系统的谐波近似法(描述函数法)、采样控制系统、自寻最优控制和部分最优控制、多变量系统、系统灵敏度分析和动态系统测试等新内容。到60年代初期，出现了划时代意义的状态空间方法、极大值原理和Kalman滤波技术以及Bellman动态规划。至此古典控制理论的发展与现代控制理论接轨。

概括性地讲，古典控制理论是具有下述特点的一门科学：

- ①以单变量线性定常系统为主要研究对象；
- ②以频率法作为研究控制系统动态特性的主要方法；
- ③以各种图表，如Nichols图、Bode图、Nyquist曲线、根轨迹Roth表等作为系统分析和综合的主要工具。

在特定输入下研究系统输出的运动规律称为系统的运动分析，而按一定动态性能要求，如稳定性、误差精度和各种动态指标——飞升时间、带宽、超调量和误差系数等，来改变这种运动规律，称为系统综合。值得指出的是，在古典控制理论的发展过程中，开始和后来都曾用过时域方法，如微分方程和差分方程描述等，但频率法却是主导的。同样，古典控制理论发展的后期，也曾研究过多变量系统和非线性系统，但从整体上看，它是以研究单变量线性定常系统为主的。

0.1.2 现代控制理论的形成与特点

现代控制理论起源于60年代，它以下述三个方面作为其形成的标志：

- ① 用于系统的整个描述、分析和设计过程的状态空间方法;
- ② 最优控制中的Pontriagin极大值原理和Bellman动态规划;
- ③ 随机系统理论中的Kalman滤波技术。

现代控制理论是在古典控制理论的基础上发展起来的。但不同于古典控制理论,它具有下述几方面的特点:

① 以多变量线性系统和非线性系统为研究对象。近代工业过程和航空、航天等许多领域中的实际系统都是非常复杂的,其中包含有多变量耦合、时变参数和非线性等等。这些复杂的系统都在现代控制理论的研究之列。事实上,作为现代控制理论形成标志之一、最优控制理论中的Pontriagin极大值原理,即是针对一般的非线性系统提出的。

② 以时域法,特别是以状态空间方法为主要研究方法。不同于古典控制理论,现代控制理论是在时间域上建立系统模型的状态空间描述,并在此基础上进行系统的各种定量和定性分析以及希望的控制规律设计。

③ 以现代数学为主要分析手段。古典控制理论以复变函数理论和拉氏变换为数学工具,而现代控制理论则涉及到现代数学的许多领域。研究对象从单变量线性定常系统过渡到多变量系统和非线性系统,必然对分析手段提出了更高的要求;系统描述从频域转为时域,为现代数学的介入提供了方便条件。现代控制理论中应用较多的数学分支是矩阵代数和微分方程理论。然而在现代控制理论已经得到了极大发展的今天,许多新的分支不断涌现。早在60年代看来和控制理论根本无缘的许多数学理论现已被用于现代控制理论新分支的研究之中。李代数理论用于离散事件系统,微分几何用于非线性系统都是这方面的例子。

④ 以计算机为主要实现工具。我们这里所讲的“实现”,并不是指将一个系统付诸于实际运行,而是指其分析和设计过程的实现。在古典控制理论中,由于研究对象简单,人们利用一些图、表通过手工即可完成分析和设计。但在现代控制理论中,单靠手工计算一般是无法完成较为复杂的研究对象的分析和设计的,而必须要利用计算机来实现分析和设计中的各种计算。目前,以计算机为主要工具,以现代控制理论为依据的一个现代控制理论分支——控制系统计算机辅助设计(CSCAD)已经日趋完善,并在实际中得到了重要的应用。计算机用于控制系统设计除在计算上显示了其极大的优越性外,还有许多其它的优点。如在计算机上很容易修改系统的参数,因而可对各种控制方案及不同的参数组合进行充分地比较,从中选出较好的控制方案。另外借助于计算机的图形显示功能,可对控制系统的动态特性获得更加深入的直观的理解。

尽管古典控制理论和现代理论各有其特点,但二者却是密切相关的。对此我们谈及下述两个方面:

① 任何事物都处于不断的发展变化之中,古典和现代控制理论从产生到发展至今天,已经在许多方面相互渗透。如以英国学者Rosenbrock学派的多变量频域理论^[1]和控制系统中的多项式矩阵方法^[2]都属于两者交叉的内容。

② 即使在古典控制理论的约定研究范围之内,也即单变量线性定常系统的分析和设计之中,尽管古典方法和现代方法从模型描述到设计方法各不相同,但二者的设计结果可在Laplace变换及其逆变换下相互转化。从这种意义上讲,二者在单变量系统的分析和设计上是统一的。

0.1.3 现代控制理论的研究内容与分支

控制理论的研究对象是系统，而所谓的控制是指系统的控制。从这一角度来看，现代控制理论的研究内容和分支在很大程度上要取决于系统的范畴。

系统的概念及其含义是比较广泛的。系统是由相互关联和相互作用的若干部分按一定规律组合而成的具有特定功能的一个整体。系统可具有完全不同的属性，如工程系统、生物系统、经济系统、社会系统等。但是，在系统理论中，常常抽去具体系统的物理或社会含义而把它抽象化为一个一般意义下的系统加以研究，这种处理方法有助于揭示系统的一般特性。系统的概念具有相对性，系统的每个组成部分也可以是一个系统，而系统自身又可以是一个更大系统的组成部分。系统最基本的特征是它的整体性，系统的行为和性能是由其整体所决定的，系统可以具有其组成部分所没有的功能。有着相同组成部分但它们的关联和作用不同的两个系统可呈现出截然不同的行为和功能。

系统有静态系统和动态系统之分。动态系统又称之为动力学系统，其含义是含有动力学行为。在模型描述上表现为含有系统变量的导数项或差分项。也即系统模型可用微分或

论的系统类型产生了一系列分支,如线性系统理论、非线性系统理论、分布参数系统理论,随机系统理论(或Kalman滤波与随机最优控制),广义系统理论、大系统理论等等。另外涉及到不确定系统,还有系统辨识和自适应控制、鲁棒控制理论等一些分支。

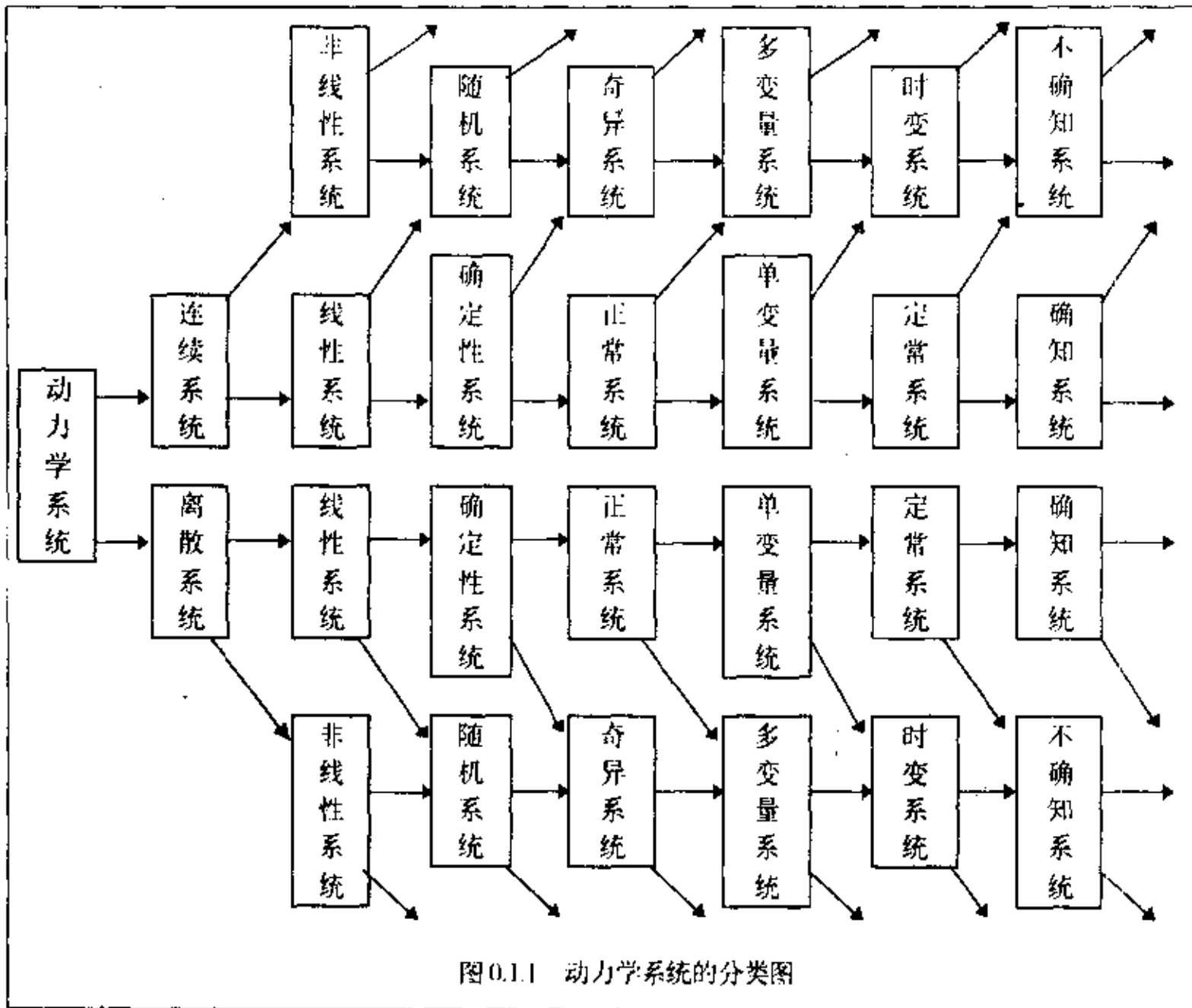


图0.1.1 动力学系统的分类图

0.2 线性系统理论概述

作为现代控制理论中最基本、最成熟的分支之一——线性系统理论,具有其基本的重要性。它一方面在过程控制、航空、航天等领域的应用中起到了重要作用,另一方面也为现代控制理论的其它分支提供了基础。在进入本书对于线性系统理论的系统探讨之前,我们先对其作一个概括性的介绍,以使读者能先对它在整体上有个端貌性的认识。但值得首先说明的是,按照线性系统的定义,广义线性系统和随机线性系统等一些分支均属于线性系统理论范畴,然而按习惯,通常所指的线性系统理论仅涉及到确定性的正常线性系统,而广义线性系统和随机线性系统理论则视为现代控制论的另外的独立分支。

0.2.1 线性系统理论的研究对象

顾名思义,线性系统理论的研究对象为线性动态系统,简称线性系统。它是实际系统

的一类理想化了的模型。当描述动态系统的数学方程具有线性属性时，称相应的系统为线性系统。线性系统是一类最简单且研究得最多的动态系统。线性系统的一个基本特征是满足叠加原理，即若表示系统的数学描述为 L ，那么对任意两个输入变量 u_1 和 u_2 以及任意两个有限常数 c_1 和 c_2 ，必有

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L(u_1) + c_2 L(u_2)$$

但是，应当指出，上述叠加原理的关系式通常只适用于有限项和，如果不附加假设就不能推广到无穷项和。线性系统满足叠加原理这一属性，导致了其在数学处理上的简便性，使得可以采用比较成熟的数学工具，如数学变换(傅里叶变换、拉普拉斯变换等)和线性代数，来研究它的运动和性质。

严格地说，一切实际的系统都是非线性的，真正的线性系统在现实世界中是不存在的。但是，很大一部分实际系统，它们的某些主要关系特性，在一定的范围内，可以充分地用线性系统来近似地代替。并且，实际系统与理想化了的线性系统间的差别，对于所研究的问题而言，已经小到无关紧要的程度而可忽略不计。因此，从这个意义上说，线性系统或者可线性化的系统又是大量存在的，而这正是研究线性系统的实际背景。对于一个实际的系统是否可将其按线性系统处理，一般难以给出普遍的和绝对的判断准则，需要对具体系统进行具体的分析。这里，不仅需要考虑系统本身的因素，而且也需要考虑所研究问题方面的因素，只有从这两个方面才能决定是否可把一个实际系统看成为线性系统。

将线性系统进行更细致的分类，可区分为线性定常系统和线性时变系统两类情况。线性定常系统也称为线性常系数系统，其特点是描述系统状态的线性微分或差分方程中的每一个系数都是不随时间变化的常数。如果系统的线性微分或差分方程的系数不全是常数，其中包含有为时间 t 的函数的系数，则这样的系统就为线性时变系统，通常也称为线性变系数系统。考虑到系统的运动状态的特性和描述此系统的微分方程或差分方程的类型有着密切的联系，而不同类型的微分方程在解的特性上有着重要的和实质性的差别，因此把线性系统作上述分类是必要的和有意义的。从实际的观点而言，线性定常系统也只是一种实际系统的理想化模型，它是对实际系统经过近似化和工程化处理后所导出的一类理想化系统。线性常系数系统是最易于研究的，而且为数很多的实际系统都可在一定的范围内足够精确地用线性常系数系统来代替，因此它是线性系统理论的主要研究对象。

0.2.2 线性系统理论的主要任务

简单地说，线性系统理论主要研究线性系统状态的运动规律和改变这种运动规律的可能性和方法，建立和揭示系统结构、参数、行为和性能间的确定的和定量的关系。通常，研究系统运动规律的问题称为分析问题，研究改变运动规律的可能性和方法的问题则为综合问题或设计。前者属于认知系统，后者则为改造系统。

(1) 系统数学模型的建立

不管是对系统进行分析还是综合，一个首要的前提是建立起系统的数学模型。在建立模型时，最重要的是要确定什么是需要反映和研究的主要系统属性，并在此基础上定出它的定量关系。随着所考察的问题的性质的不同，一个系统可以有不同类型的模型，它们代表了系统的不同侧面的属性。数学模型中的基本要素是变量、参量、常量和它们之间的关系。系统模型中的变量，包括状态变量、输入变量和输出变量，在有些情况下还需要考

虑扰动变量。参量可以是系统的参数或表征系统性能的参数，前者受系统环境的影响可产生变动，后者可随设计要求而人为地改变其取值。常量是指系统中不随时间改变的参数。而变量、参量和常量的关系，需要针对具体问题根据相应的物理原理来决定。线性系统的数学模型主要有两种形式，即时间域模型和频率域模型。时间域模型表现为微分方程组或差分方程组，可同时适用于常系数系统和变系数系统；频率域模型表现为传递函数和频率响应，只适用于常系数系统。对应于系统的这两种模型，发展和形成了线性系统理论中的两类不同方法——状态空间方法和复频域方法。建立系统的数学模型的基本途径有解析法和实验法，前者通过分析系统的机制直接运用物理原理来建立表征系统动态过程的数学描述，后者则是在通过实验取得数据和按照相应准则处理数据的基础上来导出最接近系统实际情况的简化数学描述。建模问题是系统研究中的一项非常基本和重要的问题，它已构成系统理论中的一个独立的分支。

(2) 系统分析

线性系统的分析包含两个大方面——定量分析和定性分析。

回忆一下古典控制理论，其中的一个重要内容即是系统动态过程分析，即分析系统对于一典型输入信号的响应并定义了飞升时间、超调量等一些描述响应特性的量。对多变量系统对象，分析清楚系统对于某个输入的响应和性能，无疑也是十分必要的。这种系统分析称为线性系统运动分析，它是一个已知系统的输入量来求其输出量的过程，为一种定量分析。

线性系统定量分析可以解析地给出系统在某种激励信号下的运动轨线，但其分析涉及到繁多和复杂的计算，常常需要借助于数字或模拟计算机来完成。另一方面，这种解析的运动规律给我们带来的对于系统的认识并不够深刻和明确。例如，为了保证系统能在实际的带有一定扰动的环境下正常地工作，人们希望当系统的响应受扰发生变化时，能够经“足够长”的时间之后再恢复到希望的响应轨迹上去。再如，为了对系统实施有效的控制，人们特别关心的一个问题是存不存在一个允许控制输入，使得系统在它的作用下能够产生希望的动作和运动。对于这两个问题，基于系统的定量分析结果是不能立即得到答案的。它们属于系统的定性分析问题。前者为系统的运动稳定性分析问题，后者为系统的能控、能观性分析中的问题。

(3) 系统设计

任何一个实际的系统都有特定的任务或性能要求。当一个系统不能满足希望的性能或不能完成所规定的任务时，就需要对系统进行干预、调节或控制来改变原有系统，使改变后的系统满足所规定的任务或性能要求。这样一个完整的过程称为控制系统设计或控制系统综合。

如何实现对于一个系统的干预或控制呢？每一个系统都有一定的输入变量和输出变量，它们分别代表了系统受外界作用和系统作用于外界环境的窗口，通过调整控制变量便达到改变原有系统结构及性能的目的。通常把控制量的调整规律称为控制规律，简称控制律。

控制律的选取有两大类。一类是不利用系统中变量信息的控制律，在形式上表现为关于时间的一个特定的一元函数，这类控制律称为开环控制律。而受其作用，调整运行的系统称为开环系统。显然，由于开环控制律不能“敏感”系统的变化，因而当系统模型不准

确或受扰发生变化时，开环控制系统就会产生大的控制误差。另一类控制规律是利用了系统的变量信息的控制律，称为反馈控制律。在反馈控制律作用下运行的系统称为相对于原来系统的闭环系统。不同于开环控制律，闭环控制律能够“敏感”系统变量的变化，实现对系统变化的调节，因而具有一定的抗扰动能力，得到了广泛的使用。

根据上面介绍的术语，所谓一个闭环控制系统设计问题，即是要设计给定系统的一个适当的反馈控制律，使得闭环系统具有希望的性能或可实现希望的任务要求。那么如何表征这种“希望的性能或任务要求”呢？这又需要所谓性能指标的概念，它是所谓系统希望性能和任务要求的确切描述。性能指标分为优化型指标和非优化型指标两大类。性能指标的不同决定了不同的设计问题。常见的优化型指标是一类二次型指标，求解满足这种指标的控制系统的设计问题称为二次型最优控制问题，于本书第八章中讲述。另外，如模型匹配问题，即要求闭环系统与一个给定的已知系统充分接近，所用的也是一种优化型指标。在线性系统设计的基本问题中，用得较多的还是非优化型指标，它们所注重的是闭环系统的某种性质，而与动态优化无关。如本书第六章中的极点配置问题，以一组希望的闭环极点为指标，反映了系统的稳定性和响应的快速性；第七章介绍的镇定问题和渐近跟踪问题分别以闭环系统的稳定性和系统输出渐近跟踪某一指定信号为指标。在一个实际系统的设计中，可能对控制系统提出各种各样的要求，而且往往还可能是多种要求并存。从这一角度讲，控制系统设计的内容可以是很广泛、很复杂的。但这种复杂的多目标设计问题在一般线性系统理论的教科书中不予讨论。

0.2.3 线性系统理论的发展过程

本世纪50年代中期，古典的线性系统理论已经发展成熟和完备，并在不少工程技术领域中得到了成功的应用。古典线性系统理论的数学基础是拉普拉斯变换，系统的基本数学模型为传递函数，主要的分析和综合方法是频率响应法。古典频率法对于单输入-单输出线性定常系统的分析和综合是很有成效的。但是，古典线性系统理论也具有明显的局限性，突出的是难于有效地处理多输入-多输出系统，并且难以揭示系统的更深刻的特性。

在50年代蓬勃兴起的航天技术的推动下，线性系统理论在1960年前后开始了从古典阶段到现代阶段的过渡，其重要标志之一是卡尔曼(R.E.Kalman)系统地把状态空间法引入到系统与控制理论中来^[21-23]。状态空间法的一个基本特点是，采用状态空间这种内部描述取代先前的传递函数那种外部输入-输出描述，并对系统的分析和综合直接在时间域内进行。状态空间法可同时适用于单输入-单输出系统和多输入-多输出系统、线性定常系统和线性时变系统。在状态空间法的基础上，卡尔曼进一步提出了能控性和能观测性这两个表征系统结构特性的重要概念，已经证明这是线性系统理论中的两个最基本的概念。能控性和能观测性的引入，导致了线性系统分析和综合在指导原则上的一种根本性的变化。它集中表现在用系统的“内部研究”代替了传统的“外部研究”，并使分析和综合过程建立在严格的理论基础之上。建立在状态空间法基础上的线性系统的分析和综合方法通常称为现代线性系统理论。

自60年代中期以来，线性系统理论不论是在研究内容还是在研究方法上，又有了一系列新的发展。出现了着重从几何方法角度来研究线性系统的结构和特性的线性系统的几何理论，出现了以抽象代数为工具的线性系统的代数理论，也出现了在推广古典频率法基础

上发展起来的多变量频域理论。与此同时,随着计算机技术的发展和普及,线性系统分析和综合中的计算问题(特别是病态问题和数值稳定性问题),以及利用计算机对线性系统进行辅助分析和辅助设计的问题,也都得到了广泛和充分的研究。

线性系统理论是系统与控制理论中最为成熟和最为基本的一个组成分支。系统与控制理论的其它分支,如最优控制理论、最优估计理论、随机控制理论、非线性系统理论、人系统理论等,都不同程度地受到线性系统理论的概念、方法和结果的影响与推动。

0.2.4 线性系统理论的主要学派

随着所采用的数学工具和所采用的系统描述的不同,线性系统理论已形成了四个平行的分支,它们反映了线性系统理论中的一些主要学派。

(1) 线性系统的状态空间法

状态空间法是线性系统理论中一个最重要和影响最广的分支。在状态空间法中,用以表征系统动力学特性的数学模型,是反映输入变量、状态变量和输出变量间关系的一对向量方程,称为状态方程和输出方程。状态空间法是一种时间域方法,其主要的数学基础是线性代数,在系统的分析和综合中所涉及的计算主要为矩阵运算和矩阵变换,并且这类计算很适合在计算机上进行。不管是系统的分析还是系统的设计,状态空间法已发展了一整套完整的和成熟的理论和方法。线性系统理论的其它分支,也都是在状态空间的影响和推动下形成和发展起来的。本书所介绍的即是建立在这种方法之上的线性系统理论。

(2) 线性系统的几何理论

几何理论的特点是把对线性系统的研究化为状态空间中的几何问题,主要的数学工具是几何形式的线性代数,基本思想是把能控性和能观测性等系统结构特性表述为不同的状态子空间的几何性质。在几何理论中,具有关键意义的新概念是 $[A \ B]$ 不变子空间和能控子空间,它们在用几何方法解决主要的综合问题中起了决定性的作用。几何方法的优点是简捷明了,避免了状态空间法中的大量的矩阵演算,而在一定要计算时,几何方法的结果都能比较容易地化成相应的矩阵运算。但是,对于工程背景的系统理论的学习者和研究者,对线性系统的几何理论不免会感到比较抽象,因而需要具备一定的数学素养。几何理论是由加拿大著名学者旺纳姆(W. M. Wonham)在70年代初创立的,线性系统的几何理论的代表作是由Wonham著的《线性多变量控制——一种几何方法》^[20]。

(3) 线性系统的代数理论

线性系统的代数理论是用抽象代数工具研究线性系统的一种方法。代数理论的主要特点是,把系统各组变量间的关系看作为代数结构之间的映射关系,从而可以对线性系统的描述和分析实现完全的形式化和抽象化,变为纯粹的代数问题。代数理论的出现起源于卡尔曼60年代应用模论工具对域上的线性系统的研究。随后在他的模论方法的影响下,在比域更弱和更一般的代数系上,如环、群、泛代数、集合上,相继建立了线性系统代数理论。在这些研究中,找到了线性系统的不同于状态空间描述中的某些属性,并且试图把系统理论和计算机科学结合起来建立起统一的理论。

(4) 多变量频域方法

这种方法的实质是以状态空间法为基础,采用频率域的系统描述和频率域的计算方法来分析和综合线性定常系统。在多变量频域方法中,平行和独立地发展了两类综合方法。

一是频率域设计方法，它的特点是把多输入-多输出系统化为一系列单输入-单输出系统来处理，并把古典频率法的许多行之有效的设计技术和方法推广到多变量系统中来，由此导出的综合理论和方法将可以通过计算机辅助设计而方便地用于系统设计。这类综合技术主要是由罗森布洛克(H. H. Rosenbrock)、麦克法兰(A. G. J. MacFarlane)等英国学者提出的，习惯地称为英国学派。另一类是多项式矩阵设计方法，它的特点是采用传递函数矩阵的矩阵分式描述作为系统的数学模型，并在多项式矩阵计算和变换的基础上，建立了一整套分析和综合线性定常系统的理论和方法。多项式矩阵设计方法是由罗森布洛克、沃罗维奇(W. A. Wolovich)等在70年代初提出的^[10]，并在随后的发展中得到不断完备和广泛应用。与状态空间法相比，多变量频域方法具有物理直观性强、便于设计调整等优点。

0.3 本书的内容安排

本书讨论线性系统的时间域理论，即以状态空间方法为主的线性系统的分析和设计理论。全书共十二章，按内容可分为三个大部分——准备工作、主体内容和介绍性内容。

第一部分：准备工作

该部分的内容即本书的第一章——数学基础。应该说本书中涉及到的数学知识是很多的。我们自然不能面面俱到地介绍。在该章中，我们只是介绍了与本书内容联系最紧密、针对性最强的一些数学结果。

在第一节中我们介绍了线性空间与线性变换，它们是理解状态空间方法和代数等价系统的基础。第二节介绍的矩阵代数中的几个结果，在后面要多次用到。第三节至第六节中介绍的多项式矩阵的初等变换和有理分式的互质分解以及若当分解和广义Sylvester矩阵方程，构成了后面第六章中特征结构配置设计和第十章中的状态观测器设计等一些问题的数学基础。这里，矩阵分式 $(sI - A)^{-1}B$ 的右既约分算法和广义Sylvester矩阵方程的求解等取材于作者自己的工作。

第二部分：主体内容

该部分共有九章内容，按结构可划分如下：

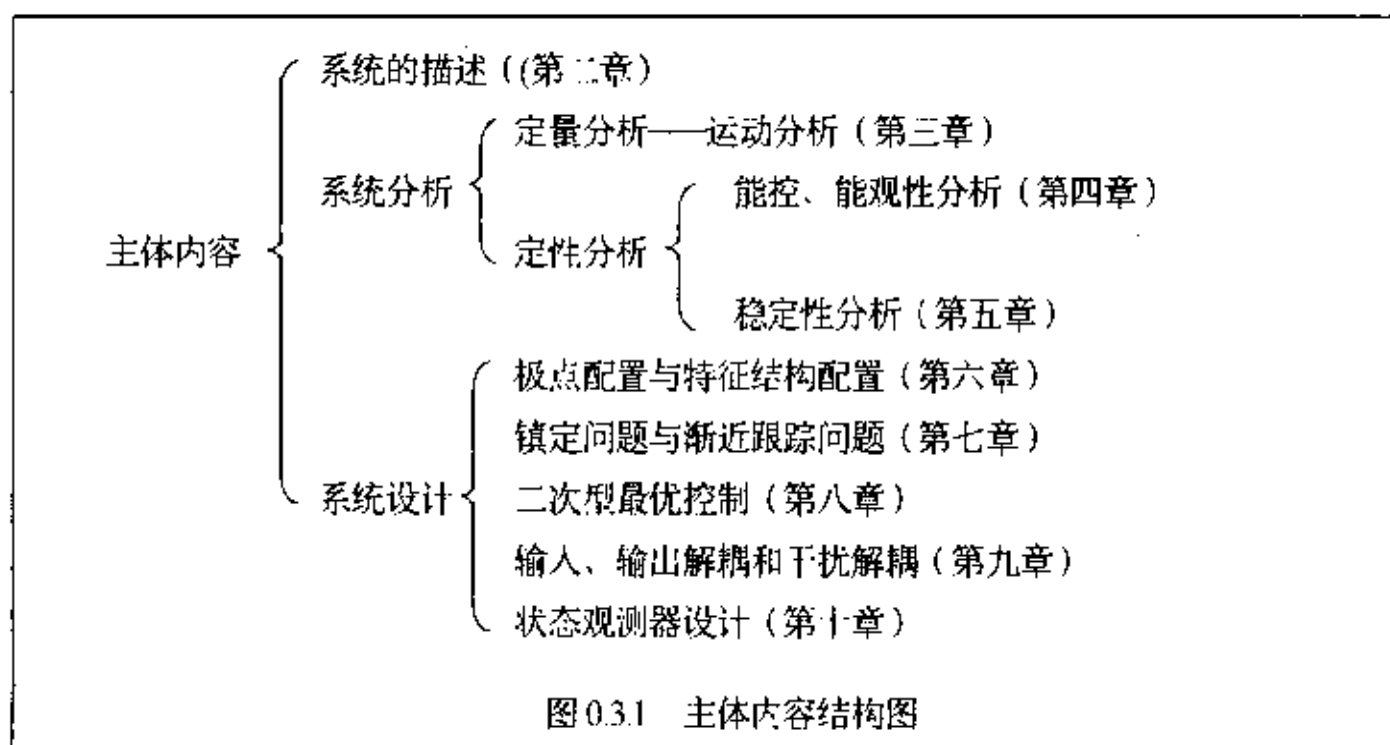


图 0.3.1 主体内容结构图

在线性系统的数学描述一章(第二章)中, 主要介绍线性系统的状态空间描述及其与传递函数描述间的关系, 并介绍了线性系统的代数等价性。

如图0.3.1所示, 在系统分析部分中有三方面内容。线性系统的运动分析一章(第三章)介绍了状态转移矩阵及线性系统的解析响应。线性系统的能控性和能观性一章(第四章)介绍了能控性和能观性的定义及其各种判据, 以及线性系统按能控性和能观性的各种分解。系统运动的稳定性一章(第五章)中, 主要介绍了Lyapunov意义下的稳定性及其判定问题, 同时简单介绍了外部稳定性的概念。作为选学内容, 还介绍了作者关于二阶动力学系统稳定性分析的一个结果。它对于读者理解Lyapunov稳定性和运用Lyapunov判据都有一定的帮助。

系统设计部分共有五方面内容。第一方面是极点配置与特征结构配置(第六章)。这里介绍的特征结构配置结果是作者自己的工作。特征结构配置在现有的许多线性系统方面的著作中是不讨论的, 但鉴于其重要性, 我们这里不但收录了这方面的两节内容, 而且还建议读者对其给予充分的重视。本章的最后一节(也是作者的工作)以模型匹配问题为例, 说明了特征结构配置结果在解决许多具有希望特定结构的系统设计问题方面的优越性。第二方面是镇定问题与渐近跟踪问题(第七章), 其中也介绍了作者关于模型参考输出跟踪问题的结果。第三方面内容是二次型最优控制(第八章), 介绍了有限时间和无限时间的状态和输出调节器及输出跟踪器。第四方面是线性系统中的解耦问题, 介绍了线性系统的输入-输出解耦问题和作者的以特征结构配置结果为基础的干扰解耦结果。系统设计部分的最后一个方面是状态观测器设计(第十章)。这里介绍了线性系统的全维和降维状态观测器以及最一般情形的Luenberger函数观测器, 并阐述了三者的关系。此外还介绍了作者在环路传递复观方面的结果。

第三部分: 介绍性内容

该部分包含离散线性系统理论(第十一章)和鲁棒控制(第十二章)两方面的内容。

该部分的第一方面是离散系统理论。如绪论中所言, 离散线性系统理论是与连续线性系统理论相平行的。本章分六个小节对离散系统理论中的模型描述、分析和设计等问题进行了简单的介绍。

该部分的第二方面是离散系统理论。鲁棒控制是70年代兴起的、至今仍十分活跃的一个非常广阔的研究领域。目前国际控制理论界已有这方面的著作^[4-6]。但就鲁棒控制的含义来看, 没有一本书能够包容研究领域中的全部内容。本书中的这一章是在作者关于鲁棒控制方面的工作中筛选、提炼出来的, 目的是给未触及鲁棒控制的读者提供一个入门的机会。在这一章中, 我们尝试性地提出了关于鲁棒性的较为一般性的定义, 探讨了鲁棒控制的研究内容, 并介绍了几方面典型的鲁棒控制问题——稳定鲁棒性分析与鲁棒镇定、鲁棒极点配置和鲁棒观测器设计。

对于第一次接触线性系统理论的读者可以跳过本书目录中带有*号的内容, 这包括第九章、第十一章、第十二章以及其它各章中的某些节。

第一章 数学基础

作为准备工作,本章介绍以后各章中的一些常用的数学基础知识。对于一些结果,我们只是给出了结论而略去证明。需要说明的是,本章的许多内容都是孤立的,在整体上不具有系统性。关于本章内容在以后各章的应用,本章末尾的小结中有简要说明。

1.1 线性空间与线性变换

1.1.1 线性空间的定义

在集合上赋予一定的结构或一定的要求,则这个集合就称为一个特定的空间。例如在一个集合 V 上赋予具有两种代数运算的代数结构,则此集合 V 可称为实数域 \mathbf{R} 上或复数域 \mathbf{C} 上的线性空间或向量空间。这里的两种代数运算是指加法与数乘法, V 按加法为一个交换群。这些运算要满足通常的代数法则,即乘法的结合律、加法与乘法的分配律等。下面我们给出线性空间的严格定义。

定义1.1.1 设 V 是一个非空集合, P 是一个数域。在集合 V 的元素之间定义了一种代数运算,叫做加法;这就是说,给出了一种法则,对于 V 中任意两个元素 x 和 y ,在 V 中都有唯一的一个元素 z 与它们对应,称 z 为 x 与 y 的和,记为 $z = x + y$ 。在数域 P 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算,叫做数量乘法;这就是说,对于数域 P 中任一数 k 与 V 中的任意一个元素 x ,在 V 中都有一个唯一的元素 h 与它们对应,称 h 为 k 与 x 的数量乘积,记为 $h = kx$ 。如果加法与数量乘法满足下面的规则,那么 V 为数域 P 上的线性空间。

加法规则:

① $x + y = y + x$

② $(x + y) + z = x + (y + z)$

③ 在 V 中有一个元素 0 ,对于 V 中的任何一个元素都有 $x + 0 = x$ 。具有这个性质的元素称为零元素。

④ 对于 V 中的每一个元素,都有 V 中的元素 y ,使得 $x + y = 0$ 。此时称 y 为 x 的负元素。

数量乘法规则:

① $1x = x$

② $k(lx) = (kl)x$

数量乘法与加法混合运算规则:

① $(k + l)x = kx + lx$

② $k(x + y) = kx + ky$

在以上诸规则中, k, l 等表示数域 P 中的任意数; x, y, z, h 等表示集合 V 中的任意元素。

再如在 V 上赋予距离, 此距离满足通常所说的距离之性质, 则 V 称为距离空间。 V 上还可以赋予拓扑结构, 则 V 称为拓扑空间。 但这里主要讨论线性空间。

例1.1.1 如果用 \mathbf{R}^n 表示有序的实数组

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

全体的集合。 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, 在 \mathbf{R}^n 中规定加法和数乘为

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \quad a \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}$$

显然

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, \quad a \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$$

极易验算这种 “+” 和 “·” 满足通常的代数法则, 故 \mathbf{R}^n 是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间, 也称为向量空间。

同理, 如果用 \mathbf{C}^n 表示有序复数组

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

全体的集合, 则 \mathbf{C}^n 是复数域 \mathbf{C} 上的线性空间。

例1.1.2 将 $n \times m$ 个实数排成如下矩阵

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

用 $\mathbf{R}^{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 个实矩阵全体的集合。 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} \end{bmatrix}$$

或简记

$$A = [x_{ij}], \quad B = [y_{ij}]$$

规定

$$A + B = [x_{ij} + y_{ij}], \quad \alpha \cdot A = [\alpha x_{ij}], \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

则 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 也是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间。因此不难看出，实数域上的线性空间的本质是指它们内部的运算具有线性性。

定义1.12 如果 V 是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间， V_1 是 V 的一个子集，在 V_1 上的加法和数乘运算同于 V 上的运算，若 V_1 也是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间，则称 V_1 是 V 的子空间。

例1.13 设 V 是线性空间， $v \in V$ ，则不难验证

$$V_1 = \{v_1 | v_1 = av, \forall a \in \mathbf{R}\}$$

是 V 的子空间。它也称为由 v 成的子空间。

例1.14 设 a_1, a_2, \dots, a_m 是线性空间 V 中 m 个元，或称为 V 中的 m 个矢量，则

$$V_1 = \{v_1 | v_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m, \alpha_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, m\}$$

是 V 的子空间，也称 V_1 是由 a_1, a_2, \dots, a_m 所生成的子空间。

例1.15 设 V 是线性空间，显然 $0 \in V$ ，那么 $V_1 = \{0\}$ 是 V 的子空间，称为零子空间。

定义1.13 若 V 是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间， V_1, V_2 是 V 的两个子空间，若对 $\forall v \in V$ 都有唯一的 $v_1 \in V_1$ 和 $v_2 \in V_2$ ，满足

$$v = v_1 + v_2$$

则称 V 是 V_1 和 V_2 的直和空间，记为

$$V = V_1 \oplus V_2$$

反之，设 V_1, V_2 同为实数域 \mathbf{R} 上的线性空间， $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ ，将 v_1, v_2 按序排成 (v_1, v_2) ，并令

$$V = \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

再在 V 中规定同于向量的加法和数乘的运算，这时 V 仍是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间，它被称为 V_1, V_2 的乘积空间。

1.1.2 线性空间的基和维数

设 V 是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间，它的元即是向量。

定义1.14 设 u_1, u_2, \dots, u_m 是 V 中一组矢量(可以重复)，如果存在一组不全为0的实数 $a_i, i = 1, 2, \dots, m$ ，使

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m = 0$$

则称 u_1, u_2, \dots, u_m 为线性相关，否则称 u_1, u_2, \dots, u_m 为线性无关，此时必然有

$$a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$$

定义1.15 设 v_1, v_2, \dots, v_m 是 V 中一组矢量(可以重复)，称向量 u 是 v_1, v_2, \dots, v_m 的线性组合，是指有实数 $a_i, i = 1, 2, \dots, m$ 存在，使

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m$$

由上述定义可知, 如果 u_1, u_2, \dots, u_m 线性无关, 而 u, u_1, u_2, \dots, u_m 线性相关, 则 u 为 u_1, u_2, \dots, u_m 的线性组合, 且表示法是唯一的。

定义1.16 如果向量 e_1, e_2, \dots, e_n 为线性无关, 而 V 中每个向量均可由它们线性表示, 则称 e_1, e_2, \dots, e_n 构成线性空间 V 的一组基。而基 e_1, e_2, \dots, e_n 的个数称为 V 的维数, 记为 $\dim(V) = n$ 。当 $n < \infty$ 时, 称 V 为有穷维线性空间。当 $n = \infty$ 时, 则称 V 为无穷维线性空间。

例1.16 在欧氏空间 \mathbf{R}^n 中选取 n 个无关向量

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

它们便构成 \mathbf{R}^n 的一组基。因此, \mathbf{R}^n 也称为 n 维欧氏空间。

1.13 线性变换

定义1.17 设 V_1, V_2 均为实数域 \mathbf{R} 上的线性空间, T 是由 V_1 到 V_2 的一个映象, 当 T 满足

$$T(a+b) = Ta + Tb, \quad T(\beta a) = \beta Ta, \quad \forall a, b \in V_1, \beta \in \mathbf{R}$$

时, 称 T 为由 V_1 到 V_2 的线性变换或线性算子, V_1 称为 T 定义域。若令

$$TV_1 = \{Tv_1 \in V_1\} \subset V_2$$

则 TV_1 也是一个线性空间, 它被称为 T 的值域空间, 记为 $\text{Im}T = TV_1$ 。在 $V_1 = V_2$ 时, 称 T 为 V_1 上的线性变换。

例1.17 记

$$V_1 = C^1[a, b], \quad V_2 = C[a, b]$$

这里 $C^1[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 区间上一次可微函数的全体, $C[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 区间上连续函数的全体。容易验证 V_1, V_2 都是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间。定义

$$T = \frac{d}{dt}$$

亦不难验证 T 是 V_1 到 V_2 的线性变换, 有时也称为线性算子或微分算子。

定义1.18 设 V 为一线性空间, 若 T 是 V 上的线性变换, 构造集合

$$N = \{x \mid Tx = 0, x \in V\}$$

则 N 是 V 的一个子空间, 称为线性变换 T 的 **Ker** 空间, 记为

$$N = \text{Ker} T$$

例1.18 令

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n \right\} = \mathbf{R}^n$$

$$T: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

则 T 为 V 上的线性变换, 易知

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 2, 3, \dots, n \right\}$$

是 T 的 Ker 空间, 即

$$N = \text{Ker } T$$

显然, 若向量 e_1, e_2, \dots, e_n 构成 \mathbf{R}^n 的一组基, 则由上述基的定义可知, 对所有 $u \in \mathbf{R}^n$, 均可唯一表成

$$u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

我们称 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 为关于基 e_1, e_2, \dots, e_n 的坐标。若向量 e'_1, e'_2, \dots, e'_n 构成 \mathbf{R}^n 的另外一组基, 则

有

$$[e'_1 \ e'_2 \ \dots \ e'_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] P, \quad P \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

而对任意 $v \in \mathbf{R}^n$, 有

$$v = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [e'_1 \ e'_2 \ \dots \ e'_n] \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix}$$

由此可知

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix}$$

我们称 P 为基 e_1, e_2, \dots, e_n 与基 e'_1, e'_2, \dots, e'_n 之间的坐标变换。容易验证, 坐标变换 P 也是 V 上的线性变换。

1.2 矩阵代数中的几个结果

1.2.1 矩阵降秩条件

设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 则 A 的列是 m 维列向量, 共有 n 个; A 的行是 n 维行向量, 共有 m 个。

定义1.2.1 矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 中列向量的最大无关组的个数称为 A 的列秩; 其行向量的最大无关组的个数称为矩阵 A 的行秩。

对于矩阵而言, 容易证明下述命题。

命题1.2.1 矩阵的行秩与列秩相等。

鉴于上述结论, 我们有:

定义1.2.2 矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的行秩或列秩称为矩阵 A 的秩, 记为 $\text{rank}(A)$ 。

显而易见, 对于矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 而言, 有

$$\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

当 $\text{rank}(A) = m$ 时, 我们称 A 为行满秩矩阵; 当 $\text{rank}(A) = n$ 时, 我们称 A 为列满秩矩阵; 当 $\text{rank}(A) < \min\{m, n\}$ 时, 我们称 A 为降秩矩阵, 特别当 $\text{rank}(A) < m$ 时, 称 A 为行降秩的; 当 $\text{rank}(A) < n$ 时, 称 A 为列降秩的; 当 $\text{rank}(A) = m = n$ 时, 称矩阵 A 是可逆的或非奇异的。

关于矩阵的秩, 我们有下述结果。关于它们的证明, 请读者自己完成。

定理1.2.1 设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 则

- ① 矩阵 A 行降秩的充要条件是存在向量 $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \neq 0$, 满足 $\alpha^T A = 0$;
- ② 矩阵 A 列降秩的充要条件是存在向量 $\beta \in \mathbb{R}^n$, $\beta \neq 0$, 满足 $A\beta = 0$ 。

定理1.2.2 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 且 $A = QQ^T$, 则

- ① 矩阵 A 降秩的充要条件是矩阵 Q 行降秩;
- ② 矩阵 A 满秩的充要条件是矩阵 A 正定。

1.2.2 Vendermonde矩阵与友矩阵

Vendermonde矩阵与友矩阵是矩阵代数中的两类重要的矩阵, 在控制理论中经常用到。

(1) Vendermonde矩阵及其性质

设 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ 为一组复数, 定义

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

则形如式(1.2.1)的矩阵 P 称为Vendermonde矩阵。关于Vendermonde矩阵的行列式, 我们有:

引理1.2.1 $\det(P) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$

关于上述引理的证明参见文献[29, p78]。由上述引理立即可得下述推论。

推论1.2.1 Vendermonde矩阵 P 可逆的充要条件是 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ 互异。

关于Vendermonde矩阵的求逆, 我们有:

引理1.2.2^[30, 31] 设 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ 互异, 则 $T = P^{-1}$ 的第 i 行第 j 列元素 t_{ij} 由下述多项式展开式决定:

$$f_i(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(z - \lambda_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)} = \sum_{j=1}^n t_{ij} z^{j-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.2)$$

(2) 友矩阵及其性质

设 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 其特征多项式为

$$D(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \quad (1.2.3)$$

我们定义矩阵

$$A^c = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

为矩阵 A 的友矩阵(Companion matrix)。关于友矩阵的特征值和特征向量, 我们有下列结果:

引理1.2.3 设矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 具有互异特征值 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则其友矩阵 A^c 亦以 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ 为特征值, 且 A^c 与 λ_i 相对应的特征向量为

$$p_i = [1 \ \lambda_i \ \lambda_i^2 \ \cdots \ \lambda_i^{n-1}]^T \quad (1.2.5)$$

证明 由于 λ_i 为矩阵 A 的特征值, 故

$$D(\lambda_i) = \lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_i + a_0 = 0 \quad (1.2.6)$$

从而

$$(A^c - \lambda_i I)p_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -D(\lambda_i) \end{bmatrix} = 0 \quad (1.2.7)$$

上式说明, λ_i 为矩阵 A^c 的特征值, p_i 为其相应的特征向量。

△△△

根据上述引理及若当分解可得下述推论:

推论1.2.2 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 具有互异特征值, 则有

$$A^c = P \operatorname{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n] P^{-1} \quad (1.2.8)$$

其中, 矩阵 P 为由式(1.2.1)定义的Vandermonde矩阵。

上述事实告诉我们, Vandermonde矩阵为具有互异特征值的友阵的特征向量矩阵。另外, 推论1.2.2还告诉我们, 一个具有互异特征值的矩阵 A 与其友阵具有相同的约当标准型(对角形)。从而根据相似关系的传递性可得下述命题:

命题1.2.2 具有互异特征值的矩阵与其友阵是相似的。

值得说明, 本小节中关于友矩阵的结果可以推广到具有相重特征值的矩阵上去, 但由于关于矩阵的特征值的重数和特征向量链的概念要到第五节中才交代, 此处从略。

最后, 我们给出关于友矩阵求逆的下述结果:

定理1.2.2 由式(1.2.4)给出的友矩阵可逆的充要条件是 $a_0 \neq 0$, 且

$$[A^c]^{-1} = \begin{bmatrix} -a_1/a_0 & -a_2/a_0 & \cdots & -a_{n-1}/a_0 & -1/a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

证明 直接验证 $A^c \cdot [A^c]^{-1} = I$ 即可。

△△△

1.2.3 Cayley-Hamilton定理与化零多项式

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 矩阵 A 的特征多项式定义为

$$D(s) = \det(sI - A) \quad (1.2.14)$$

它是关于 s 的一个 n 阶多项式。下述的著名定理揭示了矩阵 A 的乘幂之间的相关关系, 在许多场合都有重要应用。

Cayley-Hamilton定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D(s)$ 为矩阵 A 的特征多项式, 则 $D(A) = 0$ 。

关于上述定理的证明, 请读者参阅有关矩阵代数方面的书籍, 此处从略。

记

$$D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_0 \quad (1.2.15)$$

则由Cayley-Hamilton定理可得

$$A^n = -(a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_0I) \quad (1.2.16)$$

即 A^n 可表为 $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I$ 的线性组合。利用式(1.2.16)递推可得下述命题:

命题1.2.3 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则对于一切 $m \geq n$, A^m 均可表为 $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I$ 的线性组合。

从Cayley-Hamilton定理可知, 对于任意一个 n 阶方阵 A , 总存在一个多项式 $f(s)$ 满足 $f(A) = 0$, 这样的多项式称为矩阵 A 的一个化零多项式。Cayley-Hamilton定理指出, 矩阵 A 的特征多项式为 A 的一个化零多项式。显然, 一个矩阵的化零多项式并不唯一, 而且有无穷多个。在其所有化零多项式中, 次数最低且最高次幂项系数为1的多项式称为矩阵 A 的最小多项式。一个矩阵的任何化零多项式均可被其最小多项式整除。

作为化零多项式概念的推广, 我们还有:

定义1.2.3 设 $0 \neq z \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 如果 s 的多项式 $f(s)$ 满足 $z^T f(A) = 0$, 则称其是 z^T 相对 A 的化零多项式。阶次最低的首一的 z^T 相对 A 的化零多项式称为 z^T 相对 A 的极小多项式。

命题1.2.4 设 $0 \neq z \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f(s)$ 为 z^T 相对 A 的极小多项式, λ 为其零点, 则

- ① λ 为矩阵 A 的特征值;
- ② 当记 $f(s) = p(s)(s - \lambda)$ 时, $\psi^T = z^T p(A)$ 为矩阵 A 的属于 λ 的左特征向量。

证明 由定义有

$$z^T f(A) = z^T p(A)(A - \lambda I) = 0$$

即

$$\psi^T A = \lambda \psi^T$$

注意到 $p(s)$ 的阶次低于 $f(s)$ 的阶次, 又 $f(s)$ 为 z^T 相对 A 的极小多项式, 因而有 $\psi^T = z^T p(A) \neq 0$, 从而上式说明 λ 为矩阵 A 的特征值, $\psi^T = z^T p(A)$ 为相应的左特征向量。

△△△

1.2.4 豫解矩阵与Leverrier算法

在上小节中引入了矩阵的特征多项式的概念。对于阶数较高的矩阵, 直接依定义去求其特征多项式是比较困难的。另外, 在许多问题中也常常需要求取矩阵 $(sI - A)^{-1}$, 该矩阵称之为矩阵 A 的豫解矩阵。

由公式

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{D(s)} \quad (1.2.17)$$

可将豫解矩阵 $(sI - A)^{-1}$ 的求取转化为 $D(s)$ 和 $\text{Adj}(sI - A)$ 的求取。而著名的Leverrier算法则为我们求取 $D(s)$ 和 $\text{Adj}(sI - A)$ 提供了方便的递推算法。

定理1.2.3 记 $D(s)$ 如式(1.2.15)所示,

$$\text{Adj}(sI - A) = R_{n-1}s^{n-1} + R_{n-2}s^{n-2} + \cdots + R_1s + R_0$$

则 $R_j, a_j, j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 可由下述Leverrier算法来完成

$$\begin{aligned}
R_{n-1} &= I & a_{n-1} &= -\frac{\text{tr}(R_{n-1}A)}{1} \\
R_{n-2} &= R_{n-1}A + a_{n-1}I & a_{n-2} &= -\frac{\text{tr}(R_{n-2}A)}{2} \\
R_{n-3} &= R_{n-2}A + a_{n-2}I & a_{n-3} &= -\frac{\text{tr}(R_{n-3}A)}{3} \\
&\vdots & & \vdots \\
R_1 &= R_2A + a_2I & a_1 &= -\frac{\text{tr}(R_1A)}{n-1} \\
R_0 &= R_1A + a_1I & a_0 &= -\frac{\text{tr}(R_0A)}{n}
\end{aligned}$$

上述Levernier算法的特点是按 i 的反序号 $i = n-1, n-2, \dots, 1, 0$ 递推地获得 $D(s)$ 和 $\text{Adj}(sI - A)$ 的系数。如将上述算法紧凑地写出来, 则为下述形式

$$\begin{aligned}
R_{n-k} &= R_{n-k+1}A + a_{n-k+1}I, \quad R_n = 0, \quad a_n = 1 \\
a_{n-k} &= -\frac{\text{tr}(R_{n-k}A)}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

基于Levernier算法, 我们可以很容易获得豫解矩阵的另外一种表达式。

推论1.2.3 设 A 为 n 阶方阵, 则其豫解矩阵 $(sI - A)^{-1}$ 具有下述表示

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{p_k(s)}{D(s)} A^k$$

其中

$$\begin{cases}
p_0(s) = s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_2s + a_1 \\
p_1(s) = s^{n-2} + a_{n-2}s^{n-3} + \dots + a_3s + a_2 \\
\vdots \\
p_{n-2}(s) = s + a_{n-1} \\
p_{n-1}(s) = 1
\end{cases}$$

Levernier算法给出了计算 $D(s)$ 和 $\text{Adj}(sI - A)$ 的方法。下述定理进一步给出了基于 $D(s)$ 和 $\text{Adj}(sI - A)$ 来计算矩阵 A 的最小多项式的一种途径。

定理1.2.4 设 $m(s)$ 为 $\text{Adj}(sI - A)$ 中所有元素的首一最大公约式, 则 $D(s)/m(s)$ 为矩阵 A 的最小特征多项式。

1.3 多项式矩阵

设 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 如果它的所有元素 $a_{ij} = a_{ij}(s)$ 均为变量 s 的实系数多项式, 则称 A 为一个 $m \times n$ 阶的实数域上的多项式矩阵, 记为 $A(s)$ 。在本节中我们讨论多项式矩阵及其相关的一些问题。

1.3.1 基本概念

一个 $m \times n$ 阶的多项式矩阵 $A(s)$ 具有下述一般表示

$$A(s) = A_l s^l + A_{l-1} s^{l-1} + \cdots + A_1 s + A_0 \quad (1.3.1)$$

其中 $A_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, l$ 均为定常的实矩阵, 在 $A_l \neq 0$ 的条件下, l 代表了 $A(s)$ 的次数。显而易见, 通常的定常矩阵均为零次多项式矩阵。

定义1.3.1 对于 $m \times n$ 阶的多项式矩阵 $A(s)$, 如果至少有一个 r 级子式不恒等于零, 而所有 r 级以上子式均恒等于零, 则称 r 为多项式矩阵 $A(s)$ 的秩, 记为 $\text{rank } A(s) = r$ 。

当 $m = 1$ 或 $r = 1$ 时, 多项式矩阵 $A(s)$ 化为多项式行向量或多项式列向量。设 $x_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$, 为一组多项式向量, 如果存在不全为零的多项式 $\alpha_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$, 使得

$$\alpha_1(s)x_1(s) + \alpha_2(s)x_2(s) + \cdots + \alpha_r(s)x_r(s) = 0 \quad (1.3.2)$$

成立时, 称多项式向量组 $x_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$ 线性相关。当仅限于 $\alpha_i(s) \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, r$ 时式(1.3.2)才成立, 则称多项式向量组 $x_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$, 线性独立或线性无关。

与数字矩阵的情形相仿, 对于多项式矩阵 $A(s)$, 我们亦有以下命题:

命题1.3.1 设 $A(s)$ 为 $m \times n$ 阶多项式矩阵, r 为一不大于 m 或 n 的正整数, 则 $A(s)$ 的秩为 r 的充要条件是 $A(s)$ 中有 r 个列(行)线性独立, 而其任何 $r+1$ 个列(行)均线性相关。

当 $\text{rank } A(s) = m$ 或 $\text{rank } A(s) = n$ 时, 我们称多项式矩阵 $A(s)$ 为行满秩或列满秩的。此时多项式矩阵 $A(s)$ 的所有行或所有列构成一个线性无关组。特别对于 $m = n$ 的情形, $A(s)$ 满秩的充要条件是 $\det A(s)$ 不恒为零。对于数字矩阵, 满秩与可逆是等价的。但对多项式矩阵的情形, 可逆性则与 s 的取值有关。

定义1.3.2 如果对于 $\forall s \in \mathbb{C}$, 多项式矩阵 $A(s)$ 均为可逆的, 则必有 $\det A(s)$ 是一个不为零的常数。这样的多项式矩阵称为幺模阵。

由上述定义和公式

$$[A(s)]^{-1} = \frac{\text{Adj } A(s)}{\det A(s)}$$

易得下述命题:

命题1.3.2 多项式方阵 $A(s)$ 为幺模阵的充要条件是其逆存在且仍为多项式矩阵。

1.3.2 初等变换

与数字矩阵类似, 多项式矩阵亦有初等变换。所谓多项式矩阵的初等行(或列)变换, 是指下列三种典型操作:

- (1) 矩阵的两行(或两列)互换位置;
- (2) 矩阵的某一行(或某一列)乘以非零的常数 c ;
- (3) 矩阵的某一行(或某一列)加上另一行(或列)的 $\phi(s)$ 倍, 此处 $\phi(s)$ 为一个多项式。

和数字矩阵的初等变换一样, 我们可以引进初等矩阵, 使得对一个矩阵的初等行(或列)变换可以通过适当的初等矩阵左乘(或右乘)该矩阵来完成。下面以行变换为例来说明初等行变换矩阵。

情形I 将多项式矩阵 $A(s)$ 的 i, j 两行互换, 得多项式矩阵 $A_1(s)$ 。这一过程可通过下

$$\left. \begin{aligned} P^{-1}(i, j) &= P(i, j) \\ P^{-1}[i, (c)] &= P[i, (1/c)] \\ P^{-1}[i, j(\phi)] &= P[i, j(-\phi)] \end{aligned} \right\} \quad (1.3.9)$$

与初等行变换矩阵相对应的初等列变换矩阵分别记之为 $Q(i, j)$ 、 $Q[i, (c)]$ 和 $Q[i, j(\phi)]$ 。至于它们的定义形式请读者自行写出。

命题1.3.3 多项式方阵 $A(s)$ 为么模阵的充要条件是 $A(s)$ 可表成一系列初等行(或列)变换矩阵之积。

1.3.3 Smith标准型

定义1.3.3 如果可以用一系列初等变换将多项式矩阵 $A(s)$ 化为多项式矩阵 $B(s)$ ，则称多项式矩阵 $A(s)$ 和 $B(s)$ 相互等价。

等价是多项式矩阵之间的一种关系，这种关系显然具有下述三个性质：

- ① 反身性，即每一个多项式矩阵均与自身等价；
- ② 对称性，即 $A(s)$ 与 $B(s)$ 等价可推出 $B(s)$ 与 $A(s)$ 等价；
- ③ 传递性，即 $A(s)$ 与 $B(s)$ 等价， $B(s)$ 与 $C(s)$ 等价，可推出 $A(s)$ 与 $C(s)$ 亦等价。

根据命题1.3.3，多项式矩阵 $A(s)$ 和 $B(s)$ 等价，可用下式描述

$$B(s) = P(s)A(s)Q(s) \quad (1.3.10)$$

其中， $P(s)$ 和 $Q(s)$ 为两个适当阶的么模阵。

本小节的主要结果是下述事实。

定理1.3.1 设 $A(s)$ 为 $m \times n$ 的多项式矩阵，令

$$r = \text{rank } A(s) \leq \min\{m, n\}$$

则 $A(s)$ 等价于下述Smith标准型：

$$A_e(s) = \begin{bmatrix} d_1(s) & & & & & 0 \\ & d_2(s) & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & d_r(s) & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.11)$$

其中 $d_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$ 是不为零的首一多项式，且 $d_{j+1}(s)$ 可被 $d_j(s)$ 整除 ($j = 1, 2, \dots, r-1$)。

证明 下述证明实际上是一个一般过程，可视为化多项式矩阵为Smith标准型的一个算法。

① 如果 $A(s) = 0$ ，则其本身就是标准型。否则 $A(s)$ 至少有一个不为零的三

$$\begin{aligned} a_{i1}(s) &= a_{11}(s)q_{i1}(s) + r_{i1}(s), \quad i = 2, 3, \dots, m \\ a_{1k}(s) &= a_{11}(s)q_{1k}(s) + r_{1k}(s), \quad k = 2, 3, \dots, m \end{aligned}$$

如果余式 $r_{i1}(s)$ 和 $r_{1k}(s)$, $i = 2, 3, \dots, m$, $k = 2, 3, \dots, m$ 均恒为零, 则进入下面第④步。否则可在不恒等于零的余式中找出次数最低的, 例如 $r_{i_0 1}(s)$, 将第 i_0 行加上第一行的 $q_{i_0 1}(s)$ 倍, 然后回到第②步。因余式 $r_{i1}(s)$, $r_{1k}(s)$ 的次数一定比 $a_{11}(s)$ 的次数低, 从而进行一次第②、③步操作, (1,1)元素的次数至少降低一次。因而经过有限次之后, 所有的余式必恒等于零。

④ 将第 i 行减去第一行的 $q_{i1}(s)$ 倍, $i = 2, 3, \dots, m$, 将第 k 列减去第一列的 $q_{1k}(s)$ 倍, $k = 2, 3, \dots, m$, 便可得到下述形式的多项式矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}(s) & \cdots & a_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2}(s) & \cdots & a_{mn}(s) \end{bmatrix} \quad (1.3.12)$$

其中 $a_{11}(s)$ 的次数低于所有其它非零的 $a_{ik}(s)$ 的次数。如果 $a_{ik}(s)$, $i = 2, 3, \dots, m$, $k = 2, \dots, m$ 均可被 $a_{11}(s)$ 整除, 进行下一步。否则 $a_{ik}(s)$ 中有不能被 $a_{11}(s)$ 整除的, 例如 $a_{i_0 k_0}(s)$, 此时可将第 i_0 行加到第 1 行, 再回到第③步。这样反复进行有限次之后, 便可将(1.3.12)化成所有的 $a_{ik}(s)$, $i = 2, \dots, m$, $k = 2, \dots, m$, 均可被 $a_{11}(s)$ 整除的情形。

⑤ 进一步对(1.3.12)中右下角的子矩阵进行①~④的操作, 可将原矩阵化为

$$\begin{bmatrix} a_{11}(s) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & a'_{33}(s) & \cdots & a'_{3n}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & a'_{m3}(s) & \cdots & a'_{mn}(s) \end{bmatrix}$$

其中所有的非零的 $a'_{ik}(s)$, $i, k = 3, 4, \dots, m$ 均可被 $a'_{22}(s)$ 整除。再注意到(1.3.12)中右下角的子矩阵的所有元均能被 $a_{11}(s)$ 整除, 则对该子矩阵进行初等变换所得到的任意矩阵仍然能被 $a_{11}(s)$ 整除。故 $a'_{22}(s)$ 可被 $a_{11}(s)$ 整除。

⑥ 继续进行①~⑤的操作, 经过有限次之后必可将原矩阵化为

$$\begin{bmatrix} a^*_{11}(s) & & & & 0 \\ & a^*_{22}(s) & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a^*_r(s) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.13)$$

其中 $a^*_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$ 为不恒为零的多项式, 且 $a^*_i(s)$ 可整除 $a^*_{i+1, i+1}(s)$, $i = 1, 2, \dots, r-1$ 。

⑦ 对式(1.3.13)进行某一行乘以一个非零常数的操作, 可将其中的 $a_{ii}^*(s)$, $i=1, 2, \dots, r$, 均化为首一的多项式。然后令 $d_i(s) = a_{ii}^*(s)$, $i=1, 2, \dots, r$, 便得矩阵 $A(s)$ 的Smith标准型(1.3.11).

△△△

下述命题为上述定理和命题1.3.3的直接推论。

命题1.3.4 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 为数字矩阵; 且条件

$$\text{rank}[sI - A \quad B] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.3.14)$$

成立, 则存在适当阶的么模阵 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 满足

$$P(s)[A - sI \quad B]Q(s) = [0 \quad I] \quad (1.3.15)$$

在许多场合下, 我们需要求取满足上式的么模阵。对此我们有下述算法:

算法1.3.1 [化 $[A - sI \quad B]$ 为Smith标准型]

第一步: 组成增广矩阵

$$E(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B & I_n \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \end{bmatrix}$$

第二步: 在条件(1.3.14)下将 $E(s)$ 化为下述形式

$$E'(s) = \begin{bmatrix} [0 \quad I] & G(s) \\ H(s) & * \end{bmatrix}$$

第三步: 取 $P(s) = G(s)$, $Q(s) = H(s)$ 即为所求。

1.4 有理分式矩阵及其互质分解

众所周知, 两个多项式 $p(s)$ 和 $q(s)$ 之比 $p(s)/q(s) = w(s)$ 称为一个有理分式。如果一个与变量 s 相关的 $n \times r$ 的矩阵 $W(s)$, 其每一元 $w_{ij}(s)$ 均为变量 s 的有理分式, 则 $W(s)$ 称为一个有理分式矩阵。与标量的情形类似, 任何一个有理分式矩阵总可以表成

$$W(s) = N(s)D^{-1}(s) \quad (1.4.1)$$

或

$$W(s) = L^{-1}(s)H(s) \quad (1.4.2)$$

的形式, 其中 $N(s)$ 、 $D(s)$ 、 $L(s)$ 和 $H(s)$ 分别为 $n \times r$ 、 $r \times r$ 、 $n \times n$ 和 $n \times r$ 阶的多项式矩阵。式(1.4.1)称为 $W(s)$ 的右分解; 式(1.4.2)称为 $W(s)$ 的左分解。

有理分式矩阵的分解是不唯一的, 对此我们容易证得下述命题:

命题1.4.1 设 $W(s)$ 、 $N(s)$ 、 $D(s)$ 、 $L(s)$ 和 $H(s)$ 如上所述。 $U(s)$ 和 $V(s)$ 分别为两个 $r \times r$ 和 $n \times n$ 的可逆多项式矩阵, 令

$$\tilde{N}(s) = N(s)U(s), \quad \tilde{D}(s) = D(s)U(s)$$

$$\tilde{L}(s) = V(s)L(s), \quad \tilde{H}(s) = V(s)H(s)$$

则

$$W(s) = \tilde{N}(s)\tilde{D}^{-1}(s)$$

和

$$W(s) = \tilde{L}^{-1}(s)\tilde{H}(s)$$

成立。

在一个有理分式的众多的分解之中，其中一类称之为互质分解或既约分解的情形至关重要。为介绍这一概念，我们先从互质多项式矩阵入手。

1.4.1 互质多项式矩阵

定义1.4.1 设 $A(s)$ 、 $B(s)$ 和 $C(s)$ 分别为 $m \times n$ 、 $m \times p$ 和 $p \times n$ 的多项式矩阵，如果它们三者之间存在下述关系

$$A(s) = B(s)C(s) \quad (1.4.3)$$

则称 $B(s)$ 为 $A(s)$ 的左因子， $A(s)$ 为 $B(s)$ 的右倍式。

定义1.4.2 设 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 为两个同行数的多项式矩阵。如果多项式矩阵 $B(s)$ 同为 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的左因子，则称 $B(s)$ 为 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的左公因子。如果多项式矩阵 $D(s)$ 是 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的左公因子，且同时是 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的所有左公因子的右倍式，即对于 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的任意左公因子 $B(s)$ ，均有满足

$$D(s) = B(s)Z(s)$$

的多项式矩阵 $Z(s)$ 存在，则称 $D(s)$ 是 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的最大左公因子。

定义1.4.3 设 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 分别为 $m \times n_1$ 和 $m \times n_2$ ($n_1 + n_2 \geq m$) 的多项式矩阵。如果 $[A_1(s) \ A_2(s)]$ 的Smith标准型为 $[I_m \ 0]$ ，则称 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 左互质。

由命题1.3.4可知，对于数字矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ， $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ，当条件(1.3.14)满足时有 $(sI - A)$ 和 B 左互质。

下述定理揭示了矩阵互质的本质。

定理1.4.1 设 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 分别为 $m \times n_1$ 和 $m \times n_2$ 的多项式矩阵，且 $\text{rank}[A_1(s) \ A_2(s)] = m$ ，则下述三个条件等价：

- ① $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 左互质；
- ② $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的 $m \times m$ 的左最大公因子为幺模阵；
- ③ 存在 $n_1 \times m$ 和 $n_2 \times m$ 的多项式矩阵 $B_1(s)$ 和 $B_2(s)$ 满足

$$A_1(s)B_1(s) + A_2(s)B_2(s) = I_m \quad (1.4.4)$$

以上介绍了多项式矩阵的左因子和左互质的概念。对应的可以完全类似地定义多项式矩阵的右因子和右互质的概念。例如，对应于定义1.4.3和定理1.4.1，我们有：

定义1.4.3' 设 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 分别为 $m_1 \times n$ 和 $m_2 \times n$ ($m_1 + m_2 \geq n$) 的多项式矩阵。

如果矩阵 $\begin{bmatrix} A_1(s) \\ A_2(s) \end{bmatrix}$ 的Smith标准型为 $\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ ，则称 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 右互质。

定理1.4.1' 设 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 分别为 $m_1 \times n$ 和 $m_2 \times n$ 的多项式矩阵，且

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ A_2(s) \end{bmatrix} = n$$

则下面三个条件等价:

- ① $A_1(s)$ 与 $A_2(s)$ 右互质;
- ② $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 的 $n \times n$ 最大右公因子为幺模阵;
- ③ 存在 $n \times m_1$ 和 $n \times m_2$ 的多项式矩阵 $B_1(s)$ 和 $B_2(s)$ 满足

$$B_1(s)A_1(s) + B_2(s)A_2(s) = I \quad (1.4.5)$$

关于定理1.4.1和定理1.4.1'的证明,有兴趣的读者可参阅有关文献^[2, 3].

直接利用定义我们还有关于多项式矩阵互质的下述判据.

定理1.4.2 设 $N(s)$ 和 $D(s)$ 分别为 $n \times r$ 和 $r \times r$ 的多项式矩阵, 且 $D(s)$ 非奇异. 则 $N(s)$ 和 $D(s)$ 右互质的充要条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} = r, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.4.6)$$

1.4.2 有理分式矩阵的互质分解

定义1.4.4 设 $W(s)$ 为一个 $n \times r$ 的有理分式矩阵, 且具有分解(1.4.1)和(1.4.2). 当 $N(s)$ 和 $D(s)$ 右互质时, 式(1.4.1)称为 $W(s)$ 的右互质分解; 当 $L(s)$ 和 $H(s)$ 左互质时, 式(1.4.2)称为 $W(s)$ 的左互质分解. 互质分解也常称既不可简约分解或既约分解.

尽管有理分式矩阵的互质分解是有理分式矩阵分解中的很少的一类, 但它仍然是非唯一的. 下面的定理同时指出了有理分式矩阵互质分解的不唯一性及有理分式矩阵的不同的互质分解之间的关系.

定理1.4.3 给定一个 $n \times r$ 的有理分式矩阵 $W(s)$, 则

- ① $N_1(s)D_1^{-1}(s)$ 和 $N_2(s)D_2^{-1}(s)$ 同时为 $W(s)$ 的右互质分解的充要条件是存在幺模阵 $U(s)$, 使得

$$D_1(s) = D_2(s)U(s), \quad N_1(s) = N_2(s)U(s) \quad (1.4.7)$$

- ② $L_1^{-1}(s)H_1(s)$ 和 $L_2^{-1}(s)H_2(s)$ 同为 $W(s)$ 的左互质分解的充要条件是存在幺模阵 $V(s)$ 使得

$$L_1(s) = V(s)L_2(s), \quad H_1(s) = V(s)H_2(s) \quad (1.4.8)$$



证明 这里只证结论①, 结论②可类似地证明.

充分性 设

$$W(s) = N_2(s)D_2^{-1}(s)$$

为一右互质分解, 则由定理1.4.2可知

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N_2(s) \\ D_2(s) \end{bmatrix} = r \quad (1.4.9)$$

当条件(1.4.7)成立时, 显然有

$$W(s) = N_1(s)D_1^{-1}(s) \quad (1.4.10)$$

又由于

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N_1(s) \\ D_1(s) \end{bmatrix} = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} N_2(s) \\ D_2(s) \end{bmatrix} U(s) \right) = \text{rank} \begin{bmatrix} N_2(s) \\ D_2(s) \end{bmatrix} = r$$

则再由定理1.4.2可知, 式(1.4.10)亦为 $W(s)$ 的一右互质分解。

必要性 取

$$U(s) = D_2^{-1}(s)D_1(s) \quad (1.4.11)$$

则 $U(s)$ 非奇异, 且使得式(1.4.7)成立。因此下面只须证得 $U(s)$ 为么模阵即可。为此, 根据命题1.4.2我们只须证得 $U(s)$ 和 $U^{-1}(s)$ 均为多项式矩阵即可。

由于 $N_2(s)$ 和 $D_2(s)$ 右互质, 则由定理1.4.1可知存在矩阵 $Z(s)$ 和 $Y(s)$ 满足

$$Z(s)D_2(s) + Y(s)N_2(s) = I \quad (1.4.12)$$

再利用式(1.4.7)可将上式化为

$$Z(s)D_1(s)U^{-1}(s) + Y(s)N_1(s)U^{-1}(s) = I$$

于上式两端同时右乘矩阵 $U(s)$, 可得

$$U(s) = Z(s)D_1(s) + Y(s)N_1(s) \quad (1.4.13)$$

由于上式右端为一多项式矩阵, 故 $U(s)$ 必为多项式矩阵。再由 $N_1(s)$ 和 $N_2(s)$ 的右互质条件可知, 存在多项式矩阵 $T(s)$ 和 $R(s)$, 满足

$$T(s)D_1(s) + R(s)N_1(s) = I$$

将式(1.4.7)代入上式, 可得

$$T(s)N_2(s)U(s) + R(s)N_2(s)U(s) = I$$

于上式两端同时右乘矩阵 $U^{-1}(s)$, 可得

$$U^{-1}(s) = T(s)D_2(s) + R(s)N_2(s) \quad (1.4.14)$$

由此可知, $U^{-1}(s)$ 亦为多项式矩阵。

△△△

关于一般的有理分式矩阵 $W(s)$ 的既约分解的求取, 请参阅有关文献^[2-3]。

下面我们将考虑一类特殊的有理分式的右既约分解的求取问题。

1.4.3 矩阵 $(sI - A)^{-1}B$ 的右既约分解

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 为两个数字矩阵, 则

$$W(s) = (sI - A)^{-1}B \quad (1.4.15)$$

为一个 $n \times r$ 的多项式项阵。由命题1.4.3可知, 在条件

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} \equiv n, \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.4.16)$$

下, 式(1.4.15)可化为

算法1.4.1 [右既约分解式(1.4.17)的求取]

第一步: 利用算法1.3.1求取幺模阵 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 满足

$$P(s)[sI - A \quad B]Q(s) = [0 \quad I] \quad (1.4.18)$$

第二步: 将幺模阵 $Q(s)$ 做如下分块

$$Q(s) = \begin{bmatrix} Q_{11}(s) & Q_{12}(s) \\ Q_{21}(s) & Q_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (1.4.19)$$

其中 $Q_{11}(s)$ 和 $Q_{21}(s)$ 分别为 $n \times r$ 和 $r \times r$ 的多项式矩阵。

第三步: 取

$$N(s) = Q_{11}(s), \quad D(s) = Q_{21}(s) \quad (1.4.20)$$

则 $N(s)$ 与 $D(s)$ 满足右既约分解式(1.4.17)。

上述算法中的第一步中 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 的存在性是由命题1.4.1保证的。下面证明算法1.4.1的结论。

命题1.4.2 在(1.4.16)成立的条件下, 由算法1.4.1给出的多项式矩阵 $N(s)$ 和 $D(s)$ 右互质, 且 $D(s)$ 满秩, 另外使得式(1.4.17)成立。

证明

① 由于 $Q(s)$ 为幺模阵, 故必有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Q_{11}(s) \\ Q_{21}(s) \end{bmatrix} = r, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.4.21)$$

从而, $N(s) = Q_{11}(s)$ 和 $D(s) = Q_{21}(s)$ 右互质。

② 由式(1.4.20)和(1.4.21), 可知

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} = r, \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

由此与题设利用反证法可证得 $D(s)$ 满秩。

③ 由式(1.4.18)和式(1.4.19), 可得

$$P(s) \begin{bmatrix} A - sI & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11}(s) \\ Q_{21}(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (1.4.22)$$

由上式亦利用式(1.4.20), 有

$$(A - sI)N(s) + BD(s) = 0 \quad (1.4.23)$$

于上式两端同时左乘 $(A - sI)^{-1}$ 、右乘 $D^{-1}(s)$, 便得式(1.4.17)。

△△△

1.5 若当分解

若当分解是矩阵论中的一个最基本的结果。若当分解的特殊情况——对角分解, 是为人们所熟悉的简单情形。一般情形的若当分解涉及到矩阵特征值的代数重数与几何重数, 较为复杂。

矩阵的若当分解的导出本是以矩阵的特征值和特征向量为基础的。然而这里我们不准备介绍这一过程，而是反过来先承认矩阵的若当分解，在此基础上理解矩阵的特征结构及其一些相关概念和关系。对于若当分解的机理感兴趣的读者可以参阅线性代数方面的书籍^[29]

众所周知，矩阵的若当分解是指下述事实：

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，则存在矩阵 $J, V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ， V 可逆，满足

$$A = VJV^{-1} \quad (1.5.1)$$

其中， V 为矩阵 A 的特征向量矩阵， J 为矩阵 A 的若当标准型。

下面围绕式(1.5.1)来介绍一些与矩阵 A 的特征结构相关联的概念。

1.5.1 特征值的几何重数与代数重数

式(1.5.1)中的矩阵 J 为一个若当矩阵。一个若当矩阵的一般形式为

$$J = \text{Diag}[J_1 \ J_2 \ \cdots \ J_l] \quad (1.5.2)$$

$$J_i = \text{Diag}[J_{i1} \ J_{i2} \ \cdots \ J_{iq_i}] \quad (1.5.3)$$

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{p_{ij} \times p_{ij}}, \quad j = 1, 2, \dots, q_i \quad (1.5.4)$$

其中， λ_i 为矩阵 A 的特征值； J_{ij} 为矩阵 A 的与特征值 λ_i 相关联的若当块。

式(1.5.4)中的 q_i 称矩阵 A 的特征值 λ_i 的几何重数。直观地讲，一个矩阵的某特征值的几何重数即是该矩阵的若当标准型中与该特征值相关联的若当块的个数。

由式(1.5.1)易知

$$\text{rank}(A - \lambda_i I) = \text{rank}(J - \lambda_i I)$$

再注意到 $(J - \lambda_i I)$ 的特殊形式，可得

$$\text{rank}(A - \lambda_i I) = n - q_i \quad (1.5.5)$$

上式实际上即为矩阵 A 的特征值 λ_i 的几何重数 q_i 的基本定义式，它说明 q_i 为 $(A - \lambda_i I)$ 的零空间的维数。

由式(1.5.3)、(1.5.4)可见，在矩阵 A 的若当标准型中，与第 i 个特征值 λ_i 相关的若当块共有 q_i 个，即 $J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{iq_i}$ ，它们的阶数分别为 $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iq_i}$ 。定义

$$a_i = p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{iq_i} \quad (1.5.6)$$

则 a_i 称为矩阵 A 的第 i 个特征值 λ_i 的代数重数。直观地讲，一个矩阵的某特征值的代数重数即是该矩阵的若当标准型中与该特征值相关的所有若当块的阶数之和。从这一点显见矩阵 A 的代数重数 $a_i, i = 1, 2, \dots, l$ 满足关系

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_l = n \quad (1.5.7)$$

由式(1.5.1)易知

$$\det(sI - A) = \det(sI - J)$$

再注意到矩阵 J 的特殊形式可知存在多项式 $p_i(\lambda)$ 满足关系

$$\begin{cases} \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} p_i(\lambda) \\ p_i(\lambda_i) \neq 0 \end{cases} \quad (1.5.8)$$

上式实际上即为矩阵 A 的特征值 λ_i 的代数重数 α_i 的基本定义式。

当我们清楚了矩阵特征值的代数重数与几何重数及其它们在矩阵的若当标准型中的位置，便可以很容易证明下述命题了。

命题1.5.1 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，其若当矩阵的结构如上所述。记

$$\sigma_i = \min\{p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{i\alpha_i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

则

$$f(s) = \prod_{i=1}^l (s - \lambda_i)^{\sigma_i}$$

为矩阵 A 的最小多项式。

根据特征值的几何重数与代数重数，我们可以刻画两类重要的矩阵：一类是各特征值的几何重数与代数重数相等的矩阵，这类矩阵称为是非退化矩阵或简单矩阵，有时也称为可对角化矩阵，因为它们的若当标准型是对角阵；另一类是各特征值的几何重数均为1的矩阵，也即各若当块对应的特征值互异的矩阵，我们称这类矩阵为循环矩阵。由命题可得下述推论：

推论1.5.1 循环矩阵的特征多项式与其最小多项式等同。

1.5.2 广义特征向量链

对于若当分解式(1.5.1)，当矩阵 A 的若当标准型 J 具有式(1.5.2)~(1.5.4)的形式时，我们可对应地将特征向量矩阵 V 按列做如下分块：

$$\begin{cases} V = [V_1 & V_2 & \dots & V_l] \\ V_i = [V_{i1} & V_{i2} & \dots & V_{i\alpha_i}] \\ V_{ij} = [v_{ij}^1 & v_{ij}^2 & \dots & v_{ij}^{p_{ij}}] \end{cases} \quad (1.5.9)$$

显然，矩阵 V_i 是与矩阵 A 的第 i 个特征值 λ_i 相对应的部分，其子块 V_{ij} 是与若当块 J_{ij} 相对应的部分。

式(1.5.9)中的列向量 $v_{ij}^1, v_{ij}^2, \dots, v_{ij}^{p_{ij}}$ 称为矩阵 A 的第 i 个特征值 λ_i 的第 j 组广义特征向量链， p_{ij} 为该组广义特征向量链的长度。显然，一个矩阵的某特征值的广义特征向量链的组数等于该矩阵的若当标准型中与该特征值相关联的若当块的数目，即该特征值的几何重数。每组广义特征向量链的长度等于它所对应的若当块的阶数。

下面让我们从式(1.5.1)~(1.5.4)和式(1.5.7)~(1.5.9)来导出广义特征向量链的定义式。

将式(1.5.1)改成下述形式

$$AV = VJ \quad (1.5.10)$$

则进一步利用(1.5.2)~(1.5.4)和(1.5.7)~(1.5.9), 可将式(1.5.10)分解为

$$AV_j = V_j J_j, \quad j = 1, 2, \dots, q_i, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (1.5.11)$$

再注意到 V_j 和 J_j 的具体形式, 式(1.5.11)可进一步分解成

$$\begin{cases} (A - \lambda_i I)v_j^1 = 0 \\ (A - \lambda_i I)v_j^2 = v_j^1 \\ \vdots \\ (A - \lambda_i I)v_j^{p_j} = v_j^{p_j-1} \end{cases} \quad (1.5.12)$$

$$j = 1, 2, \dots, q_i, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

如果令 $v_j^0 = 0$, 则上式可统一地表示为

$$\begin{aligned} (A - \lambda_i I)v_j^k &= v_j^{k-1}, \quad v_j^0 = 0 \\ k &= 1, 2, \dots, p_j, \quad j = 1, 2, \dots, q_i, \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

式(1.5.12)或式(1.5.13)即为广义特征向量链的定义式。

由上述广义特征向量链的定义, 我们可以很容易证得关于友矩阵的下述结果:

命题1.5.2 对于由式(1.2.4)表出的友矩阵 A° , 若 λ 为其几何重数为1、代数重数为 k 的特征值, 则属于 λ 的广义特征向量链为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ (n-1)\lambda^{n-2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \binom{n-1}{2}\lambda^{n-2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \binom{n-1}{3}\lambda^{n-4} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \binom{n-1}{k-1}\lambda^{n-k} \end{bmatrix} \quad (1.5.14)$$

其中

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1}$$

1.5.3 若当分解的求取

这里我们直接给出若当分解的求取步骤, 至于其中的道理请读者自己思考。

已知某实方阵 A , 求其若当分解的算法可以描述如下:

算法1.5.1 [若当分解的求取]

第一步: 利用初等变换化矩阵 $(sI - A)$ 为对角型 $\Lambda(s)$;

第二步: 将 $\Lambda(s)$ 的对角线上的元素分解成互不相同的一次因式方幂的乘积;

第三步: 列出 $\Lambda(s)$ 的对角线上的所有互异一次因式 $(\lambda - \lambda_1)$, $(\lambda - \lambda_2)$, \dots , $(\lambda - \lambda_l)$, 则 λ_i , $i = 1, 2, \dots, l$ 即为矩阵 A 的各互异特征值。

第四步: 找出每个一次因式 $(\lambda - \lambda_i)$ 在 $\Lambda(s)$ 的对角线上的出现次数 q_i , 则 q_i 即为 A 的特征值 λ_i 的几何重数;

第五步: 按 $i = 1, 2, \dots, l$ 的顺序, 找出一一次因子 $(\lambda - \lambda_i)$ 在 $A(s)$ 的对角线的出现 q_i 次的幂次 $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iq_i}$, 它们即为 A 阵的若当标准型 J 中与 λ_i 相关的 q_i 个若当子块的阶次;

第六步: 根据 $l, \lambda_i, q_i, p_{ij}, j = 1, 2, \dots, q_i, i = 1, 2, \dots, l$ 的值和式(1.5.2)~(1.5.4)列写出 A 矩阵的若当标准型;

第七步: 对于每个 $j = 1, 2, \dots, q_i$ 和 $i = 1, 2, \dots, l$, 求解向量 v_{ij}' 满足

$$(A - \lambda_i I)^{p_{ij}} v_{ij}' = 0, \quad (A - \lambda_i I)^{p_{ij}-1} v_{ij}' \neq 0 \quad (1.5.15)$$

并使得 $v_{ij}', j = 1, 2, \dots, q_i, i = 1, 2, \dots, l$ 线性无关。然后取 $v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ij}', j = 1, 2, \dots, q_i$;

第八步: 对于每个 $i, i = 1, 2, \dots, l$, 按公式

$$\begin{cases} v_{ij}^{p_{ij}-1} = (A - \lambda_i I) v_{ij}^{p_{ij}} \\ v_{ij}^{p_{ij}-2} = (A - \lambda_i I) v_{ij}^{p_{ij}-1} \\ \vdots \\ v_{ij}^1 = (A - \lambda_i I) v_{ij}^2 \end{cases} \quad (1.5.16)$$

$$j = 1, 2, \dots, q_i$$

求出第 i 个特征值 λ_i 的 q_i 组广义特征向量链 $\{v_{ij}^1, v_{ij}^2, \dots, v_{ij}^{p_{ij}}\}, j = 1, 2, \dots, q_i$;

第九步: 基于上步中获得的 $v_{ij}^k, k = 1, 2, \dots, p_{ij}, j = 1, 2, \dots, q_i, i = 1, 2, \dots, l$ 和式(1.5.7)~(1.5.9)构成矩阵 A 的特征向量矩阵 V ;

第十步: 计算 AV 和 VJ , 并通过验证 $AV = VJ$ 是否成立检验结果的正确性。

下面我们通过一例来进一步说明上述算法的应用过程。

例1.5.1 求取下述矩阵 A 的若当分解

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这里我们只写出各个步骤的结果:

第一步:

$$\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & \lambda^2 - 4\lambda + 4 & \\ & & & & & \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 \end{bmatrix}$$

第二步:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda - 0 & & \\ & & & & (\lambda - 2)^2 & \\ & & & & & (\lambda - 2)^3 \end{bmatrix}$$

第三步: $A(\lambda)$ 中的互异一次因式为 $(\lambda - 2)$ 和 $(\lambda - 0)$, 故该六阶矩阵只有两个互异特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$;

第四步: 因子 $(\lambda - 2)$ 在 $A(\lambda)$ 中出现两次, 故 $q_1 = 2$; 因子 $(\lambda - 0)$ 出现一次, 故 $q_2 = 1$;

第五步: $(\lambda - 2)$ 出现两次的幂次分别为 2 和 3, 故 $p_{11} = 2, p_{12} = 3$; $(\lambda - 0)$ 出现一次的幂次亦为 1, 故 $p_{21} = 1$;

第六步: 列写若当矩阵

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

第七步: 通过求取

$$(A - 2I)^2 v'_{11} = 0, \quad (A - 2I)v'_{11} \neq 0$$

可得

$$v'_{11} = [0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1]^T$$

再通过求取

$$(A - 2I)^3 v'_{12} = 0, \quad (A - 2I)^2 v'_{12} \neq 0$$

可得

$$v'_{12} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

且易见 v'_{11}, v'_{12} 线性无关, 再通过求取

$$(A - 0I)v'_{21} = 0$$

可得

$$v'_{21} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1]^T$$

第八步: 经计算得

$$v_{11}^1 = (A - 2I)v'_{11} = [0 \ 0 \ 2 \ -2 \ 0 \ 0]^T$$

$$v_{12}^2 = (A - 2I)v'_{12} = [2 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$v_{12}^1 = (A - 2I)v'_{12} = [1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

第九步: 列写特征向量矩阵

$$V = \begin{bmatrix} v_{11}^1 & v_{11}^2 & v_{12}^1 & v_{12}^2 & v_{12}^3 & v_{21}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

第十步: 直接验证 $AV = VJ$, 可知结果正确.

1.6 广义Sylvester矩阵方程

在线性系统理论中, 有几类矩阵代数方程是非常重要的. 如Lyapunov矩阵方程、Riccati矩阵方程. 本节将讨论的是一类推广的Sylvester矩阵方程. 它们具有下述一般形式

$$AV + BW = VF \quad (1.6.1)$$

其中 A , B 分别为 $n \times n$ 和 $n \times r$ 的实矩阵; V 和 W 分别为 $n \times n$ 和 $r \times n$ 的复矩阵; F 为 n 阶的若当矩阵. 当特别取定 W 阵, 并令 $C = -BW$, 则式(1.6.1)化为下述常规的Sylvester矩阵方程

$$AV - VF = C \quad (1.6.2)$$

Sylvester 矩阵方程(1.6.1)和(1.6.2)在线性系统的极点配置、特征结构配置和观测器设计等方面均起着重要的作用.

1.6.1 求解问题与假设条件

广义Sylvester矩阵方程(1.6.1)的许多应用都基于该方程的求解. 该方程的求解问题可以描述如下:

给定已知的 $n \times n$ 阶和 $n \times r$ 阶定常实矩阵 A 和 B 以及 n 阶若当矩阵 F , 求取满足矩阵方程(1.6.1)的解析解, 即满足(1.6.1)的矩阵 V 和 W 的解析表达式. 如果方程(1.6.1)的一种解析解包含了方程(1.6.1)的一切解, 便称该解析解为完全的.

下面我们将在下述假设条件下给出方程(1.6.1)的两种完全解析通解.

假设A1: 对于任何 $s \in \mathbb{C}$, 矩阵 $[sI - A \ B]$ 行满秩.

假设A2: 若当矩阵 F 含有 l 个互异特征值, 其第 i 个特征值 s_i 的几何重数为 q_i , 且与其相关联的 q_i 个若当块 $F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{iq_i}$ 的阶数分别为 $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iq_i}$. 从而特征值 s_i 的代数重数为

$$m_i = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{iq_i} \quad (1.6.3)$$

且应有

$$m_1 + m_2 + \dots + m_l = n \quad (1.6.4)$$

上述假设A1实际上是本书后面第四章将要介绍的 $[A \ B]$ 为能控的条件; 假设A2称为矩阵 F 的若当结构条件, 对应于 F 阵的这一结构假设条件, 我们可以赋予矩阵 V 一种相应的

结构形式, 将它按列分块如下:

$$\begin{cases} V = [V_1 & V_2 & \cdots & V_l] \\ V_i = [V_{i1} & V_{i2} & \cdots & V_{iq_i}] \\ V_{ij} = [v_{ij}^1 & v_{ij}^2 & \cdots & v_{ij}^{p_{ij}}] \end{cases} \quad (1.6.5)$$

同样, 对于矩阵 W 也可以作下述对应的结构分块

$$\begin{cases} W = [W_1 & W_2 & \cdots & W_l] \\ W_i = [W_{i1} & W_{i2} & \cdots & W_{iq_i}] \\ W_{ij} = [w_{ij}^1 & w_{ij}^2 & \cdots & w_{ij}^{p_{ij}}] \end{cases} \quad (1.6.6)$$

按照矩阵 V 、 W 的上述分块结构, 在假设 A2 下, 矩阵 V 与向量组 $\{v_{ij}^k\}$ 之间、矩阵 W 与向量组 $\{w_{ij}^k\}$ 之间便定义了一种一一对应的关系, 而且方程(1.6.1)可分解成下述一组向量形式

$$\begin{aligned} (A - s_i I)v_{ij}^k + Bw_{ij}^k &= v_{ij}^{k-1}, \quad v_{ij}^0 = 0 \\ k &= 1, 2, \dots, p_{ij}; \quad j = 1, 2, \dots, q_i; \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

或

$$\begin{aligned} [A - s_i I \quad B] \begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix} &= v_{ij}^{k-1}, \quad v_{ij}^0 = 0 \\ k &= 1, 2, \dots, p_{ij}; \quad j = 1, 2, \dots, q_i; \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

从而确定方程(1.6.1)的解析解的问题便可以转化为求取满足式(1.6.7)或式(1.6.8)的向量 v_{ij}^k 和 w_{ij}^k 的表达式的问题。

1.6.2 完全解析解之一

由1.3节可知, 在假设 A1 下, 存在么模阵 $P(s) \in C^{n \times n}$ 和 $Q(s) \in C^{(n+r) \times (n+r)}$ 满足下式

$$P(s)[A - sI \quad B]Q(s) = [0 \quad I] \quad (1.6.9)$$

下面的定理基于么模阵 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 给出了方程(1.6.1)的完全参数解。

定理1.6.1 设矩阵 B 列满秩, 且假设 A1、A2 成立, 则方程(1.6.1)的一切解可由下述公式给出:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix} &= Q(s_i) \begin{bmatrix} f_{ij}^k \\ P(s_i)v_{ij}^{k-1} \end{bmatrix}, \quad v_{ij}^0 = 0 \\ k &= 1, 2, \dots, p_{ij}; \quad j = 1, 2, \dots, q_i; \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

其中 $f_{ij}^k \in C^r$, $k = 1, 2, \dots, p_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, q_i$, $i = 1, 2, \dots, l$ 为一组任意选取的参数向量, $P(s)$ 和 $Q(s)$ 为满足式(1.6.9)的么模阵。

证明 为完成定理的证明, 我们需要证明下面两个事实:

事实一 对于任意的参数向量 $f_{ij}^k \in C^r$, $k = 1, 2, \dots, p_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, q_i$, $i = 1, 2, \dots, l$,

由式(1.6.10)给出的 $\{v_{ij}^k\}$ 和 $\{w_{ij}^k\}$ 均满足向量方程(1.6.7)或(1.6.8):

事实二 满足向量方程(1.6.7)的任何一组 $\{v_{ij}^k\}$ 和 $\{w_{ij}^k\}$ 均可表为(1.6.10)的形式。

下面我们先来证明事实一。

现设式(1.6.10)成立, 则由式(1.6.9)和式(1.6.10), 有

$$\begin{aligned} [A - s_i I \quad B] \begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix} &= [A - s_i I \quad B] Q(s_i) \begin{bmatrix} f_{ij}^k \\ P(s_i) v_{ij}^{k-1} \end{bmatrix} = \\ P^{-1}(s_i) [0 \quad I] \begin{bmatrix} f_{ij}^k \\ P(s_i) v_{ij}^{k-1} \end{bmatrix} &= v_{ij}^{k-1}, \quad v_{ij}^0 = 0 \\ k &= 1, 2, \dots, p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, q_i, \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned}$$

此即为式(1.6.8)。事实一得证。

下面证明事实二。

现设式(1.6.8)成立, 与其两端同时左乘 $P(s_i)$, 可得

$$\begin{aligned} P(s_i) [A - s_i I \quad B] \begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix} &= P(s_i) v_{ij}^{k-1} \\ k &= 1, 2, \dots, p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, q_i, \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (1.6.11)$$

如果记

$$\begin{bmatrix} f_{ij}^k \\ l_{ij}^k \end{bmatrix} = Q^{-1}(s_i) \begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (1.6.12)$$

则由式(1.6.11)及(1.6.9), 可得

$$[0 \quad I] \begin{bmatrix} f_{ij}^k \\ l_{ij}^k \end{bmatrix} = P(s_i) v_{ij}^{k-1}, \quad v_{ij}^0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (1.6.13)$$

由此可导出

$$l_{ij}^k = P(s_i) v_{ij}^{k-1}, \quad v_{ij}^0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (1.6.14)$$

将上式代入式(1.6.12), 并于式(1.6.12)两端同时左乘 $Q(s_i)$, 便可得欲证之式(1.6.10)。

△△△

定理1.6.1以迭代的形式给出了方程(1.6.1)的完全解析解(1.6.10)。该解的求取主要依赖于满足式(1.6.9)的么模阵 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 的求取。关于 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 的求取, 一般可利用算法 1.3.1 通过对矩阵 $[A - sI \quad B]$ 进行初等变换求得。

解析解(1.6.10)中的参向量 $\{f_{ij}^k\}$ 代表了方程(1.6.1)的解中的自由度。特别地选取这些参数, 可以得到方程(1.6.1)的满足某种特定性质的解。

1.6.3 完全解析解之二

由1.4节可知, 在假设A1下, 有下述矩阵右有理分解式

$$(sI - A)^{-1}B = N(s)D^{-1}(s) \quad (1.6.15)$$

其中 $N(s) \in \mathbb{C}^{n \times r}$, $D(s) \in \mathbb{C}^{r \times r}$ 为右互素的矩阵多项式。关于满足上式的 $N(s)$ 和 $D(s)$ 的求取, 我们在1.4节中已给出了具体的方法——算法1.4.1。下面我们利用上述右既约分解式给出方程(1.6.1)的另一种完全解析解。

定理1.6.2 设矩阵 B 满秩, 且假设 A_1 、 A_2 成立, 则矩阵方程(1.6.1)的一切解可由下述公式表出:

$$\begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} f_{ij}^k + \dots + \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} f_{ij}^1 \quad (1.6.16)$$

$$k = 1, 2, \dots, p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, q_i, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

其中, $f_{ij}^k \in \mathbb{C}^r$, $k = 1, 2, \dots, p_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, q_i$, $i = 1, 2, \dots, l$ 为任意选取的参数向量, $N(s)$ 和 $D(s)$ 为满足右既约分解式(1.6.15)的矩阵多项式。

证明 首先我们证明由公式(1.6.16)给出的向量满足方程(1.6.7)。为此我们将右既约分解式(1.6.15)改写为

$$(A - sI)N(s) + BD(s) = 0$$

于上式两端同时关于 s 求导, 得

$$(A - sI) \frac{d}{ds} N(s) + B \frac{d}{ds} D(s) = N(s) \quad (1.6.17)$$

再于上式两端同时关于 s 求导, 得

$$(A - sI) \frac{d^2}{ds^2} N(s) + B \frac{d^2}{ds^2} D(s) = 2 \frac{d}{ds} N(s)$$

再一次于上式两端关于 s 求导, 并重复这一过程, 最后可得到 k 个如下关系式(包含(1.6.17)在内)

$$(A - sI) \frac{d^l}{ds^l} N(s) + B \frac{d^l}{ds^l} D(s) = l \frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}} N(s), \quad l = 0, 1, 2, \dots, k-1 \quad (1.6.18)$$

将上式中的 s 换成 s_i , 并于其两端同时右乘向量 $(1/l!) f_{ij}^{k-l}$, 得

$$(A - s_i I) \frac{1}{l!} \frac{d^l}{ds^l} N(s_i) f_{ij}^{k-l} + B \frac{1}{l!} \frac{d^l}{ds^l} D(s_i) f_{ij}^{k-l} = \frac{1}{(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}} N(s_i) f_{ij}^{k-l} \quad (1.6.19)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, k-1, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

如果我们将式(1.6.20)中的所有式子两端对应相加, 再利用式(1.6.16)可得式(1.6.7)。此即说明由式(1.6.16)给出的向量满足向量方程(1.6.7)。

下面我们需要证明解(1.6.16)的完全性。这一点可如下简单推得。

注意到式(1.6.10)和式(1.6.16)均为矩阵方程(1.6.1)的解, 且二者含有相同数目的自由参数 $\{f_{ij}^k\}$, 式(1.6.10)又是方程(1.6.1)的一个完全解, 故式(1.6.16)亦为方程(1.6.1)的完全解。

△△△

不同于定理1.6.1, 定理1.6.2给出了广义Sylvester矩阵方程(1.6.1)的一个直接的显式的完全解析解。只要当满足右既约分解式(1.6.15)的 $N(s)$ 和 $D(s)$ 求出后, 该完全解析解便立刻可以

写出来。通过特别地选取解中的参数向量 $\{f_{ij}^k\}$ ，可得到方程的具有某种意义的特殊解。

例1.6.1 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

则由算法1.4.1易得

$$N(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D(s) = \begin{bmatrix} 0 & s-1 \\ s^2 & -1 \end{bmatrix}$$

从而由定理1.6.2易得，以该组矩阵构成的广义Sylvester矩阵方程的完全解析通解为

$$V = \begin{bmatrix} N(-1)f_{11}^1 & \frac{d}{ds}N(-1)f_{11}^1 + N(-1)f_{11}^2 & N(-3)f_{21}^1 \\ D(-1)f_{11}^1 & \frac{d}{ds}D(-1)f_{11}^1 + D(-1)f_{11}^2 & D(-3)f_{21}^1 \end{bmatrix}$$

如果特别取

$$f_{11}^1 = f_{21}^1 = [1 \ 0]^T, \quad f_{11}^2 = [0 \ 1]^T$$

可得该方程的一组特解为

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

小 结

在第二章中我们将发现，一个动态系统的状态空间是一个线性空间。这里我们介绍线性空间是希望读者能够更好、更准确地理解状态空间方法。线性变换是与线性空间紧密相关的一个概念。它是我们理解第二章介绍的线性系统代数等价性的基础。

第二节中的几方面内容都是矩阵代数中最基本的结果。由于后面多次用到，故在这里加以叙述。第三节介绍的多项式矩阵及其初等变换为第四节的有理分式及其互质分解提供了基础，同时它也和第四节中介绍的矩阵分式 $(sI - A)^{-1}B$ 的右既约分解一样，为第六节中介绍的广义矩阵方程的求解提供了直接的条件。

若当分解对于许多人都不陌生。然而若深究起来，其中涉及到矩阵特征值的几何重数与代数重数和矩阵的广义特征向量链的概念，确实是较难掌握的。对于矩阵 A 的每一个几何重数为 q 、代数重数为 a 的特征值，存在 q 组线性无关的广义特向量链，其各组广义特征向量链的长度之和等于 a 。以所有这些特征向量链构成的特征向量矩阵为变换阵，矩阵 A 相似于其若当标准型。这就是一般情形下若当分解的含义。特别当矩阵 A 的所有特征值互异或矩阵 A 为非退化时，若当分解化为对角分解。由于这一结果在后面多次使用，而且它还

是后面1.6节和第六章中的特征结构配置问题的基础，因而在1.5节对其进行了介绍。但这里我们只是对与其相关的概念和结果做了简单交代，而远非对其从机理上讲解。

Sylvester矩阵方程、Lyapunov矩阵方程和Riccati矩阵方程这三类矩阵方程在线性系统理论中起着举足轻重的作用。后两类方程将分别在第五章和第八章中涉及。1.6节介绍的广义Sylvester矩阵方程在线性系统的极点配置、特征结构配置和状态观测器设计等问题中均有直接的应用。这里介绍的关于Sylvester矩阵方程的结果为作者的工作。对这一问题感兴趣的读者可进一步参阅作者的工作^[32, 38]。

习 题

1.1 检验下列集合对于所指的线性运算是否构成实数域上的线性空间：

(1) 设 A 是一个实数矩阵， A 的实系数多项式 $f(A)$ 的全体，对于矩阵的加法和数量乘法；

(2) 全体实对称(反对称、上三角)矩阵对于矩阵的加法和数量乘法；

(3) 全体正实数，对于如下定义的数量乘法：

$$a \oplus b = ab, \quad k \cdot a = a^k$$

1.2 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{bmatrix}, \quad w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

(1) 证明矩阵 A 的全体实系数多项式构成实数域上的一个线性空间，记为 V_0 ；

(2) 求 V_0 的维数及一组基。

1.3 已知 \mathbf{R}^4 的两组基

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = [1 & 0 & 0 & 0]^T \\ \varepsilon_2 = [0 & 1 & 0 & 0]^T \\ \varepsilon_3 = [0 & 0 & 1 & 0]^T \\ \varepsilon_4 = [0 & 0 & 0 & 1]^T \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_1 = [2 & 1 & -1 & 1]^T \\ \eta_2 = [0 & 3 & 1 & 0]^T \\ \eta_3 = [5 & 3 & 2 & 1]^T \\ \eta_4 = [6 & 6 & 1 & 3]^T \end{cases}$$

(1) 求取由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵；

(2) 求 $\xi = [1 \ 0 \ 0 \ -1]^T$ 在两组基下的坐标。

1.4 已知齐次方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

试确定其解空间的基与维数。

1.5 设

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = [2 & 1 & 3 & 1]^T \\ \varepsilon_2 = [1 & 2 & 0 & 1]^T \\ \varepsilon_3 = [-1 & 1 & -3 & 0]^T \\ \varepsilon_4 = [1 & 1 & 1 & 1]^T \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_1 = [2 & 1 & 3 & -1]^T \\ \eta_2 = [-1 & 1 & -3 & 1]^T \\ \eta_3 = [4 & 5 & 3 & -1]^T \\ \eta_4 = [1 & 5 & -3 & 1]^T \end{cases}$$

试求出上述两组向量所生成的 \mathbf{R}^4 的子空间的基与维数。

1.6 判别下面所定义的变换 T , 哪些是线性的, 哪些不是:

(1) 在线性空间 V 中, $T\xi = \xi + \alpha$, 其中 $\alpha \in V$ 是固定向量;

(2) 在线性空间 V 中, $T\xi = \alpha$, 其中 $\alpha \in V$ 是一固定向量;

(3) 在 \mathbf{R}^3 中, $T(x_1, x_2, x_3)^T = (x_1^2, x_2 + x_3, x_3^2)^T$;

(4) 把复数域看作是复数域上的线性空间, $T\xi = \bar{\xi}$;

(5) 在 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 中, $T(X) = BXC$, 其中 $B, C \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为两个固定矩阵。

1.7 已知 \mathbf{R}^3 中的变换 $T: T(x_1, x_2, x_3)^T = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)^T$,

(1) 证明 T 为一线性变换;

(2) 确定 T 在基 $\varepsilon_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\varepsilon_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$, $\varepsilon_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ 下的矩阵。

1.8 证明下述六个函数

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= e^{\alpha x} \cos bx, & \varepsilon_2 &= x e^{\alpha x} \sin bx, & \varepsilon_3 &= x e^{\alpha x} \cos bx \\ \varepsilon_4 &= x e^{\alpha x} \sin bx, & \varepsilon_5 &= \frac{1}{2} x^2 e^{\alpha x} \cos bx, & \varepsilon_6 &= \frac{1}{2} x^2 e^{\alpha x} \sin bx \end{aligned}$$

的所有实系数线性组合构成实数域上一个六维空间, 并求微分变换 D 在基 $\varepsilon_i, i=1,2,3,4,5,6$ 下的矩阵。

1.9 设三维线性空间 V 上的线性变换 T 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(1) 求 T 在基 $\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ 下的矩阵;

(2) 求 T 在基 $\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵;

(3) 求 T 在基 $\varepsilon_3 + \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ 下的矩阵。

1.10 给定 \mathbf{R}^3 的两组基

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = [1 & 0 & 1]^T \\ \varepsilon_2 = [2 & 1 & 0]^T \\ \varepsilon_3 = [1 & 1 & 1]^T \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_1 = [1 & 2 & 1]^T \\ \eta_2 = [2 & 2 & -1]^T \\ \eta_3 = [2 & -1 & -1]^T \end{cases}$$

定义线性变换

$$T\varepsilon_i = \xi_i, \quad i = 1, 2, 3$$

(1) 写出由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵;

(2) 写出 T 分别在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 和 η_1, η_2, η_3 下的矩阵.

1.11 判断下列多项式是否非奇异:

$$(1) Q(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 3s + 4 & s + 1 \\ s + 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) Q(s) = \begin{bmatrix} s + 2 & s + 3 \\ s^2 + 3s + 2 & s^2 + 4s + 3 \end{bmatrix}$$

$$(3) Q(s) = \begin{bmatrix} s + 3 & s + 4 & 1 \\ 1 & s + 1 & s + 2 \\ 0 & s^2 + s & s \end{bmatrix}$$

1.12 判断下列各个多项式向量组是否为线性无关:

$$(1) \begin{bmatrix} s^2 + 7s + 12 \\ s + 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s^2 + 5s + 4 \\ s + 1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 0 \\ s + 3 \\ s + 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ s + 2 \\ s^2 + s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s + 1 \\ s \\ 3 \end{bmatrix}$$

1.13 判断下列各多项式矩阵是否为幺模阵:

$$(1) Q(s) = \begin{bmatrix} s + 4 & 1 \\ s^2 + 2s + 1 & s^2 + s \end{bmatrix} \quad (2) Q(s) = \begin{bmatrix} s + 1 & 1 & s + 1 \\ 0 & s + 2 & 3 \\ s + 3 & 1 & s + 3 \end{bmatrix}$$

1.14 令 P 和 $Q(s)$ 分别为 n 阶常量阵和多项式矩阵, 现知 $Q(s)$ 为幺模阵, 则能否断言 $PQ(s)$ 也必为幺模阵, 说明理由.

1.15 化下述多项式矩阵为Smith标准型:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (s+1)^2 & -s^2 + s + 1 \\ 0 & 0 & -(s+1) & s - 1 \\ s + 1 & s^2 & s^2 + s + 1 & s \end{bmatrix}$$

1.16 判断下列矩阵对是否互质:

$$(1) D(s) = \begin{bmatrix} s + 1 & 0 \\ s^2 + s - 2 & s - 1 \end{bmatrix}, \quad N(s) = [s + 2 \quad s + 1]$$

$$(2) D(s) = \begin{bmatrix} 0 & -(s+1)^2(s+2) \\ (s+2)^2 & (s+2) \end{bmatrix}, \quad N(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ -s & s^2 \end{bmatrix}$$

1.17 证明任何幺模阵的Smith标准型为单位阵.

1.18 求取下述矩阵的若当分解:

$$(1) A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3) A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

1.19 设 A 和 B 为同维的非奇异方阵, 证明 AB 的特征值必等同于 BA 的特征值, 并确定二者的特征向量之间的关系。

1.20 已知

$$(1) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

求 A^{100} 。

1.21 已知

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

试求取广义Sylvester方程(1.6.1)的完全解析解。

1.22 可否利用定理1.6.1或定理1.6.2获得Sylvester方程(1.6.2)的解? 试推导之。

第二章 线性系统的数学描述

线性系统的时间域理论,是指以时间域数学模型为系统描述的,直接在时间域内分析和综合线性系统的运动和特性的理论。在系统和控制理论发展的早期阶段,时间域理论只能用来分析单输入-单输出系统的运动,系统的描述是反映输出-输入关系的单变量高阶微分方程,分析的方面主要限于运动的稳定性。60年代以后,卡尔曼将状态和状态空间的概念和方法系统地引入到系统和控制理论中来,极大地推动了时间域理论的发展,把时间域理论发展成为既适用于单输入-单输出系统,又适用于多输入-多输出系统;既可处理定常系统,又可处理时变系统;既能用来分析系统,又能进行系统综合的完整的和成熟的理论和方法。这一理论的特点是,采用状态空间描述作为系统的数学模型,并以状态空间方法为核心。本章中,我们首先来讨论建立系统的状态空间描述问题,包括状态和状态空间的概念、状态空间描述的组成和形式,以及状态空间描述在变换下的特性等。在随后的各章中,我们将在状态空间描述的基础上逐步阐明系统的结构性质和采用状态空间法分析、综合线性系统时要解决的各种问题。

2.1 线性系统的传递函数描述

在讨论线性系统的状态空间描述之前,先来介绍一下我们熟知的传递函数描述。

在控制系统的分析与设计中,第一步就是建立系统的数学模型,对所研究的对象给予适当的数学描述。用传递函数描述系统就是一种行之有效的方法。

传递函数描述的是系统的输入-输出关系。用它描述系统时,假定对系统结构的内部信息一无所知,能够得到的只是系统的输入信息和输出信息。在这种情况下,对我们来说,系统的内部结构就像一个“黑箱”一样。因此,传递函数只能刻画系统的输入-输出特性,它被称为系统的输入-输出描述或外部描述。

使用传递函数方法描述系统所用的数学工具主要是拉普拉斯(Laplace)变换。因此,它主要适用于描述定常线性系统。对于单输入-单输出线性定常系统,传递函数是指在初始条件为零的前提下,输出的拉普拉斯变换与输入的拉普拉斯变换之比。

怎样求一个系统的传递函数呢?一般说来,如果所研究的对象内部的确就是一个“黑箱”,那么就可以通过输入、输出数据采用系统辨识方法确定它,但有关这部分内容已超过了本书所讨论的范围。现在已知系统的动力学模型的前提下,研究确定它的传递函数的问题。

2.1.1 单变量情形的简单回顾

已知由下列常系数微分方程描述的定常线性系统:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t) \quad (2.1.1)$$

其中 $y(t)$ 叫做系统的输出, $u(t)$ 叫做系统的输入, t 表示时间, 诸 a_i 和 b_j , $i = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, m$, 都是实常数。假设 $y(t)$ 以及它的直到 $n-1$ 阶导数和 $u(t)$ 以及它的直到 $m-1$ 阶导数的初始值全为零, 并且取 $t_0 = 0$ 为初始时刻 (这并不失一般性), 这时, 对方程(2.1.1)两边取拉普拉斯变换, 得

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)U(s)$$

或者

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.1.2)$$

其中 $Y(s)$ 和 $U(s)$ 分别为 $y(t)$ 和 $u(t)$ 的拉普拉斯变换, s 为拉普拉斯算符。

令

$$G(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.1.3)$$

那么, 依定义和等式(2.1.3), 称 $G(s)$ 为系统(2.1.1)的传递函数。如果 $m \leq n$, 则 $G(s)$ 为 s 的真有理分式, 这时称系统(2.1.1)为物理能实现的。今后, 我们总是讨论物理能实现的系统。因此, 一个系统的传递函数如果是有理分式, 它必是真有理分式。

多项式

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

叫做系统(2.1.1)的特征多项式, 代数方程

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

叫做系统(2.1.1)的特征方程。特征方程的根或者说特征多项式的零点叫做系统(2.1.1)的极点。多项式

$$b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0$$

的零点叫做系统(2.1.1)的零点。如果系统(2.1.1)有相同的零点和极点, 则称这个系统有零极相消。零极相消后剩下的系统的极点和零点分别称为传递函数 $G(s)$ 的极点和零点。如果相消后剩下的系统的极点和零点都在复平面的左半开平面内, 那么称这个系统为最小相位的。

系统(2.1.1)的特征多项式的次数称为系统的阶。按照这个定义, 系统(2.1.1)是 n 阶的。一个系统的阶, 实际上是指刻画其动力学行为所需要的独立变量的最少个数。

用传递函数描述系统(2.1.1)时, 有

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

因此, 如果给了一个传递函数, 那么也就相当于确定了一个系统。从系统的这种描述法可知, 传递函数的确刻画了系统的输入-输出关系, 反映了系统的外部信息。因此, 从传递函数本身无法了解系统的内部结构, 两个内部结构完全不同的系统其传递函数可以完全一样。

2.1.2 传递函数矩阵及有关定义

考察多输入-多输出的线性定常系统, 令输入变量组为 $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$, 输出变量组为 $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, 且假设系统的初始条件为零. 用 $\hat{y}_i(s)$ 和 $\hat{u}_j(s)$ 分别表示 y_i 和 u_j 的拉普拉斯变换, $g_{ij}(s)$ 表示系统的由第 j 个输入端到第 i 个输出端的传递函数, 其中 $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r$, 那么由系统的线性属性(即满足叠加原理)可以导出

$$\begin{cases} \hat{y}_1(s) = g_{11}(s)\hat{u}_1(s) + g_{12}(s)\hat{u}_2(s) + \dots + g_{1r}(s)\hat{u}_r(s) \\ \hat{y}_2(s) = g_{21}(s)\hat{u}_1(s) + g_{22}(s)\hat{u}_2(s) + \dots + g_{2r}(s)\hat{u}_r(s) \\ \vdots \\ \hat{y}_m(s) = g_{m1}(s)\hat{u}_1(s) + g_{m2}(s)\hat{u}_2(s) + \dots + g_{mr}(s)\hat{u}_r(s) \end{cases}$$

其向量方程的形式则为

$$\hat{y}(s) = \begin{bmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{y}_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \dots & g_{1r}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(s) & \dots & g_{mr}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{u}_r(s) \end{bmatrix} = G(s)\hat{u}(s)$$

我们称由上式所定义的 $G(s)$ 为系统的传递函数矩阵. 容易看出, $G(s)$ 为 $m \times r$ 的一个有理分式矩阵. 并且, 当 $G(s)$ 的元传递函数 $g_{ij}(s)$ ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r$) 除严格真外, 还包含真有理分式时, 即它的一个或一些传递函数中分母和分子多项式具有相等的最高幂次时, 称 $G(s)$ 为真有理分式矩阵; 而当 $g_{ij}(s)$ 均为严格真有理分式时, 即 $g_{ij}(s)$ 的分子多项式的最高幂次均小于分母多项式的最高幂次时, 称 $G(s)$ 为严格真有理分式矩阵. 通常, 当且仅当 $G(s)$ 为真的或严格真的时, 它才是物理上可以实现的. 作为一个判别准则, 当且仅当

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \text{零阵}$$

或

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \text{非零常数矩阵}$$

成立时, 相应的传递函数矩阵 $G(s)$ 为严格真的或真的.

2.2 线性系统的状态空间描述

在以后的分析中将看到, 外部描述一般只是对系统的一种不完整的描述, 它不能反映黑箱内部的某些部分. 内部描述则是系统的一种完整的描述, 它能完全表征系统的一切动力学特性. 只有在系统满足一定属性的前提下, 这两类描述之间才具有等价的关系. 有关这方面的详细的讨论将在第三章中给出.

2.2.1 状态与状态空间

系统的状态空间描述是建立在状态和状态空间概念的基础上的. 状态和状态空间本身, 并不是一个新的概念, 长期以来在质点和刚体动力学中得到了广泛的应用. 但是, 随着将它们引入到系统和控制理论中来, 并使之适合于描述系统的动态过程, 这两个概念才

有了更为一般性的含义。

定义2.2.1 完全地表征系统时间域行为的一个最小内部变量组称为动力学系统的状态。组成这个变量组的变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 称为系统的状态变量，其中 $t \geq t_0$ ， t_0 为初始时刻。由状态变量构成的列向量

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq t_0 \quad (2.2.1)$$

称为系统的状态向量，简称为状态。状态向量取值的向量空间称为状态空间。

为了正确理解状态和状态空间的含义，有必要对其定义作如下几点解释：

① 状态变量组可完全地表征系统行为的属性体现在：只要给定这组变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 在初始时刻的值，以及输入变量 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)$ 在 $t \geq t_0$ 各瞬时的值，则系统中任何一个变量在 $t \geq t_0$ 时的运动行为也就随之完全确定了。

② 状态变量组的最小性体现在：状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是为完全表征系统行为所必须的系统变量的最少个数，减少变量数将破坏表征的完全性，而增加变量数将是完全表征系统行为所不需要的。

③ 状态变量组在数学上的特征体现在： $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 构成系统变量中线性无关的一个极大变量组。考虑到状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 只能取为实数值，因此状态空间是建立在实数域上的向量空间，且维数即为 n 。对于确定的某个时刻，状态表示为状态空间中的一个点；而状态随时间的变化过程，则构成了状态空间中的一条轨迹。

④ 状态变量组包含了系统的物理特征：当组成状态的变量个数 n 为有穷正整数时，相应的系统为有穷维系统，且称 n 为系统的阶次；当 n 为无穷大时，相应的系统则是无穷维系统。一切集中参数系统都属于有穷维系统，而一切分布参数系统则属于无穷维系统。

由上述定义可知，系统中变量的个数必大于 n ，而其中仅有 n 个是线性无关的。这一点决定了状态变量在选取上的不唯一性。那么两个不同的状态变量组之间具有什么关系呢？下述命题对此给出了明确的回答。

命题2.2.1 一个动态系统的任意选取的两个状态变量组之间为线性非奇异变换的关系。

证明 设 \mathbf{x} 和 $\bar{\mathbf{x}}$ 为任意选取的两个状态向量，且记

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$$

则据状态的定义可知， $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ 为线性无关，因此可将 x_1, \dots, x_n 的每一个变量表为 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ 的线性组合，且这种表示必是唯一的

$$\begin{cases} x_1 = p_{11}\bar{x}_1 + \dots + p_{1n}\bar{x}_n \\ \vdots \\ x_n = p_{n1}\bar{x}_1 + \dots + p_{nn}\bar{x}_n \end{cases}$$

通过引入系数矩阵, 则上式还可表为

$$\mathbf{x} = P\bar{\mathbf{x}} \quad (2.2.2)$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

同理, 由于 x_1, \dots, x_n 也为线性无关, 因此又有 n 阶矩阵 Q 满足

$$\bar{\mathbf{x}} = Q\mathbf{x} \quad (2.2.4)$$

从而由式(2.2.2)和式(2.2.4)可立即导出

$$PQ = QP = I \quad (2.2.5)$$

上式表明 P 和 Q 互为逆, 也即任意选取的两个状态 \mathbf{x} 和 $\bar{\mathbf{x}}$ 为线性非奇异变换关系。

△△△

2.2.2 动态系统的状态空间描述

引入了状态和状态空间的概念之后, 就可以建立动力学系统的状态空间描述了。从结构的角度讲, 一个动力学系统可用图2.2.1所示的方块图来表示, 其中 x_1, \dots, x_n 是表征系统行为的状态变量组, u_1, \dots, u_r 和 y_1, \dots, y_m 分别为系统的输入变量组和输出变量组。

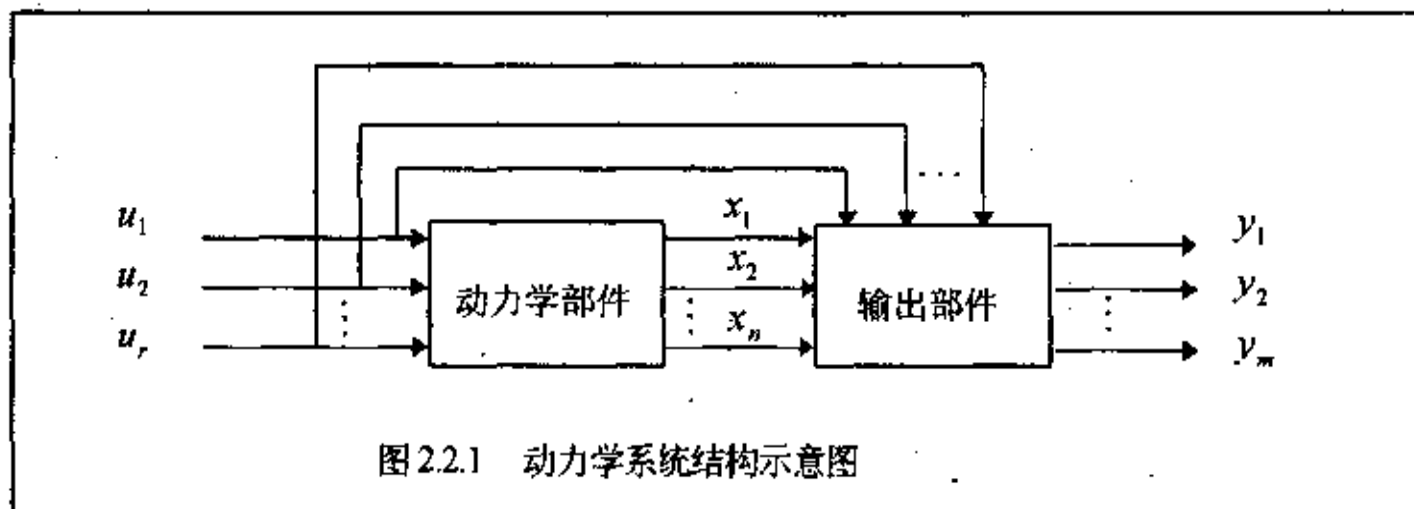


图 2.2.1 动力学系统结构示意图

与输入-输出描述不同, 状态空间描述把系统动态过程的描述考虑为一个更为细致的过程: 输入引起系统状态的变化, 而状态和输入则决定了输出的变化。

输入引起状态的变化是一个运动的过程, 数学上必须采用微分方程或差分方程来表征, 并且称这个数学方程为系统的状态方程。就连续动态过程而言, 考虑最为一般的情况, 则其状态方程为如下的一个一阶非线性时变微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \end{cases} \quad t \geq t_0 \quad (2.2.6)$$

在引入向量表示的基础上, 还可将状态方程简洁地表示为向量方程的形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad t \geq t_0 \quad (2.2.7)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}, f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

状态和输入决定输出的变化是一个变量间的转换过程，描述这种转换过程的数学表达式为变换方程，并且称其为系统的输出方程或量测方程。最为一般情况下，一个连续动力学系统的输出方程具有如下的形式

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ y_m = g_m(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \end{cases} \quad (2.2.9)$$

或表为向量方程的形式，则为

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.2.10)$$

其中

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad (2.2.11)$$

系统的状态空间描述由状态方程和输出方程所组成。联合写出来，则为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), & t \geq t_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{cases}$$

由于采用向量方程的形式，当状态变量、输入变量和输出变量的数目增加时，并不增加状态空间描述在表达形式上的复杂性。

2.2.3 线性系统的状态空间描述与相关概念

如果限于考虑线性的连续动态过程，那么此时在系统的状态方程和输出方程中，向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 将都具有线性的关系，从而线性系统的状态空间描述可表为如下一般形式

$$L_T: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, & t \geq t_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.2.12)$$

与一般情形一样，这里， $\mathbf{x}(t)$ 是 n 维向量，叫做系统的状态向量， n 称为系统的阶； $\mathbf{u}(t)$ 是 r 维向量，叫做系统的控制输入向量， r 称为系统的输入维数； $\mathbf{y}(t)$ 是 m 维向量，叫做系统的量测输出向量， m 称为系统的输出维数；另外， $\mathbf{A}(t)$ 是 $n \times n$ 阶矩阵，叫做系统矩阵； $\mathbf{B}(t)$ 是 $n \times r$ 阶矩阵，叫做控制分布矩阵或输入矩阵； $\mathbf{C}(t)$ 是 $m \times n$ 阶矩阵，叫做量测矩阵或输出矩阵； $\mathbf{D}(t)$ 是 $m \times r$ 阶矩阵，叫做前馈矩阵。这些矩阵统称为系统的系数矩阵，它们的每个元都是 t 的分段连续函数。

如果系统的输入维数 $r = 1$ ，则称系统为单输入系统；如果系统的输出维数 $m = 1$ ，则称系统为单输出系统；如果 $m = r = 1$ ，则称系统为单输入-单输出系统，或简称为单变量

系统。

在系统 L_T 中, 如果 $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $C(t)$ 和 $D(t)$ 都是与时间无关的常值矩阵, 那么这个系统称为定常的, 此时它可表为

$$L: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & t \geq t_0 \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.2.13)$$

与定常系统相对应, 系统 L_T 称为时变的。

由于线性系统(2.2.12)或(2.2.13)完全由系统的参数矩阵决定, 因而在许多情形下我们将它们简单地记成 $[A(t), B(t), C(t), D(t)]$ 和 $[A, B, C, D]$ 。

对于定常线性系统(2.2.13), 我们称系统矩阵 A 的特征值、特征向量、若当标准型、特征方程和特征多项式为系统(2.2.13)的特征值、特征向量、若当标准型、特征方程和特征多项式。系统的特征值也称为系统的极点。

我们知道, 对于单输入-单输出系统而言, 有零点的概念。但对于多变量系统而言, 却有下列三种不同的零点概念。

定义2.2.1 对于系统(2.2.13), 我们称满足

$$\text{rank}[sI_n - A \quad B] < n \quad (2.2.14)$$

的 s 为系统的输入解耦零点; 称满足

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix} < n \quad (2.2.15)$$

的 s 为系统的输出解耦零点; 称满足

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI_n - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} < n + \min\{r, m\} \quad (2.2.16)$$

的 s 为系统的传输零点。

上述各种系统的零点概念与后续将要遇到的能控、能观性和可稳、可检测性等许多重要概念有着密切的关系。

线性系统(2.2.12)和(2.2.13)或它们的一些特例为本书所研究的对象, 在后面要屡次出现。这里要指出的是, 本小节中关于线性系统(2.2.12)和(2.2.13)的有关变量的记号与系统的阶次和输入-输出维数在全书中都是有效的, 因而, 在很多情况下当我们再提及这些系统时, 都不再指明其变量的含义和维数。

2.2.4 线性系统状态空间描述的列写举例

涉及到系统的状态空间描述的求取, 通常可以采用两条途径, 一是分析的途径, 适用于结构和参数为已知的系统。它先直接运用相应的物理原理组成系统的动力学方程, 然后通过选取合适的状态变量组, 进一步把系统原始方程化为上述形式的状态方程和输出方程。另一是辨识的途径, 适用于结构和参数难于搞清楚的系统。它通过实验手段取得数据并采用适当方法确定系统的输入-输出模型, 然后再由所得到的系统输入-输出描述来导出相应的状态空间描述。通过实验手段取得数据, 进而确定系统的输入-输出模型的过程称为系统辨识和参数估计, 其内容已超出了本书的范围。由系统的输入-输出描述来导出相

应的状态空间描述的过程称为系统的实现，在第四章中将有所涉及。

下面我们就一个简单的系统讨论其状态空间描述的求取问题，意在阐明列写系统的状态方程和输出方程的一般步骤。

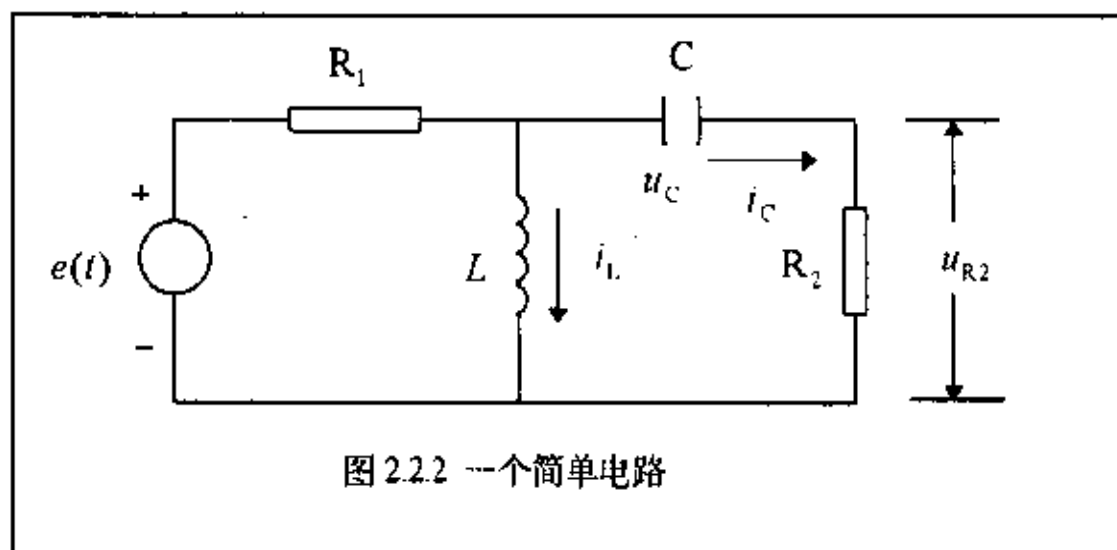


图 2.2.2 一个简单的电路

例 2.2.1 考察图 2.2.2 所示的简单电路，电路各组成元件的参数值为已知，输入变量取为电压源 $e(t)$ ，输出变量取为电阻的端电压 u_{R2} 。

第一步：确定状态变量

根据电路理论可知，此电路最多有 2 个线性无关的变量；因此，可选取独立储能元件的变量，即电容端电压 u_C 和流经电感的电流 i_L 作为电路的状态变量。

第二步：列出原始电路方程

运用电路定律，可列出图中左、右两个回路的电路方程为

$$R_1(i_L + i_C) + L \frac{di_L}{dt} = e(t) \quad \text{和} \quad u_C + R_2 i_C = L \frac{di_L}{dt}$$

考虑到规定 u_C 和 i_L 为状态变量，并有 $i_C = C du_C / dt$ ，所以可将上述方程改写为只包含未知变量 u_C 和 i_L 的方程组

$$R_2 C \frac{du_C}{dt} - L \frac{di_L}{dt} = -u_C \quad \text{和} \quad R_1 C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di_L}{dt} = -R_1 i_L + e(t)$$

第三步：导出状态方程

首先，以 du_C / dt 和 di_L / dt 为待定变量求解上述联立方程，得到

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} u_C - \frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} i_L + \frac{1}{(R_1 + R_2)C} e(t)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} u_C - \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} e(t)$$

进而，将其表为向量方程的形式，就导出了此电路的状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} & -\frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} e(t)$$

第四步：导出输出方程

根据电路关系式，有

$$u_{R2} = R_2 i_C = R_2 C \frac{du_C}{dt} = \frac{-R_2}{R_1 + R_2} u_C + \frac{-R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t)$$

将其改写后即得到此电路的输出方程

$$u_{R2} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] e(t)$$

2.3 两种描述形式的比较及相互转换

2.3.1 两种描述形式的比较

前两节研究了线性系统的两种描述方法，即传递函数方法和状态空间方法，现对这两种描述方法作一下比较。

首先，两种方法使用的数学工具不同。传递函数方法以拉氏变换为工具，一般说来仅能描述定常线性系统，而状态空间方法以现代数学为工具，既可以描述定常线性系统，又可以描述时变线性系统。其实，状态空间方法还适用于描述各种类型的非线性系统。

其次，对于很复杂的线性系统，有时建立它的状态方程和量测方程是很麻烦的，这时借助于对系统输入-输出信号的量测，采用系统辨识方法可能会比较容易地确定系统的传递函数或脉冲响应函数，而要辨识系统完整的状态方程和量测方程有时是做不到的。

第三，传递函数是经典控制理论中实现分析和综合的基础，它可借助于一些简单的方法完成反馈控制系统的设计，例如，根轨迹或伯德(Bode)图都是行之有效的设计方法。利用这些方法往往可以通过手工计算和做图来完成系统的分析和设计。状态空间方法是现代控制理论中系统设计的基础，它能够解决那些经典理论所不能处理的问题。不过，用状态空间方法设计系统时，往往要借助于数字电子计算机。

最后需要指出的是，传递函数方法仅仅描述了系统的输入-输出关系，反映了系统的外部特性，从系统的传递函数中看不到系统的内部结构性质。为说明这一点，我们来研究一例。

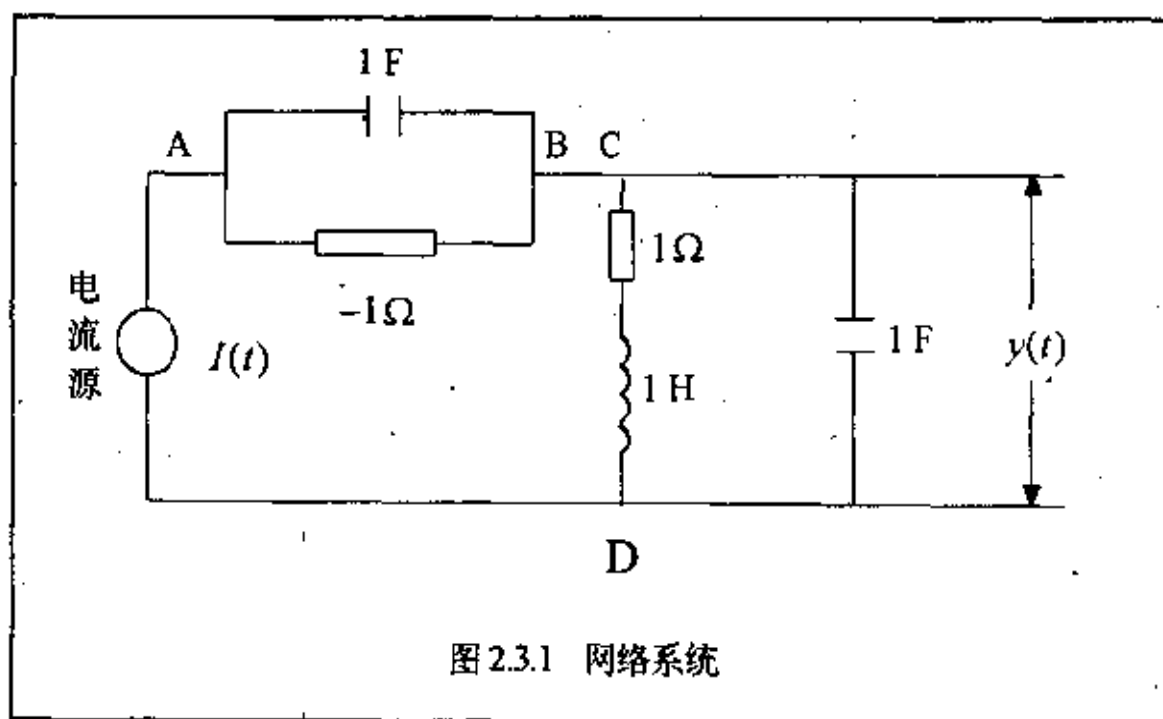


图 2.3.1 网络系统

例2.3.1 对于图 2.3.1 所示的网络系统，设系统的输入电流为 $I(t)$ ，输出电压为 $y(t)$ 。由 C 点到 D 点之间平行板电容的两端电压为 $x_1(t)$ ，流经电阻电感的电流为 $x_2(t)$ ，由 A 点到 B 点之间平行板电容的两端电压为 $x_3(t)$ 。显然， $y(t) = x_1(t)$ 。

由克希霍夫电流定律得出

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) + x_2(t) &= I(t) \\ \dot{x}_3(t) - x_3(t) &= I(t)\end{aligned}$$

再由克希霍夫电压定律得

$$x_1(t) = \dot{x}_2(t) + x_2(t)$$

于是得到系统的状态方程和量测方程为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

由此看出，它是一个三阶系统。这个系统的特征方程为

$$(s-1)(s^2+s+1)=0$$

另一方面，我们容易求得该系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

它所代表的是一个稳定的二阶系统。

从上例可以看出，如果仅着眼于该系统的输出特性，似乎感到系统的性能很好，即使在非零初始条件下，表面看来系统的输出也将随着时间的增长而趋于零。但实际上，这个系统的传递函数根本没有反映出A点到B点这个环节的特性，而这个环节恰恰是对整个系统的正常工作影响极大的一部分。在这个环节里，由于电容支路和电阻支路的极性相反，因此，当电容器初始电压不等于零时，即使电流源不存在，A、B两点之间的电压也将随着时间的增长而趋于无穷大，结果可能导致电容被击穿，使整个系统不能工作。但这一点从系统的传递函数中是看不出来的，在状态空间方法中反应为系统的特征多项式有一个不稳定极点。因此，在某些时候，传递函数方法不能完全地描述系统。然而，用状态空间方法描述系统，它不仅能够反映系统的输入-输出关系，也可描述在任何初始条件下系统内部结构的动力学行为。所以，状态空间方法能更完善地描述系统。

总而言之，传递函数方法和状态空间方法各有所长。人们为了有效地进行系统的分析与综合而设计反馈控制系统时，应该熟悉这两种描述方法。对于给定的具体问题，用哪种方法处理方便，就采用哪种方法。

对于线性定常系统，状态空间描述和传递函数描述在一定条件下是可以相互转换的，下面考虑二者的转换问题。

2.3.2 化输入-输出描述为状态空间描述

由输入-输出描述确定状态空间描述的问题称为实现问题。关于实现问题的一般理论将在第四章中有所涉及。本节限于单输入-单输出的线性定常系统，讨论由系统的输入-输

出时域描述导出其状态空间描述的方法，目的是使对状态空间描述及其与输入-输出描述间的关系有一个更为具体和更为直观的了解。

问题的提法：考虑一个单输入-单输出线性定常系统，令 y 和 u 分别为其输出变量和输入变量，则输出和输入间的因果关系可用如下的一个单变量高阶微分方程来描述

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = \\ b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

其中， $y^{(i)} = d^i y / dt^i$ ， $u^{(j)} = d^j u / dt^j$ ， $m \leq n$ 。另一方面，如上一节中所指出过的，线性定常系统的状态空间描述必具有如下的形式

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \quad (2.3.2)$$

由于所考虑的为单输入-单输出系统，所以这里 b 为 $n \times 1$ 阵， c 为 $1 \times n$ 阵，而 d 为标量。于是，我们的目的即是由输入-输出时域描述(2.3.1)导出状态空间描述(2.3.2)，这一问题归结为选取适当的状态变量组并确定各个系数矩阵 A 、 b 、 c 和 d 。显然，随着按不同方式来选取系统的状态变量组，状态空间描述中的系数矩阵组 (A, b, c, d) 也将相应地不同。下面，我们来给出两种典型的方法。

方法一 为便于讨论，引入微分算子符号 $p = d/dt$ ，可进而把(2.3.1)的输入-输出描述表示为如下的形式

$$y = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} u \quad (2.3.3)$$

并且容易看出，当 $m = n$ 时，上式中的有理分式是真的；当 $m < n$ 时，这个有理分式是严格真的。考虑到对应于这两种情况下的状态空间描述有着不同形式，所以下面分别加以讨论。

(1) $m < n$ 的情形

首先，将式(2.3.3)进一步改写为

$$\begin{cases} \tilde{y} = \frac{1}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} u \\ y = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) \tilde{y} \end{cases} \quad (2.3.4)$$

或将其表示为如下的形式

$$\begin{cases} \tilde{y}^{(n)} + a_{n-1} \tilde{y}^{(n-1)} + \dots + a_1 \tilde{y}^{(1)} + a_0 \tilde{y} = u \\ y = b_m \tilde{y}^{(m)} + b_{m-1} \tilde{y}^{(m-1)} + \dots + b_1 \tilde{y}^{(1)} + b_0 \tilde{y} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

选取状态变量组

$$x_1 = \tilde{y}, \quad x_2 = \tilde{y}^{(1)}, \quad \dots, \quad x_n = \tilde{y}^{(n-1)} \quad (2.3.6)$$

就可得到

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \tilde{y}^{(1)} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \tilde{y}^{(2)} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = \tilde{y}^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u \end{cases} \quad (2.3.7)$$

和

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_m x_{m+1} \quad (2.3.8)$$

再表 $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ 为状态向量, 那么通过把上述方程(2.3.7)和(2.3.8)表为向量方程的形式, 可导出此种情况下对应于输入-输出描述(2.3.1)的状态空间描述为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.3.9)$$

$$y = [b_0 \ \cdots \ b_m \ 0 \ \cdots \ 0] x$$

例2.3.2 给定系统的输入-输出描述为

$$y^{(3)} + 16y^{(2)} + 194y^{(1)} + 640y = 160u^{(1)} + 720u$$

则利用式(2.3.9)即可定出相应的一个状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -194 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [720 \ 160 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(2) $m = n$ 的情形

先将式(2.3.3)中的有理分式进行严格真化, 可导出

$$y = \left[b_n + \frac{(b_{n-1} - b_n a_{n-1})p^{n-1} + \cdots + (b_0 - b_n a_0)}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \right] u \quad (2.3.10)$$

由此可有

$$\begin{cases} \tilde{y}^{(n)} + a_{n-1}\tilde{y}^{(n-1)} + \cdots + a_1\tilde{y}^{(1)} + a_0\tilde{y} = u \\ y = (b_{n-1} - b_n a_{n-1})\tilde{y}^{(n-1)} + \cdots + (b_0 - b_n a_0)\tilde{y} + b_n u \end{cases} \quad (2.3.11)$$

注意到(2.3.11)的第一个方程等同于(2.3.5)的第一个方程, 所以在按式(2.3.6)的状态变量组的选取下, 可知其状态方程同于 $m < n$ 的情况. 而由(2.3.11)的第二个方程可进而得到

$$y = (b_0 - b_n a_0)x_1 + \cdots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1})x_n + b_n u \quad (2.3.12)$$

由此即可导出此种情况下对应于输入-输出描述(2.3.1)的状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.3.13)$$

$$y = [(b_0 - b_n a_0) \cdots (b_{n-1} - b_n a_{n-1})] \mathbf{x} + b_n u$$

例2.3.3 给定系统的输入-输出描述为

$$y^{(3)} + 16y^{(2)} + 194y^{(1)} + 640y = 4u^{(3)} + 160u^{(1)} + 720u$$

则利用(2.3.13)即可定出其相应的一个状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -194 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [-1840 \quad -616 \quad -64] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 4u$$

方法二 为易于理解,不妨区分为 $m=0$ 、 $m=n$ 的两种情况进行讨论。实质上, $m=n$ 的情况代表了一般的情况。当 m 为小于 n 的任意正整数时,即等价于所讨论的情况中,系数 $b_k = 0, k = n, n-1, \dots, m+1$ 。

(1) $m=0$ 的情形

此时,输入-输出描述(2.3.1)可写为

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_0u \quad (2.3.14)$$

取状态变量组

$$x_1 = y, x_2 = y^{(1)}, \dots, x_n = y^{(n-1)} \quad (2.3.15)$$

则可导出

$$y = x_1 \quad (2.3.16)$$

和

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y^{(1)} = x_2 \\ \dot{x}_2 = y^{(2)} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + b_0u \end{cases} \quad (2.3.17)$$

令状态向量 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$, 并将上述方程表为向量方程的形式,即得到此种情况下的状态空间描述为

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{array} \right] x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]x$$
(2.3.18)

(2) $m=n$ 的情形

此时系统的输入-输出描述具有如下的形式

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_nu^{(n)} + \cdots + b_1u^{(1)} + b_0u$$
(2.3.19)

把状态变量组取为 y 和 u 及它们的各阶导数的下述组合

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0u \\ x_2 = y^{(1)} - \beta_0u^{(1)} - \beta_1u \\ x_3 = y^{(2)} - \beta_0u^{(2)} - \beta_1u^{(1)} - \beta_2u \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} - \beta_0u^{(n-1)} - \beta_1u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2}u^{(1)} - \beta_{n-1}u \end{cases}$$
(2.3.20)

并按规律写出 x_{n+1} 的表达式

$$x_{n+1} = y^{(n)} - \beta_0u^{(n)} - \beta_1u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-1}u^{(1)} - \beta_nu$$

其中, $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_n$ 为一组待定常数, 则由式(2.3.20)及 x_{n+1} 的表达式可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y^{(1)} - \beta_0u^{(1)} = x_2 + \beta_1u \\ \dot{x}_2 = y^{(2)} - \beta_0u^{(2)} - \beta_1u^{(1)} = x_3 + \beta_2u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} - \beta_0u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-2}u^{(1)} = x_n + \beta_{n-1}u \\ \dot{x}_n = y^{(n)} - \beta_0u^{(n)} - \beta_1u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-1}u^{(1)} = x_{n+1} + \beta_nu \end{cases}$$
(2.3.21)

另外, 将式(2.3.20)的各行依次乘以 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$, 并注意到 x_{n+1} 的表达式可得

$$\begin{cases} a_0y = a_0x_1 + a_0\beta_0u \\ a_1y^{(1)} = a_1x_2 + a_1\beta_0u^{(1)} + a_1\beta_1u \\ a_2y^{(2)} = a_2x_3 + a_2\beta_0u^{(2)} + a_2\beta_1u^{(1)} + a_2\beta_2u \\ \vdots \\ a_{n-1}y^{(n-1)} = a_{n-1}x_n + a_{n-1}\beta_0u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\beta_{n-1}u \\ y^{(n)} = x_{n+1} + \beta_nu^{(n)} + \beta_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + \beta_0u^{(1)} + \beta_nu \end{cases}$$
(2.3.22)

$$(\beta_n + a_{n-1}\beta_{n-1} + \dots + a_1\beta_1 + a_0\beta_0)u = b_n u^{(n)} + \dots + b_1 u^{(1)} + b_0 u \quad (2.3.23)$$

令

$$\begin{cases} \beta_0 = b_n \\ \beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0 \\ \beta_2 = b_{n-2} - a_{n-1}\beta_1 - a_{n-2}\beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n = b_0 - a_{n-1}\beta_{n-1} - a_{n-2}\beta_{n-2} - \dots - a_1\beta_1 - a_0\beta_0 \end{cases} \quad (2.3.24)$$

则式(2.3.23)化为

$$x_{n+1} + a_{n-1}x_n + \dots + a_1x_2 + a_0x_1 = 0$$

利用上式, 式(2.3.21)可改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + \beta_n u \end{cases}$$

再注意到 $\beta_0 = b_n$ 及

$$y = x_1 + \beta_0 u \quad (2.3.25)$$

表 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, 就可得到此种情况下的状态空间描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{x} + b_n u \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

例2.3.4 给定系统的输入-输出描述为

$$y^{(3)} + 16y^{(2)} + 194y^{(1)} + 640y = 4u^{(3)} + 160u^{(1)} + 720u$$

先利用式(2.3.24)定出

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_3 = 4 \\ \beta_1 &= b_2 - a_2\beta_0 = -64 \\ \beta_2 &= b_1 - a_2\beta_1 - a_1\beta_0 = 408 \\ \beta_3 &= b_0 - a_2\beta_2 - a_1\beta_1 - a_0\beta_0 = 4048 \end{aligned}$$

从而由式(2.3.26)即可导出相应的状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -194 & -16 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -64 \\ 408 \\ 4048 \end{bmatrix} u$$

2.3.3 化状态空间描述为传递函数描述

现在我们来导出由状态空间描述的系数矩阵所表示的 $G(s)$ 关系式。

定理2.3.1 线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0, \quad t \geq t_0 \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.3.27)$$

的传递函数矩阵为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.3.28)$$

并且, 当 $D \neq 0$ 时 $G(s)$ 为真的, 当 $D = 0$ 时 $G(s)$ 为严格真的, 且有

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = D \quad (2.3.29)$$

证明 对式(2.3.27)作拉普拉斯变换, 可导出

$$\begin{cases} s\hat{x}(s) = A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \\ y(s) = C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s) \end{cases} \quad (2.3.30)$$

进而, 由式(2.3.30)的第一个关系式又得到

$$(sI - A)\hat{x}(s) = B\hat{u}(s) \quad (2.3.31)$$

且考虑到 $(sI - A)$ 作为多项式矩阵必是非奇异的, 因此, 式(2.3.31)可改写为

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) \quad (2.3.32)$$

而把式(2.3.32)代入式(2.3.30)的第二个关系式, 即得到

$$\hat{y}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]\hat{u}(s) \quad (2.3.33)$$

从而, 由此就可导出式(2.3.28)。再考虑到

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \quad (2.3.34)$$

且 $\text{adj}(sI - A)$ 每个元多项式的最高幂次均都小于 $\det(sI - A)$, 所以必有

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (sI - A)^{-1} = 0 \quad (2.3.35)$$

于是, 由式(2.3.28)和式(2.3.35)即可导出式(2.3.29)。进一步易知, 当 $D \neq 0$ 时, $G(\infty)$ 为非零常阵, 故由式(2.3.28)给出的 $G(s)$ 为真的; 而当 $D = 0$ 时, $G(\infty)$ 为零矩阵, 所以相应地 $G(s)$ 为严格真的。

△△△

2.4 线性系统的代数等价性

用状态空间描述系统时, 首先需要选取一组状态变量, 建立状态方程和量测方程。然而一个系统的状态变量的选择及其相应的状态方程和量测方程并不唯一, 也就是说, 利用状态空间法描述一个确定的系统时, 由于所选取的状态变量的不同会得到不同的状态空间模型。那么这些模型之间有什么联系呢? 它们是否都能够反映该系统的基本特性呢? 这显然是我们应该考虑的一个重要问题。

2.4.1 代数等价系统

当我们利用状态空间法描述一个系统时, 所谓“选取两组不同的状态向量”是什么含义? 一个 n 维的线性系统的状态空间 V 是 n 维的, 它的两组不同的状态向量 x 和 \bar{x} 均完全表征了系统的动力学行为, 因而 x 和 \bar{x} 应为 V 中的包含有相同“信息量”的两个向量, 从而从线性变换的观点来看, x 和 \bar{x} 之间应该由一个满秩线性变换相联系。对此命题2.2.1已经给出了肯定的回答, 即对于某 n 维线性系统的两个不同状态向量 x 和 \bar{x} , 必存在 n 阶可逆矩阵 P 满足

$$\bar{x} = Px \quad (2.4.1)$$

设有一定常线性系统, x 和 \bar{x} 均为其状态向量, 则该系统分别以 x 和 \bar{x} 为状态向量的状态空间描述可一般地表为

$$L: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.4.2)$$

和

$$L': \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases} \quad (2.4.3)$$

再由命题2.2.1可知存在可逆矩阵 P 满足式(2.4.1)。由式(2.4.1)两端同时关于时间 t 求导, 并利用系统 L 和 L' 的表达式, 可得

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \bar{B} = PB, \bar{C} = CP^{-1}, \bar{D} = D \quad (2.4.4)$$

定义2.4.1 已知两个同维的由式(2.4.2)和式(2.4.3)表示的线性定常系统 L 和 L' , 如果存在一个适当阶的定常可逆矩阵 P , 使得系统 L 和 L' 的系统参数矩阵满足式(2.4.4), 则称系统 L 和 L' 为代数等价的。

根据上述定义和上面的推导, 有下述命题:

命题2.4.1 同一线性定常系统的两个不同的状态空间描述为代数等价的。

值得注意的是, 上述命题仅指出同一系统的不同状态空间描述之间是代数等价的, 但这并不排除两个不同系统的状态空间描述为代数等价的可能性。

2.4.2 代数等价系统的公有属性

既然在相当广泛的意义上讲, 相互代数等价的状态空间模型所描述的是同一系统的特性, 那么它们之间必然要具有许多共同属性。下面对此给出些确定的结论。

命题2.4.2 相互代数等价的线性定常系统具有相同的特征多项式、特征方程和极点。

证明 只要注意到下述关系即可

$$\det(sI - \bar{A}) = \det[P(sI - A)P^{-1}] = \det(sI - A)$$

△△△

命题2.4.3 相互代数等价的线性定常系统具有相同的输入解耦零点、输出解耦零点和传输零点。

证明 注意到式(2.4.4), 我们有

$$\text{rank}[sI - \bar{A} \quad \bar{B}] = \text{rank}[sI - PAP^{-1} \quad PB] =$$

$$\begin{aligned} \text{rank}(P[sI - A \quad BP]P^{-1}) &= \\ \text{rank}[sI - A \quad BP] &= \\ \text{rank}\left([sI - A \quad B] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}\right) &= \\ \text{rank}[sI - A \quad B] & \end{aligned}$$

完全类似地可获得

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$$

和

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & D \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

△△△

命题2.4.4 相互代数等价的线性定常系统具有相同的传递函数。

证明 注意到代数等价条件(2.4.4), 可得

$$\begin{aligned} \bar{W}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + D &= CP^{-1}(sI - PAP^{-1})^{-1}PB + D = \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D = W(s) \end{aligned}$$

△△△

代数等价系统的公有属性揭示了“代数等价”这一概念的内在本质。随着后继内容的不断深入, 我们将陆续地介绍代数等价系统的公有属性。在今后的讨论中, 像系统的零、极点这类代数等价系统的公有量亦称之为线性定常系统在坐标变换下的不变量, 而像输入-输出传递特性这类代数等价系统的不变性亦称为定常线性系统在坐标变换下的不变性。

2.5 复合系统的数学模型

由两个或两个以上的子系统按一定方式连接构成的系统称为组合系统。组合的基本方式可分为串联、并联和反馈三种类型。一个比较复杂的实际系统, 常常就是包含几种连接方式的一个组合系统。本节中, 仅就上述三种基本组合方式, 分别讨论相应的组合系统的状态空间描述。

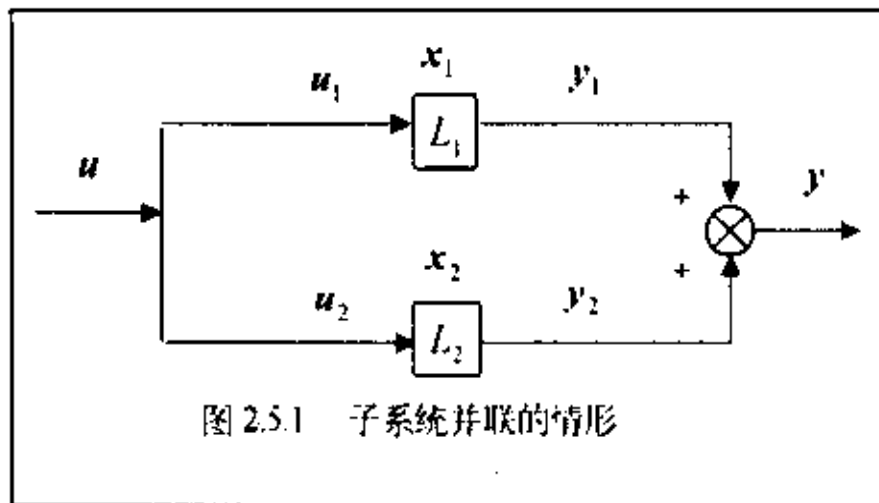
2.5.1 子系统并联的情形

考虑由两个子系统

$$L_i \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i \\ y_i = C_i x_i + D_i u_i, \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (2.5.1)$$

经并联构成的组合系统, 如图2.5.1所示。

不难看出, 两个子系统可进行并联的条件为



$$\left. \begin{aligned} \dim(u_1) &= \dim(u_2) \\ \dim(y_1) &= \dim(y_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.2)$$

式中符号 $\dim(\cdot)$ 表示向量 (\cdot) 的维数。在实现了并联后，系统在变量上的特点为

$$u_1 = u_2 = u, \quad y_1 + y_2 = y \quad (2.5.3)$$

于是，对并联组合系统，由式(2.5.1)和式(2.5.3)可导出其动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + (D_1 + D_2) u \end{cases} \quad (2.5.4)$$

表 $[x_1^T \ x_2^T]^T$ 为组合系统的状态，并将式(2.5.4)加以改写，即得到并联组合系统的状态空间描述为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y &= [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [D_1 + D_2] u \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

现推广讨论由 N 个子系统并联构成的组合系统，则通过与上述相类同的推导可导出组合系统的状态空间描述的一般表达式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} u \\ y &= [C_1 \ \cdots \ C_N] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + [D_1 + \cdots + D_N] u \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

进一步，子系统的传递函数矩阵为

$$G_i(s) = C_i (sI - A_i)^{-1} B_i + D_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.5.7)$$

那么，利用 $u_1 = u_2 = \cdots = u_N$ 和 $y = y_1 + y_2 + \cdots + y_N$ 就可导出并联组合系统的传递函数矩阵为

$$G(s) = \sum_{i=1}^N G_i(s) \quad (2.5.8)$$

2.5.2 子系统串联的情形

考虑图2.5.2所示的由两个子系统 L_1 和 L_2 经串联构成的组合系统，其中子系统的状态空间描述由式(2.5.1)表示。

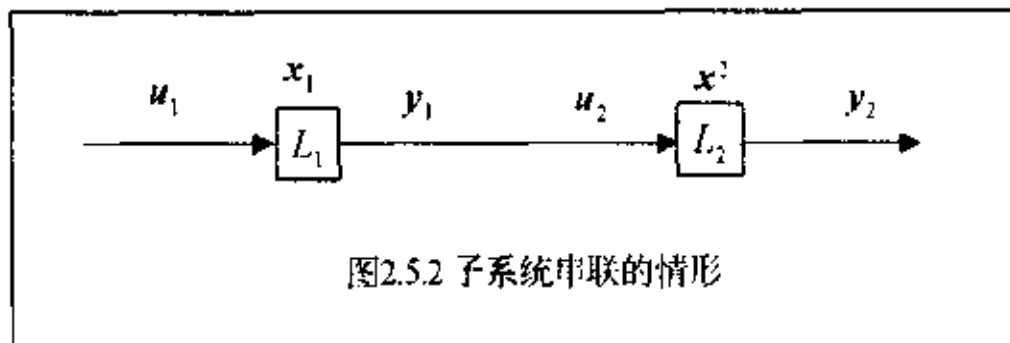


图2.5.2 子系统串联的情形

两个子系统可以作串联连接的条件为

$$\dim(y_1) = \dim(u_2) \quad (2.5.9)$$

而在实现 L_1-L_2 顺序的串联连接后组合系统在变量上的特点为

$$u = u_1, \quad u_2 = y_1, \quad y_2 = y \quad (2.5.10)$$

由此，利用式(2.5.1)和式(2.5.10)可导出串联组合系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 + B_2 D_1 u \\ y = C_2 x_2 + D_2 C_1 x_1 + D_2 D_1 u \end{cases} \quad (2.5.11)$$

或将其写成为标准化的形式，即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [D_2 C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (D_1 D_2) u \quad (2.5.12)$$

类似地，也可导出由 N 个子系统顺序串联构成的组合系统的状态空间描述，但其形式相当复杂，此处从略。利用

$$u_1 = u, \quad u_2 = y_1, \quad \dots, \quad u_N = y_{N-1}, \quad y_N = y \quad (2.5.13)$$

可导出串联组合系统的传递函数矩阵为

$$G(s) = G_N(s)G_{N-1}(s)\cdots G_1(s) \quad (2.5.14)$$

其中，子系统的传递函数矩阵 $G_i(s)$ 由式(2.5.7)给出。

2.5.3 具有子系统反馈的情形

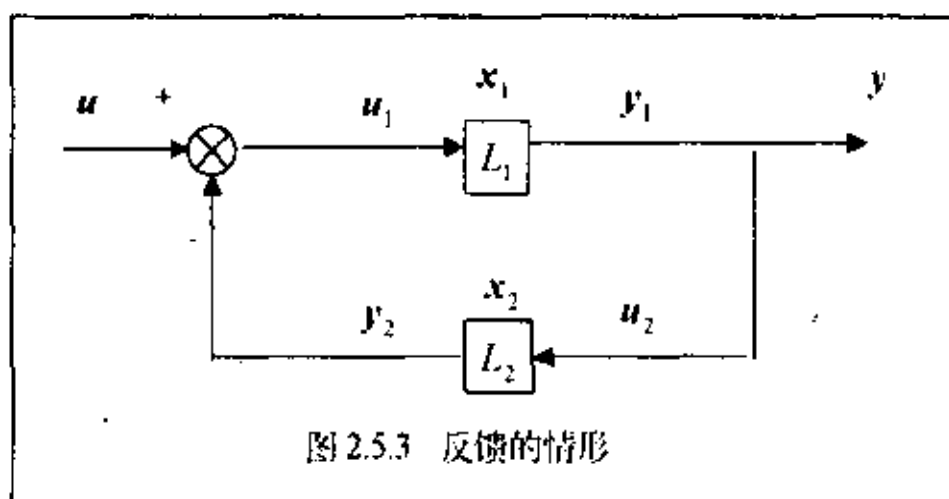


图 2.5.3 反馈的情形

考虑由两个子系统 L_1 和 L_2 按图2.5.3所示方式构成的反馈系统，其中子系统的状态空间描述由式(2.5.1)表示 ($D_i = 0$)。

对于图示反馈系统，其构成条件为

$$\left. \begin{aligned} \dim(u_1) &= \dim(y_2) \\ \dim(u_2) &= \dim(y_1) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.15)$$

而其在变量上的特点为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u - y_2 \\ y_1 &= y = u_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.5.16)$$

于是, 由式(2.5.1) (其中 $D_i = 0$) 和式(2.5.16), 即可导出按图2.5.3所示方式构成的反馈系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u - B_1 C_2 x_2 \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ y = C_1 x_1 \end{cases} \quad (2.5.17)$$

或将其表示为标准的形式, 即

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

下面再来推导反馈系统的传递函数矩阵的表达式。已知子系统的传递函数矩阵为

$$G_i(s) = C_i (sI - A_i)^{-1} B_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.5.19)$$

再据式(2.5.16), 有

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) = \hat{y}_1(s) &= G_1(s) [\hat{u}(s) - G_2(s) \hat{y}(s)] = \\ &= G_1(s) \hat{u}(s) - G_1(s) G_2(s) \hat{y}(s) \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

将上式化简之, 得到

$$[I + G_1(s) G_2(s)] \hat{y}(s) = G_1(s) \hat{u}(s) \quad (2.5.21)$$

进而, 若 $(I + G_1(s) G_2(s))$ 可逆, 那么即可得到反馈系统的传递函数矩阵

$$G(s) = [I + G_1(s) G_2(s)]^{-1} G_1(s) \quad (2.5.22)$$

类似地, 根据式(2.5.16)也可有

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(s) = \hat{u}(s) - \hat{y}_2(s) &= \hat{u}(s) - G_2(s) \hat{u}_2(s) = \\ &= \hat{u}(s) - G_2(s) G_1(s) \hat{u}_1(s) \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

和

$$\hat{y}(s) = \hat{y}_1(s) = G_1(s) \hat{u}_1(s) \quad (2.5.24)$$

从而由式(2.5.23)和式(2.5.24), 且假定 $(I + G_2(s) G_1(s))$ 可逆, 又可导出反馈系统的传递函数矩阵的另一表达式为

$$G(s) = G_1(s) [I + G_2(s) G_1(s)]^{-1} \quad (2.5.25)$$

需要指出, 在上述子系统的反馈连接的讨论中, 所以引入假定 $D_i = 0$ ($i = 1, 2$): 只是为了使式(2.5.18)给出的状态空间描述的形式不致于过分复杂, 而且这也是符合大多数实际问题的。

小 结

本章的重点是线性系统的状态空间描述，要掌握与其相关的各种基本概念，弄清它与传递函数描述的联系与差别。本章的难点是对于状态空间概念的理解。为什么这种系统描述方法称之为状态空间方法？为什么同一物理系统可以有不同的状态空间描述？这些是学完本章后必须搞清楚的问题。

状态空间法用一阶微分方程组(2.2.7)和(2.2.10)描述系统，线性系统的描述形式是一个一阶线性微分方程组(2.2.12)。这些方程可作为动态方程的条件是，对于任何的状态初值和控制输入有唯一的满足方程的输出。在研究动态方程的解时，解的唯一性是极为重要的。

状态空间法为什么用一阶微分方程组来描述系统？其主要原因有三个方面：

- ① 每一个高阶微分方程均可以化成一组一阶微分方程，这一点在2.2节中已经看到；
- ② 用以描述一阶微分方程组的表示法甚为简洁，以致于系统的阶次都不显含在系统的一般表达式之中；
- ③ 一阶微分方程组可以很容易在计算机上仿真。

线性系统的代数等价性是由线性系统状态的不唯一性引出的一个重要概念。一般说来，相互代数等价的线性定常系统代表了同一物理系统在不同状态向量下的数学模型。因而代数等价系统的公有属性反映了它所代表的物理系统的属性。代数等价系统的许多其它方面的属性将在以后各章中进一步揭示。

对于学过古典调节原理的读者而言，已经习惯了动态系统的方块图表示及其以方块图为基础的系统分析和综合。或许读者于本章第五节已经发现这样的事实，即我们的抽象模型可以是某一个局部的子系统，又可以代表非常庞大和复杂的大系统。

古典调节原理和我们这门课程在对于许多问题处理的出发点和手法方面有着很大的区别。这也是初涉本课程的读者值得留意的。

习 题

- 2.1 为什么说传递函数描述只适用于线性定常系统，而不适合时变系统？
- 2.2 对于线性时变系统，可否类似地定义代数等价性？试说明原因。
- 2.3 设有一物理系统可用线性定常系统模型描述，则其两种不同的线性定常描述是否代数等价？

2.4 考虑具有输入 u 和输出 y 的线性系统。在此系统上，可以利用输入 $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$ 及 $u_3(t)$ 实施三种试验。每一实验均具有相同之初始状态 $x(0)$ ，观测所得相应的输出为 $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$ 及 $y_3(t)$ 。若 $x(0) = 0$ ，试问下列三种预测正确否？

- (1) 若 $u_3 = u_1 + u_2$ ，则 $y_3 = y_1 + y_2$ ；
- (2) 若 $u_3 = (u_1 + u_2) / 2$ ，则 $y_3 = (y_1 + y_2) / 2$ ；
- (3) 若 $u_3 = u_1 - u_2$ ，则 $y_3 = y_1 - y_2$ ；

当 $x(0) \neq 0$ 时，预测结果又将如何？

2.5 列写出图2.1所示电路的状态方程和输出方程。其中，状态变量、输入变量和输出变量分别指定为 $x_1 = u_c$, $x_2 = i$, $u = e(t)$, $y = i$ 。

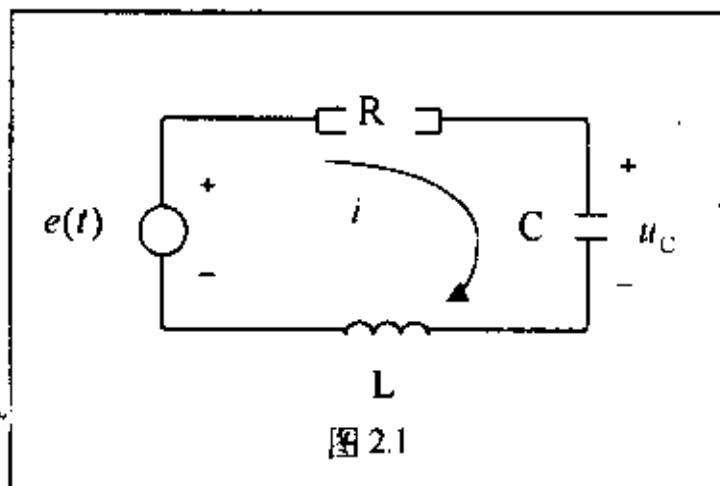


图 2.1

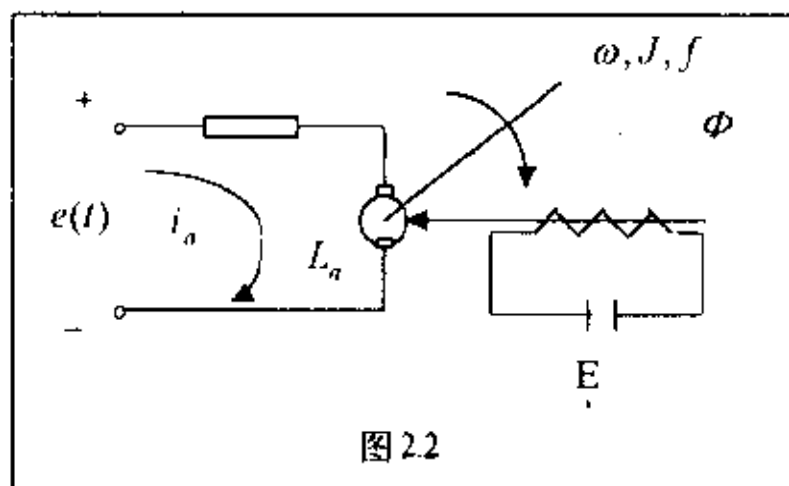


图 2.2

2.6 图2.2所示为处于电枢控制的电动机，已知磁通 Φ 为常量，反电势的关系式为 $c_e \omega$ ，电磁力矩的关系式为 $c_M i_a$ ，其中 c_e 和 c_M 为常数。现规定状态变量 $x_1 = i_a$, $x_2 = \omega$ ，输入变量 $u = e(t)$ ，列出电动机的状态方程。

2.7 图2.3所示为登月舱在月球上软着陆时的示意图，其运动方程可表示为 $m\ddot{y} = -km - mg$ ；其中 m 为登月舱质量， g

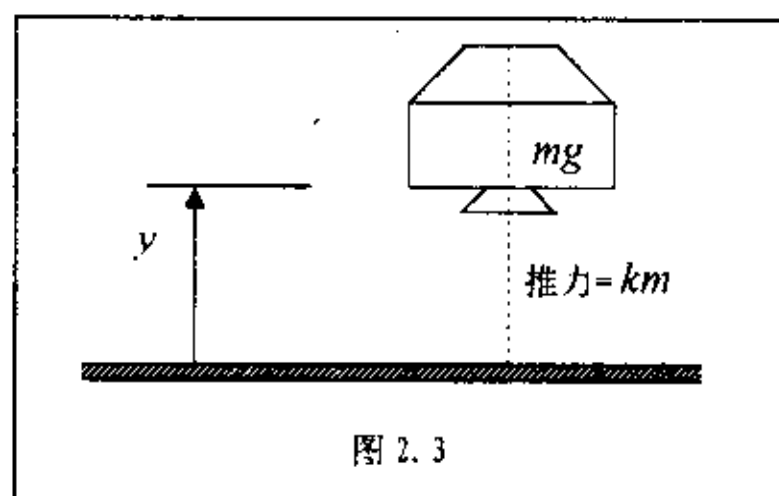


图 2.3

为月球表面的重力常数， k 为常数， $(-km)$ 代表反向推力， y 为登月舱相对于月球表面的距离。现规定状态变量为 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ 和 $x_3 = m$ ，输入变量为 $u = \dot{m}$ ，列写出系统的状态方程。

2.8 图2.4所示为某系统的方块图，其中 u 和 y 分别为输入变量和输出变量。现规定状态变量为 $x_1 = y$ 和 $x_2 = \dot{y}$ ，列出系统的状态方程和输出方程。

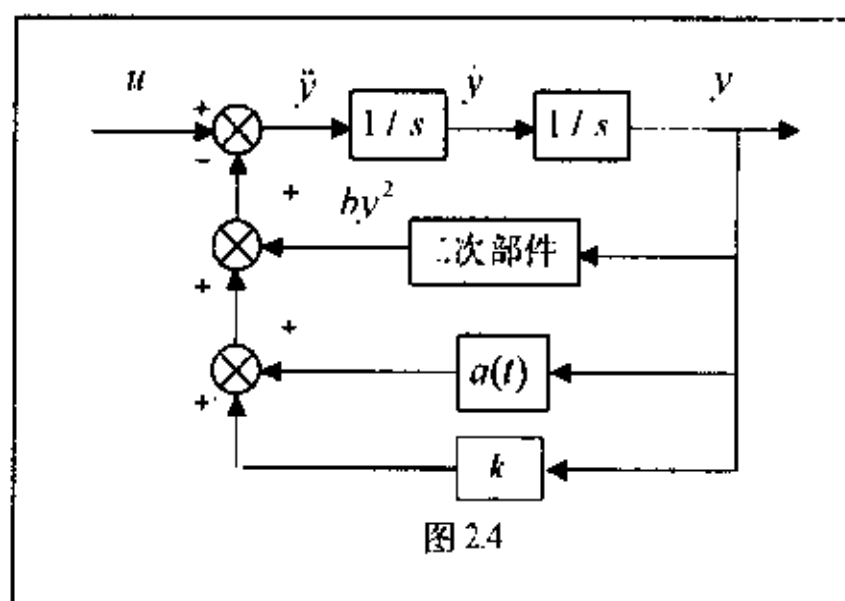


图 2.4

2.9 求出下列各输入-输出描述的一个状态空间描述：

(1) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 6y = 5u$

(2) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 6y = 7\dot{u} + 5u$

(3) $3\ddot{y} + 6\dot{y} + 12y = 6\dot{u} + 3u$

2.10 求出下列各输入-输出描述的一个状态空间描述：

$$(1) \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{2s^2 + 18s + 40}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$(2) \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{3(s+5)}{(s+3)^2(s+1)}$$

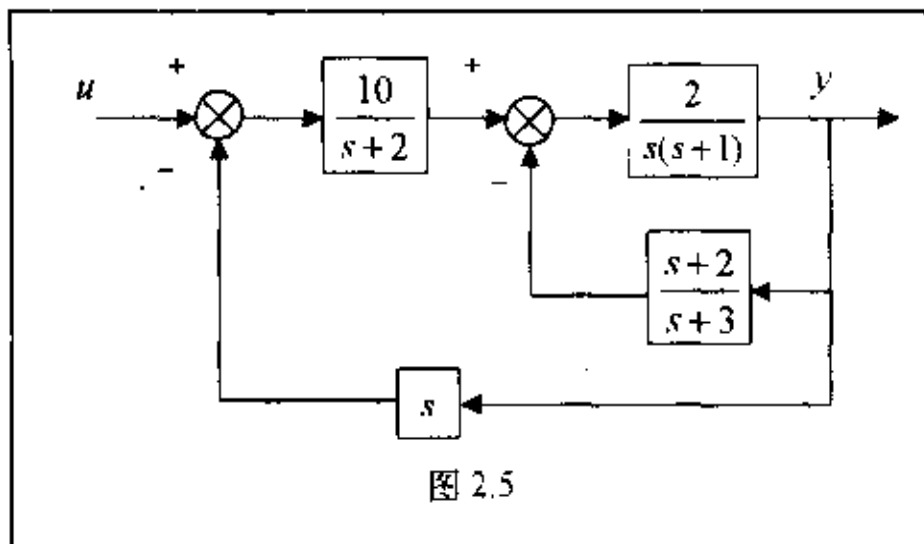


图 2.5

2.11 图2.5为某系统的方块图，其中 y 和 u 分别为其输出变量和输入变量，求出它的一个状态空间描述。

2.12 计算下列状态空间描述的传递函数 $G(s)$ ：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 2]x + 4u$$

2.13 给定系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

现取 $y = x_2 + 3x_3$ ，列出相应的输出 y -输入 u 标量微分方程。

2.14 计算下列状态空间描述的传递函数矩阵 $G(s)$ ：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 1]x$$

2.15 给定同维的方阵 A 和 \tilde{A} 为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ \vdots & & & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 \\ \vdots & & & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

试确定一个变换阵 P 使成立 $\tilde{A} = P^{-1}AP$ 。

2.19 给定反馈如图2.6所示，其中

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \quad G_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

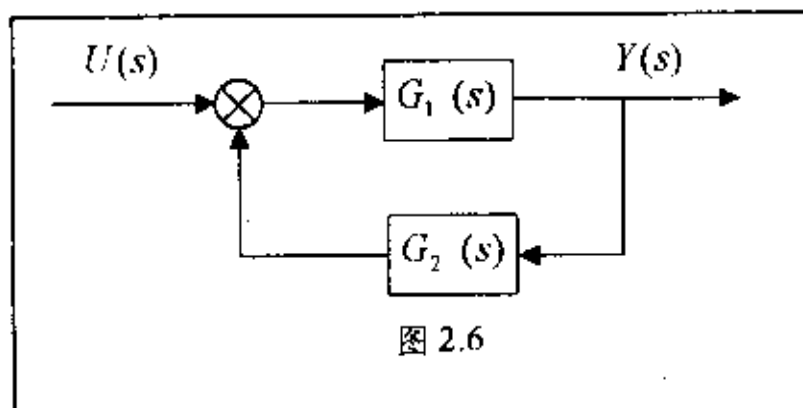
试确定反馈系统的传递函数矩阵 $G(s)$ 。

2.20 给定图2.6的反馈系统, 其中

$$G_1(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)(s+3)}$$

$$G_2(s) = \frac{s+2}{s+4}$$

试定出反馈系统的状态方程和输出方程。



第三章 线性系统的运动分析

系统的状态空间描述的建立为分析系统的行为和特性提供了可能性。对系统进行分析的目的，是要揭示系统状态的运动规律和基本特性。通常把对系统的分析区分为定量分析和定性分析两个方面。在定量分析中，我们要对系统的运动规律进行精确的研究，即定量地确定系统由外部激励作用所引起的响应。在定性分析中，则着重对决定系统行为和综合系统结构具有重要意义的几个关键性质，如能控性、能观测性和稳定性等进行定性研究。

本章以线性系统为对象，讨论系统的定量分析问题，指出它的运动规律，阐明它的运动性质，介绍它的分析方法。有关线性系统的定性分析问题，则分别在第四章和第五章中进行研究。

3.1 运动分析的含义

3.1.1 问题的提出及其解的存在唯一性

前已阐明，对于线性系统，描述其状态运动过程的状态方程为

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.1.1)$$

或

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0 \quad (3.1.2)$$

其中，式(3.1.1)相应于系统为时变的情况，而式(3.1.2)则对应于系统为定常的情况。分析系统的运动的目的，就是要从其数学模型出发，来定量地和精确地定出系统运动的变化规律，以便为系统的实际运动过程作出估计。从数学上看，这个命题可归结为，相对于给定的初始状态 x_0 和外输入作用 u ，来求解状态方程(3.1.1)或(3.1.2)的解 $x(t)$ ，即由初始状态和外输入作用所引起的响应。

尽管系统的运动是对初始状态和外输入作用的响应，但运动的形态却主要是由系统的结构和参数所决定的，也即是由参数矩阵对 $[A(t) \ B(t)]$ 或 $[A \ B]$ 所决定的。状态方程的解 $x(t)$ 给出了系统运动形态对系统的结构和参数的依赖关系。利用这一关系，使我们有可能来分析系统的结构特性，或者通过引入附加的部分改变系统的参数或结构，使系统运动形态在性能上达到期望的要求。这后一方面，就是系统的综合问题，将在第六至十章中进行系统讨论。

容易理解，只有当状态方程的满足初始条件的解存在且唯一时，对系统运动的分析才有意义。从数学上看，这就要求状态方程中的系数矩阵和输入作用满足一定的假设，它们是保证方程的解存在且唯一所必须的。

就线性时变系统(3.1.1)而言，如果系统矩阵 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的所有元在时间定义区间 $[t_0, t_a]$

上均为 t 的实值连续函数, 而输入 $u(t)$ 的元在时间定义区间 $[t_0, t_a]$ 上是连续实函数, 则其状态方程的解 $x(t)$ 存在且唯一。通常, 这些条件对于实际的物理系统总是能满足的。但是, 从数学的观点而言, 上述条件或许太强了, 下述引理给出了较弱的条件。

引理3.1.1 系统(3.1.1)对于任何 $x(0)$ 有解且解为唯一的充要条件是:

① $A(t)$ 的各元 $a_{ij}(t)$ 在 $[t_0, t_a]$ 上是绝对可积的, 即

$$\int_{t_0}^{t_a} |a_{ij}(t)| dt < \infty, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.1.3)$$

② $B(t)$ 的各元 $b_{ik}(t)$ 在 $[t_0, t_a]$ 上是平方可积的, 即

$$\int_{t_0}^{t_a} [b_{ik}(t)]^2 dt < \infty, \quad i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p \quad (3.1.4)$$

③ $u(t)$ 的 $u_k(t)$ 各元在 $[t_0, t_a]$ 上是平方可积的, 即

$$\int_{t_0}^{t_a} [u_k(t)]^2 dt < \infty, \quad k = 1, \dots, p \quad (3.1.5)$$

利用许瓦尔兹(Schwarz)不等式, 有

$$\sum_{k=1}^p \int_{t_0}^{t_a} |b_{ik}(t)u_k(t)| dt \leq \sum_{k=1}^p \left[\int_{t_0}^{t_a} [b_{ik}(t)]^2 dt \cdot \int_{t_0}^{t_a} [u_k(t)]^2 dt \right]^{1/2} \quad (3.1.6)$$

从而上述条件②和③即等价于 $B(t)u(t)$ 的元在区间 $[t_0, t_a]$ 上绝对可积。对于线性定常系统(3.1.2), 系数矩阵 A 和 B 均为常阵, 因此只要其元的值为有限值, 那么上述条件①和②总是满足的。

在下面各节的讨论中, 我们总是假定系统满足上述解的存在唯一性条件, 并在这一前提下分析系统状态的运动规律。

3.1.2 线性系统响应的特点

线性系统的一个基本属性是其满足叠加原理。利用这一属性, 不妨可把系统在初始状态和输入向量作用下的运动, 分解为两个单独的分运动, 即由初始状态引起的自由运动和由输入作用引起的强迫运动。自由运动就是系统(3.1.1)(或(3.1.2))的自治方程

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.1.7)$$

的解, 用 $\phi(t, t_0, x_0, 0)$ 来表示, 并称其为零输入响应。强迫运动则是系统(3.1.1) (或(3.1.2))在零初始状态下的强迫方程

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = 0, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.1.8)$$

的解, 用 $\phi(t, t_0, 0, u)$ 来表示, 称之为零状态响应。系统由初始状态和输入作用所引起的整体响应 $\phi(t, t_0, x_0, u)$ 就是两者的叠加, 即

$$\phi(t, t_0, x_0, u) = \phi(t, t_0, x_0, 0) + \phi(t, t_0, 0, u) \quad (3.1.9)$$

在下面各节的分析中可以看到, 这样做无论是对简化分析的过程还是对增加讨论的直观性, 都将是有帮助的。

3.2 状态转移矩阵及其性质

线性系统的运动分析以状态转移矩阵为基础。为此本节介绍状态转移矩阵及其性质。为引入状态转移矩阵的定义，我们先来讨论一下线性齐次方程的解空间。

3.2.1 线性齐次方程的解空间

为了讨论系统的运动，我们先来研究状态方程的解。

由于 $A(t)$ 、 $B(t)$ 的每个元素都是 t 的分段连续函数，因此，依常微分方程的定性理论可知，对任意 $x(t_0)$ 和 $u(\cdot)$ ，状态方程(3.1.1)都有唯一解。在讨论方程(3.1.1)的解之前，首先研究自由系统(即齐次方程)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (3.2.1)$$

的解。

定理3.2.1 齐次方程(3.2.1)的所有解的集合组成实数域上的 n 维向量空间。

证明 令 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为方程(3.2.1)的任意两个解，则对于任意实数 a_1 和 a_2 ， $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ 也是方程(3.2.1)的解，这可直接由验算证明。事实上

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) &= a_1\dot{x}_1(t) + a_2\dot{x}_2(t) = \\ &= a_1A(t)x_1(t) + a_2A(t)x_2(t) = \\ &= A(t)(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) \end{aligned}$$

因此，方程(3.2.1)解的集合组成实数域上的线性空间，称为解空间。下面证明这个解空间是 n 维的。

令 e_1, e_2, \dots, e_n 为实的 n 维欧几里德空间中一组线性独立的向量， $x_i(t)$ 是方程(3.2.1)相应于初始条件为 e_i 的解， $i=1, 2, \dots, n$ 。现证明方程(3.2.1)的解都能被 $x_i(t)$ 线性表出，且 $x_i(t)$ ， $i=1, 2, \dots, n$ ，线性独立。如果这一结论正确，则定理就得到证明。

为说明 $x_i(t)$ ， $i=1, 2, \dots, n$ ，线性独立，我们使用反证法。

设 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 线性相关，则有不全为零的 n 个实数 a_1, a_2, \dots, a_n ，使得对 $t \geq t_0$ 有

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i(t) \equiv 0 \quad (3.2.2)$$

特别当 $t = t_0$ 时，有

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i(t_0) = \sum_{i=1}^n a_i e_i = 0 \quad (3.2.3)$$

而这与 e_1, e_2, \dots, e_n 线性独立矛盾。因此， $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 在其定义域上必线性独立。

令 $x(t)$ 是方程(3.2.1)的任意一个解，并且 $x(t_0) = e_0$ 。因为 e_1, e_2, \dots, e_n 线性独立，所以

必能唯一地表成 e_i , $i=1,2,\dots,n$ 的线性组合

$$e_0 = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

这里, a_1, a_2, \dots, a_n 不全为零。显然, $\sum_{i=1}^n a_i x_i(t)$ 是以 e_0 为初始条件时方程(3.2.1)的解。因此, 从解的唯一性有

$$x(t) = \sum_{i=1}^n a_i x_i(t) \quad (3.2.4)$$

△△△

3.2.2 状态转移矩阵的定义

定义3.2.1 设 $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$ 是方程(3.2.1)的一组线性独立的解, 那么矩阵

$$\Psi(t) = [\psi_1(t) \quad \psi_2(t) \quad \dots \quad \psi_n(t)] \quad (3.2.5)$$

称为方程(3.2.1)的基本解阵。

依据定义不难证明方程(3.2.1)的基本解阵 $\Psi(t)$ 有如下性质:

性质I 如果 $\Psi(t)$ 满足方程

$$\dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t) \quad (3.2.6)$$

且对某个 t_0 , $\Psi(t_0)$ 非奇异, 那么 $\Psi(t)$ 必为方程(3.2.1)的基本解阵。

另外我们还有:

性质II 对任意 t , 基本解阵 $\Psi(t)$ 都是非奇异的。

证明 事实上, 若有 t_0 , 使得 $\Psi(t_0)$ 是奇异的, 则 $\psi_1(t_0), \psi_2(t_0), \dots, \psi_n(t_0)$ 必线性相关, 从而存在 n 个不全为零的实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 使得

$$\sum_{i=1}^n a_i \psi_i(t_0) = 0 \quad (3.2.7)$$

由于 $\sum_{i=1}^n a_i \psi_i(t)$ 是方程(3.2.1)的解, 相应的初始条件为 $\sum_{i=1}^n a_i \psi_i(t_0)$ 。因此, 一定有

$$\sum_{i=1}^n a_i \psi_i(t) \equiv 0, \quad t \geq t_0$$

而这与 $\psi_1(t_0), \psi_2(t_0), \dots, \psi_n(t_0)$ 线性独立矛盾。因此, 对任意 t , $\Psi(t)$ 总非奇异。

△△△

定义3.2.2 令 $\Psi(t)$ 是方程(3.2.1)的基本解阵, 则矩阵

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0), \quad t \geq t_0 \quad (3.2.8)$$

称为系统的状态转移矩阵。

3.2.3 状态转移矩阵的性质

关于状态转移矩阵这个名字的由来将在下面说明。根据基本解阵的性质可直接推得状态转移矩阵的一些重要性质。

命题3.2.1 设 $\Phi(t, t_0)$ 为系统(3.2.1)的状态转移矩阵, 则它具有下述性质:

① 自反性: 对任意 t , 有

$$\Phi(t, t) = I_n \quad (3.2.9)$$

② 反身性: 对任意 t_0 和 t , 有

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t) \quad (3.2.10)$$

③ 传递性: 对任意 t_0, t_1 和 t_2 , 有

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) \quad (3.2.11)$$

状态转移矩阵是基于基本解阵来定义的, 但一个系统的基本解阵却是不唯一的, 那么一个系统的状态转移矩阵是否与方程(3.2.1)的基本解阵的选择有关呢? 答案是否定的。下述命题说明了状态转移矩阵的唯一性, 即一个系统的状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 只取决于系统矩阵 $A(t)$, 而与方程(3.2.1)的基本解阵的选取无关。

命题3.2.2 设 $\Phi(t, t_0)$ 为系统(3.2.1)的状态转移矩阵, 且系统(3.2.1)满足解的存在唯一性条件, 则 $\Phi(t, t_0)$ 与方程(3.2.1)的基本解阵的选取无关, 且由下述矩阵微分方程唯一决定

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I_n \quad (3.2.12)$$

证明 事实上, 若令 $\Psi_1(t)$ 和 $\Psi_2(t)$ 为方程(3.2.1)的任意两个不同的基本解阵, 由定义及基本解阵的性质可知, 必存在 $n \times n$ 阶非奇异常数矩阵 P , 使得 $\Psi_2(t) = \Psi_1(t)P$ 。于是, 根据状态转移矩阵的定义, 有

$$\Phi(t, t_0) = \Psi_2(t)\Psi_2^{-1}(t_0) = \Psi_1(t)PP^{-1}\Psi_1^{-1}(t_0) = \Psi_1(t)\Psi_1^{-1}(t_0)$$

由此可见, $\Phi(t, t_0)$ 的解与基本解阵的选择无关。另外由

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \dot{\Psi}_2(t)\Psi_2^{-1}(t_0) = A(t)\Psi_2(t)\Psi_2^{-1}(t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$$

及状态转移矩阵的性质(3.2.9)可知, $\Phi(t, t_0)$ 由矩阵微分方程(3.2.12)唯一决定。

△△△

由上述命题可知, 状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 也是齐次方程(3.2.1)的一个基本解阵。事实上, 若令

$$\begin{cases} e_1 = [1 & 0 & 0 & \cdots & 0]^T \\ e_2 = [0 & 1 & 0 & \cdots & 0]^T \\ \vdots \\ e_n = [0 & 0 & 0 & \cdots & 1]^T \end{cases} \quad (3.2.13)$$

那么, 状态转移矩阵的第 i 列组成的矢量就是以 e_i 为初始条件方程(3.2.1)的唯一解。因此又可以说, 状态转移矩阵是方程(3.2.1)的一个特殊的基本解阵。

3.3 线性时变系统的运动分析

上一节讨论了状态转移矩阵及其性质。这一节将基于状态转移矩阵来建立线性系统的

运动规律，即线性系统的响应表达式。在3.1节中，我们曾根据线性系统的叠加原理将线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & x(t_0) = x_0, & t \in [t_0, t_a] \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases} \quad (3.3.1)$$

的状态响应分为零输入响应和零初始状态响应，且分别记为 $\phi(t, t_0, x_0, 0)$ 和 $\phi(t, t_0, 0, u)$ 。下面对线性系统(3.3.1)的各种响应分别进行讨论。

3.3.1 时变线性系统的零输入响应

由3.1节知，线性系统(3.3.1)的零输入状态响应 $\phi(t, t_0, x_0, 0)$ 为下述线性齐次微分方程

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \quad (3.3.2)$$

的解。对此我们有下述定理：

定理3.3.1 设线性系统(3.3.1)满足解的存在唯一性条件，记 $\Phi(t, t_0)$ 为其状态转移矩阵，则

$$\phi(t, t_0, x_0, 0) = \Phi(t, t_0)x_0 \quad (3.3.3)$$

证明 由定义知 $\phi(t, t_0, x_0, 0)$ 为满足方程

$$\dot{\phi}(t, t_0, x_0, 0) = A(t)\phi(t, t_0, x_0, 0)$$

及其初始条件

$$\phi(t_0, t_0, x_0, 0) = x_0$$

的解。以式(3.3.3)代入上述二式，并利用状态转移矩阵的性质可得二恒等式，因而结论成立。

△△△

上述定理说明了 $\phi(t, t_0, x_0, 0)$ 是初值 x_0 在算子 $\Phi(t, t_0)$ 下的像。以 $\Phi(t_2, t_1)$ 作用于 $x(t_1)$ 便可获得 $x(t_2)$ ，这便是 $\Phi(t, t_0)$ 被称为状态转移矩阵的由来。

有了线性系统(3.3.1)的零输入状态响应，则其零输入的输出响应，即下述自由系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, & x(t_0) = x_0, & t \geq t_0 \\ y = C(t)x \end{cases} \quad (3.3.4)$$

的输出，便容易获得了。如果我们类似地将系统(3.3.1)的零输入时的输出响应记为 $\psi(t, t_0, x_0, 0)$ ，则显然有

$$\psi(t, t_0, x_0, 0) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 \quad (3.3.5)$$

3.3.2 时变线性系统的零初始状态响应

由3.1节知，线性系统(3.3.1)在零初始状态下的状态响应 $\phi(t, t_0, 0, u)$ 为下述零初始条件的受迫运动系统

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (3.3.6)$$

的解。对此我们有

定理3.3.2 设系统(3.3.1)满足解的存在唯一性条件，记 $\Phi(t, t_0)$ 为其状态转移矩阵，则

$$\phi(t, t_0, 0, u) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.3.7)$$

证明 由变限定积分求导法则和状态转移矩阵的性质有

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t, t_0, 0, u) &= \int_{t_0}^t \dot{\Phi}(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + \Phi(t, t) B(t) u(t) = \\ &= A(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + B(t) u(t) = \\ &= A(t) \phi(t, t_0, 0, u) + B(t) u(t) \end{aligned}$$

再注意到

$$\phi(t_0, t_0, 0, u) = 0$$

从而 $\phi(t, t_0, 0, u)$ 为(3.3.6)的解。

△△△

线性系统(3.3.1)在零初始状态下的输出响应为系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & x(t_0) = 0, & t \geq t_0 \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases} \quad (3.3.8)$$

的输出, 记为 $\psi(t, t_0, 0, u)$ 。由定理3.3.2易知

$$\psi(t, t_0, 0, u) = C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + D(t)u \quad (3.3.9)$$

3.3.3 时变线性系统的整体响应

根据线性系统的叠加原理, 线性系统(3.3.1)的由状态初值 x_0 和控制输入 $u(t)$ 所引起的整体状态响应, 记为 $\phi(t, t_0, x_0, u)$ 和整体输出响应, 记为 $\psi(t, t_0, x_0, u)$, 分别为

$$\phi(t, t_0, x_0, u) = \phi(t, t_0, 0, u) + \phi(t, t_0, x_0, 0)$$

和

$$\psi(t, t_0, x_0, u) = \psi(t, t_0, 0, u) + \psi(t, t_0, x_0, 0)$$

从而由上两小节的讨论可得

$$\phi(t, t_0, x_0, u) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.3.10)$$

$$\psi(t, t_0, x_0, u) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + D(t)u \quad (3.3.11)$$

例3.3.1 给定线性时变系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad t \in [1, 10]$$

求其在单位阶跃函数 $1(t-1)$ 作用下以 $x_1(1) = 1$ 和 $x_2(1) = 2$ 为初始状态的状态响应。

解 我们首先来求状态转移矩阵, 为此我们来考虑零输入时的状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = tx_1 \end{cases}$$

对其求解可以得到

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(t_0) \\ x_2(t) = 0.5t^2 x_1(t_0) - 0.5t_0^2 x_1(t_0) + x_2(t_0) \end{cases}$$

取两组不同的初值 $x_1(t_0) = 0$ 、 $x_2(t_0) = 1$ 和 $x_1(t_0) = 2$ 、 $x_2(t_0) = 0$ ，可以得到两个线性无关解

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ t^2 - t_0^2 \end{bmatrix}$$

从而系统的一个基本解阵可取为

$$\Psi = [\psi_1 \quad \psi_2] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 - t_0^2 \end{bmatrix}$$

由此可得

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5t^2 - 0.5t_0^2 & 1 \end{bmatrix}$$

下面我们来计算系统的响应

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5t^2 - 0.5t_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5t^2 - 0.5\tau^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.4 线性定常系统的运动分析

线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(t_0) = x_0, \quad t \geq 0 \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3.4.1)$$

的运动分析问题是与矩阵指数函数 e^{At} 紧密相关的。因此我们先来介绍一下矩阵指数 e^{At} 函数的定义、性质和求取方法。

3.4.1 矩阵指数函数

给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，则如下定义的矩阵

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k t^k \quad (3.4.2)$$

称为矩阵 A 的指数函数。下述定理给出了矩阵指数函数的一些基本性质。

定理3.4.1 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，则

- ① $\lim_{t \rightarrow 0} e^{At} = I$
- ② $e^{A(t+\tau)} = e^{At} \cdot e^{A\tau} = e^{A\tau} \cdot e^{At}, \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R}$
- ③ e^{At} 为可逆矩阵，且 $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

④ 对于与 A 可交换的 n 阶方阵 F 有 $e^{(A+F)t} = e^{At} \cdot e^{Ft} = e^{Ft} \cdot e^{At}$

⑤ $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At} A$

⑥ $(e^{At})^m = e^{A(mt)}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

⑦ 如果 $A = PFP^{-1}$, 则 $e^{At} = Pe^{Ft}P^{-1}$

⑧ $e^{At} = L^{-1}(sI - A)^{-1}$ (此处 L 为拉氏变换算符)

关于上述定理的证明, 请读者自己完成。下面我们讨论矩阵指数函数的求取问题。

方法I 基于Levirier算法求取 e^{At}

这种方法的基本思想是, 先利用Levirier算法求取矩阵 $(sI - A)^{-1}$, 然后利用定理3.4.1中性质8求取 e^{At} 。对此读者可自行研究某些算例。

方法II 基于若当分解求取 e^{At}

这种方法的基本思想是, 先对矩阵 A 进行若当分解, 然后利用定理3.4.1中性质7求取 e^{At} 。

当矩阵 A 具有互异特征值的情形, 容易导出下述结果。

命题3.4.1 设 A 具有互异特征值 λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, p_i 为 A 的与 λ_i 相对应的特征向量, 记

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n] \quad (3.4.3)$$

则

$$e^{At} = [e^{\lambda_1 t} p_1 \ e^{\lambda_2 t} p_2 \ \dots \ e^{\lambda_n t} p_n] P^{-1} \quad (3.4.4)$$

一般情况下, 矩阵 A 的若当分解为

$$A = P \operatorname{diag}[J_1 \ J_2 \ \dots \ J_l] P^{-1}$$

其中 J_i , $i = 1, 2, \dots, l$ 为若当块。此时有

$$e^{At} = P \operatorname{diag}[e^{J_1 t} \ e^{J_2 t} \ \dots \ e^{J_l t}] P^{-1}$$

再结合下述命题便可求解 e^{At} 。

命题3.4.2 设 J 为一 p 阶若当块, λ 为其特征值, 则

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{1}{(p-1)!}t^{p-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(p-2)!}t^{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

方法III 利用Cayley-Hamilton定理计算 e^{At}

根据Cayley-Hamilton定理, e^{At} 可表为下述形式

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} \quad (3.4.5)$$

其中的系数 $\alpha_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, 可根据下述命题计算。

命题3.4.3 设 A 为 n 阶方阵, 且具有互异特征值 λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, 则当取

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

时有式(3.4.5)成立。

当A具有重特征值但为循环阵时，比如其特征值为 λ_1 (三重)、 λ_2 (二重)和 $\lambda_3, \dots, \lambda_{n-3}$ ，此时有

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \\ \alpha_4(t) \\ \alpha_5(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \lambda_1^{n-3} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & \frac{(n-1)}{1!} \lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \hline 0 & 1 & 2\lambda_2 & 3\lambda_2^2 & \cdots & \frac{(n-1)}{1!} \lambda_2^{n-2} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \hline 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_{n-3} & \lambda_{n-3}^2 & \lambda_{n-3}^3 & \cdots & \lambda_{n-3}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2!} t^2 e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{1!} t e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{1!} t e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_{n-3} t} \end{bmatrix} \quad (3.4.7)$$

注：关于上述方法中有关结果的证明请读者参考有关书籍自己完成。

3.4.2 线性定常系统的响应

首先我们来确定定常线性系统的状态转移矩阵。

定理3.4.2 定常线性系统(3.4.1)的状态转移矩阵为

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)} \quad (3.4.8)$$

证明 由3.2节可知，定常线性系统(3.4.1)的状态转移矩阵由下述矩阵微分方程问题唯一决定：

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t, t_0) = A\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) = I, \forall t_0 \geq 0, t \geq t_0 \end{cases} \quad (3.4.9)$$

而由矩阵指数函数的性质5和1可得问题(3.4.8)的解为 $e^{A(t-t_0)}$ 。

△△△

对于线性时变系统，其状态转移矩阵为一个二元函数，但由定理3.4.1可见，线性定常系统的状态转移矩阵却为一单元函数。

利用式(3.4.8)和3.3节中的结果，我们有下述定理：

定理3.4.3 给定线性定常系统(3.4.1)，则它的

① 零输入状态响应和零输入输出响应分别为

$$\phi(t, t_0, x_0, 0) = e^{A(t-t_0)} x_0 \quad (3.4.10)$$

和

$$\psi(t, t_0, x_0, 0) = Ce^{A(t-t_0)} x_0 \quad (3.4.11)$$

② 零初始状态下的状态和输出响应分别为

$$\phi(t, t_0, 0, u) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (3.4.12)$$

和

$$\psi(t, t_0, 0, u) = \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du \quad (3.4.13)$$

③ 整体的状态和输出响应分别为

$$\phi(t, t_0, x_0, u) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (3.4.14)$$

和

$$\psi(t, t_0, x_0, u) = Ce^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du \quad (3.4.15)$$

由式(3.4.10)和式(3.4.11)可见, 定常线性系统的零输入响应只与初始状态和系统的运行时间长度有关, 而与系统的运行起始点无关. 下面再针对一种特殊但常见的情形给出定常线性系统(3.4.1)的零输入响应的另一表达式.

推论3.4.1 设矩阵 A 具有互异特征值 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n, p_i \in \mathbb{C}^n, i=1, 2, \dots, n$ 为对应的右特征向量, 记

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n] \quad (3.4.16)$$

则

$$\phi(t, t_0, x_0, 0) = [e^{\lambda_1(t-t_0)} p_1 \ e^{\lambda_2(t-t_0)} p_2 \ \dots \ e^{\lambda_n(t-t_0)} p_n] P^{-1} x_0. \quad (3.4.17)$$

证明 由命题3.4.1和定理3.4.2可得.

△△△

上述推论说明, 线性系统(3.4.1)的零输入状态响应不但与系统极点有关, 而且还与系统矩阵 A 的特征向量有关.

我们知道, 相互代数等价的线性定常系统在一定程度上代表了同一物理系统的不同描述, 因而, 尽管相互代数等价的系统的状态响应可以不同, 但它们的输出响应应该是相同的.

命题3.4.4 相互代数等价的定常线性系统具有相同的零初始状态下的输出响应和零输入条件下的输出响应.

例3.4.1 已知系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad t \geq 0$$

求其在初始状态 $x(0) = [1 \ -1]^T$ 下的零输入响应和在 $u = 1(t)$ 作用下的零初始状态响应.

解 由题设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

且容易算得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$, 矩阵 A 与 λ_1 和 λ_2 相对应的两个特征向量

分别为

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

故

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

所以有

$$e^{At} = [e^{\lambda_1 t} p_1 \quad e^{\lambda_2 t} p_2] P^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

最后由定理3.4.2可得

$$\phi(t, t_0, x_0, 0) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}, t \geq 0$$

$$\phi(t, t_0, 0, u) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}, t \geq 0$$

3.5 脉冲响应矩阵

单变量线性系统的脉冲响应对于我们应该是不陌生的。这一节我们将其推广到多变量系统的情形。从某种意义上说，脉冲响应属于线性系统的一种外部描述形式，我们之所以在这里介绍它，主要有两个原因：一是脉冲响应矩阵的表达式用到了前面介绍的线性系统的响应公式；二是利用脉冲响应矩阵可以很容易、很直接地写出线性系统在零初始状态下的输出响应。

3.5.1 单变量情形的简单回顾

除了传递函数之外，描述系统输入-输出关系的另一个物理量就是脉冲响应函数。事实上，假若单变量系统传函 $G(s)$ 的拉普拉斯反变换为 $g(t)$ ，那么对 $Y(s) = G(s)U(s)$ 求拉普拉斯反变换得出

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.5.1)$$

若令

$$h(t-\tau) = \begin{cases} g(t-\tau), & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases} \quad (3.5.2)$$

那么，式(3.5.1)可以改写为

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.5.3)$$

积分(3.5.1)或(3.5.3)反映了系统的输入-输出关系。按照这种表示，如果给定输入 $u(t)$ 之后，系统的输出就被式(3.5.1)或(3.5.3)决定。显然，这个输出 $y(t)$ 是系统对输入 $u(t)$ 的响应。

定义单位脉冲函数 $\delta(t)$:

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} \infty, & t = \tau \\ 0, & t \neq \tau \end{cases}$$

并且对每个分段连续的实函数 $f(t)$ 都有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau)d\tau = f(t) \quad (3.5.4)$$

则当系统的输入是一个单位脉冲函数时, 即 $u(t) = \delta(t)$ 时, 系统的响应为

$$y(t) = h(t) = g(t) \quad (3.5.5)$$

由此可见, 函数 $h(t)$ 是系统对单位脉冲输入的响应, $h(t - \tau)$ 称为单位脉冲响应函数。显然, 系统的脉冲响应函数是它的传递函数的拉普拉斯反变换。因此, 脉冲响应函数和传递函数从不同角度描述了系统的输入-输出关系。前者描述了系统输入-输出的时域关系, 后者描述了它们的频域关系。

3.5.2 脉冲响应矩阵的定义与系统的输出响应

定义3.5.1 考虑一个具有 r 个输入端和 m 个输出端的线性定常系统, 假设系统具有零初始状态, 令在 τ 时刻加于第 j 个输入端一个单位脉冲函数 $\delta(t - \tau)$, 而令其它输入端的输入为零, 则用 $g_{ij}(t - \tau)$ 表示第 i 个输出端在时刻 t 的脉冲响应。而以脉冲响应 $g_{ij}(t - \tau)$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r$ 为元所构成的 $m \times r$ 阶矩阵

$$G(t - \tau) = \begin{bmatrix} g_{11}(t - \tau) & g_{12}(t - \tau) & \cdots & g_{1r}(t - \tau) \\ g_{21}(t - \tau) & g_{22}(t - \tau) & \cdots & g_{2r}(t - \tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(t - \tau) & g_{m2}(t - \tau) & \cdots & g_{mr}(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (3.5.6)$$

称为系统的脉冲响应矩阵。并且, 由于系统满足因果律, 且总是假定系统的输出在输入加入之前的所有瞬时为零, 所以 $G(t - \tau)$ 具有性质:

$$G(t - \tau) = 0, \quad \forall \tau \text{ 和 } \forall t < \tau \quad (3.5.7)$$

当系统的输入向量 u 的元为任意形式的时间函数时, 可将其用一系列脉冲函数来逼近, 即表为

$$u_j \approx \sum_k u_j(t_k)\delta(t - t_k)\Delta t, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (3.5.8)$$

而相应的系统输出为

$$y(t) \approx \sum_k G(t - t_k)u(t_k)\Delta t \quad (3.5.9)$$

现令 $\Delta t \rightarrow 0$, 那么上式中的近似相等就趋于精确相等, 且和式可用积分代替, 因而可得到根据脉冲响应矩阵来计算任意输入时的系统输出的一个基本关系式

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t - \tau)u(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (3.5.10)$$

进一步, 如果按习惯的做法取初始时刻 $t_0 = 0$, 那么上式还表为

$$y(t) = \int_0^t G(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3.5.11)$$

对上式作自变量置换, 则又可将(3.5.11)表示为另一形式

$$y(t) = \int_0^t G(\tau)u(t-\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3.5.12)$$

由式(3.5.11)和式(3.5.12)所给出的积分关系式通常称为卷积或折积。

3.5.3 状态空间模型的脉冲响应矩阵

为了建立脉冲响应矩阵和状态空间描述间的关系, 考虑如下的线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3.5.13)$$

其中 A 、 B 、 C 和 D 分别是 $n \times n$ 、 $n \times r$ 、 $m \times n$ 和 $m \times r$ 的实值常阵。

定理3.5.1 由式(3.5.13)所描述的线性定常系统的脉冲响应矩阵为

$$G(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau) \quad (3.5.14)$$

或将其写成为常用的形式为

$$G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad (3.5.15)$$

证明 利用系统(3.5.13)的输出响应表达式(3.4.15), 有

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad (3.5.16)$$

如前面所指出的, 在定义脉冲响应矩阵时, 总是假定系统具有零初始状态。由此, 令式(3.5.16)中 $x_0 = 0$ 并加以改写, 可进而得到

$$y(t) = \int_{t_0}^t [Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)]u(\tau)d\tau \quad (3.5.17)$$

再将式(3.5.17)和脉冲响应矩阵的基本关系式(3.5.10)加以比较, 即可导出

$$G(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau) \quad (3.5.18)$$

将上式作自变量置换, 又可把式(3.5.18)改写为

$$G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad (3.5.19)$$

△△△

说明3.5.1 注意到 $e^{A(t-\tau)} = \Phi(t-\tau)$ 和 $e^{At} = \Phi(t)$, 所以脉冲响应矩阵的表达式(3.5.14)和式(3.5.15)还可表为如下的形式

$$G(t-\tau) = C\Phi(t-\tau)B + D\delta(t-\tau) \quad (3.5.20)$$

和

$$G(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t) \quad (3.5.21)$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 是线性定常系统(3.5.13)的状态转移矩阵。

定理3.5.2 两个代数等价的线性定常系统具有相同的脉冲响应矩阵。

证明 利用定理3.5.1可知, 系统 (A, B, C, D) 的脉冲响应矩阵为

$$G(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau) \quad (3.5.22)$$

而系统 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ 的脉冲响应矩阵为

$$\bar{G}(t - \tau) = \bar{C}e^{\bar{A}(t-\tau)}\bar{B} + \bar{D}\delta(t - \tau) \quad (3.5.23)$$

但已知两个系统是代数等价的, 即存在可逆矩阵 P 使成立

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{C} = CP^{-1}, \quad \bar{D} = D \quad (3.5.24)$$

和

$$e^{A(t-\tau)} = Pe^{A(t-\tau)}P^{-1} \quad (3.5.25)$$

于是可导出

$$\begin{aligned} \bar{G}(t - \tau) &= \bar{C}e^{\bar{A}(t-\tau)}\bar{B} + \bar{D}\delta(t - \tau) = \\ &= CP^{-1}Pe^{A(t-\tau)}P^{-1}PB + D\delta(t - \tau) = \\ &= Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t - \tau) = G(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

△△△

3.5.4. 脉冲响应矩阵与传递函数矩阵

这里我们来讨论线性定常系统的脉冲响应矩阵与传递函数矩阵这两个输入-输出特性表达式间的关系。对此, 可证明如下的结论。

定理3.5.3 用 $G(t)$ 和 $\hat{G}(s)$ 分别表示给定的线性定常系统的脉冲响应矩阵和传递函数矩阵, 则两者之间成立如下的关系式

$$\hat{G}(s) = L[G(t)], \quad t \geq 0 \quad (3.5.27)$$

和

$$G(t) = L^{-1}[\hat{G}(s)], \quad t \geq 0 \quad (3.5.28)$$

证明 考虑到

$$G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad (3.5.29)$$

和

$$L[e^{At}] = (sI - A)^{-1}, \quad L[\delta(t)] = 1 \quad (3.5.30)$$

就可导出

$$L[G(t)] = C(sI - A)^{-1}B + D = \hat{G}(s) \quad (3.5.31)$$

类似地, 按相反的步骤则可导出式(3.5.28)。

△△△

利用由式(3.5.27)和式(3.5.28)所给出的关系, 进而有如下的结论。

定理3.5.4 给定两个线性定常系统 (A, B, C, D) 和 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$, 设两者具有相同的输出和输入维数, 但它们的状态维数可不一定相同, 则此两系统具有相同脉冲响应矩阵(即相同传递函数矩阵)的充分必要条件是

$$D = \bar{D} \quad (3.5.32)$$

和

$$CA^i B = \overline{CA^i B}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5.33)$$

证明 $G(t) = \overline{G}(t)$ 或 $\hat{G}(t) = \overline{\hat{G}}(t)$, 当且仅当

$$D + C(sI - A)^{-1} B = \overline{D} + \overline{C}(sI - \overline{A})^{-1} \overline{B} \quad (3.5.34)$$

考虑到预解矩阵的关系式

$$(sI - A)^{-1} = Is^{-1} + As^{-2} + A^2s^{-3} + \dots \quad (3.5.35)$$

则上述条件(3.5.34)还可进而表为

$$\begin{aligned} D + CBs^{-1} + CABs^{-2} + CA^2Bs^{-3} + \dots = \\ \overline{D} + \overline{CB}s^{-1} + \overline{CAB}s^{-2} + \overline{CA^2B}s^{-3} + \dots \end{aligned} \quad (3.5.36)$$

显然, 欲使上式对任意的 s 均成立, 当且仅当

$$D = \overline{D} \text{ 和 } CA^i B = \overline{CA^i B}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5.37)$$

△△△

注意, 上述定理更加明确地指出了线性系统的状态空间描述和传递函数描述之间的差异。

小 结

在古典控制理论中, 系统的运动分析, 即系统的过渡过程分析, 或称古典的时域分析, 占有相当重要的位置。在古典理论中, 人们定义了各种典型环节和典型输入信号, 通过分析各种典型环节在各种典型输入信号作用下的响应便可达到系统运动分析的目的。在本章中, 研究对象变成了以状态空间法描述的多变量耦合系统, 因而典型环节和典型输入信号已不再有意义。但借助于状态转移矩阵和线性系统的叠加性原理, 我们可以最一般地给出线性系统响应的解析表达式。基于这种一般的表达式, 我们自然可以很容易地借助计算机获得系统在任何初值和输入作用下的各个状态变量的一般过渡过程。

本章的重点是状态转移矩阵及线性系统的响应, 要理解并牢记状态转移矩阵的性质和线性系统的各个响应表达式, 它们在后续的课程中会经常用到。

线性系统的解主要借助于状态转移矩阵来表示。状态转移矩阵具有反身性、自反性和传递性。在时变的情况下, 状态转移矩阵很难计算, 但在定常情况下, 它退化为一个矩阵指数函数, 可以用本章第四节介绍的各种方法计算之。在以上两种情况下, 如果我们只关心系统的某一特解, 则可避开状态转移矩阵的求取而在计算机上直接积分得到。

脉冲响应矩阵是线性系统描述的另外一种形式, 它是系统输出对零初始状态和脉冲输入的响应。这里我们要清楚其定义及其与其它描述形式的转换。

习 题

3.1 如何从线性系统的响应公式来理解线性系统的叠加原理? 进一步利用线性系统的响应公式解释第二章的习题2.4。

3.2 为什么说系统的状态转移矩阵的各列是相应齐次线性系统的解？它们的初值是什么？

3.3 对于 n 阶线性时变齐次系统，为求其解我们引入了状态转移矩阵，而求得状态转移矩阵，却须求得系统的 n 个线性无关解，因此状态转移矩阵的引入对于线性时变系统的求解没有意义。这种理解正确否？

3.4 对于下列给出的常阵 A ，定出它们的矩阵指数函数 e^{At} ：

$$(1) A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (5) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

3.5 用三种方法计算下列矩阵 A 的矩阵指数函数 e^{At} ：

$$(1) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

3.6 试求下列各系统的状态变量解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ ：

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u(t) = e^{-t}, t \geq 0$$

3.7 对于给定的某系统，已知

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

试定出相对于下列各个 $u(t)$ 时的状态响应 $x(t)$ ：

$$(1) u(t) = \delta(t) \quad (2) u(t) = 1(t) \quad (3) u(t) = t \quad (4) u(t) = \sin t$$

3.8 已知某系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{3t}) & \frac{1}{4}(-e^{-t} + e^{3t}) \\ -e^{-t} + e^{3t} & \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{3t}) \end{bmatrix}$$

试定出其系统矩阵 A 。

3.9 利用拉普拉斯变换证明：线性定常系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ ， $x(0) = x_0$ 的状态运动的一般表达式为

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

3.10 给定矩阵微分方程为

$$\dot{X} = AX + XA^T, X(0) = P_0$$

其中 X 为 $n \times n$ 变量阵。试证明此矩阵方程的解为

$$X(t) = e^{At} P_0 e^{A^T t}$$

3.11 给定线性时变系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \quad t \geq t_0$$

设其状态转移矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ \Phi_{21}(t, t_0) & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

试证明当 $A_{21} = 0$ 时必有 $\Phi_{21}(t, t_0) \equiv 0$ 。

3.12 给定二维线性定常系统

$$\dot{x} = Ax, \quad t \geq 0$$

现知对应于两个不同初态时的状态响应为

$$(1) \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ 时 } x(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix} \quad (2) \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 时 } x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

试据此定出系统的矩阵 A 。

3.13 设 A 为方常阵, 且其特征值两两相异, 证明必成立

$$\det(e^{At}) = e^{(\operatorname{tr} A)t}$$

3.14 利用定理3.4.1证明命题3.4.4。另外, 对于零初始状态的响应情形亦考虑利用脉冲响应矩阵理论证之。

第四章 线性系统的能控性和能观性

能控性和能观性是线性系统理论中的一对极为重要的概念，这对概念深刻地刻画了线性系统的结构性质，在线性系统的设计中有着重要的应用。本章介绍能控性和能观性的定义和判据、能控性和能观性指数、能控和能观规范型以及依据能控性和能观性的结构分解。

4.1 能控性和能观测性的定义

4.1.1 问题的提出

我们首先从物理的直观性来讨论能控性和能观测性的基本含义。这种直观的讨论，对于理解能控性和能观测性的严格定义是很有帮助的。

研究系统的目的是为了更好地了解系统和控制系统。那么“更好地了解一个系统”和“更好地控制一个系统”的含义是什么呢？

了解系统的含义是多方面的，这其中可以包括系统的组成、结构、属性和运动规律等。我们这里暂时不考虑这些具体的、复杂的方面，而只关心其抽象的，也是最简单的一面。由第二章可知，一个系统的状态向量完全刻画了系统的运动，因而从一种简单、抽象的意义上讲，为把握系统的运动，只要获取其所有状态就可以了。

同样，控制一个系统的含义也是很广泛的。对于各种不同属性的系统，人们可以提出各种不同的控制目标 and 设计要求，利用合适的方法来完成它的设计。关于这些内容，我们将于第六章讨论。现在我们要探究的是一种最自然、最基本的情况。任何一个系统在不同时刻都有其特定的状态。它在现时刻的当前状态反映了它在当前时刻的全部信息。随着时间的流逝，它的状态按着其自身的规律在不断地变化。那么，作为一种最基本的控制要求，我们关心一个系统的当前状态是否可以经过一定时间后被转移到某种特定的希望状态。

上述所述的“了解系统”和“控制系统”分别对应于动态系统的能观性和能控性这两个方面。对于以状态空间法描述的系统，其输入和输出构成系统的外部变量，而其状态为内部变量。根据上面所述，我们可以将控制系统的能控性和能观性问题描述如下：

能控性问题 已知某系统的当前时刻及其状态，试问是否存在一个容许控制，使得系统在该控制的作用下于有限时间后到达某希望的特定状态？

能观性问题 已知某系统及其在某时间段上的输入和输出，试问可否依据这一时间段上的输入和输出决定出系统这一时间段上的状态？

简单地说，上述能控性问题即是研究系统的内部状态变量可否由控制输入完全影响的问题。如果系统的每一个状态变量的运动都可由输入来影响和控制，而由任意的始点达到

原点，那么就称该系统是能控的，或者更确切地说是状态能控的。能观性问题是研究系统的外部变量，即系统的输入和输出是否完全反映系统状态的问题。如果系统的所有状态变量的任意形式的运动均可由输出完全反映，则称系统是状态能观测的，简称为能观测。下面我们来研究几个具体系统的能控性和能观性问题。

例4.1.1 给定系统的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad -6]x$$

将其表为标量方程组的形式，有

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -5x_2 + 2u \\ y &= -6x_2 \end{aligned}$$

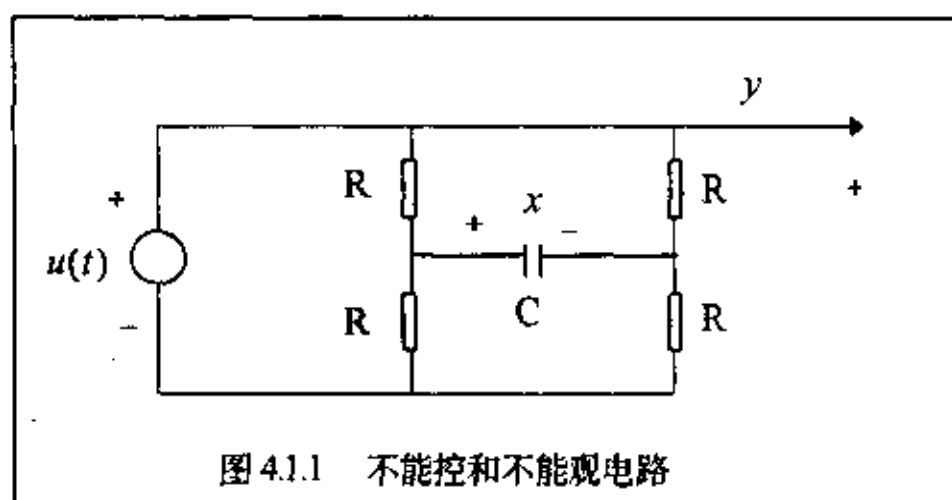


图 4.1.1 不能控和不能观电路

这表明：状态变量 x_1 和 x_2 都可通过选择输入 u 而由始点达到原点，因而系统为完全能控；但输出 y 只能反映状态变量 x_2 ，状态变量 x_1 和输出 y 既无直接联系也无间接联系，所以系统是不完全能观测的。

例4.1.2 考察图4.1.1所示的电路，系统的状态变量为电容端

电压 x ，输入为电压源 $u(t)$ ，输出为电压 y 。

从电路不难看出：如果初始状态 $x(t_0) = 0$ ，那么不管输入 $u(t)$ 是什么，对所有 $t \geq t_0$ 必恒有 $x(t) = 0$ ，即 x 不受 $u(t)$ 影响；另一方面，如果输入 $u(t) = 0$ ，则不论电容的初始端电压 $x(t_0)$ 是多少，对所有 $t \geq t_0$ 恒有 $y(t) = 0$ ，即 $x(t)$ 不能由 $y(t)$ 反映。这表明，此电路是状态不能控和状态不能观测的。

例4.1.3 考虑图4.1.2所示的两个电路。在图(a)的电路中，两个状态变量为两电容的端电压 x_1 和 x_2 ，输入 u 能够做到使 x_1 或者 x_2 转移到任意目标值，但不能将 x_1 和 x_2 分别转移到不同的任意目标值。如若初始状态 $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$ ，则不论将输入 u 取为何种形式，对所有 $t \geq t_0$ ，总只能是 $x_1(t)$ 等于 $x_2(t)$ ，即不可能做到使 $x_1(t) \neq x_2(t)$ 。这表明此电路不完全能控。在图(b)的电路中，如若取输入 $u(t) = 0$ ，那么当两个状态变量的初始状态 $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ 且为任意值时，必定有 $i = 0$ ，也即对所有 $t \geq t_0$ 总是有 $y(t) = 0$ 。这说明，此种情况下的电路状态运动是由输出不能反映的，所以此电路为不完全能观测。

4.1.2 能控性的定义

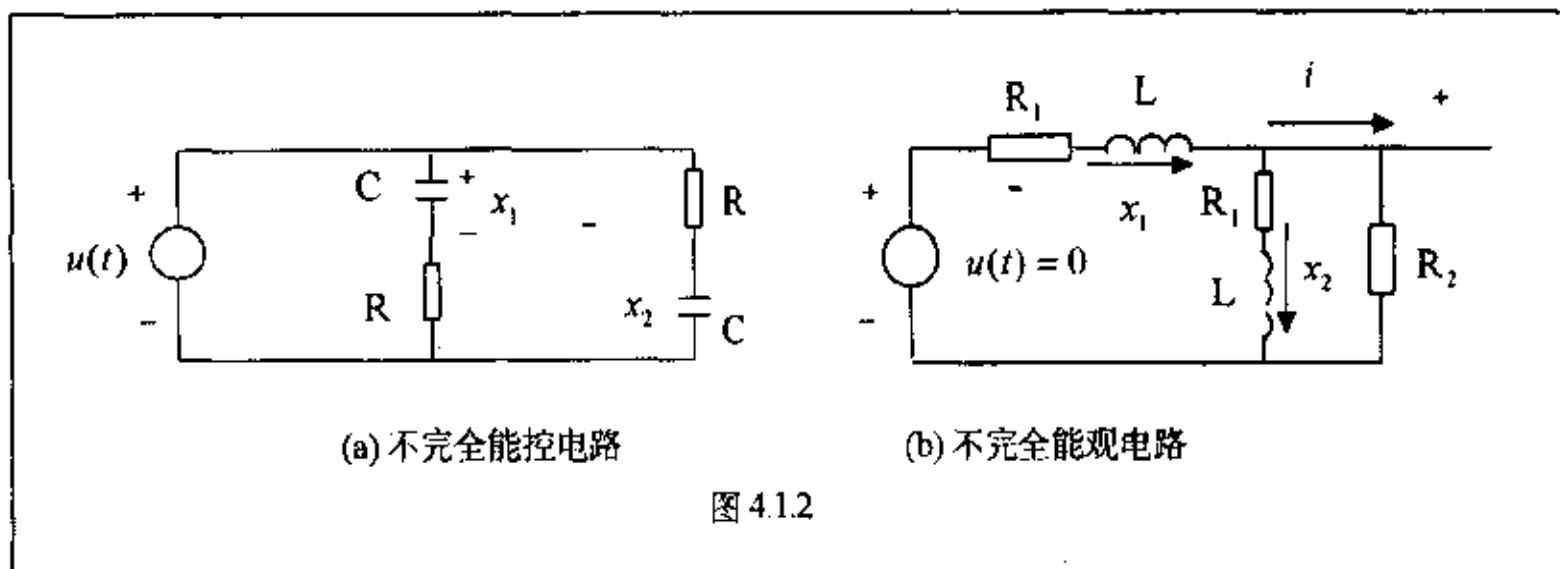


图 4.1.2

应当指出，上述对能控性和能观测性所作的直观说明，只是对这两个概念的直观的而不严密描述，而且也只能用来解释和判断非常直观和非常简单的系统的能控性和能观测性。为了揭示能控性和能观测性的本质属性，并用于分析和判断更为一般和较为复杂的系统，有待于对这两个概念建立严格的定义，并在此基础上来导出相应的判别准则和基本属性。

考虑线性时变系统的状态方程

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in J \quad (4.1.1)$$

其中， x 为 n 维状态向量， u 为 r 维输入向量， J 为时间定义区间， A 和 B 分别为 $n \times n$ 和 $n \times r$ 阶的元为 t 的分段连续函数的矩阵。下面我们从定义一个状态的能控开始，引入系统为完全能控和不完全能控的定义。

定义4.1.1 对于线性时变系统(4.1.1)，如果对取定初始时刻 $t_0 \in J$ 的一个非零初始状态 x_0 ，存在一时刻 $t_1 \in J$ ， $t_1 > t_0$ 和一个无约束的容许控制 $u(t)$ ， $t \in [t_0, t_1]$ ，使得系统在这个控制的作用下，系统由 x_0 出发的运动轨线经过时间 $t_1 - t_0$ 后由 x_0 转移到 $x(t_1) = 0$ ，则称此 x_0 是系统在 t_0 时刻的一个能控状态。

定义4.1.2 对于线性时变系统(4.1.1)，如果状态空间中的所有非零状态都是在 t_0 ($t_0 \in J$)时刻的能控状态，则称系统(4.1.1)在时刻 t_0 是完全能控的。如果对于任何 $t_0 \in [T_1, T_2]$ ，系统均是在 t_0 时刻为能控的，则称系统(4.1.1)在区间 $[T_1, T_2]$ 上是完全能控的。

定义4.1.3 对于线性时变系统(4.1.1)，取定初始时刻 $t_0 \in J$ ，如果状态空间中存在一个或一些非零状态在时刻 t_0 是不能控的，则称系统(4.1.1)在时刻 t_0 是不完全能控的。

下面我们对能控性的上述定义作几点说明：

说明4.1.1 定义中只要求在可找到的输入 u 的作用下，使 t_0 时刻的非零状态 x_0 在 J 上的一段有限时间内转移到状态空间的坐标系原点，而对于状态转移的轨迹并不加以限制和规定。这就是说，能控性是表征系统状态运动的一个定性特性。

说明4.1.2 定义中提到的所谓无约束的容许控制，无约束表示对输入的每个分量的幅值不加以限制，即可取为任意大到所要求的值，容许控制则表示输入的所有分量均是在 J 上平方可积的。

说明4.1.3 上述各定义中都是相对于 J 中的一个取定时刻 t_0 来定义的,这对于时变系统是完全必要的。如果所考虑的为线性定常系统,则其能控与否和 t_0 时刻的选取无关。

说明4.1.4 上述定义中都规定为由非零状态转移到零状态,如果将其变更为由零状态达到非零状态,则称这种情况为状态能达的。对于连续的线性定常系统,能控性和能达性是等价的。对于离散系统和时变系统,严格地说两者是不等价的。可以出现这样的情况,系统是不完全能控的,但却是完全能达的。

说明4.1.5 系统为不完全能控的情况是一种“奇异”的情况,系统中组成元件的参数值的很小的变动(这在实际情况中是完全可能的)都可使其成为完全能控。所以,对于一个实际的系统,系统为能控的概率几乎等于1。换句话说,如果随机地选取系统的系数矩阵 A 和 B 的元,那么使系统为完全能控的概率几乎等于1。例如,图4.1.1的电路,如果其各个电阻的参数值产生很小的变动而使电路的对称性被破坏,则此电路就由不能控变成了能控。

4.1.3 能观测性定义

能观测性表征系统的状态是否可由系统的输入和输出完全反映,所以应同时考虑系统的状态方程和输出方程

$$L: \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & x(t_0) = x_0, & t \in J \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases} \quad (4.1.2)$$

其中 $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $C(t)$ 和 $D(t)$ 分别为 $n \times n$ 、 $n \times r$ 、 $m \times n$ 和 $m \times r$ 的满足状态方程解的存在唯一性条件的时变矩阵。进一步,由上一章中的分析可知(4.1.2)的状态方程的解的表达式为

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (4.1.3)$$

其中 $\Phi(t, \tau)$ 为系统的状态转移矩阵。将式(4.1.3)代入(4.1.2)的输出方程,可得到输出响应的表达式为

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t) \quad (4.1.4)$$

在研究能观测性问题中,输出 y 和输入 u 都已假定为已知,只有内部变量即初始状态 x_0 是未知的。因此,若定义

$$\bar{y}(t) = y(t) - C(t)\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau - D(t)u(t) \quad (4.1.5)$$

则可将式(4.1.4)进而改写为

$$\bar{y}(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 \quad (4.1.6)$$

这表明,所谓能观测性即是研究 x_0 可否由 \bar{y} 来完全估计。由于 \bar{y} 和 x_0 的任意性,这又等价于研究 $u = 0$ 时由 y 来估计 x_0 的可能性,也即系统的零输入方程

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, & x(t_0) = x_0, & t_0, t \in J \\ y = C(t)x \end{cases} \quad (4.1.7)$$

的能观测性。因而下面我们只需从式(4.1.7)出发来给出系统能观测性的有关定义。

定义4.1.4 对于线性时变系统(4.1.7), 如果对取定初始时刻 $t_0 \in J$ 的一个非零初始状态 x_0 , 存在一个有限时刻 $t_1 \in J, t_1 > t_0$, 使得由区间 $[t_0, t_1]$ 上的系统输出 $y(t)$ 可以唯一地决定系统的初始状态 x_0 , 则称此 x_0 在时刻 t_0 为能观测的。

关于系统(4.1.7)的某初始状态 x_0 在时刻 t_0 为不能观测的定义, 我们有:

定义4.1.5 对于线性时变系统(4.1.7), 取定初始时刻 $t_0 \in J$ 及其一个非零初始状态 x_0 , 如果对于任何有限时刻 $t_1 \in J, t_1 > t_0$, 均有 $y(t) = 0, t \in [t_0, t_1]$, 则称此 x_0 在时刻 t_0 为不能观测的。

定义4.1.6 对于线性时变系统(4.1.7), 如果状态空间中的所有状态都是时刻 $t_0 (t_0 \in J)$ 的能观测状态, 则称系统(4.1.7)在时刻 t_0 是完全能观测的。如果对于任何 $t_0 \in [T_1, T_2]$, 系统均是在 t_0 时刻为能观测的, 则称系统(4.1.1)在区间 $[T_1, T_2]$ 上是完全能观测的。

定义4.1.7 对于线性时变系统(4.1.7), 取定初始时刻 $t_0 \in J$, 如果状态空间中存在一个或一些非零状态在时刻 t_0 是不能观测的, 则称系统(4.1.7)在时刻 t_0 是不完全能观测的。

对于上述定义也可像对能控性那样给出类似的解释。这里再特别提到一点, 即系统为不完全能观测的情况也只是一种“奇异”的情况, 如果随机地选取系统的系数矩阵 A 和 C 的元, 那么使系统为完全能观测的概率几乎等于1。

4.2 线性时变系统的能控性判据

前一节给出了线性系统能控性的定义。但如果直接从这个定义出发检验系统是否能控往往是比较困难的, 因此本节讨论能控性的判别准则。

4.2.1 Gram矩阵判据

首先给出一个一般性的判别定理。

定理4.2.1 系统(4.1.1)在 t_0 时刻能控的充分必要条件是存在某个有限时刻 $t_1 > t_0$, 使得矩阵

$$W_c(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_1, \tau) d\tau \quad (4.2.1)$$

是正定的, 这里 $\Phi(t, \tau)$ 是系统(4.1.1)的状态转移矩阵。

证明 充分性 假设存在 $t_1 > t_0$, 使得 $W_c(t_1, t_0) > 0$, 因而 $W_c(t_1, t_0)$ 是非奇异的。又设 x_0 是系统(4.1.1)在 t_0 时刻的任意初始状态, 定义

$$u(t) = -B^T(t) \Phi^T(t_1, t) W_c^{-1}(t_1, t_0) \Phi(t_1, t_0) x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.2.2)$$

另一方面, 由系统的状态方程的解的表达式有

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \quad (4.2.3)$$

将前面定义的控制输入 $u(\cdot)$ 代到这个解的表达式中, 即得 $x(t_1) = 0$ 。于是, 根据系统的能控性定义可知系统(4.1.1)在 t_0 时刻是完全能控的。

必要性 用反证法证明之。假设系统(4.1.1)是完全能控的，但不管 t_1 多么大， $W_c(t_1, t_0)$ 总是奇异的。下面我们由此导出矛盾。

从能控性的定义可知，存在某个时刻 $t_1^* > t_0$ ，使得对每个初始状态 x_0 ，都能找到一个定义在时间间隔 $[t_0, t_1^*]$ 上的容许控制，使得系统由 x_0 出发的运动轨线在这个控制作用下在 t_1^* 时刻达到零状态，即 $x(t_1^*) = 0$ 。依假设，对于这个 t_1^* ， $W_c(t_1^*, t_0)$ 是奇异的，于是有非零 n 维向量 z ，使得

$$z^T W_c(t_1^*, t_0) z = 0 \quad (4.2.4)$$

即

$$\int_{t_0}^{t_1^*} z^T \Phi(t_1^*, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_1^*, \tau) z d\tau = 0 \quad (4.2.5)$$

由此得出

$$z^T \Phi(t_1^*, \tau) B(\tau) \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t_1^* \quad (4.2.6)$$

其中，“ $\stackrel{\text{a.e.}}{=}$ ”表示几乎处处相等。

另一方面，由于系统(4.1.1)完全能控，因而对初始状态 $x_0 = -\Phi(t_0, t_1^*) z$ ，也能找到定义在时间间隔 $[t_0, t_1^*]$ 上的容许控制 $u_0(t)$ ，使得

$$0 = \Phi(t_1^*, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t_1^*} \Phi(t_1^*, \tau) B(\tau) u_0(\tau) d\tau \quad (4.2.7)$$

将所取的 x_0 代到上式，得

$$z = \int_{t_0}^{t_1^*} \Phi(t_1^*, \tau) B(\tau) u_0(\tau) d\tau \quad (4.2.8)$$

对上式两边左乘 z^T ，有

$$\|z\|^2 = \int_{t_0}^{t_1^*} z^T \Phi(t_1^*, \tau) B(\tau) u_0(\tau) d\tau = 0 \quad (4.2.9)$$

由此推出 $z = 0$ ，这与 z 为非零向量矛盾。这个矛盾表明 $W_c(t_1^*, t_0)$ 是非奇异的，从而是正定的。

△△△

这个定理说明判断一个线性系统的能控性问题，归结为判别矩阵 $W_c(t, t_0)$ 在某个时刻的正定性问题。因此，一个系统的概念与一个代数问题联系起来。通常把矩阵 $W_c(t, t_0)$ 叫做系统的能控性Gram矩阵，它由系统矩阵 $A(t)$ 和控制分布矩阵 $B(t)$ 决定。由此可见，系统的能控性是它本身所固有的性质，反映了系统的结构特性，而不依赖于具体的瞬时状态和外部的控制输入。

从上述证明中可见，如果存在某个时刻 t_1 使得 $W_c(t_1, t_0)$ 非奇异的话，那么控制函数

$$u_0(t) = -B^T(t) \Phi^T(t_1, t) W_c^{-1}(t_1, t_0) \Phi(t_1, t_0) x_0 \quad (4.2.10)$$

能把系统(4.1.1)的初始状态 $x(t_0) = x_0$ 控制到 $x(t_1) = 0$ 。其实，能够实现这样的状态转移的

控制函数并非唯一，但是可以证明由(4.2.10)定义的容许控制是实现这种状态转移的所有控制函数中所消耗的“能量”最小的一个，这一点可由下述命题确切表出。

命题4.2.1 令 $u(t)$ 是任意一个能把系统(4.1.1)的初始状态 $x(t_0) = x_0$ 控制到 $x(t_1) = 0$ 的容许控制， $u_0(t)$ 由式(4.2.10)给出，则

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2 dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \|u_0(t)\|^2 dt = x_0^T \Phi^T(t_1, t_0) W_c^{-1}(t_1, t_0) \Phi(t_1, t_0) x_0 \quad (4.2.11)$$

证明 事实上，已经知道由(4.2.10)定义的容许控制将 x_0 转移到 $x(t_1) = 0$ ，而 $u(t)$ 是另一个把 x_0 转移到零状态的容许控制，因此有

$$0 = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u_0(\tau)d\tau \quad (4.2.12)$$

及

$$0 = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (4.2.13)$$

式(4.2.13)两边分别减去式(4.2.12)两边，得

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)[u(\tau) - u_0(\tau)]d\tau = 0 \quad (4.2.14)$$

在式(4.2.14)两边左乘 $x_0^T \Phi^T(t_1, t_0)W_c^{-1}(t_1, t_0)$ ，并利用等式(4.2.10)，得

$$\int_{t_0}^{t_1} u_0^T(\tau)[u(\tau) - u_0(\tau)]d\tau = 0 \quad (4.2.15)$$

进而得出

$$\int_{t_0}^{t_1} u_0^T(\tau)u(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \|u_0(\tau)\|^2 d\tau \quad (4.2.16)$$

由于

$$0 \leq \int_{t_0}^{t_1} \|u(\tau) - u_0(\tau)\|^2 d\tau = \int_{t_0}^{t_1} [\|u(\tau)\|^2 - 2u_0^T(\tau)u(\tau) + \|u_0(\tau)\|^2] d\tau \quad (4.2.17)$$

将(4.2.16)代入(4.2.17)，得

$$0 \leq \int_{t_0}^{t_1} [\|u(\tau)\|^2 - \|u_0(\tau)\|^2] d\tau \quad (4.2.18)$$

或

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq \int_{t_0}^{t_1} \|u_0(\tau)\|^2 d\tau \quad (4.2.19)$$

这就是所希望的不等式(4.2.11)。

△△△

4.2.2 基于状态转移矩阵的判据

通过检查能控性矩阵 $W_c(t, t_0)$ 的正定性来判断系统的能控性不是一件容易的事情，即便是对很简单的系统也是如此。读者可回想4.1节中给出的三个例子，实际上就是从计算系统的能控性矩阵出发来定义所希望的容许控制的。然而就是对这样一些简单系统，计算能控性矩阵也要经过复杂的积分运算，更何况是对一些比较复杂的系统，尤其是对时变系统，要想计算 $W_c(t, t_0)$ 的解析表达式几乎是不可能的。因此，定理4.2.1往往仅有理论意

义, 实际上用它作为判别系统能控性的准则并不方便, 因而我们需要寻找其它的判别准则。

定理4.2.2 假设 $A(t)$ 和 $B(t)$ 都是 t 的连续函数矩阵, 则系统(4.1.1)在 t_0 时刻能控的充分必要条件是存在某个有限时刻 $t_1 > t_0$, 使得矩阵 $\Phi(t_1, \tau)B(\tau)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上行线性独立, 即对任意 n 维非零向量 z , 都有

$$z^T \Phi(t_1, \tau)B(\tau) \neq 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t_1 \quad (4.2.20)$$

证明 充分性 假设式(4.2.20)成立, 但是系统(4.1.1)在 t_0 时刻不能控。那么由定理4.2.1可知, 对任意 $t_1 > t_0$, $W_c(t_1, t_0)$ 都是奇异的。因此, 对每个 $t_1 > t_0$, 总存在非零向量 z , 使得

$$z^T W_c(t_1, t_0)z = 0 \quad (4.2.21)$$

即

$$\int_{t_0}^{t_1} z^T \Phi(t_1, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_1, \tau)z d\tau = 0 \quad (4.2.22)$$

由于 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的诸元都是连续的, 因此必有

$$z^T \Phi(t_1, \tau)B(\tau) \equiv 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t_1 \quad (4.2.23)$$

而这与式(4.2.20)矛盾, 这个矛盾表明系统(4.1.1)在 t_0 时刻是能控的。

必要性 现在假设系统(4.1.1)在 t_0 时刻是能控的, 但是对任意时刻 $t_1 > t_0$, $\Phi(t_1, \tau)B(\tau)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上总是线性相关的, 即式(4.2.20)对任意 $t_1 > t_0$ 都不成立, 那么无论 t_1 多么大, 总有非零向量 z 使得

$$z^T W_c(t_1, t_0)z = 0 \quad (4.2.24)$$

这说明 $W_c(t_1, t_0)$ 是奇异的。由定理4.2.1知, 这与系统(4.1.1)在 t_0 时刻能控矛盾。这一矛盾表明至少存在某个 $t_1 > t_0$ 使得(4.2.20)成立。从而必要性得证。

△△△

4.2.3 基于系统参数矩阵的判据

对于充分光滑的系统, 还可以给出一个检验系统能控性的充分条件。

定理4.2.3 假设系统(4.1.1)中的 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的每个元分别是 $n-2$ 和 $n-1$ 次连续可微函数, 记

$$B_1(t) = B(t) \quad (4.2.25)$$

$$B_i(t) = -A(t)B_{i-1}(t) + \dot{B}_{i-1}(t), \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (4.2.26)$$

令

$$Q_c(t) = [B_1(t) \quad B_2(t) \quad \dots \quad B_n(t)] \quad (4.2.27)$$

如果存在某个时刻 $t_1 > t_0$, 使得 $\text{rank} Q_c(t_1) = n$, 那么系统(4.1.1)在 t_0 时刻能控。

证明 假设系统(4.1.1)在 t_0 时刻不能控, 那么由定理4.2.2可知, 对任意 $t_1 > t_0$, 总存在相应的非零向量 z , 使得

$$z^T \Phi(t_1, t)B(t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.2.28)$$

对式(4.2.28)两边进行微分, 得出

$$z^T \frac{d}{dt} (\Phi(t_1, t)B(t)) = z^T (\dot{\Phi}(t_1, t)B(t) + \Phi(t_1, t)\dot{B}(t)) = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.2.29)$$

由状态转移矩阵的性质有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(t_1, t) &= -\Phi(t_1, t)\dot{\Phi}(t, t_1)\Phi(t_1, t) = \\ &= -\Phi(t_1, t)A(t)\Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t) = -\Phi(t_1, t)A(t) \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

将等式(4.2.30)代入(4.2.29), 得

$$z^T \Phi(t_1, t) [-A(t)B(t) + \dot{B}(t)] = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.2.31)$$

即

$$z^T \Phi(t_1, t) B_i(t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.2.32)$$

对上式继续进行微分, 并利用式(4.2.26)推知, 对 $i=1, 2, \dots, n$ 都有

$$z^T \Phi(t_1, t) B_i(t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.2.33)$$

在式(4.2.33)中令 $t = t_1$, 得

$$z^T B_i(t_1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

从而有 $z^T Q_c(t_1) = 0$, 即 $\text{rank } Q_c(t_1) < n$. 由 t_1 的任意性导致与定理的假设矛盾, 这个矛盾表明系统(4.1.1)在 t_0 时刻是能控的.

△△△

4.3 线性定常系统的能控性判据

4.3.1 定常系统能控性的特殊性

当矩阵 $A(t)$ 和 $B(t)$ 为定常时, 系统(4.1.1)化为

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \quad (4.3.1)$$

引理4.3.1 设定常线性系统(4.3.1)在某 $t_0 \in [0, \infty)$ 时刻完全能控, 则它必在 $[0, \infty)$ 上完全能控.

证明 由于系统(4.3.1)是定常的, 因此它的状态转移矩阵为 $e^{A(t-\tau)}$. 因为它在 t_0 时刻完全能控, 所以存在某个 $t_1 > t_0$, 使得矩阵

$$W_c(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} BB^T e^{A^T(t_1-\tau)} d\tau \quad (4.3.2)$$

是正定的. 现在令 $\sigma = \tau + t_1^*$, $t_1^* \geq -t_0$, 于是对 $W_c(t_1, t_0)$ 的被积函数作变量替换, 得

$$W_c(t_1, t_0) = \int_{t_0+t_1^*}^{t_1+t_1^*} e^{A(t_1+t_1^*-\sigma)} BB^T e^{A^T(t_1+t_1^*-\sigma)} d\sigma = W_c(t_1+t_1^*, t_0+t_1^*) > 0$$

由 t_1^* 的任意性并由定理4.2.1可知, 系统(4.3.1)在任意时刻 $t \geq 0$ 都是完全能控的, 因此它在 $[0, \infty)$ 上完全能控.

△△△

这个引理说明，对于定常线性系统，只要它在某个时刻完全能控，则它必定在整个时间轴上完全能控。因此，对定常系统只说它能控或不能控就够了，时间限制可以去掉。如果定常线性系统能控，也可以说 $[A \ B]$ 为能控对，或者说 $[A \ B]$ 能控。

4.3.2 能控性矩阵判据

关于定常线性系统的能控性有更简单的判别准则。

定理4.3.1 定常线性系统(4.3.1)能控的充分必要条件是

$$\text{rank}[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] = n \quad (4.3.3)$$

证明 充分性是定理4.2.3的直接推论，因此只需证必要性便可。由于(4.3.1)能控，因此它在 $t_0 = 0$ 时刻能控。于是对任意初始状态 x_0 ，都有 $t_1 > 0$ 以及定义在 $[0 \ t_1]$ 上的容许控制 $u(\cdot)$ ，使得

$$0 = e^{At_1} x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (4.3.4)$$

或者

$$x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (4.3.5)$$

由3.4节 e^{At} 的求取方法III知，有连续函数 $\rho_k(\tau)$ ，使得

$n-1$

$$\text{rank}[B \ AB \ \cdots \ A^{k-1}B] = n \quad (4.3.11)$$

推论4.3.2 设定常线性系统(4.3.1)是单输入的, 即 $(A, B, C) = (A, b, C)$, 那么它能控的充分必要条件是

$$\det[b \ Ab \ \cdots \ A^{n-1}b] \neq 0 \quad (4.3.12)$$

4.3.3 PBH判据

定理4.3.2 定常线性系统(4.3.1)能控的充分必要条件是, 对每个 $\lambda \in \sigma(A)$ 都有

$$\text{rank}[A - \lambda I_n \ B] = n \quad (4.3.13)$$

其中 $\sigma(A)$ 表示 A 的特征值集合.

证明 必要性 设系统(4.3.1)能控, 但存在某个 $\lambda_0 \in \sigma(A)$, 使得

$$\text{rank}[A - \lambda_0 I_n \ B] < n \quad (4.3.14)$$

从而必有非零向量 z (它可能是复的), 使得

$$z^T[A - \lambda_0 I_n \ B] = 0 \quad (4.3.15)$$

于是有

$$z^T(A - \lambda_0 I_n) = 0 \quad (4.3.16)$$

$$z^T B = 0 \quad (4.3.17)$$

这说明 z^T 是 A 的相应于特征值 λ_0 的右特征向量, 且与矩阵 B 的每个列向量正交, 从而有

$$z^T A^k B = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.3.18)$$

于是

$$z^T[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] = 0 \quad (4.3.19)$$

因为 $z^T \neq 0$, 所以

$$\text{rank}[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] < n \quad (4.3.20)$$

而这与系统能控矛盾. 这个矛盾表明(4.3.13)对一切 $\lambda \in \sigma(A)$ 成立.

充分性 假设式(4.3.13)成立, 而系统(4.3.1)不能控, 那么必存在非零向量 z , 使得

$$z^T[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] = 0 \quad (4.3.21)$$

即

$$z^T A^k B = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.3.22)$$

显然, $z^T A^k (k = 1, 2, \dots, n-1)$ 都是 B 的左零空间中的元. 于是可以断定, 存在一个最小的整数 k , $0 \leq k < n-1$, 使得向量 $z^T, z^T A, \dots, z^T A^{k-1}$ 线性独立. 这时有不全为零的实常数 a_0, a_1, \dots, a_{k-1} , 使得

$$z^T A^k + a_{k-1} z^T A^{k-1} + \cdots + a_1 z^T A + a_0 z^T = 0 \quad (4.3.23)$$

这说明

$$f(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_0 \lambda + a_0 \quad (4.3.24)$$

是 z^T 相对 A 的极小多项式. 令 λ_0 是 $f(\lambda)$ 的一个零点, 则由命题1.2.3知, λ_0 是 A 的一个特

征值, 这是因为 $f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式的一个因子, 于是重新写 $f(\lambda)$ 为

$$f(\lambda) = (\lambda^{k-1} + \beta_{k-2}\lambda^{k-2} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0)(\lambda - \lambda_0) \quad (4.3.25)$$

这里 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-2}$ 是 $k-1$ 个复常数, 于是有

$$z^T f(A) = z^T (A^{k-1} + \beta_{k-2}A^{k-2} + \cdots + \beta_1A + \beta_0I_n)(A - \lambda_0I_n) = 0 \quad (4.3.26)$$

令

$$\psi^T = z^T (A^{k-1} + \beta_{k-2}A^{k-2} + \cdots + \beta_1A + \beta_0I_n) \quad (4.3.27)$$

由命题1.2.3知, $\psi^T \neq 0$, 且 ψ^T 是 A 的相应于特征值 λ_0 的左特征向量. 从而由式(4.3.21)和式(4.3.26)可得出 $\psi^T B = 0$ 及 $\psi^T (A - \lambda_0I) = 0$, 所以必有

$$\text{rank}[A - \lambda_0I_n \quad B] < n \quad (4.3.28)$$

这与假设(4.3.13)矛盾, 这个矛盾表明系统(4.3.1)是能控的.

△△△

由该定理可得下述明显推论.

推论4.3.3 定常线性系统(4.3.1)能控的充分必要条件是它没有输入解耦零点.

从定理4.3.2还可以发现, 定常线性系统(4.3.1)能控的充分必要条件是, 如果对每个 $\lambda \in \sigma(A)$, 若有

$$z^T (A - \lambda I_n) = 0 \quad (4.3.29)$$

$$z^T B = 0 \quad (4.3.30)$$

则必有 $z^T = 0$. 这就是说, 下述推论成立.

推论4.3.4 系统(4.3.1)能控的充分必要条件是, 对于系统矩阵 A 的每个特征向量 z , 总有

$$z^T B \neq 0 \quad (4.3.31)$$

另外, 再注意到 $\text{rank}[A - \lambda_0I_n] < n$ 的充要条件是 $\lambda_0 \in \sigma(A)$, 由定理4.3.2还可以得到下述推论:

推论4.3.5 系统(4.3.1)能控的充分必要条件是

$$\text{rank}[A - \lambda I_n \quad B] = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (4.3.32)$$

按照系统的能控性, 可以对定常线性系统的系统矩阵 A 的特征值(或者说系统的极点)进行分类.

定义4.3.1 如果 $\lambda_0 \in \sigma(A)$, 并且满足

$$\text{rank}[A - \lambda_0I_n \quad B] < n \quad (4.3.33)$$

则 λ_0 叫做系统(4.3.1)的一个不能控振型.

显然, 系统的不能控振型必是系统的极点, 同时又是系统的输入解耦零点.

定理4.3.1和定理4.3.2都是定常线性系统能控性的代数判据. 今后我们称矩阵

$$Q_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \quad (4.3.34)$$

为定常线性系统的能控性矩阵. 它是一个 $n \times nr$ 阶矩阵, 在线性系统理论中起着特别重要的作用.

4.4 对偶原理与能观性判据

和能控性一样，仅仅从定义出发判别系统的能观测性也是不方便的，需要寻找比较方便的判别准则，这就是这一节所要讨论的主要问题。

4.4.1 Gram矩阵判据

对于能观测性判别，首先可以给出如下的定理。

定理4.4.1 已知线性系统(4.1.7)，它在 t_0 时刻完全能观测的充分必要条件是，存在某个有限时刻 $t_1 > t_0$ ，使得矩阵

$$W_0(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \quad (4.4.1)$$

是正定的。

证明 充分性 假设存在某个有限时刻 $t_1 > t_0$ ，使得矩阵 $W_0(t_1, t_0)$ 是正定的，因而它是非奇异的。若任取 t_0 时刻系统的初始状态为 $x(t_0) = x_0$ ，那么，求解系统的状态方程得出

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 \quad (4.4.2)$$

将式(4.4.2)代入系统的输出方程得由 x_0 产生的输出响应为

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 \quad (4.4.3)$$

然后，在式(4.4.3)两边同时左乘 $\Phi^T(t, t_0)C^T(t)$ ，再从 t_0 到 t_1 对 t 进行积分，得出

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) y(t) dt = W_0(t_1, t_0)x_0 \quad (4.4.4)$$

由于矩阵 $W_0(t_1, t_0)$ 是非奇异的，故由上式唯一决定 x_0 为

$$x_0 = W_0^{-1}(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) y(t) dt \quad (4.4.5)$$

因此由定义可知，系统在 t_0 时刻完全能观测。

必要性 假设系统(4.1.7)在 t_0 时刻完全能观测。和充分性的证明一样，对任意 $t_1 > t_0$ 都有

$$W_0(t_1, t_0)x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) y(t) dt \quad (4.4.6)$$

其中， x_0 是系统在 t_0 时刻的任意初始状态。假设对任意 $t_1 > t_0$ ， $W_0(t_1, t_0)$ 都是奇异的，那么由代数方程(4.4.6)可知，对任意固定的 $t_1 > t_0$ ，利用时间间隔 $[t_0, t_1]$ 上的量测 $y(t)$ 都不能唯一决定系统在 t_0 时刻的初始状态 x_0 ，这与系统(4.1.7)在 t_0 时刻完全能观测矛盾。这个矛盾表明，至少存在某个时刻 t_1 ，使得 $W_0(t_1, t_0)$ 是非奇异的，因而它是正定的。

△△△

通常，将矩阵 $W_0(t_1, t_0)$ 叫做系统(4.1.7)的能观测性Gram矩阵，它是由系统矩阵 $A(t)$ 和输出矩阵 $C(t)$ 决定的。因此说，系统的能观测性也是系统的一种结构性质，它与系统的具

体输入和输出无关。同时还可以看出，只要系统在 t_0 时刻是完全能观测的，利用系统的能观测性矩阵就可以决定系统在 t_0 时刻的初始状态，其表达式同式(4.4.5)。

4.4.2 对偶原理

下面我们将利用定理4.4.1来讨论线性系统的能控性和能观性之间的关系。

从定理4.4.1知道，检验系统的能观测性的问题归结为检验能观测性矩阵 $W_0(t_1, t_0)$ 的正定性问题，即把一个系统理论问题化成了一个纯代数问题，这一点也完全和能控性一样。另外，从系统的能控性矩阵 $W_c(t_1, t_0)$ 和能观测性矩阵 $W_0(t_1, t_0)$ 的结构来看，它们在形式上有某些相似之处，因此，系统的能控性和能观测性之间应该有一些联系，这种联系就是对偶原理所揭示的。对偶原理和能控性、能观测性的概念是卡尔曼(R. E. Kalman)发现的。

为了讨论对偶原理，首先引入系统(4.1.2)的对偶系统

$$L^*: \begin{cases} \dot{x}^*(t) = -A^T(t)x^*(t) + C^T(t)v(t) \\ z(t) = B^T(t)x^*(t) \end{cases} \quad (4.4.7)$$

其中： $A(t)$ 、 $B(t)$ 和 $C(t)$ 分别为系统 L 的系统矩阵、控制分布矩阵和量测矩阵； $x^*(t)$ 是对偶系统 L^* 的 n 维状态向量；也叫做系统 L 的状态向量 $x(t)$ 的协状态； $v(t)$ 是 m 维控制输入向量； $z(t)$ 是 r 维量测输出向量。

为得出对偶原理，我们先来指出相互对偶的系统之间的联系。

引理4.4.1 定常线性系统 L 的状态转移矩阵和它的对偶系统 L^* 的状态转移矩阵是互为转置逆的关系。

证明 记线性系统 L 的状态转移矩阵为 $\Phi(t, t_0)$ ，它的对偶系统 L^* 的状态转移矩阵为 $\Psi(t, t_0)$ ，那么依定义有

$$\dot{\Psi}(t, t_0) = -A^T(t)\Psi(t, t_0) \quad (4.4.8)$$

$$\Psi(t_0, t_0) = I_n \quad (4.4.9)$$

由于

$$\Psi^T(t_0, t)\Psi^T(t, t_0) = I_n \quad (4.4.10)$$

因此

$$\frac{d}{dt}(\Psi^T(t_0, t)\Psi^T(t, t_0)) = 0 \quad (4.4.11)$$

于是

$$\dot{\Psi}^T(t_0, t)\Psi^T(t, t_0) + \Psi^T(t_0, t)\dot{\Psi}^T(t, t_0) = 0 \quad (4.4.12)$$

或者

$$\dot{\Psi}^T(t_0, t) = -\Psi^T(t_0, t)\dot{\Psi}^T(t, t_0) \cdot \Psi^T(t_0, t) \quad (4.4.13)$$

将等式(4.4.8)代入等式(4.4.13)的右边，得

$$\dot{\Psi}^T(t_0, t) = A(t)\Psi^T(t_0, t) \quad (4.4.14)$$

且显然

$$\Psi^T(t_0, t_0) = I_n \quad (4.4.15)$$

根据式(4.4.14)、(4.4.15)和状态转移矩阵的定义以及常微分方程解的唯一性定理可知

$$\Psi^T(t_0, t) = \Phi(t, t_0) \quad (4.4.16)$$

此即所证之结论。

△△△

基于上述引理，我们现在可以证明线性系统的下述对偶原理。

定理4.4.2 [对偶原理] 系统 L 在 t_0 时刻完全能控的充分必要条件是它的对偶系统 L^* 在 t_0 时刻完全能观测；系统 L 在 t_0 时刻完全能观测的充分必要条件是它的对偶系统 L^* 在 t_0 时刻完全能控。

证明 根据定义和引理4.4.1，系统 L 的能控性矩阵为

$$\begin{aligned} W_c(t_1, t_0) &= \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_1, \tau) d\tau = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \Psi^T(\tau, t_1) B(\tau) B^T(\tau) \Psi(\tau, t_1) d\tau = \Psi^T(t_0, t_1) W_o^*(t_1, t_0) \Psi(t_0, t_1) \end{aligned}$$

这里， $W_o^*(t_1, t_0)$ 是系统 L^* 的能观测性矩阵。因为矩阵 $\Psi(t_0, t_1)$ 是非奇异的，所以矩阵 $W_c(t_1, t_0)$ 和 $W_o^*(t_1, t_0)$ 的正定性是等价的。因此，系统 L 在 t_0 时刻完全能控的充分必要条件是它的对偶系统 L^* 在 t_0 时刻完全能观测。

同样可以证明，系统 L 在 t_0 时刻完全能观测的充分必要条件是它的对偶系统 L^* 在 t_0 时刻完全能控。

△△△

4.4.3 能观性判据

利用对偶原理和定理4.2.2可以得到下述关于能观性判定的状态转移矩阵判据。

定理4.4.2 已知系统 L ，假设 $A(t)$ 和 $C(t)$ 的诸元均为连续的，则其在时刻 t_0 能观的充分必要条件是，存在某个有限时刻 t_1 ，使得矩阵 $C(\tau)\Phi(\tau, t_1)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上列线性独立，即对任意的非零向量 z ，有

$$C(\tau)\Phi(\tau, t_1)z \neq 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t_1 \quad (4.4.17)$$

利用对偶原理和定理4.2.2 对右半上述的系统很容易得到上述的关于系统 L 能观测的

如果存在某个时刻 $t_1 > t_0$, 使得 $\text{rank } Q_0(t_1) = n$, 那么系统 L 在 t_0 时刻是完全能观测的。

和能控性的情形一样, 对于定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.4.20)$$

如果系统在某个时刻完全能观测, 则它必在 $[0, \infty)$ 上也是完全能观测的, 所以就不用再强调“在 t_0 时刻”系统是否为完全能观测了。

定理4.4.4 定常线性系统(4.4.20)能观测的充分必要条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (4.4.21)$$

该定理和定理4.3.1是对偶的, 通过对偶原理不难得到它的证明, 请读者补证。通常称矩阵

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.4.22)$$

为定常线性系统(4.4.20)的能观测性矩阵。

推论4.4.1 已知定常线性系统(4.4.20), 如果 A 的极小多项式是 k 次的, 那么系统完全能观测的充分必要条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} = n \quad (4.4.23)$$

推论4.4.2 如果定常线性系统(4.4.20)是单输出的, 即 $C = c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, 那么它完全能观测的充分必要条件是

$$\det \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (4.4.24)$$

下面的定理和定理4.3.2是对偶的, 称之为能观测判定的PBH判据。

定理4.4.5 定常线性系统(4.4.20)完全能观测的充分必要条件是, 对每个 $\lambda \in \sigma(A)$ 都有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I_n \\ C \end{bmatrix} = n \quad (4.4.25)$$

证明 由对偶原理可知, 系统(4.4.20)完全能观测的充分必要条件是它的对偶系统

