

# 目 录

<b>第一章 绪论</b> .....	1
第一节 系统灵敏度问题.....	1
第二节 进一步的说明.....	4
<b>第二章 有关的基本数学知识</b> .....	7
第一节 多变量微积分知识.....	7
第二节 有关微分方程的知识.....	10
<b>第三章 系统灵敏度问题的基本考虑</b> .....	15
第一节 有关系统方面的知识.....	15
第二节 灵敏度函数.....	16
第三节 常用的灵敏度函数表达式.....	22
习 题.....	23
<b>第四章 各种常用的系统灵敏度函数</b> .....	25
第一节 时域中的灵敏度函数.....	25
第二节 频域中的灵敏度函数.....	43
习 题.....	70
<b>第五章 输出灵敏度函数的计算与测量法</b> .....	73
第一节 用拉氏变换法求输出灵敏度函数.....	73
第二节 输出灵敏度方程.....	75
第三节 高阶灵敏度方程.....	88
第四节 灵敏度方程的解法.....	90
第五节 灵敏度点法.....	98
习 题.....	107
<b>第六章 轨迹灵敏度函数的计算与测量方法</b> .....	109
第一节 定常参数情况的轨迹灵敏度方程.....	109
第二节 时变参数情况的轨迹灵敏度方程.....	121
第三节 轨迹灵敏度方程的解法.....	123
第四节 特征值灵敏度确定法.....	134
习 题.....	144

<b>第七章 频域灵敏度函数的确定法</b> .....	145
第一节 比较灵敏度函数的确定法 .....	145
第二节 特征根灵敏度的求法 .....	148
第三节 反馈系统的根灵敏度 .....	152
习 题 .....	162
<b>第八章 开环与闭环系统的灵敏度比较</b> .....	163
第一节 频域中的灵敏度比较 .....	163
第二节 时域中的灵敏度比较 .....	174
第三节 用矩阵奇异值进行灵敏度比较 .....	177
习 题 .....	184
<b>第九章 最优系统灵敏度分析浅论</b> .....	187
第一节 最优系统的灵敏度比较 .....	187
第二节 性能指标灵敏度的确定法 .....	193
<b>参考文献</b> .....	198

# 第一章 绪 论

本章用一个具体例子说明系统灵敏度理论 (System Sensitivity Theory) 所要研究的问题范畴, 并概要地介绍稳健性 (Robustness) 等与灵敏度理论有关的一些基本术语与概念。

本章拟对系统灵敏度理论提供一个比较全面的概述。

## 第一节 系统灵敏度问题

### 一、参数灵敏度问题

什么是系统灵敏度问题? 这个问题是怎样被提出来的? 为了回答这个问题, 让我们先看一个数学上的参数灵敏度问题, 以便先对参数灵敏度问题有一个大致的了解。

问题是这样的: 设有一个二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1-1)$$

式中  $a, b, c$  分别为相互无关的待定的参数。

试问  $b$  为何值时, 它的微小变化会导致上述方程的根发生很大的变化?

为了回答这个问题, 我们需要研究  $dx/db$ 。为此, 将前式对  $b$  求导

$$2ax \frac{dx}{db} + b \frac{dx}{db} + x = 0$$

于是

$$\frac{dx}{db} = -\frac{x}{2ax + b}$$

显然, 当  $x = -\frac{b}{2a}$  时,

$$\frac{dx}{db} \rightarrow \infty$$

这就是说, 当  $x = -b/2a$  时,  $b$  的微小变化会导致式(1-1)的根发生很大的变化。

考虑到二次方程根的表达式为

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

可见上述情况发生在  $b = \sqrt{4ac}$  处。这时, 方程式(1-1)得到重根  $x_1 = x_2 = -b/2a$ 。

综上所述, 如把系数  $b$  作为参数看待, 取

$$b = \sqrt{4ac}$$

时, 它的微小扰动会导致二次方程式(1-1)的根的计算结果很不准确。

在数值计算中, 称上述根的计算问题是有病态的; 从灵敏度理论的观点讲, 这是一个对参数变化敏感的参数灵敏度问题。

顺便指出，按数值计算的理论，除了有类似上述对参数变化敏感的病态问题外，许多选用的具体算法也会因对所计算问题中的参数摄动十分敏感而造成很大的计算误差。这种算法常称为不稳定的算法。

关于数值计算领域中灵敏度问题的进一步知识，可参看文献[1]、[2]及[3]。

## 二、动态系统的灵敏度问题

现在我们来讨论发生在动态系统分析、设计与调试中的灵敏度问题。

首先应该说明，所谓动态系统灵敏度问题，实际上是指动态系统的数学模型的灵敏度问题。这是因为，对任何实际的动态系统进行分析、设计与调试，都是指对描述这个系统的数学模型进行分析、设计并参照它进行实际调试的缘故。

下面，我们以枢控电机的拖动控制问题为例，来看各种有关的系统灵敏度问题。

### (一) 枢控电机拖动系统简介

众所周知，直流电机是控制系统中常用的一种执行元件。由于枢控电动机比激磁控制的电机性能优越，在当前情况下，8千瓦以下的各种直流电机中，用永磁激磁已十分普遍，因此枢控电动机的方案用得比较广泛。控制这种电动机的原理如图1-1所示。

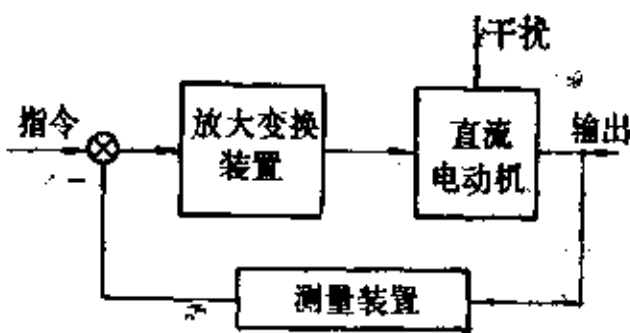


图 1-1

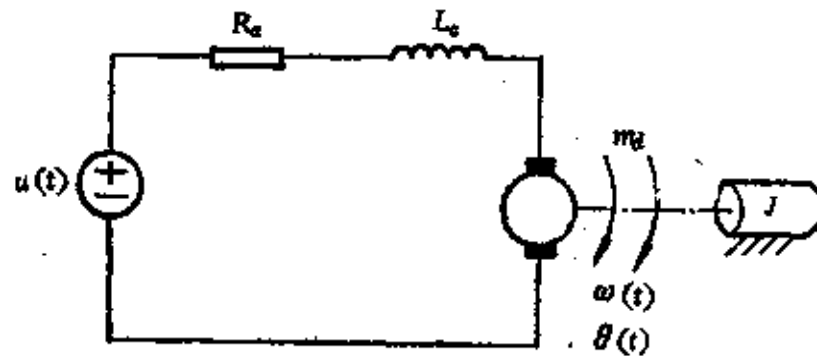


图 1-2

作为被控对象的枢控直流电机示于图1-2。图中， $u(t)$  为控制电压； $\omega(t)$  为输出角速度； $\theta(t)$  为转角； $R_a$  为电枢电阻； $L_a$  为电枢电感； $m_d$  为负载力矩； $J$  为负载的转动惯量。为了说明问题方便，以下分析中，假设不计负载转动时的粘性摩擦。

与图1-2相应的枢控电机的信号流图如图1-3所示。图中， $M_t$  为电磁力矩； $K_t$  为电磁力矩系数； $K_b$  为反电势常数； $U$  为输入电压的拉氏变式； $\Omega$  为输出角速度的拉氏变式； $\Theta$  为转角的拉氏变式；其余符号与图1-2中的相同。

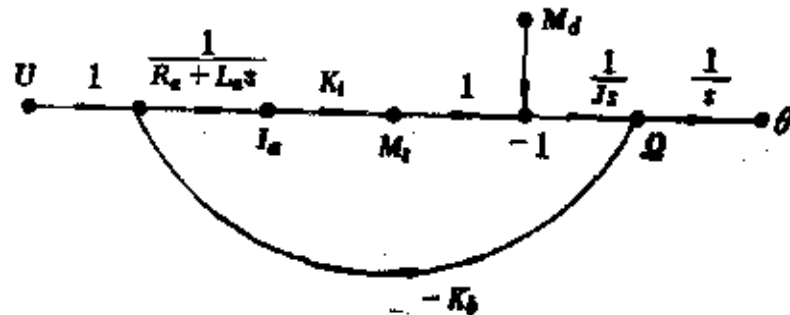


图 1-3

为了以下分析简单起见，假设系统的输出量是角速度 $\omega(t)$ 。显然，电动机对控制信号的传递函数为

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{(R_a + L_a s)} K_t \frac{1}{Js}}{1 + \frac{1}{(R_a + L_a s)} K_t \frac{1}{Js} K_b} = \frac{\frac{1}{K_b}}{\frac{L_a J}{K_t K_b} s^2 + \frac{R_a J}{K_t K_b} s + 1} \quad (1-2)$$

因此，电机微分方程为

$$\frac{L_a J}{K_t K_b} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{R_a J}{K_t K_b} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{K_b} u(t) \quad (1-3)$$

初始条件是

$$\begin{aligned} \omega(t_0) &= \omega_0 \\ \dot{\omega}(t_0) &= \dot{\omega}_0 \end{aligned}$$

通常情况下，电机的电枢电感作用远比电阻为小，可以不计，于是式(1-3)成为

$$T_m = \frac{d\omega}{dt} + \omega = K u(t) \quad (1-4)$$

式中

$$T_m = \frac{R_a J}{K_t K_b} \quad \text{——机械时间常数；}$$

$$K = \frac{1}{K_b} \quad \text{——放大系数。}$$

由于这个式子既简单又足够准确，所以是系统设计计算的依据。

体现外干扰力矩  $M_d$  对电机运动影响的传递函数  $\Omega(s)/M_d(s)$  也可不难求得。

## (二) 枢控电机拖动控制系统的灵敏度问题

基于上述，我们可以提出一系列与系统灵敏度有关的问题：

(1) 由方程式(1-3)可见，作为被控对象的枢控电机，它的动态性能可用一个线性定常二阶微分方程来描述。在这个方程中，与电机及负载性能有关的诸量  $L_a, R_a, J, K_t, K_b$  都是参数。由于生产过程中有制造容差；测量时有测量误差；电机组件及负载材料不断老化；以及电机的运行条件与设计时所设想的不尽一致等一系列无法预测的原因，这些参数的特点是：对各台具体的电机而言，尽管设计时的额定值一样，但具体取值却各不相同，而且这种不一致性又是无法精确控制的。所以各台电机的实际动态性能不会与设计时所设想的完全一致。也就是说，参数的不确定性会导致系统的实际性能相对于设计性能有所改变。于是，我们遇到了参数灵敏度问题。

(2) 如果由于上述参数的实际值偏离设计值而造成的系统性能改变不会引起系统特性的质变，也就是说，如果参数值的扰动不会导致系统模型阶次的变化，则相对于其它情况而言，可把这类参数对系统的影响专门划类进行研究。常称这类问题为  $\alpha$  参数问题。

(3) 假如方程式(1-3)中的参数  $L_a, R_a, J, K_t, K_b$  都与设计时的额定值一致，但电机运行的初始条件值  $\omega_0$  或  $\dot{\omega}_0$  发生了扰动，这时，表征系统动态性能的一些量也会发生变化。这种把初始条件当作参数，考虑它们对系统性能影响的问题也值得划类进行专门研究。常称这类问题为  $\beta$  参数问题。

(4)前已述及,通常作为系统设计计算依据的是经过简化而得到的一阶方程式(1-4),而不是最原始的精确方程式(1-3)。在数学上,这等效于把作为数学模型的微分方程式(1-3)中的最高阶次项的系数由非零值取为零。这种为了计算简化而选用低阶近似方程作为设计计算依据的做法,导致了原系统数学模型的降阶。显然,这样做所得的计算结果与用精确模型计算所得的结果是有所不同的。然而这是为了计算简便而作出的一种牺牲,对系统建模工作十分有利(参看文献[4],[5])。从灵敏度理论的观点看,这是故意人为地改变参数,从而导致了系统性能的变化。所以,这是一个灵敏度问题。在灵敏度理论中,称这种参数灵敏度情况为 $\lambda$ 参数灵敏度问题。显然,凡涉及 $\lambda$ 参数灵敏度的问题都会因造成原数学模型的降阶而发生系统结构改变的现象(见文献[6])。

(5)在研究具体的拖动控制系统的方案时,一个很自然的问题是:我们应该选用开环控制还是闭环控制方案?通常情况下,回答总是:选闭环反馈控制方案!为了更全面地考虑与权衡利弊,我们不妨问一下:从灵敏度理论的观点看,是否闭环控制总比开环控制较为优越?显然,这也是一个系统灵敏度范畴的问题。

(6)假如把外干扰信号数学模型中的各种参数看成是系统的外介质参数,那么研究系统抗干扰作用的能力问题也成了—个参数灵敏度问题。换一种说法,这种灵敏度问题也可叫做系统对环境改变的灵敏度问题(见文献[7][8])。

(7)不论从式(1-3)或式(1-4),我们都可看到,影响被控对象的参数常有很多。为了有效地设计计算和调试系统,一个重要且自然的问题是:在如此众多的参数中,哪些对系统的影响最大?哪些由于影响不大而可忽略不计?显然,这种抓主要矛盾型的问题也是系统灵敏度理论应该研究的问题。

(8)假如我们按最优控制理论设计一个枢控电机的最优拖动控制系统,在被控对象的参数有摄动的情况下,设计所得的最优性还保得住吗?换句话说,我们很想知道参数摄动对最优控制系统的性能会有什么影响。这当然又是一个参数灵敏度方面的重要问题。

综上所述不难推想,在现实的科学技术问题中,存在着大量的灵敏度问题。从工程控制论的观点看,这都是由于系统本身的参数摄动及作用于系统上的外干扰信号的不确定性引起的。随着科学技术的发展,人们对这种不确定性因素的影响必然会给予更多的关注,这也就是人们对自适应技术及灵敏度与稳健性理论日益重视的原因。

## 第二节 进一步的说明

在上一节所述内容的基础上,作为绪论,现在我们拟对系统灵敏度及有关的问题进一步作些说明。

### 一、关于干扰作用与摄动

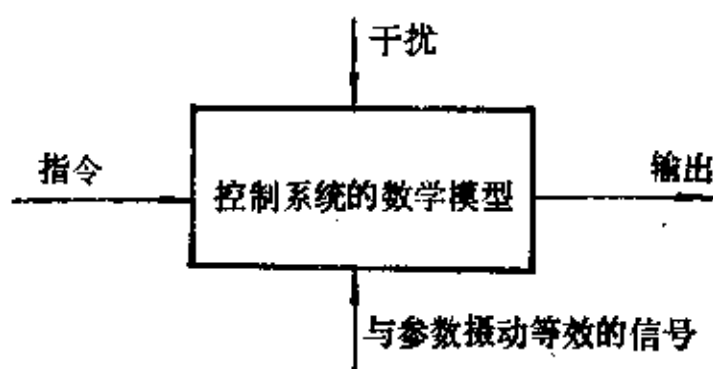
众所周知,任何控制系统都是由被控对象及控制器所构成。为了实现对被控对象的高质量控制,一般采用闭环反馈控制系统。

若仅以被控对象而论,由于其上作用着各种干扰信号,它的内部参数又可能有所摄动,不难推知,控制系统的输出量往往难以保持要求的定值或对指令信号进行精确跟踪。

所谓干扰信号是指影响系统性能且又无法由系统进行控制的外来作用;至于摄动,则是

指造成对象的静、动态特性发生暂时的或永久变异的内在因素。

摄动对系统的影响体现为使被控对象的数学模型偏离作为设计依据的额定的数学模型。所以摄动的存在使系统在同一指令信号及干扰信号作用下发生性能变化。也正是由于这个缘故，摄动，或更确切地说是参数的摄动，对系统来讲相当于是一种使它的性能发生变化的特殊的输入作用。因此，我们可以说，实际的系统可描绘为：在额定的数学模型上同时作用着指令信号、外干扰信号及等效于参数摄动作用的某种外作用信号。这种形象的描绘示于图 1-4。鉴于这种考虑，与信号理论一样，灵敏度理论以及与之有密切关联的系统稳健性理论构成了工程控制论中的一个重要分支。



## 二、参数摄动的原因及其数学模型

是什么原因造成实际的系统对于作为设计依据的额定模型存在着不可避免的参数摄动？一般讲，主要原因有：

(1) 对任何实际系统，我们总不可能把它辨识得绝对精确。换言之，用系统辨识理论求得的系统数学模型只是相对准确的；

(2) 由于制造有容差，所以任何理论的构思及设计计算都不可能绝对准确地实现；

(3) 随着时间的推移，任何系统都会发生老化、磨损等性能的改变以及环境和运行条件的变化；

(4) 为了简化设计计算或便于数学处理，工程上常常有意把一些复杂的情况或数学模型简化或理想化。因而，相对于作为设计依据的这种简化的或理想化的模型来讲，真实系统就相当于是一种参数摄动的情况了。

通常，表示摄动的数学模型有两种。一种叫结构型不确定性模型；另一种是非结构型不确定性模型。

当被控对象的模型型式完全确定，但参数值不定时，处理这种参数不确定性的数学模型便是结构型不确定性模型。前一节提到的  $\alpha$  参数及  $\beta$  参数问题就属于这种模型的问题。

如果被控对象的模型是在不计一些次要因素的假定下建立起来的，这样的模型便叫做非结构型模型。前述的  $\lambda$  参数灵敏度问题即为此例。

在有了  $\alpha$  参数、 $\beta$  参数、 $\lambda$  参数灵敏度定义的基础上，又进一步引出表示参数摄动的两种不同数学模型，其目的是为了将有关的概念推广于系统稳健性的设计计算。

## 三、系统灵敏度与稳健性的关系

当前，在讨论与处理系统不确定性的问题时，经常见到“灵敏度”与“稳健性”这两个相互间颇有关联的术语。这里拟对它们作一些说明。

在 20 世纪 60 年代以前，人们在探讨反馈的好处时，早已意识到反馈的引入可以减弱干扰及摄动对系统的影响。这时，术语“系统灵敏度”兼指系统的性能对于干扰与摄动的敏感程度。60 年代末到 70 年代初，术语“灵敏度”开始用于专指结构不确定性对系统的影响。70 年代末，出现了术语“稳健性”，它的主要含义是：系统愈稳健，则其特性受各种摄动影

响，特别是受非结构不确定性的影响愈小。由此可见，“灵敏度”与“稳健性”这两个术语所表达的概念实际上是相辅相成的。

由于当前各国术语不统一，对“灵敏度”与“稳健性”含义还有其它两种不同的看法。第一种看法认为“灵敏度”宜用于处理外干扰对系统的性能影响问题，而“稳健性”则用于处理摄动的影响问题（参看文献[9]）。第二种看法则认为“灵敏度”是指在作为设计计算依据的额定参数工作点附近有小的参数摄动时，这种小摄动对系统性能的影响；而“稳健性”则是指参数在上述额定点附近作大范围变动时，系统还能在一个足够大的区域中有能力保持对它的性能要求（参看文献[10]）。Frank(1985)还用实例论证了以下论点：对于同一个问题，用灵敏度观点对参数大范围变动所作的计算结果，与用基于稳健性理论所作的相应计算结果基本上是一致的。Frank提出的这种看法，用统一的观点来看待灵敏度与稳健性这两个不尽相同却又相互关联的概念，看来比较可取。

最后应该指出，灵敏度与稳健性理论仅是处理系统不确定性问题的一个方面。处理这个问题的另一个重要方面是自适应理论。不论从这两个方面的过去与现在看，还是从发展的观点看，它们的关系和功用都是相辅相成的。

#### **四、灵敏度理论的其他研究方面**

系统灵敏度理论除了研究减小系统不确定性对系统性能影响的问题外，它的另一个研究方向则是强化系统对参数摄动的敏感性，以解决控制工程中的一些特殊问题。系统辨识技术中的最佳输入问题就是这方面研究成果的典型应用。对这方面有兴趣的读者可参看文献[11]。



## 第二章 有关的基本数学知识

在具体讨论系统灵敏度理论之前,我们先来复习并学习一些后续章节中常要用到的数学知识。这些知识为:多变量微积分,微分方程解的存在与唯一性,以及微分方程的解与参数及初始条件的连续关系。其它一些非属基本及用得不是很频繁的数学知识如特征值及奇异值等,将在有关章节中讨论。本章主要参考文献为[12][13][30]。

### 第一节 多变量微积分知识

#### 一、纯量场和向量场

我们来研究有限维空间中的函数

$$T: R^n \rightarrow R^m \quad (2-1)$$

式中

$R^n$ —— $n$ 维实空间;

$R^m$ —— $m$ 维实空间。

若取  $n = 1, m = 1$ , 称函数  $T$  为实变量的实值函数。

若取  $n = 1, m > 1$ , 称函数  $T$  为实变量的向量值函数。 $\boldsymbol{y} = [y_1(x), y_2(x)]^T, x \in R$ , 就是例子。

如果取  $n > 1, m = 1$ , 则称函数  $T$  为向量变量的实值函数。数学文献中,也常称  $T$  为纯量场。 $y = y(\boldsymbol{x}) = y(x_1, x_2, \dots, x_n), \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$  便是一例。

如果取  $n > 1, m > 1$ , 则称函数  $T$  为向量变量的向量值函数,也常称它为向量场。这种函数的例子有

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1(\boldsymbol{x}) \\ y_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ y_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \in R^m$$
$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$$

#### 二、纯量场的微分运算

**定义 2-1** 纯量场对自变量向量的导数 若有纯量场

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

则它对自变量向量  $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  的导数

$$\frac{df}{dx} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

称为函数  $f(x)$  对  $x$  的梯度。

$f(x)$  对  $x$  的梯度常表示为:  $\nabla_x f$  或  $\text{grad}_x f$ 。

为了运算方便, 也有人定义梯度为:

$$\frac{df}{dx} \triangleq \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \quad (2-2)$$

**例 2-1** 若  $a \triangleq [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ ,  $x \triangleq [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , 则线性型为

$$f(x) \triangleq a^T x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

它对  $x$  的梯度则为

$$\nabla_x f \triangleq \frac{df}{dx} \triangleq \begin{bmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a$$

### 三、向量场的微分运算

**定义 2-2** 向量场对自变量向量的导数 若有向量场函数

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

则  $f(x)$  对  $x$  的导数由下式定义

$$\frac{df(x)}{dx} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

常称上述  $\frac{df(x)}{dx}$  为向量场  $f(x)$  对  $x$  的雅可比矩阵 (Jacobian matrix)

**例 2-2** 设有向量场函数

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_3^2 - x_2 \end{bmatrix}$$

则雅可比矩阵为

$$\frac{df}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2x_3 \end{bmatrix}$$

#### 四、纯量场函数的复合微分法则

纯量场函数的复合微分法则可分以下六种情况来讨论:

(1) 情况 1

若  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$

则  $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$

$$= [dx_1, dx_2, \dots, dx_n] \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$= (d\mathbf{x})^T \nabla_{\mathbf{x}} f$$

$$= (\nabla_{\mathbf{x}} f)^T d\mathbf{x}$$

(2-4)

(2) 情况 2

若  $f = f[x_1(a), x_2(a), \dots, x_r(a)]$

则  $\frac{df}{da} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{da} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{da} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_r} \frac{dx_r}{da}$  (2-5)

(3) 情况 3

若  $f = f[x_1(a_1, a_2, \dots, a_s), x_2(a_1, a_2, \dots, a_s), \dots, x_r(a_1, a_2, \dots, a_s)]$

则  $\frac{\partial f}{\partial a_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial a_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial a_1}$   
 $\frac{\partial f}{\partial a_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial a_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial a_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial a_2}$   
 $\dots$   
 $\frac{\partial f}{\partial a_s} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial a_s} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial a_s} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial a_s}$  (2-6)

(4) 情况 4

若  $f = f[x_1(x_r), x_2(x_r), \dots, x_{r-1}(x_r), x_r]$

则 
$$\frac{df}{dx_r} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx_r} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_r} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{r-1}} \frac{dx_{r-1}}{dx_r} + \frac{\partial f}{\partial x_r} \quad (2-7)$$

(5)情况 5

若  $f = f[x_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_r), x_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_r), \dots, x_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_r), x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_r]$

则 
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{k+1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{k+2}} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{k+2}} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{k+2}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{k+2}} + \frac{\partial f}{\partial x_{k+2}} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_r} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_r} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial x_r} \end{aligned} \quad (2-8)$$

(6)情况 6

若  $f = f[x_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_r), x_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_r), \dots, x_{k-1}(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_r), x_k(x_r), x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_r]$

则 
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{k+1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}} \frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{k+2}} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{k+2}} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{k+2}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}} \frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_{k+2}} + \frac{\partial f}{\partial x_{k+2}} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{r-1}} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{r-1}} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{r-1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}} \frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_{r-1}} + \frac{\partial f}{\partial x_{r-1}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_r} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_r} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}} \frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dx_r} + \frac{\partial f}{\partial x_r} \end{aligned} \quad (2-9)$$

## 第二节 有关微分方程的知识

### 一、李普希茨(Lipschitz)条件及微分方程解的存在与唯一性问题

众所周知，大部分动态系统的数学模型是所谓的微分模型，即微分方程。所以，有必要对微分方程解的存在与唯一性的有关问题有些基本了解。为此，首要的便是所谓的李普希茨条件问题。为了讲解的方便又不失一般性，现以一阶微分方程的初值问题

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2-10)$$

作为研究的对象。

为了保证方程式(2-10)有解且唯一，要求满足什么条件？仅仅保证右端  $f(t, x)$  对  $x$  的连续性够吗？为了回答这个问题，先看一个例子。

**例 2-3** 试求初值问题

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\sqrt{x} \\ x(1) &= 0 \end{aligned}$$

的解。

**解** 由该方程可见,  $x = 0$  显然是一个解。再找它的其它解。为此, 将原方程分离变量, 得

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$$

积分之, 有

$$\sqrt{x} = t + C$$

式中  $C$  —— 待定常数。

代入初始条件, 得

$$\sqrt{x} = t - 1$$

于是, 要求的解为

$$x = (t - 1)^2$$

显然, 这是一个顶点右移到  $(x, t)$  平面上  $(1, 0)$  点的抛物线方程。由于原题仅研究  $\sqrt{x}$  的正值, 所以  $t > 0$ 。因此, 所得的解是上述抛物线的右半分支, 如图 2-1 所示。

由这个例子可见, 尽管原方程的右端  $2\sqrt{x}$  在  $x \geq 0$  的一切区域中定义并连续, 在  $(x, t)$  平面上的  $(1, 0)$  点处却同时通过了该方程的两个解曲线  $x = 0$  及  $x = (t - 1)^2$ , 也即, 点  $(1, 0)$  是该微分方程的非唯一性的解点。因此可见, 仅仅保证微分方程式(2-1)右端  $f(t, x)$  对  $x$  的连续性, 还不足以保证它的解的唯一性。于是, 提出了李普希茨条件的问题。

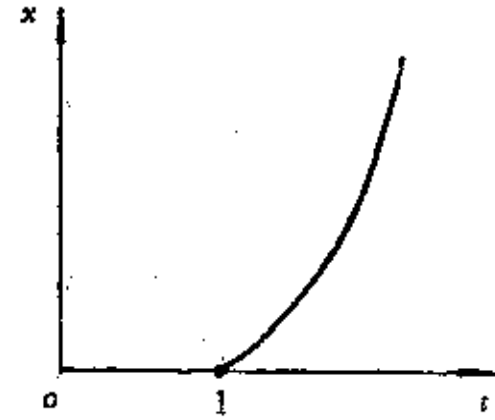


图 2-1

**定义 2-3 李普希茨条件** 如果在某闭域  $G$  上, 微分方程

$$\dot{x} = f(t, x)$$

的右端  $f(t, x)$  满足以下条件

$$\begin{aligned} |f(t, x_1) - f(t, x_2)| &\leq L|x_1 - x_2|, \\ \forall (t, x_1), (t, x_2) &\in G \end{aligned}$$

式中  $L$  —— 常数, 称为李普希茨常数。

则称函数  $f(t, x)$  在该闭域上对  $x$  满足李普希茨条件。

应当指出, 对函数  $f(t, x)$  而言, 它对  $x$  的李普希茨条件比它对连续的条件远为更强。函数  $f(t, x)$  满足对  $x$  的连续性条件, 并不意味着它满足对  $x$  的李普希茨条件; 反之, 若函数  $f(t, x)$  满足对  $x$  的李普希茨条件, 则必满足它对  $x$  的连续性条件。

**定理 2-1** 如果函数  $f(t, x)$  在域  $G$  中对  $t$  连续, 且对变量  $x$  满足李普希茨条件, 则它必对  $t, x$  同时连续。

由于本书篇幅的限制, 本定理证明从略, 有兴趣的读者可参看文献[13]。

现在来看一个例子。

**例 2-4** 试证明例 2-3 中的微分方程  $\dot{x} = 2\sqrt{x}$  的右端函数  $f(t, x) = 2\sqrt{x}$  不满足对  $x$  的李普希茨条件。

**证明** 如果  $f(t, x)$  满足李普希茨条件, 应有不等式

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

也即

$$\frac{|f(t, x_1) - f(t, x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq L$$

这意味着在整个定义域  $x \geq 0$  中,  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$  应是有限的。然而, 由于  $x \rightarrow 0$  时,

$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \rightarrow \infty$ , 因而这是不可能的。所以  $f(t, x)$  不满足李普希茨条件。也正因此, 由后述

的微分方程解的存在与唯一性定理可知, 尽管右端  $f(t, x)$  对  $x$  连续, 却并不能保证微分方程的解的唯一性。

现在, 我们转而研究初值问题  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  的解的存在与唯一性定理。

**定理 2-2** 初值问题解的存在与唯一性定理 如果在某闭域上定义的函数  $f(t, x)$  对  $t$  连续, 且对  $x$  满足李普希茨条件, 则在  $t$  轴上必有一个包含  $t_0$  在内的区间  $\Delta$ , 在其中, 存在一个满足微分方程  $\dot{x} = f(t, x)$  及初始条件  $x(t_0) = x_0$  的唯一解  $x = x(t)$ 。

**证明** 因篇幅关系, 从略。请参看[13]。

这里, 重要的是指出以下各点:

(1) 如果在某闭域  $G$  中, 上述微分方程的右端函数  $f(t, x)$  对  $x$  具有有限的偏导数, 即  $|\partial f / \partial x| \leq N$ , 其中,  $N$  为某个常数, 则在整个  $G$  域中李普希茨条件必可得到满足。事实上, 由于在  $G$  中任意两点  $(t, x_1)$ ,  $(t, x_2)$  处, 函数  $f$  的差值的模

$$\begin{aligned} |f(t, x_1) - f(t, x_2)| &= |f'_x(t, \bar{x})(x_1 - x_2)| \\ &\leq N|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

式中  $\bar{x}$ ——满足  $x_1 \leq \bar{x} \leq x_2$  的某  $x$  值。

所以, 只要取李普希茨常数  $L = N$ , 上述论断就证明了。

(2) 实际上, 满足李普希茨条件的函数  $f(t, x)$  比上述的还要宽广。例如, 微分方程

$$\dot{x} = |x|$$

的右端函数  $f(t, x) = |x|$  在  $x = 0$  处不存在偏导数  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ , 然而, 如果看一下模值情况

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = ||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$$

显然, 如取李普希茨常数  $L = 1$ ,  $f(t, x)$  就满足对  $x$  的李普希茨条件了。

(3) 尽管满足李普希茨条件的函数  $f(t, x)$  相对讲比较宽广, 实用上, 为了方便, 常把满足初值问题  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  的解的存在与唯一性定理的条件取得更窄些。常见的初值问题的存在与唯一性定理表述如下。

**定理 2-3** 初值问题解的存在与唯一性定理的另一种表达 如果在包括初始点  $(t_0, x_0)$  在内的某直角域  $\alpha < t < \beta$ ,  $\gamma < x < \delta$  中, 函数  $f(t, x)$  和  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$  连续, 则在  $\alpha < t <$

$\beta$  中的某域  $t_0 - h < t < t_0 + h$  里, 必有一个满足初值问题  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  的唯一解存在。

**证明** 从略。可参看文献[14], [7]。

## 二、初值问题的解与参数间的连续关系

### (一)问题的提出

以例 2-3 为例,我们要解的问题是初值问题

$$\dot{x} = 2\sqrt{x}$$

$$x(1) = 0$$

的解。这个问题可看成是初值问题

$$\dot{x} = a\sqrt{x}$$

$$x(t_0) = x_0$$

的一个特例,也即,它是取  $a = 2$ ,  $t_0 = 1$ ,  $x_0 = 0$  时的一种特殊情况。由于不论  $a$  或  $x_0$  都是由一些实际问题经测量或计算后求得的,所以它们是上述微分方程初值问题中的参数,且常为近似值。由此,进一步抽象之,初值问题应是求解以下方程

$$\dot{x} = f(t, x, \mu)$$

$$x(t_0) = x_0$$

式中  $\mu$  —— 参数;

$x_0$  —— 参数。

既然初值问题中包含了参数  $\mu$  与  $x_0$ , 所以研究初值问题与参数间的关系问题就提出来了。

### (二)参数的分类

为了研究初值问题与参数间的关系,或者换言之,为了研究参数的变化对初值问题解的影响,首先应把初值问题中可能遇到的各种参数进行分类。1953年, K. S. Miller 和 F. J. Murray 对连续系统的参数提出了一种分类法。参照这种分类法, 以下对各种参数进行分类 [6]。

**定义 2-4  $\alpha$  参数** 凡参数值的变异不会导致微分方程的阶次发生变化的一类参数称为  $\alpha$  参数。

显然,按照这个定义,作为微分方程最高阶导数项的  $\alpha$  参数的额定值不等于零。

**定义 2-5  $\beta$  参数** 如把微分方程的初始值作为一类参数,称它为  $\beta$  参数。

**定义 2-6  $\lambda$  参数** 凡额定值为零,且参数的变异会影响微分方程阶次变化的一类参数称为  $\lambda$  参数。

**例 2-5** 设有微分方程

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = u(t)$$

$$y(0) = y_0^0, \dot{y}(0) = y_1^0$$

式中  $a_0, a_1, a_2$  —— 微分方程的参数;

$u(t)$  —— 已知的时间函数。

试判定其中各参数的类别。

**解** 把题给微分方程看成为额定方程。假如参数有所变异,相应的微分方程成为

$$\Delta a_2 \ddot{y} + (a_2 + \Delta a_2) \dot{y} + (a_1 + \Delta a_1) \dot{y} + (a_0 + \Delta a_0) y = u(t)$$

$$y(0) = \Delta y_2^0, \dot{y}(0) = y_1^0 + \Delta y_1^0, y(0) = y_0^0 + \Delta y_0^0$$

于是,按前述各种参数的定义,参数  $a_0, a_1$  及  $a_2$  皆属  $\alpha$  参数;  $y_0^*$  和  $y_1^*$  为  $\beta$  参数;  $a_3 = 0$  系  $\lambda$  参数。

### (三)初值问题的解与 $\beta$ 参数的连续关系

由微分方程知识知,以下定理保证了初值问题的解与  $\beta$  参数的连续性关系。

**定理 2-4** 初值问题的解与  $\beta$  参数的连续性定理 设有法式微分方程组

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中,函数  $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  在某域  $G$  中对  $t$  连续且对变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足李普希茨条件。如果有满足初始条件

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

且在  $|t - t_0| \leq h$  中定义的上述微分方程组的解

$$x = x(t, t_0, x_0)$$

其中,  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $x_0 = [x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}]^T$ , 则对任意给出的  $\varepsilon > 0$ , 必存在一个  $\delta(\varepsilon, h) > 0$ , 使得满足另一初始条件

$$\tilde{x}(t_0, t_0, \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$$

且  $\|x_0 - \tilde{x}_0\| < \delta$  的解

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t, t_0, \tilde{x}_0)$$

同样在  $|t - t_0| \leq h$  中定义,且满足不等式

$$\|x(t, t_0, x_0) - \tilde{x}(t, t_0, \tilde{x}_0)\| < \varepsilon$$

**证明** 从略,请参看文献[13]或[17]。

### (四)初值问题的解与 $\alpha$ 参数间的连续性关系

由微分方程的理论知,微分方程的解与  $\alpha$  参数间也存在着连续性关系。相应的定理如下,证明从略,可参看文献[13]或[17]。

**定理 2-5** 初值问题的解对  $\alpha$  参数的连续性定理 设有微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中,  $\mu \triangleq [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s]^T$  为实  $\alpha$  参数,  $x \triangleq [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 。若函数  $f_i(t, x, \mu)$  在  $n + s + 1$  维的某域  $G$  中对变量  $t, x_1, x_2, \dots, x_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$  定义且连续,同时,它对  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足李普希茨条件。

如果当  $\alpha$  参数值  $\mu = \mu'$  且满足初始条件  $x(t_0, \mu') = x_0$  时,上述方程组的解为  $x = x(t, \mu')$ ,且定义在区间  $|t - t_0| \leq h$  中;而当  $\mu = \mu''$  且满足初始条件  $x(t_0, \mu'') = x_0$  时的解为  $x = x(t, \mu'')$ ,则对任意的  $\varepsilon > 0$ ,必存在  $\delta(\varepsilon, h) > 0$ ,使得  $\|\mu' - \mu''\| < \delta$  时,解  $x(t, \mu'')$  也在区间  $|t - t_0| \leq h$  中定义,且满足不等式

$$\|x(t, \mu') - x(t, \mu'')\| < \varepsilon$$

应当指出,初值问题的解与  $\alpha$  及  $\beta$  参数的连续性关系具有重要的理论价值。这是因为它提供了论据,证明尽管控制系统中真实物理过程的参数总有误差,只要这些误差不大,作为它们的数学模型的初值问题的解总能够足够准确地描述其中发生的真实过程。此外,它们还为应用  $\alpha$  及  $\beta$  参数灵敏度函数来分析系统的灵敏度问题提供了理论依据。



## 第三章 系统灵敏度问题的基本考虑

本章介绍关于处理灵敏度问题的一些基本考虑。首先结合有关系统方面的知识介绍系统参数的概念，然后论述引用灵敏度函数的概念处理系统灵敏度问题的缘由，并介绍常用的各种一阶灵敏度函数的表达式。

有关本章的内容，可参看文献[6]及[7]。

### 第一节 有关系统方面的知识

为了后续章节讨论的需要，先介绍一些有关系统方面的知识。

#### 一、系统的结构

控制系统常用图 3-1 所示的方块图表示。

图中， $u(t)$  是系统的输入量， $y(t)$  是输出量。这两个量之间的功能关系可足够准确地用某种特定的函数关系来描述，这就是系统的数学模型。常见的系统数学模型是微分方程组，差分方程组或两者兼而有之的方程组。

系统数学模型的特点常用系统的结构来表征。以下各项皆是系统结构的内容：

- (1) 系统方程的线性及非线性情况；
- (2) 方程的阶次与个数；
- (3) 系统传递函数阵中各元素的类别；
- (4) 系统有理传递函数阵各元素的分子和分母多项式的阶次；

等等。

系统的结构定性地确定了系统的性能。

#### 二、系统的参数

用以定量地确定系统性能的量叫做系统的参数。典型的系统参数有：

- (1) 微分或差分方程的系数；
- (2) 方程的初始条件；
- (3) 时间延迟；
- (4) 自然频率及脉冲频率；
- (5) 采样周期与采样时刻；
- (6) 脉冲宽度与幅度；

等等。

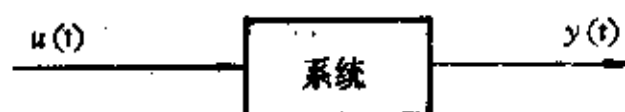


图 3-1

### 三、引起系统性能改变的各种因素

指令信号，外干扰信号，系统参数的摄动或大范围的变化，都是引起性能改变的重要因素。通常情况下，仅研究指令或外干扰信号对系统性能的影响情况。

仅当考虑系统参数的变化对系统性能的影响时，才把参数的摄动或较大范围的变化作为一种特殊的系统输入量看待。

### 四、系统的灵敏度

系统的动态性能受参数变异影响的属性称为系统的灵敏度。有人把系统承受外干扰作用的能力也看作是一种系统的灵敏度属性，见文献[8]，[9]。一般文献中的系统灵敏度都是指前者，即指系统的参数灵敏度。

系统的参数灵敏度可定义如下：

**定义 3-1** 系统的参数灵敏度 系统的参数灵敏度是系统的参数变化对系统动态性能的影响，也即，参数变化对诸如系统的时间响应，状态向量，传递函数，或其它表征系统动态性能的量的影响。

### 五、系统的参数摄动或变化及其产生的原因

从物理上看，系统参数摄动或变化可分成两大类：

- (1) 定常的及慢变的参数摄动或偏差；
- (2) 时变的参数变化。

造成第一类参数改变的原因有如实现系统时的制造误差，辨识时的测量误差，建模误差及老化，慢性磨损与腐蚀等原因造成的误差等。

快速的老化、腐蚀磨损及耗损等原因造成的误差；由于温度，湿度，重力等环境改变所致的误差；负载改变，非线性的影响等运行条件改变所引起的误差等等，都是产生第二类参数变化的重要原因。

最后，还应顺便指出，尽管系统的数学模型常按物理机理求得，真正作系统分析与计算时，却常把它们化为一些典型的环节或型式来处理。这样做的结果，为系统灵敏度分析带来了诸如灵敏度转换等一些特殊的问题。

## 第二节 灵敏度函数

### 一、求解系统灵敏度问题的直接法

现以系统的状态模型为例说明求解系统灵敏度问题的直接法。设系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \alpha, t, u) \\ x(t_0) &= x^0\end{aligned}$$

式中  $x$ ——状态向量；

$\alpha$ ——感兴趣的参数向量， $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]^T$ ；

$u$ ——系统的输入向量；

$t$  ——时间变量;  
 $x^0$  ——初始状态值。

在特定的输入向量  $u(t)$  的情况下, 我们感兴趣的当然是  $x$  与  $\alpha$  间的函数关系。因此, 为了表达的简洁, 我们将上述方程的解

$$x = x(t, \alpha, u)$$

中的  $u$  省去, 而简写成

$$x = x(\alpha, t)$$

于是, 求解系统参数灵敏度的问题就归结为取各种不同的  $\alpha$  值, 按上式计算相应的  $x$  值, 再进行系统灵敏度的分析与探讨。显然, 这是最容易想到的方法, 然而, 它却很不可取, 这是因为:

- (1) 计算工作量太大;
- (2) 计算所得的结果不直观, 很难得到有关系统灵敏度的简单明了的结论;
- (3) 如果参数的变化很小, 即如果参数由原来的额定值  $\alpha_0$  变为  $\alpha_0 + \Delta\alpha$ , 且  $\|\Delta\alpha\| \ll \|\alpha_0\|$ , 则用模拟计算机或数字计算机计算时, 由于近似计算或机器本身所造成的计算误差, 会使参数灵敏度的计算结果很不准确。

## 二、高阶灵敏度函数法

目前工程计算中比较盛行的系统灵敏度算法是灵敏度函数法。为了一般性的讨论, 设以变量  $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  表示描述系统动态性能的量, 系统的参数则用向量  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]^T$  表示。 $y$  与  $\alpha$  的关系假设如下

$$y_i(t, \alpha) = y_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-1)$$

若在参数的额定值  $\alpha_0$  时,  $y$  的额定值为  $y_0$ , 则当参数变为

$$\alpha_i = \alpha_{0i} + \Delta\alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3-2)$$

时, 相应的系统变量成为

$$\begin{aligned} y_i &= y_i(t, \alpha_{01} + \Delta\alpha_1, \alpha_{02} + \Delta\alpha_2, \dots, \alpha_{0r} + \Delta\alpha_r) \\ &= y_i(t, \alpha_0 + \Delta\alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3-3)$$

于是, 由于参数的变化造成的系统误差为

$$\Delta y_i = y_i(t, \alpha_0 + \Delta\alpha) - y_i(t, \alpha_0), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-4)$$

假设在  $\alpha$  的额定值  $\alpha_0$  处,  $y_i$  对诸  $\alpha_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , 存在  $k$  阶偏导数, 于是, 由多变量函数的微分法则, 可得  $y_i$  的  $k$  阶微分表达式

$$d^{(k)} y_i = \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial \alpha_r} d\alpha_r \right)^k y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-5)$$

应用泰勒公式, 有

$$\begin{aligned} \Delta y_i(t, \alpha) &= y_i(t, \alpha) - y_i(t, \alpha_0) \\ &= y_i(t, \alpha_0 + \Delta\alpha) - y_i(t, \alpha_0) \\ &= dy_i(t, \alpha_0) + \frac{1}{2} d^2 y_i(t, \alpha_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n y_i(t, \alpha_0) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} d^{(n+1)} y_i(t, \alpha_0 + \theta \Delta\alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3-6)$$

式中，末项为余项。

如果在上式中取  $k$  项而不计余项，可得

$$\Delta y_i(t, \alpha) \approx \Delta^{(k)} y_i(t, \alpha) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} d^{(j)} y_i(t, \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_0}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

由此可见，如果能够求得在参数的额定值  $\alpha_0$  处的各阶导数

$$\frac{\partial^k y_i}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2} \dots \partial \alpha_r^{k_r}}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3-7)$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r = k, \quad k=1, 2, \dots$$

参数变化所造成的系统变量误差也就可以按所要求的计算精度求得了。因此，式(3-7)所表示的各阶导数可用于计算系统的参数灵敏度。以下，对这些量作出定义。

**定义 3-2** 系统变量对参数的  $k$  阶灵敏度函数 系统变量  $y_i(t, \alpha)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  对参数向量  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]^T$  中各元的偏导数

$$\frac{\partial^k y_i(t, \alpha)}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2} \dots \partial \alpha_r^{k_r}}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_r = k \quad (3-8)$$

称为函数  $y_i$  对参数  $\alpha$  的  $k$  阶灵敏度函数。

定义 3-2 中，如取  $k=1$ ，所得的一阶偏导数称为一阶灵敏度函数或简称灵敏度函数。

总之， $k$  阶灵敏度函数法归结为求系统变量  $y_i(t, \alpha)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  对参数  $\alpha$  的 1 至  $k$  阶的各阶灵敏度函数，然后便可按下式求得系统变量由于参数变化所造成的误差

$$\begin{aligned} \Delta y_i(t, \alpha) &= y_i(t, \alpha_0 + \Delta \alpha) - y_i(t, \alpha_0) \\ &\approx \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} d^{(j)} y_i(t, \alpha) \Big|_{\alpha_0} \\ &= \sum_{j=1}^k \left[ \frac{1}{j!} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \Delta \alpha_r \right)^j y_i(t, \alpha) \right]_{\alpha_0}, \\ &\quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3-9)$$

与前述的直接法相比，高阶灵敏度函数法显得十分优越。这是因为，一则，它把问题归结为求得若干个高阶灵敏度函数，所以计算工作量大为减少，二则，它可视需要，把  $\Delta y_i(t, \alpha)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  求到要求的精度。

### 三、一阶灵敏度函数法

由于求得高阶灵敏度函数仍是一件十分麻烦的工作，所以，基于一阶灵敏度函数的近似算法最为实用。由以下的论证可见，这种算法有许多好处。

(一) 一阶灵敏度函数法的特点

1. 用一阶灵敏度函数求系统变量的误差时，计算公式为

$$\begin{aligned} \Delta y_i(t, \alpha) &= y_i(t, \alpha_0 + \Delta \alpha) - y_i(t, \alpha_0) \\ &\approx dy_i(t, \alpha_0) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \Delta \alpha_r \right) y_i(t, \alpha) \Big|_{\alpha_0} \\ &= \frac{\partial y_i(t, \alpha)}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha_0} \Delta \alpha_1 + \frac{\partial y_i(t, \alpha)}{\partial \alpha_2} \Big|_{\alpha_0} \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial y_i(t, \alpha)}{\partial \alpha_r} \Big|_{\alpha_0} \Delta \alpha_r \end{aligned}$$



$$= \sum_{j=1}^q \left( \sum_{k=1}^r \frac{\partial y_i}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial \beta_j} \right) d\beta_j \quad (3-17)$$

或者，变换求和的次序，有

$$\begin{aligned} dy_i &= \sum_{j=1}^q \left( \sum_{k=1}^r \frac{\partial y_i}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial \beta_j} \right) d\beta_j \\ &= \sum_{k=1}^r \left( \sum_{j=1}^q \frac{\partial a_k}{\partial \beta_j} d\beta_j \right) \frac{\partial y_i}{\partial a_k} \end{aligned} \quad (3-18)$$

基于上述各关系式，一阶灵敏度函数法的其它特点探讨如下：

(1) 如果定义  $y_i$  对参数  $\beta_j$  的灵敏度函数为  $S_{\beta_j}^{y_i} \triangleq \frac{\partial y_i}{\partial \beta_j}$ ， $y_i$  对参数  $a_k$  的灵敏度函数定义为  $S_{a_k}^{y_i} \triangleq \frac{\partial y_i}{\partial a_k}$ ，由式(3-17)，有

$$dy_i = \sum_{j=1}^q \left( \sum_{k=1}^r S_{a_k}^{y_i} \frac{\partial a_k}{\partial \beta_j} \right) d\beta_j$$

而由式(3-16)，有

$$dy_i = \sum_{j=1}^q S_{\beta_j}^{y_i} d\beta_j$$

比较以上两式，得关系式

$$S_{\beta_j}^{y_i} = \sum_{k=1}^r S_{a_k}^{y_i} \frac{\partial a_k}{\partial \beta_j} \quad (3-19)$$

这个式子说明，系统变量  $y_i$  对两个具有任意函数关系式(3-12)的参数的灵敏度函数之间存在着相互转换的关系。

(2) 由式(3-18)重新排列之，有

$$\begin{aligned} dy_i &= \sum_{k=1}^r \frac{\partial y_i}{\partial a_k} \left( \sum_{j=1}^q \frac{\partial a_k}{\partial \beta_j} d\beta_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^r \frac{\partial y_i}{\partial a_k} da_k \end{aligned} \quad (3-20)$$

将此式与式(3-16)比较之，可见，系统变量由参数的变化而诱发的误差不论对参数  $a$  或  $\beta$  而言，都是一样的。换言之，系统变量由参数的变化而诱发的误差对参数的函数变换具有不变性。

## (二) 几点结论

根据上述两点，可得以下两点极为重要且实用的结论：

(1) 可以设法通过某种函数变换，求得元素个数较少的某个参数，以它来求得系统变量的参数变异诱发误差，使得需求的一阶灵敏度函数的个数尽量减少。

(2) 如果已经找到  $n$  组互有函数关系的系统参数，则可任选一组参数来讨论系统灵敏度问题而仍保持所得结论的一般性。例如，由于系统的实际参数与把系统的数学模型化为典型环节后的参数间有确定的函数关系，我们常对典型环节中的参数进行系统灵敏度讨论，这样做常可带来不少方便。

**例 3-1 设有系统的数学模型**

$$a_2 \dot{y}(t) + a_1 y(t) = u$$

其中,  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]^T$  为参数向量。

按物理机理建模时, 实际参数是  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]^T$ 。它与上述的“数学参数”  $\alpha$  间的关系式是

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 \\ \alpha_2 &= a_1 a_2 \end{aligned}$$

假设  $S_{\alpha_1}^y$  及  $S_{\alpha_2}^y$  已求得, 试求由于参数  $a_1, a_2$  变化所诱发的系统变量  $y$  的误差及  $S_{a_1}^y$  和  $S_{a_2}^y$ 。

**解** 由系统的微分方程, 可解得系统变量  $y$  为

$$y = y(u, \alpha)$$

如果参数  $\alpha$  由额定值发生变化, 变为  $\alpha + \Delta\alpha = [\alpha_1 + \Delta\alpha_1, \alpha_2 + \Delta\alpha_2]^T$ , 则由它诱发的系统变量  $y$  的误差为

$$\Delta y_{\alpha} = \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 + \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha_2$$

由于系统变量的误差对参数的函数变换保持不变性, 所以, 由实际参数  $\alpha$  诱发的系统变量误差  $\Delta y_{\alpha}$  必等于  $\Delta y_{\alpha}$ , 即

$$\Delta y_{\alpha} = \Delta y_{\alpha}$$

为求  $S_{a_1}^y$  及  $S_{a_2}^y$ , 可按公式(3-19)直接计算。此时, 有

$$S_{\alpha_1}^y = \sum_{k=1}^r S_{\alpha_k}^y \frac{\partial \alpha_k}{\partial a_1} = \sum_{k=1}^2 S_{\alpha_k}^y \frac{\partial \alpha_k}{\partial a_1}$$

由于  $\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_1 a_2$ , 故

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial a_1} = 1$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial a_1} = a_2$$

代入前式, 得

$$\begin{aligned} S_{\alpha_1}^y &= S_{\alpha_1}^y \frac{\partial \alpha_1}{\partial a_1} + S_{\alpha_2}^y \frac{\partial \alpha_2}{\partial a_1} \\ &= S_{\alpha_1}^y + a_2 S_{\alpha_2}^y \end{aligned}$$

同理

$$S_{\alpha_2}^y = \sum_{k=1}^r S_{\alpha_k}^y \frac{\partial \alpha_k}{\partial a_2} = \sum_{k=1}^2 S_{\alpha_k}^y \frac{\partial \alpha_k}{\partial a_2}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial a_2} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial a_2} = a_1$$

故

$$\begin{aligned} S_{\alpha_2}^y &= S_{\alpha_1}^y \frac{\partial \alpha_1}{\partial a_2} + S_{\alpha_2}^y \frac{\partial \alpha_2}{\partial a_2} \\ &= a_1 S_{\alpha_2}^y \end{aligned}$$

应该指出，对高阶灵敏度函数法而言，除非参数的函数变换是线性变换，否则，系统变量诱发误差的不变性不再存在。

### 第三节 常用的灵敏度函数表达式

为了便于分析与计算系统灵敏度问题，常用以下三种不同的灵敏度函数：绝对灵敏度函数，相对灵敏度函数及半相对灵敏度函数。下面以系统变量及参数皆为纯量的情况为例分述之。

#### 一、绝对灵敏度函数

**定义 3-3** 绝对灵敏度函数 如果系统变量  $y$  与参数  $a$  的关系为

$$y = y(a)$$

则绝对灵敏度函数为

$$S_a^y \triangleq \left. \frac{d[y(a)]}{da} \right|_{a_0} \quad (3-21)$$

式中  $a_0$  —— 参数  $a$  的额定值。

绝对灵敏度函数常用于进行理论研究。

#### 二、相对灵敏度函数

**定义 3-4** 相对灵敏度函数 如果系统变量  $y$  与参数  $a$  的关系为

$$y = y(a)$$

则相对灵敏度函数为

$$S_a^y \triangleq \frac{d(\ln y)}{d(\ln a)} = \left. \frac{dy/y}{da/a} \right|_{a_0} \quad (3-22)$$

相对灵敏度便于进行参数变异效应的比较，十分实用。

相对灵敏度具有类似对数的运算性质。例如，设有  $y_1 = y_1(a)$  及  $y_2 = y_2(a)$  两个函数关系，研究两个函数相乘对  $a$  的灵敏度函数  $S_a^{y_1 y_2}$ ，可得

$$\begin{aligned} S_a^{y_1 y_2} \Big|_{a_0} &\triangleq \left. \frac{d \ln(y_1 y_2)}{d \ln a} \right|_{a_0} \\ &= \left( \frac{\frac{1}{y_1 y_2} \frac{d(y_1 y_2)}{da} da}{\frac{1}{a} da} \right)_{a_0} \\ &= \left( \frac{\frac{1}{y_1 y_2} \left( y_1 \frac{dy_2}{da} + y_2 \frac{dy_1}{da} \right) da}{\frac{1}{a} da} \right)_{a_0} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\frac{1}{y_2} \frac{dy_2}{d\alpha}}{\frac{1}{\alpha}} + \frac{\frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{d\alpha}}{\frac{1}{\alpha}} \right)_{\alpha_0} \\
&= \frac{dy_2/y_2}{d\alpha/\alpha} \Big|_{\alpha_0} + \frac{dy_1/y_1}{d\alpha/\alpha} \Big|_{\alpha_0} \\
&= S_{\alpha}^{y_1} \Big|_{\alpha_0} + S_{\alpha}^{y_2} \Big|_{\alpha_0} \tag{3-23}
\end{aligned}$$

也即，两个函数相乘的相对灵敏度函数等于两个函数自身相对灵敏度函数之和。

上述结果说明，在系统灵敏度理论中，常可应用对数相对灵敏度频率特性，使计算工作大为简化且形象化。

### 三、半相对灵敏度函数

为了说明问题方便，有时应用以下两种半相对灵敏度函数  $\tilde{S}_{\alpha}^y$  及  $\bar{S}_{\alpha}^y$ 。它们的定义如下。

**定义 3-5** 半相对灵敏度函数 如果系统变量  $y$  与参数  $\alpha$  的关系为

$$y = y(\alpha)$$

则两种半相对灵敏度函数分别为

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{\alpha}^y &\triangleq \frac{d \ln y}{d\alpha} \Big|_{\alpha_0} \\
&= \left( \frac{1}{y} \frac{dy}{d\alpha} \right)_{\alpha_0} \\
&= \frac{dy}{y} \Big|_{\alpha_0} \\
&= \frac{1}{y_0} \frac{dy}{d\alpha} \Big|_{\alpha_0} \tag{3-24}
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{\alpha}^y &\triangleq \frac{dy}{d \ln \alpha} \Big|_{\alpha_0} \\
&= \frac{dy}{\frac{1}{\alpha} d\alpha} \Big|_{\alpha_0} \\
&= \frac{dy}{\frac{d\alpha}{\alpha}} \Big|_{\alpha_0} \\
&= \alpha_0 \frac{dy}{d\alpha} \Big|_{\alpha_0} \tag{3-25}
\end{aligned}$$

式中，用下标“0”表示额定参数值  $\alpha_0$  时的相应值。

### 习 题

**3-1** 如果有关系式  $\xi_1 = \xi_1(\alpha)$ ,  $\xi_2 = \xi_2(\alpha)$ , 试求相对灵敏度  $S_{\alpha}^{\xi_1 \xi_2}$  的表达式。

**3-2** 如果有关系式  $\xi = f(\beta)$ ,  $\beta = g(\alpha)$ , 试求相对灵敏度  $S_{\alpha}^{\xi}$ 。

3-3 如果有关系式  $\xi_1 = \xi_1(\alpha)$ ,  $\xi_2 = \xi_2(\alpha)$ , 试求半相对灵敏度  $S_{\xi_1}^{\xi_1}$ ,  $S_{\xi_2}^{\xi_2}$  及  $S_{\xi_1 \xi_2}^{\xi_1 \xi_2}$ ,  $S_{\xi_1 \xi_2}^{\xi_1 \xi_2}$  的表达式。

3-4 如果有关系式  $\xi = f(\beta)$ ,  $\beta = g(\alpha)$ , 求半相对灵敏度的表达式  $S_{\xi}^{\xi}$  及  $S_{\alpha}^{\xi}$ 。

3-5 试以二阶灵敏度函数为例, 说明为保持系统变量  $y$  对参数  $\alpha$  及  $\beta$  的诱发误差  $dy$  的不变性, 要求参数  $\alpha$  与  $\beta$  间的关系式  $\alpha_i = \alpha_i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ,  $i=1, 2, \dots, r$  为线性变换关系。

3-6 设有某  $R-C$  低通滤波电路的微分方程  $\alpha_2 \dot{y} + \alpha_1 y = u$ , 其中,  $u$  为输入量,  $y$  为输出量, 参数  $\alpha_1 = K$ ,  $\alpha_2 = KRC$ , 式中  $K$  为放大因素,  $R$  为电阻值,  $C$  为电容值。假定灵敏度函数  $S_{\alpha_1}^y$  及  $S_{\alpha_2}^y$  已知, 试求:

(1) 当  $\Delta K \ll K_0$ ,  $\Delta R \ll R_0$ ,  $C$  未受扰动情况下的  $S_{\alpha_1}^y$ ,  $S_{\alpha_2}^y$  及  $\Delta y$ ;

(2) 当  $\Delta K \ll K_0$ ,  $\Delta R \ll R_0$  及  $\Delta C \ll C_0$  情况下的  $S_{\alpha_1}^y$ ,  $S_{\alpha_2}^y$ ,  $S_{\alpha_3}^y$  及  $\Delta y$ 。

3-7 假设摆长为  $l_0$  的挂钟在温度为  $v_0$  时走得很准, 此时, 摆的摆动周期为 1 秒, 周期的计算公式为  $T = 2\pi\sqrt{l_0/g}$ , 式中  $g$  为重力常数。如果室温变为  $v_1$  了, 则摆长将发生相应的变化, 其规律为  $l = l_0(1 + \alpha \Delta v)$ , 式中, 常数  $\alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$ 。试求:

(1) 绝对灵敏度  $S_{\alpha}^l$ ;

(2) 如果温度变化为  $10^\circ\text{C}$ , 该钟的计时会发生多大的变化。

3-8 有人论证说, 在应用有限字长的计算机计算二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$  的根时, 用根的传统计算公式  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  作为算法是不妥当的, 这里有算法的不稳定问题。你看这是什么原因?

3-9 设有图 3-2 所示的  $RLC$  电路, 试求:

(1) 传递函数  $W$ ;

(2)  $S_L^W$ ,  $S_R^W$ ,  $S_C^W$ 。

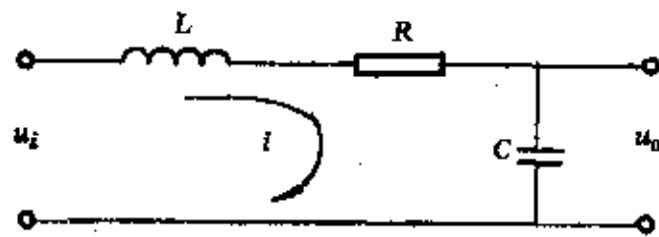


图 3-2

3-10 图 3-3 所示系统, 额定参数为:  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -5$ ,  $A = 0.21$ , 试求:

(1) 闭环传递函数  $M(s)$ ;

(2)  $S_{p_1}^M(s)$ ;

(3)  $\omega = 1$  及  $\omega = 2$  时的  $|S_{p_1}^M(\omega)|_0$  及  $|S_A^M(\omega)|_0$ 。

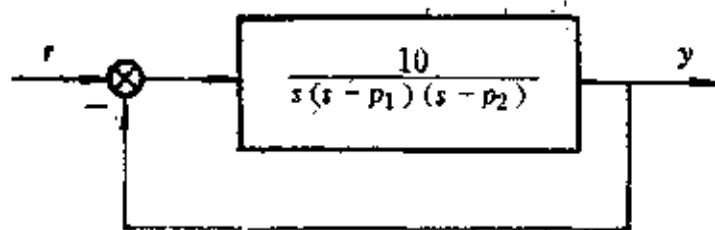


图 3-3

## 第四章 各种常用的系统灵敏度函数

本章介绍控制工程中常用的各种灵敏度函数及基于灵敏度函数的其它系统灵敏度表示法。由于控制系统常用时域法，频域法，及性能指标进行分析与设计，所以本章相应地研究时域灵敏度函数和频域灵敏度函数，对性能指标灵敏度的问题仅作了一些概略的介绍。

希望对本章内容做进一步了解的读者可参看文献[6]，[7]。

### 第一节 时域中的灵敏度函数

#### 一、连续系统的输出灵敏度函数

假如系统的数学模型直接用高于一阶的微分方程表示，这时人们感兴趣的便往往是所谓的输出灵敏度函数。以下讨论与此有关的问题。

##### (一) 系统的 $\alpha$ 参数输出灵敏度

设描写单变量系统输入与输出特性的微分方程为

$$f[y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, t, \alpha_0, u] = 0 \quad (4-1)$$

式中  $\alpha_0$ ——定常或慢变的单 $\alpha$ 参数的额定值；

$u$ ——系统的输入量。

初始条件为

$$y^{(i)}(t_0) \triangleq y_i^0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

注意，如果输入信号是纯粹的外加信号，则 $u(t)$ 与参数 $\alpha$ 无关，在讨论参数对系统性能的影响时，为书写简便起见，常常不把 $u$ 在方程式(4-1)中写出。反之，如果 $u(t)$ 是系统的反馈信号，则 $u(t)$ 就与参数 $\alpha$ 有关了。这时，在式(4-1)中，必须把 $u(t)$ 写出。另外，额定参数时的方程式(4-1)是作为系统分析与设计依据的系统额定方程。由于测量误差，辨识不准等前面章节中提到的一系列原因，它并不完全正确地描写系统中发生的真实过程。完美无缺地描述系统中过程的方程常称为系统的实际方程，它的特点是其中的参数值不再是 $\alpha_0$ ，而是偏离额定值 $\Delta\alpha$ 的 $\alpha$ 值，即 $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ 。当然， $\Delta\alpha$ 的真正值是无法精确知悉的。

1. 为了引出输出灵敏度的概念，假设上述系统的实际方程为

$$f[y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, t, \alpha] = 0 \quad (4-2)$$

且假设初始条件不变。由于微分方程的解是 $\alpha$ 参数的连续函数，故有

$$y(t, \alpha) = y(t, \alpha_0) + \left. \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \Delta\alpha + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha_0} \Delta\alpha^2 + \dots \quad (4-3)$$

式中  $y(t, \alpha)$ ——实际方程的解；

$y(t, \alpha_0)$ ——额定方程的解。

在 $\Delta\alpha \ll \alpha_0$ 的条件下， $y(t)$ 的一阶近似表达式为

$$y(t, \alpha) = y(t, \alpha_0) + \left. \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \Delta \alpha \quad (4-4)$$

因此，可定义输出灵敏度函数如下：

**定义 4-1** 输出灵敏度函数 系统的输出绝对灵敏度函数为

$$\sigma(t, \alpha_0) \triangleq \left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} = \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{y(t, \alpha_0 + \Delta \alpha) - y(t, \alpha_0)}{\Delta \alpha} \quad (4-5)$$

在对  $\Delta \alpha$  作出估计后，由于参数变化所诱发的输出量变化可求得为

$$\Delta y(t, \alpha) \triangleq \sigma(t, \alpha_0) \Delta \alpha \quad (4-6)$$

应当指出几点：

(1) 由于一般情况下，形如方程式(4-1)及式(4-2)的方程总能化为一阶微分方程组

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

所以，在保证第二章定理 2-5 的条件下， $y(t, \alpha)$  是  $\alpha$  的连续函数。实际上，只要方程式(4-2)中的  $f$  是  $y$  的连续函数， $y$  就会是  $\alpha$  的连续函数。这个条件对  $\alpha_0 \neq 0$  的连续系统而言，总是满足的。

(2) 由于式(4-2)中包含着外输入量  $u$ ，所以系统的输出灵敏度是一个取决于输入信号的时间函数。

(3) 系统的输出灵敏度还取决于额定参数值  $\alpha_0$ 。

**例 4-1** 设有某单变量系统，它的数学模型是线性定常三阶微分方程

$$y^{(3)} + 3a\ddot{y} + 3a^2\dot{y} + a^3y = u$$

初始条件为： $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$ ， $u(t) = \delta(t)$ 。如果参数  $a$  的额定值是  $a_0$ ，试求该系统的输出灵敏度表达式及实际输出函数的表达式。

**解** 由输出灵敏度的定义知， $\sigma(t, \alpha) \triangleq \left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}$ ，因此，需先解题给的三阶微分方程式，以求得  $y(t, \alpha)$ 。由拉氏变换法，不难求得

$$y(t, \alpha) = \frac{1}{2} t^2 e^{-\alpha t}$$

因此，可求得输出灵敏度函数

$$\sigma(t, \alpha_0) \triangleq \left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} = -\frac{1}{2} t^3 e^{-\alpha_0 t}$$

于是，由式(4-6)，可求得参数变化的诱发输出量变化为

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta y(t, \alpha) = \sigma(t, \alpha_0) \Delta a \\ &= -\frac{1}{2} t^3 e^{-\alpha_0 t} \Delta a \end{aligned}$$

系统的实际输出成为

$$\begin{aligned} y(t, \alpha) &= y(t, \alpha_0) + \Delta y \\ &= \frac{1}{2} t^2 e^{-\alpha_0 t} + \left( -\frac{1}{2} t^3 e^{-\alpha_0 t} \Delta a \right) \\ &= \frac{1}{2} t^2 e^{-\alpha_0 t} (1 - t \Delta a) \end{aligned}$$

2. 假如进一步假设参数不只一个，而是  $r$  个，设为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 。则可将这  $r$  个参数

构成一个列向量  $\mathbf{a} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$ 。于是，系统的额定方程为

$$f[y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, t, \mathbf{a}_0] = 0 \quad (4-7)$$

系统的实际方程成为

$$f[y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, t, \mathbf{a}_0 + \Delta \mathbf{a}] = 0 \quad (4-8)$$

假如式(4-7)与式(4-8)的解分别是  $y(t, \mathbf{a}_0)$  及  $y(t, \mathbf{a})$ ，则由第二章所述的纯量场知识，可知

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{a}} \triangleq \left[ \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \ \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \ \dots \ \frac{\partial y}{\partial \alpha_r} \right]^T$$

因此，可定义输出灵敏度向量为

$$\sigma_y \triangleq \frac{\partial y}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\mathbf{a}_0} = \left[ \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \ \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \ \dots \ \frac{\partial y}{\partial \alpha_r} \right]_{\mathbf{a}_0} \quad (4-9)$$

系统输出量的诱发误差成为

$$\begin{aligned} \Delta y \triangleq \sigma_y \Delta \mathbf{a} &= \left[ \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \ \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \ \dots \ \frac{\partial y}{\partial \alpha_r} \right]_{\mathbf{a}_0} \begin{bmatrix} \Delta \alpha_1 \\ \Delta \alpha_2 \\ \vdots \\ \Delta \alpha_r \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r \frac{\partial y}{\partial \alpha_i} \Big|_{\mathbf{a}_0} \Delta \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^r \sigma_i(t, \mathbf{a}_0) \Delta \alpha_i \end{aligned} \quad (4-10)$$

式中  $\sigma_i(t, \mathbf{a}_0) \triangleq \frac{\partial y}{\partial \alpha_i} \Big|_{\mathbf{a}_0}$  ——对参数  $\alpha_i$  的输出灵敏度函数。

3. 对于更为一般的多输出、多参数的情况，系统的输出灵敏度函数也不难求得。例如，设有  $q$  个输出量，于是

$$y_k(t, \mathbf{a}) = y_k(t, \mathbf{a}_0) + \sigma_k(t, \mathbf{a}_0) \Delta \mathbf{a}, \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (4-11)$$

由第二章所述的向量场知识，此时

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{a}} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_r} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial \alpha_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_q}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y_q}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial y_q}{\partial \alpha_r} \end{bmatrix}$$

于是，利用上述雅可比矩阵的知识，可定义系统的输出灵敏度矩阵为

$$\Sigma(t, \mathbf{a}_0) \triangleq \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\mathbf{a}_0} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_r} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial \alpha_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_q}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y_q}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial y_q}{\partial \alpha_r} \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{a}_0} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_p \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{a}_0} \quad (4-12)$$

系统输出量的诱发误差为

$$\Delta y = [\Delta y_1 \ \Delta y_2 \ \dots \ \Delta y_q]^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial a_1} & \frac{\partial y_1}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial a_r} \\ \frac{\partial y_2}{\partial a_1} & \frac{\partial y_2}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial a_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_q}{\partial a_1} & \frac{\partial y_q}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial y_q}{\partial a_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \vdots \\ \Delta a_r \end{bmatrix}$$

$$\triangleq \Sigma(t, a_0) \Delta a \quad (4-13)$$

(二) 系统的  $\beta$  参数输出灵敏度

前已述及，把变化的初始条件作为参数，便得  $\beta$  参数。设初始条件的额定值为  $\beta_n$ ，它的实际值为向量  $\beta = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{n-1}]^T$ 。于是对单变量系统而言，可定义系统对  $\beta$  参数的输出灵敏度为

$$\sigma_s(t, \beta_n) \triangleq \left. \frac{\partial y(t, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta_n} \quad (4-14)$$

基于上式，同理可求得由于  $\beta$  参数变化所诱发的输出量误差  $\Delta y$  为

$$\Delta y = \sigma_s(t, \beta_n) \Delta \beta$$

对多变量情况，可仿照前述  $\alpha$  参数的情况推得相应的算式。

(三) 时变  $\alpha$  参数的输出灵敏度函数

如果  $\Delta \alpha$  不是定常而是时变的，这时，一般假定  $\alpha(t)$  的变化规律为

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \varepsilon g(t) \quad (4-15)$$

式中  $\varepsilon$  —— 常数；

$g(t)$  —— 均匀有界的可积函数。

所谓均匀有界是指如果  $g(t)$  的稳态值是  $g_s$ ，则为使  $|g(t) - g_s| < \infty$  而选作出发点的  $g(t_0)$  与  $t_0$  无关。这点，与控制理论中讨论稳定性概念时引入均匀稳定概念的做法类同。因此，时变  $\alpha$  参数的输出灵敏度函数可定义如下：

**定义 4-2** 时变  $\alpha$  参数的输出灵敏度函数 如果时变  $\alpha$  参数的变化规律为

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \varepsilon g(t)$$

式中  $\varepsilon$  —— 常数；

$g(t)$  —— 已知的均匀有界的可积函数。

则时变  $\alpha$  参数的输出灵敏度函数为

$$\sigma_s \triangleq \sigma(t, \alpha_0, g) \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y[(\alpha_0 + \varepsilon g), t] - y(\alpha_0, t)}{\varepsilon} \quad (4-16)$$

基于上述公式，可求得相应的系统输出诱发误差  $\Delta y$ 。多参数与多变量系统的相应灵敏度向量与灵敏度矩阵也可用类似前述的方法定义之。

上述一切对时变的  $\beta$  参数情况也真。

(四) 一个例题

为了加深理解，现举一例说明系统输出灵敏度函数的含义及各种灵敏度函数表达法的应用场合。

**例 4-2** 设某单变量系统的数学模型为

$$y^{(3)} + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = u$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$$

其中,  $u(t) = 1(t)$ ,  $a_0, a_1, a_2$  的额定值分别为  $a_{00} = 20, a_{10} = 15, a_{20} = 5$ 。试求以下各项:

- (1) 参数向量取为  $\alpha = [a_0 \ a_1 \ a_2]^T$  时, 系统的输出灵敏度向量  $\sigma_y \triangleq \left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}$  的表达式;
- (2)  $\sigma_y$  各分量的波形图;
- (3)  $\Delta \alpha$  的各分量对  $y(t)$  的影响;
- (4) 系统输出量诱发误差的各种表达式;
- (5) 取  $\Delta a_2 / a_{20} = 0.1$ , 用一阶灵敏度函数求系统输出量的诱发误差, 并与精确值进行比较。

**解** (1) 求  $\sigma_y \triangleq \left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}$  的表达式的方法是用拉普拉斯变换法或其它方法解题给方程, 然后求输出灵敏度向量

$$\sigma_y \triangleq \left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} = \left[ \left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial a_0} \right|_{\alpha_0} \quad \left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial a_1} \right|_{\alpha_0} \quad \left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial a_2} \right|_{\alpha_0} \right]^T$$

具体计算过程由读者自行完成之。

(2)  $\sigma_y$  各分量  $\left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial a_0} \right|_{\alpha_0}$ ,  $\left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial a_1} \right|_{\alpha_0}$  及  $\left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial a_2} \right|_{\alpha_0}$  的波形图如图 4-1(a)

所示。图中, 为表示清晰起见, 已将各量放大了 1000 倍。

由图可见, 本系统的稳态输出值为

$$y_{ss} = \frac{u}{a_0} = \frac{1}{20} = 0.05 = 5 \times 10^{-2}$$

(3)  $\Delta a_0$  对  $y$  的影响体现于  $y$  的诱发误差  $\Delta y_{ss}$ 。其表达式为

$$\Delta y_{ss} \triangleq \left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial a_0} \right|_{\alpha_0} \Delta a_0$$

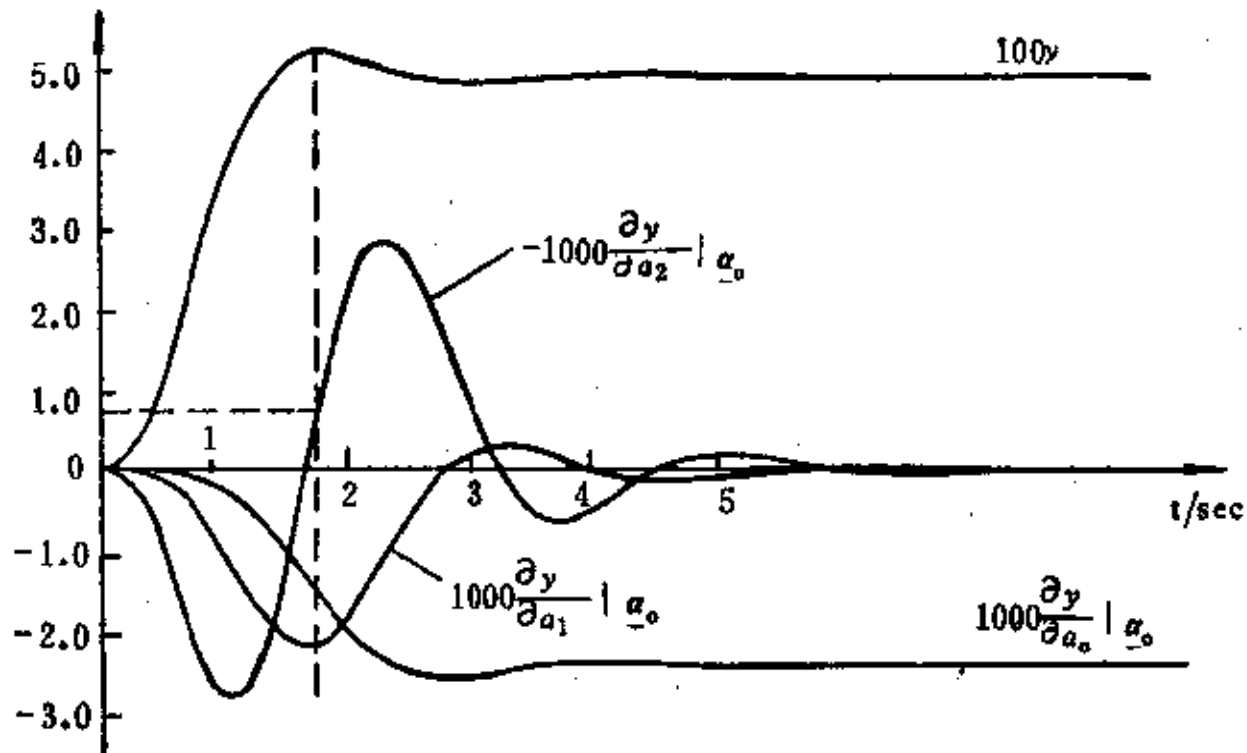
由上式可见, 当  $\Delta \alpha = [\Delta a_0 \ \Delta a_1 \ \Delta a_2]^T$  为定常的参数变化时,  $\Delta a_0$  对  $y$  的影响就直接体现于  $\left. \frac{\partial y}{\partial a_0} \right|_{\alpha_0}$  上了。由图可见,  $\left. \frac{\partial y}{\partial a_0} \right|_{\alpha_0}$ , 进而  $\Delta a_0$  只影响  $y$  的稳态值, 而对超调量及上升时间影响不大。

同理, 由图可见, 由于  $\left. \frac{\partial y}{\partial a_1} \right|_{\alpha_0}$  的值在发生超调量处为最大, 故  $\Delta a_1$  对超调量有大的影响。

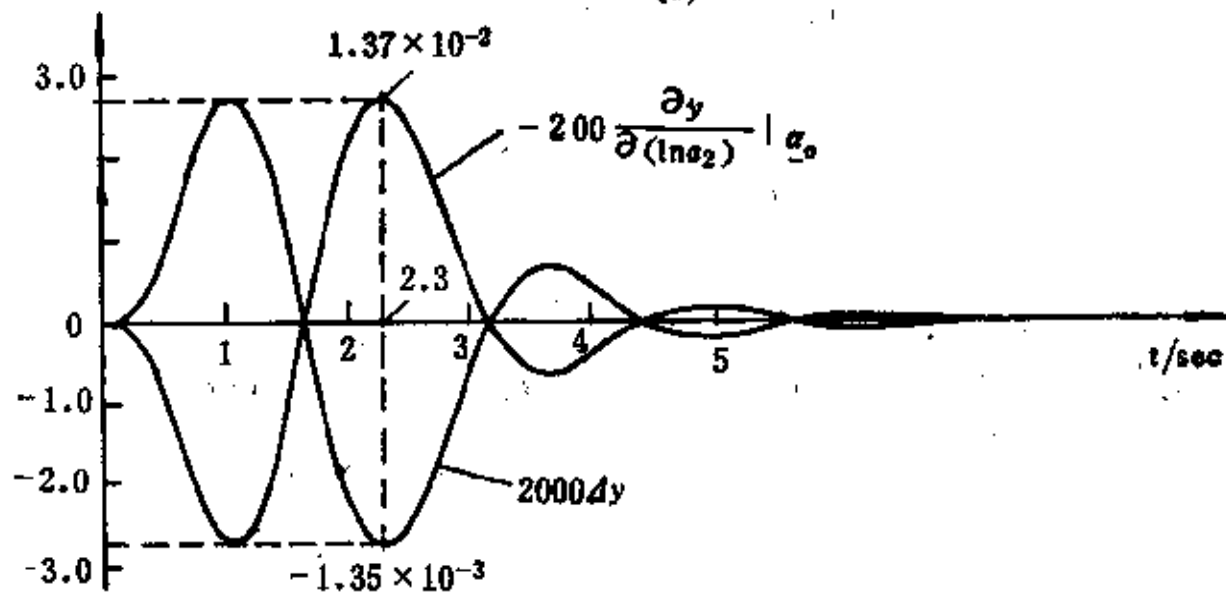
由  $\left( \left. \frac{\partial y}{\partial a_2} \right)_{\alpha_0} \right)$  的波形图可见, 它对  $y$  的斜率有影响, 所以  $\Delta a_2$  影响  $y$  的上升时间。

(4) 可用绝对灵敏度、半相对灵敏度和相对灵敏度来表达  $y$  的参数诱发误差  $\Delta y$ 。用绝对灵敏度函数表达的  $\Delta y$  算式为

$$\Delta y \approx \left. \frac{\partial y}{\partial a_0} \right|_{\alpha_0} \Delta a_0 + \left. \frac{\partial y}{\partial a_1} \right|_{\alpha_0} \Delta a_1 + \left. \frac{\partial y}{\partial a_2} \right|_{\alpha_0} \Delta a_2$$



(a)



(b)

图 4-1

为了比较各种参数的变化对  $y$  的影响，宜用半相对灵敏度函数来表达

$$\begin{aligned} \Delta y(t, \mathbf{a}) &= \frac{\partial y}{\partial a_0} \Big|_{\mathbf{a}_0} \Delta a_0 + \frac{\partial y}{\partial a_1} \Big|_{\mathbf{a}_0} \Delta a_1 + \frac{\partial y}{\partial a_2} \Big|_{\mathbf{a}_0} \Delta a_2 \\ &= a_0 \frac{\partial y}{\partial a_0} \Big|_{\mathbf{a}_0} \frac{\Delta a_0}{a_0} + a_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} \Big|_{\mathbf{a}_0} \frac{\Delta a_1}{a_1} + a_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} \Big|_{\mathbf{a}_0} \frac{\Delta a_2}{a_2} \\ &= \frac{\partial y}{\partial a_0/a_0} \Big|_{\mathbf{a}_0} \frac{\Delta a_0}{a_0} + \frac{\partial y}{\partial a_1/a_1} \Big|_{\mathbf{a}_0} \frac{\Delta a_1}{a_1} + \frac{\partial y}{\partial a_2/a_2} \Big|_{\mathbf{a}_0} \frac{\Delta a_2}{a_2} \\ &\triangleq \sigma_{a_0} \frac{\Delta a_0}{a_0} + \sigma_{a_1} \frac{\Delta a_1}{a_1} + \sigma_{a_2} \frac{\Delta a_2}{a_2} \end{aligned}$$

如果想用无因次的量来表达参数对  $y$  的影响，则用相对灵敏度函数为宜。以  $y(t, \mathbf{a}_0)$  通除上式左右两边，得

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y(t, \mathbf{a})}{y(t, \mathbf{a}_0)} &= \frac{a_0}{y(t, \mathbf{a}_0)} \frac{\partial y}{\partial a_0} \Big|_{\mathbf{a}_0} \frac{\Delta a_0}{a_0} + \frac{a_1}{y(t, \mathbf{a}_0)} \frac{\partial y}{\partial a_1} \Big|_{\mathbf{a}_0} \frac{\Delta a_1}{a_1} \\ &\quad + \frac{a_2}{y(t, \mathbf{a}_0)} \frac{\partial y}{\partial a_2} \Big|_{\mathbf{a}_0} \frac{\Delta a_2}{a_2} \end{aligned}$$



$$\triangleq \sigma_{a_0} \frac{\Delta a_0}{a_0} + \sigma_{a_1} \frac{\Delta a_1}{a_1} + \sigma_{a_2} \frac{\Delta a_2}{a_2}$$

(5) 为了对用一阶灵敏度函数分析计算灵敏度问题的精确程度有所了解, 本例以  $\frac{\Delta a_2}{a_2} = 0.1$  为例, 计算  $y$  的诱发误差的准确值和用灵敏度函数求得的近似值, 并进行比较。

由图 4-1(b) 可见, 当  $t = 2.3$  秒时, 由  $-200 \frac{\partial y}{\partial(\ln a_2)} \Big|_{a_0}$  曲线可查得相应的值为 2.74,

于是由等式

$$2.74 = -200 \frac{\partial y}{\partial(\ln a_2)} \Big|_{a_0}$$

可求得 
$$\sigma_{a_2} \triangleq \frac{\partial y}{\partial(\ln a_2)} \Big|_{a_0} = \frac{\partial y}{\frac{1}{a_2} \partial a_2} \Big|_{a_0} = -\frac{2.74}{200} = -1.37 \times 10^{-2}$$

由此 
$$\Delta y \approx \sigma_{a_2} \frac{\Delta a_2}{a_2} = -1.37 \times 10^{-2} \times 0.1 = -1.37 \times 10^{-3}$$

而由图 4-1(b) 中的  $2000 \Delta y$  曲线, 可查得  $t = 2.3$  秒时的值为  $-2.7$ 。于是由等式

$$-2.7 = 2000 \Delta y$$

可求得 
$$\Delta y = -\frac{2.7}{2000} = -1.35 \times 10^{-3}$$

比较以上两个计算结果可见, 用灵敏度函数计算  $y$  的诱发误差的近似值与精确的诱发误差值是相当接近的。实际经验中指出, 当参数的变化为 30% 以下时, 用灵敏度函数分析所得的结果是足够准确可靠的。

## 二、连续系统的轨迹灵敏度函数

### (一) $\alpha, \beta$ 参数的轨迹灵敏度函数

如果系统用状态变量法来描述, 这时的灵敏度问题皆用所谓的轨迹灵敏度函数来处理。具体讲, 如果系统在额定参数时的额定方程为

$$\dot{x} = f(x, t, u, \alpha_0), \quad x(t_0) = x^0 \quad (4-17)$$

而在实际参数  $\alpha = \alpha_0 + \Delta \alpha$  时的实际方程为

$$\dot{x} = f(x, t, u, \alpha), \quad x(t_0) = x^0 \quad (4-18)$$

则参数变化  $\Delta \alpha$  所导致的诱发状态误差为

$$\Delta x(t, \alpha) \triangleq x(t, \alpha) - x(t, \alpha_0) \quad (4-19)$$

按泰勒公式,  $\Delta x(t, \alpha)$  的一阶近似式是

$$\Delta x(t, \alpha) \approx \sum_{j=1}^r \frac{\partial x}{\partial \alpha_j} \Big|_{a_0} \Delta \alpha_j \quad (4-20)$$

因此, 可定义所谓的轨迹灵敏度函数。

**定义 4-3** 轨迹灵敏度向量 如果系统的状态向量是定常参数  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$  的连续函数, 则称

$$\lambda_j(t, \alpha_0) \triangleq \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} \Big|_{a_0} \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (4-21)$$

为对第  $i$  个参数分量的轨迹灵敏度向量。

注意，由于状态向量  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ ，故由矩阵分析的知识可知

$$\lambda_j \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0} = \left[ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} \ \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} \ \dots \ \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} \right]^T \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (4-22)$$

通常，称轨迹灵敏度向量的元素为轨迹灵敏度函数，也即，轨迹灵敏度函数为

$$\lambda_{ij}(t, \boldsymbol{\alpha}_0) \triangleq \left. \frac{\partial x_i(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (4-23)$$

**定义 4-4** 轨迹灵敏度矩阵 状态向量  $\mathbf{x}$  对定常参数向量  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$  的导数称为轨迹灵敏度矩阵  $A$ ，即

$$A \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_r} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_r} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\alpha}_0} \quad (4-24)$$

显然， $A$  阵为

$$A = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_r] \quad (4-25)$$

参数变化诱发的状态向量误差为

$$\Delta \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\alpha}) = A(t, \boldsymbol{\alpha}_0) \Delta \boldsymbol{\alpha} = \sum_{j=1}^r \lambda_j \Delta \alpha_j \quad (4-26)$$

如果初始条件有变，则遇  $\beta$  参数问题。这类问题可仿效上述  $\alpha$  参数的情况，进行类似的处理。

**例 4-3** 设有伺服直流电机的微分方程

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} = Ku$$

若  $u = 0$ ，参数  $a_1$  的额定值  $a_{10} = 1$ ，初始条件为  $y(0) = 0$ ， $\dot{y}(0) = 1$ ，试求轨迹灵敏度向量并求  $a_1$  有 10% 的变化后状态向量的诱发变化  $\Delta \mathbf{x}$ 。

**解** 由题给微分方程转相变型的状态方程进行计算，故相应的状态变量取为  $x_1 = y$ ， $x_2 = \dot{y}$ 。动态方程成为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1$$

由状态方程解的公式

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

考虑  $u = 0$ ，故有

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0)$$

$e^{At}$  可求之如下

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1} e^{-a_1 t} \\ 0 & e^{-a_1 t} \end{bmatrix}$$

于是

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1} e^{-a_1 t} \\ e^{-a_1 t} \end{bmatrix}$$

取  $a_1$  作为参数, 即取  $\mathbf{a} = a_1$ , 轨迹灵敏度向量为

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{11}(t, a_{10}) \\ \lambda_{21}(t, a_{10}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial a_1 \\ \partial x_2 / \partial a_1 \end{bmatrix}_{\mathbf{a}_0}$$

$$\partial x_1 / \partial a_1 |_{\mathbf{a}_0} = \partial \left[ \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1} e^{-a_1 t} \right] / \partial a_1 |_{\mathbf{a}_0}$$

$$= \frac{1}{a_{10}^2} [e^{-a_{10} t} (1 + a_{10} t) - 1]$$

$$\partial x_2 / \partial a_1 |_{\mathbf{a}_0} = \frac{\partial}{\partial a_1} (e^{-a_1 t}) |_{\mathbf{a}_0} = -t e^{-a_{10} t}$$

故

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial a_1 \\ \partial x_2 / \partial a_1 \end{bmatrix}_{\mathbf{a}_0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{10}^2} [e^{-a_{10} t} (1 + a_{10} t) - 1] \\ -t e^{-a_{10} t} \end{bmatrix}_{\mathbf{a}_0}$$

参数变化的诱发状态误差可由下式求之

$$\Delta \mathbf{x} = \lambda_1 \Delta a_1 = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial a_1 \\ \partial x_2 / \partial a_1 \end{bmatrix}_{\mathbf{a}_0} \Delta a_1$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\Delta a_1}{a_{10}^2} [e^{-a_{10} t} (1 + a_{10} t) - 1] \\ -\Delta a_1 t e^{-a_{10} t} \end{bmatrix}$$

式中,  $a_{10} = 1$ ,  $\Delta a_1 = 10\% a_{10} = 0.1 \times 1 = 0.1$

为了把参数变化对系统的影响看得更清楚, 我们可以画出相应于额定参数的额定相迹和参数变化后的实际相迹。为此, 先求相迹方程。

由前述状态方程, 考虑  $u(t) = 0$ , 有

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a_1 x_2 + Ku = -a_1 x_2$$

于是, 有关系式

$$\dot{x}_2 = -a_1 x_2$$

额定参数时的相迹可由下式求得

$$\dot{x}_{20} = -a_{10} x_{20}$$

也即

$$\frac{dx_{20}}{dt} = -a_{10} \frac{dx_{10}}{dt}$$

于是  
积分之，即

$$a_{10}dx_{10} + dx_{20} = 0$$

$$a_{10} \int_0^{x_{10}} d\tilde{x}_1 + \int_1^{x_{20}} d\tilde{x}_2 = 0$$

得相迹方程

$$a_{10}x_{10} + x_{20} - 1 = 0$$

取实际参数时的相迹可仿前由下式求得

$$\dot{x}_2 = -a_1 \dot{x}_1$$

故求得的相迹方程为

$$a_1 x_1 + x_2 = 1$$

由于

$$a_1 = a_{10} + \Delta a_1 = 1 + \frac{10}{100} \times 1 = 1.1$$

上式成为

$$1.1x_1 + x_2 = 1$$

取额定参数的相迹与实际相迹于示图 4-2。

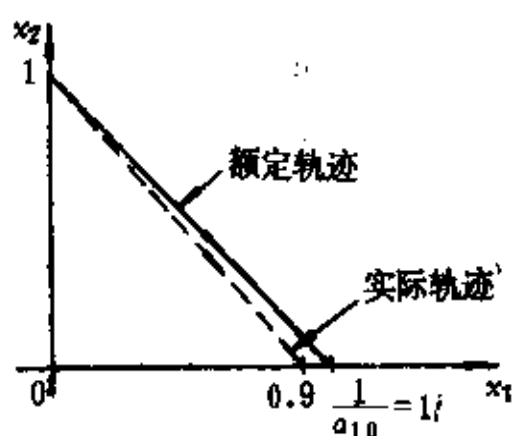


图 4-2

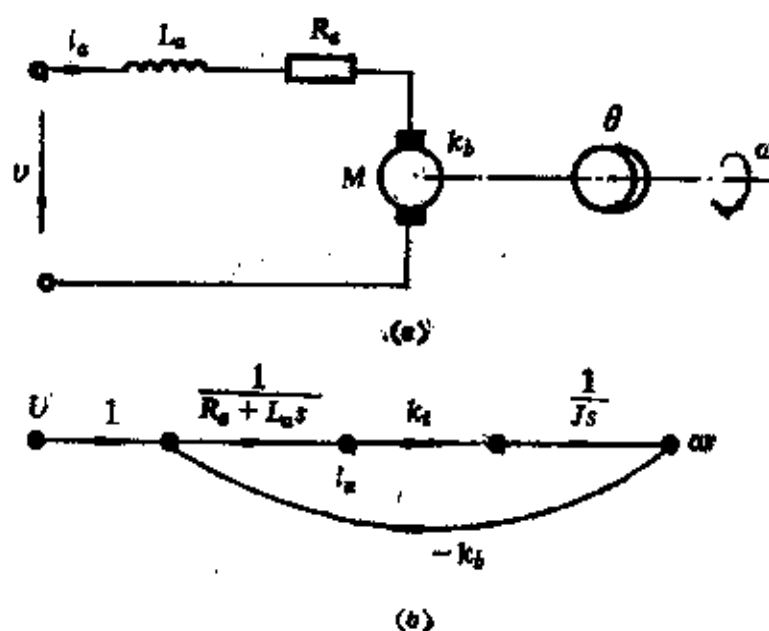


图 4-3

## (二) $\lambda$ 参数问题的轨迹灵敏度问题

现在，我们来讨论与  $\lambda$  参数有关的一些问题。先看一个引例。

**例 4-4** 设有图 4-3 所示的枢控伺服直流电动机并假设该电机的电枢电感  $L_a$  很小（例如为毫亨级）试求该电机的状态方程，并说明为简化该模型而令  $L_a = 0$  的做法会导致  $\lambda$  参数灵敏度问题。

**解** 参看图 4-3。取该图 (b) 中积分器后的变量为状态变量，即

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix}$$

由于

$$\omega = \frac{1}{J_s} k_b i_a$$

$$i_a = \frac{1}{R_a + L_a s} (u - k_b \omega)$$

故状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= \frac{1}{J} k_t i_a \\ \dot{i}_a &= (-R_a i_a - k_b \omega + u) / L_a\end{aligned}$$

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} k_t \\ -\frac{k_b}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u$$

由于这个系统有两个状态变量，所以是个二阶系统。

为简化计算，如取小参数  $L_a = 0$ ，则上式中第二个方程右端的系数成为无穷大，所以方程不再成立。因此，为讨论  $L_a = 0$  的情况，必须把小参数  $L_a$  乘到该等式的左端去，也即，使  $L_a$  与状态变量  $i_a$  的导数相乘。于是，为简化计算的问题，应研究的方程成为

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ L_a \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} k_t \\ -k_b & -R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

因此在简化计算的情况下，由于取  $L_a = 0$ ，上式中的第二个方程不再是微分方程，而是代数方程了。所以，这个简化的系统模型成了一阶系统。也就是说，把小参数  $L_a$  由非零值人为地变为零的做法使系统模型简化了，这样做的结果导致了原系统阶次的降低。

在进行控制系统设计计算时，尽管上述做法是近似的措施，这个取  $L_a = 0$  的系统近似方程却是作为设计计算依据的额定方程（或称名义方程，退化方程）。代表系统真实情况的原状态方程却被看成是由于参数  $L_a$  由额定值  $L_{a0} = 0$  变为  $L_a = L_{a0} + \Delta L_a = 0 + \Delta L_a = \Delta L_a$  后所得者。因此，我们反而讲，小参数  $L_a$  由额定值  $L_a = 0$  变为实际值  $L_a \neq 0$  导致了系统阶次的提高。从这个意义上讲，与状态向量的导数相乘的小参数是  $\lambda$  参数。 $\lambda$  参数灵敏度问题出现了。

在上述引例的基础上，以下以灵敏度理论的观点来较为系统地研究这种伴随着系统阶次变化的  $\lambda$  参数问题。

1.  $\lambda$  参数问题的提出 在处理包含电感、电容、质量、惯性的系统时，常常可得以下类型的奇异摄动型系统动态方程

$$\dot{x} = f(x, z, t, u, \alpha) \quad x(t_0) = x^0 \quad (4-27)$$

$$\alpha \dot{z} = f_1(x, z, t, u, \alpha) \quad z(t_0) = z^0 \quad (4-28)$$

$$y = g(x, z, t, u, \alpha) \quad (4-29)$$

式中  $x$ ——系统的状态向量， $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ ；

$z$ ——当参数  $\alpha$  由其额定值  $\alpha_0 = 0$  变为  $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha = \Delta\alpha$  时，增加的系统状态变量；

$z = [x_{n+1} \ x_{n+2} \ \dots \ x_{n+r}]^T$ ；

$\alpha$ ——纯量小参数，其额定值为  $\alpha_0 = 0$ ；

$u$ ——系统的输入量；

$y$ ——系统的输出量；

$f, f_1, g$ ——分别为  $n$  维、 $r$  维及  $q$  维的向量值函数。

注意，一般情况下， $\alpha$  为参数向量。这里，只是为了讨论方便起见，才设  $\alpha$  为纯量小参数。此外，为避免与轨迹灵敏度函数的常用符号  $\lambda$  相混淆，这里与以后的叙述中皆用  $\alpha$  表示  $\lambda$  参数。

上述方程之所以被称为奇异摄动型的方程是由于其中的小参数  $\alpha$  一反常态不与状态方程的右端各量相乘，而是与左端的状态变量导数项相乘之故。正是由于小参数在状态方程中的这种布局，使得经典的微分方程理论方法对这种类型的方程显得无能为力。这就是术语“奇异摄动型”方程的来由。

由于参数  $\alpha$  很小，为分析与设计系统方便起见，常令  $\alpha = 0$ 。因此，得到作为分析与设计系统依据的系统额定方程为

$$\dot{x}_0 = f(x, z_0, t, u, 0), \quad x(t_0) = x^0 \quad (4-30)$$

$$0 = f_1(x, z_0, t, u, 0) \quad (4-31)$$

$$y_0 = g(x, z_0, t, u, 0) \quad (4-32)$$

式中，变量  $x, z, y$  的下标“0”表示“额定量”之意。

由于方程式(4-31)已成为代数方程了，所以与系统的实际方程相比较， $\alpha = 0$  时的系统额定方程的阶次降低了  $r$  阶。或者，换言之，相对于作为设计计算依据的系统额定方程而言，系统的实际方程比它高了  $r$  阶。显然，这是一种对设计计算工作十分有利的情况。然而，到底这样做是不是合理，要由灵敏度观点来判定。也就是说，如果由于参数  $\alpha$  的变化而造成的系统状态向量诱发误差不大，则这样做是允许的，否则，这种降阶的做法就行不通了。

这样，我们遇到了  $\lambda$  参数问题。

2.  $\lambda$  参数情况下的轨迹灵敏度函数 由于  $\lambda$  参数情况下涉及系统的实际方程及系统的额定方程（即：“退化方程”），所以，原则上可以定义以下两种不同的  $\lambda$  参数轨迹灵敏度函数。基于系统的实际方程（注意：此时  $\alpha \neq 0$ ）。灵敏度函数可定义为

$$\left. \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0 \neq 0} \triangleq \lambda^*, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0 \neq 0} \triangleq \eta^* \quad (4-33)$$

而基于退化方程（ $\alpha = 0$ ），另一种灵敏度函数定义为

$$\left. \frac{\partial x_0}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0 = 0} \triangleq \lambda, \quad \left. \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0 = 0} \triangleq \eta \quad (4-34)$$

作为系统的设计工作者来讲，当然希望用基于退化方程的灵敏度函数定义式(4-34)。这是因为，退化方程是设计与分析系统的依据之故。因此，为要退化方程实际可用，要求由式(4-33)与式(4-34)定义的两灵敏度函数相等，即要求

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \left. \frac{\partial x_0}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0 = 0} \triangleq \lambda \quad (4-35)$$

及

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} \frac{\partial z}{\partial \alpha} = \left. \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0 = 0} \triangleq \eta \quad (4-36)$$

然而，满足以上两式的条件是不易求得的。这是因为，由式(4-28)，有

$$\dot{z} = \frac{1}{\alpha} f_1(x, z, t, u, \alpha) \quad (4-37)$$

这个方程的右端在  $\alpha \rightarrow 0$  时趋于无穷大，所以方程本身不复存在。因此，经典微分方程解的存在与唯一性定理不再适用。在这种情况下，只好应用奇异摄动理论了<sup>[17]</sup>。1948年，苏联科学家吉洪诺夫（А.Н.Тихонов）与华西列也娃（А.Б.Васильева）提出了一个在  $\alpha = 0$  时系统的非退化方程（即实际方程）的解  $x, z$ ，收敛为系统退化方程的解  $x_0, z_0$ ，且保证极限关系式(4-35)，(4-36)存在的定理。

**定理 4-1** 考虑辅助方程

$$\frac{d\mathbf{z}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{f}_1[\mathbf{x}, \mathbf{z}(\cdot), t, \mathbf{u}, 0] \quad (4-38)$$

式中  $\mathbf{x}, t$ ——被看成是固定的参数；

$\mathbf{f}_1$ ——由方程式(4-28)定义的向量函数。

则在  $\alpha \rightarrow 0$  时，系统非退化方程式(4-27)与式(4-28)的解  $\mathbf{x}(t, \alpha), \mathbf{z}(t, \alpha)$  趋于退化方程式(4-30)、(4-31)的解  $\mathbf{x}_0(t), \mathbf{z}_0(t)$  的条件是：辅助方程式(4-38)具有在李亚普诺夫意义下的渐近稳定解。讲得更直接些，辅助方程式(4-38)具有渐近稳定性的充分条件是： $\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{z}}$  的一切

特征值在  $(x, z, t)$  空间的某域  $R$  中皆具有负实部。

这个定理不拟证明了。以下看一个有关的例子。

**例 4-5** 设有非线性被控对象如图 4-4 所示，其中，非线性特性是  $v = z^3$ ， $k$  是一个假定其值很大的放大系数。如果用  $k = 1/\alpha$  来定义  $\lambda$  参数  $\alpha$ ，试用奇异摄动的观点，求以  $\lambda$  参数  $\alpha$  表达的系统非退化方程及退化方程，并判定用退化方程定义的  $\lambda$  参数灵敏度函数进行灵敏度计算的条件是否得到满足。

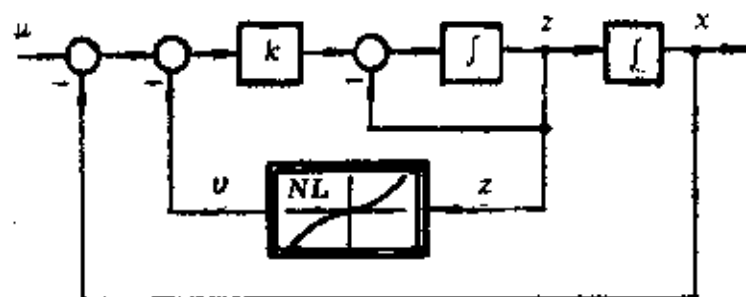


图 4-4

**解** 系统的实际方程（即非退化方程）相应于  $k \neq \infty$ 。由于  $k \triangleq 1/\alpha$ ，故从  $\lambda$  参数的观点看，这相应于  $\lambda$  参数  $\alpha \neq 0$  的情况。

以参数  $k$  列写方程时，系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{z} = (u - x)k - kz^3 - z \end{cases}$$

若转用  $\lambda$  参数  $\alpha$  列写。基于  $k = 1/\alpha$ ，有

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{z} = (u - x)\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}z^3 - z \end{cases}$$

故得非退化方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \alpha \dot{z} = -x - \alpha z - z^3 + u \\ \triangleq \mathbf{f}_1(x, z, t, u, \alpha) \end{cases}$$

系统的退化方程相应于  $k \rightarrow \infty$ ，也即  $\alpha \rightarrow 0$ 。以  $\alpha = 0$  代入上述非退化方程，并引用下标“0”表示额定状态，得退化方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = z_0 \\ 0 = -x_0 - z_0^3 + u \end{cases}$$

于是

$$\dot{x}_0 = z_0 = \sqrt[3]{-x_0 + u}$$

为判定用退化方程定义的  $\lambda$  参数灵敏度函数进行计算的条件是否得到满足, 需先写出辅助方程。参看非退化方程中的第二式, 可得辅助方程为

$$\begin{aligned} \frac{dz(\tau)}{d\tau} &= f_1(x, z(\tau), t, u, 0) \\ &= -x - z^3 + u \end{aligned}$$

为求充分条件, 要求  $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ 。显然,

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -3z^2$$

由于  $\frac{\partial f_1}{\partial z}$  的特征值就是它本身, 且它对任意的  $x, z, t$  大值皆为负, 故  $\frac{\partial f_1}{\partial z}$  的所有特征值  $\lambda\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)$  皆为负定的。所以, 在  $k = \infty$  的情况下, 有

$$\begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ z \rightarrow z_0 \end{cases}$$

且

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= \left. \frac{\partial x_0}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0=0} = \lambda \\ \lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} \frac{\partial z}{\partial \alpha} &= \left. \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0=0} = \eta \end{aligned}$$

也即, 可用  $k = \infty$  时的系统退化模型来表征  $\lambda$  参数的参数灵敏度函数。

### 三、时域中的灵敏度尺度

#### (一) 问题的提出

一般情况下, 时域灵敏度函数不仅是参数的函数, 而且还是时间的函数。有时, 例如在考虑大范围的灵敏度问题时, 常常希望用一个数来表征系统对有关参数变化的灵敏度, 而不希望掺杂时间变量。因此, 提出了以时域灵敏度尺度作为灵敏度的另一种度量方法的问题。

常见的时域灵敏度尺度有以下几种:

- (1) 超调灵敏度;
- (2)  $L_2$  范数;
- (3) 特征值灵敏度。

以下分别介绍它们的含义。

#### (二) 超调灵敏度

在许多情况下, 超调量是设计系统的技术指标, 因此, 常有必要研究参数变化对系统超调量的影响。

显然, 超调灵敏度可以由输出灵敏度函数公式中代入发生超调的时刻  $t_m$  求得, 即

$$\sigma(t_m, \alpha_0) = \sigma(t, \alpha_0) \Big|_{t=t_m} \quad (4-39)$$



如果设计系统时考虑图 4-5 所示系统的阶跃响应  $h(t)$ , 则超调灵敏度就成为

$$\sigma(t_m, \alpha_0) = \sigma(t, \alpha_0) \Big|_{t_m}$$

$$\triangleq \frac{\partial h(t, \alpha)}{\partial a_j} \Big|_{t_m, \alpha_0}$$

这样处理后, 时间变量不见了。所以, 超调灵敏度是一种时域灵敏度尺度。

**例 4-6** 试求例 4-2 的超调灵敏度

**解** 由图 4-1 可见, 超调量发生在  $t = 1.78$  秒时, 于是, 由图可查得  $\sigma_0(t_m, \alpha_0) = -1.6 \times 10^{-3}$ ,

$$\sigma_1(t_m, \alpha_0) = -2.2 \times 10^{-3}, \quad \sigma_2(t_m, \alpha_0) = -0.75 \times 10^{-3}.$$

为了比较参数  $\alpha$  中各分量  $a_0, a_1, a_2$  对超调量的影响, 以取半相对灵敏度函数进行计算为宜。于是

$$\sigma_0(t_m, \alpha_0) = \frac{\partial y}{\partial a_0} = \frac{\partial y}{\partial a_0} a_{00} = \sigma_0(t_m, \alpha_0) a_{00}$$

$$= -1.6 \times 10^{-3} \times 20 = -32 \times 10^{-3}$$

$$\sigma_1(t_m, \alpha_0) \triangleq \frac{\partial y}{\partial a_1} = \frac{\partial y}{\partial a_1} a_{10} = -2.4 \times 10^{-3} \times 15$$

$$= -36 \times 10^{-3}$$

$$\sigma_2(t_m, \alpha_0) \triangleq \frac{\partial y}{\partial a_2} = \frac{\partial y}{\partial a_2} a_{20} = -0.75 \times 10^{-3} \times 5$$

$$= -3.75 \times 10^{-3}$$

由此可见,  $a_0, a_1, a_2$  这三个分量中, 以  $a_1$  的变化对超调量影响最大。当然, 超调量对分量  $a_0$  的变化也是相当敏感的。

### (三) $L_2$ 范数

在一段时间里, 系统参数的变化对系统有关量的影响总的讲有多大? 由于各种灵敏度函数都是时间的函数, 所以解决上述问题是不难的。通常, 解决这种大范围的参数灵敏度问题的办法是应用类似系统性能二次型指标函数的  $L_2$  范数。

**定义 4-5**  $L_2$  范数 二次型定积分

$$I_M \triangleq \int_{t_0}^{t_1} e^T(t) Z e(t) dt \quad (4-40)$$

式中  $Z$ ——对称的正定加权阵;

$t_0$ ——初始时刻;

$t_1$ ——终了时刻;  $t_1 > t_0$ ;

$e(t)$ ——向量。

称为  $L_2$  范数。

在应用  $L_2$  范数作为灵敏度尺度解决灵敏度问题时, 向量  $e(t)$  的取法如下:

(1) 在研究定常参数的影响时, 取  $e(t)$  为相对于参数  $a_j$  的各种输出灵敏度函数  $\sigma_j$ ,

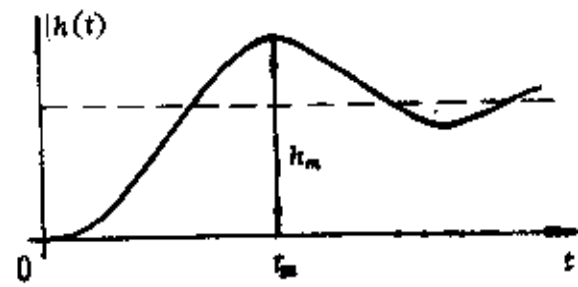


图 4-5

$\sigma_j$ ,  $\sigma_j$  或各种轨迹灵敏度函数  $\lambda_j$ ,  $\bar{\lambda}_j$ ,  $\tilde{\lambda}_j$  函数。

(2) 在时变或大范围变化的参数情况下, 取参数诱发的输出误差  $\Delta y$  或状态向量误差  $\Delta x$  为  $e(t)$ 。

作为灵敏度尺度,  $L_2$  范数常用于开、闭环系统的灵敏度比较。

基于上述, 对单变量单参数系统, 有人使用以下的系统误差积分

$$I_M \triangleq \int_0^{\infty} \Delta y^2(t, \alpha) dt \quad (4-41)$$

作为  $L_2$  范数。

应用联系时域与频域关系的巴塞伐定理 (Parseval's theorem) 可得

$$\int_0^{\infty} \Delta y^2(t, \alpha) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta Y(j\omega, \alpha)|^2 d\omega$$

若  $\Delta\alpha \ll \alpha_0$ , 则  $\Delta y$  的拉氏变式  $\Delta Y$  可表达为

$$\begin{aligned} \Delta Y(j\omega, \alpha) &= Y(j\omega, \alpha) - Y(j\omega, \alpha_0) \\ &= [G(j\omega, \alpha) - G(j\omega, \alpha_0)]U(s) \\ &= \Delta G(j\omega, \alpha)U(s) \end{aligned}$$

式中  $G(s)$ ——系统的传递函数;

$U(s)$ ——输入信号的拉氏变式。

另外

$$\begin{aligned} \Delta G &= \left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \Delta\alpha = \left. \frac{\partial \ln G}{\partial \ln \alpha} \right|_{\alpha_0} \frac{G_0}{\alpha_0} \Delta\alpha \\ &= S_{\alpha}^G G_0 \frac{\Delta\alpha}{\alpha_0} \end{aligned}$$

式中  $S_{\alpha}^G$ ——频域中的伯德灵敏度函数 (详见后述频域中的灵敏度函数部分);

$G_0$ ——参数为额定值时的传递函数, 即  $G_0 = G(j\omega, \alpha_0)$ 。

将这些关系代入前面的  $I_M$  表达式中, 可得

$$\begin{aligned} I_M &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| S_{\alpha}^G G_0 \frac{\Delta\alpha}{\alpha_0} U(j\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{\alpha}^G G_0 U(j\omega)|^2 d\omega \right] \left( \frac{\Delta\alpha}{\alpha_0} \right)^2 \end{aligned}$$

如果定义

$$I_R \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{\alpha}^G G_0 U(j\omega)|^2 d\omega \quad (4-42)$$

则得

$$I_M = I_R \left( \frac{\Delta\alpha}{\alpha_0} \right)^2 \quad (4-43)$$

式中  $I_R$ ——加权系数。

显然, 可用  $I_R$  来比较单变量系统中各参数变化对系统的影响。

**例 4-7** 设某系统的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2 &= -(a_1 + a_2)x_2 - a_1 a_2 x + u, & x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

设  $u(t) = \delta(t)$ ,  $a_{10} = 2$ ,  $a_{20} = 1$ , 试求该系统的灵敏度尺度  $L_2$  范数

$$I_M = \int_0^{\infty} \lambda_1^T(t, \alpha_0) Z \lambda_1(t, \alpha_0) dt$$

式中  $\lambda_i$  ——系统对参数  $\alpha = [a_1 \ a_2]$  中的元素  $a_1$  的轨迹灵敏度函数，

$Z$  ——加权阵，取  $Z = I$ ，即单位阵。

解 解题给状态方程，可得

$$x_1(t, \alpha) = \frac{1}{a_2 - a_1} (e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t})$$

$$x_2(t, \alpha) = \frac{1}{a_1 - a_2} (a_1 e^{-a_1 t} - a_2 e^{-a_2 t})$$

将  $x_1$ 、 $x_2$  对  $a_1$  取偏导数，并代入  $a_{10}$  及  $a_{20}$  的值，可得轨迹灵敏度函数为

$$\lambda_i(t, \alpha_0) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}(t, \alpha_0) \\ \lambda_{21}(t, \alpha_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-2t} - e^{-t} \\ -(1+2t)e^{-2t} + e^{-t} \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} I_M &= \int_0^{\infty} \lambda_i^T(t, \alpha_0) I \lambda_i(t, \alpha_0) dt \\ &= \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^{\infty} [\lambda_{11}^2(t, \alpha_0) + \lambda_{21}^2(t, \alpha_0)] dt \end{aligned}$$

最后可求得

$$I_M = 0.21$$

#### (四) 特征值和特征向量的灵敏度

特征值和特征向量的灵敏度是另一种时域灵敏度尺度。以下的讨论假设读者对特征值问题有些基本的了解。不具备这些知识的读者请参看本书第六章第四节。

设系统的动态方程为

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(\alpha)x(t, \alpha) + B(\alpha)u(t)$$

$$y(t, \alpha) = C(\alpha)x(t, \alpha) + D(\alpha)u(t)$$

于是系统的特征值由以下特征方程确定：

$$\det(\lambda I - A(\alpha)) = 0,$$

##### 1. 特征值灵敏度

**定义 4-6** 特征值灵敏度 设系统阵  $A = A(\alpha)$  是  $r \times 1$  维的参数向量  $\alpha$  的函数， $\lambda_i = \lambda_i(\alpha)$  表示  $A$  阵的第  $i$  个特征值。若  $\lambda_i$  为实数，则特征值对参数  $\alpha_j$  的绝对、相对和半相对灵敏度分别定义为

$$S_{\alpha_j}^{\lambda_i} \triangleq \left. \frac{\partial \lambda_i}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \quad (4-44)$$

$$\bar{S}_{\alpha_j}^{\lambda_i} = \left. \frac{\partial \ln \lambda_i}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{\partial \lambda_i}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \frac{\alpha_{j0}}{\lambda_{i0}} \quad (4-45)$$

$$\tilde{S}_{\alpha_j}^{\lambda_i} = \left. \frac{\partial \lambda_i}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \frac{\alpha_{j0}}{\lambda_{i0}} = \left. \frac{\partial \lambda_i}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \alpha_{j0} \quad (4-46)$$

若  $\lambda_i$  为复数，即  $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ ，则

$$\bar{S}_{\alpha_j}^{\lambda_i} = \left( \frac{\partial \ln \sigma_i}{\partial \ln \alpha_j} \right)_{\alpha_0} \pm j \left( \frac{\partial \ln \omega_i}{\partial \ln \alpha_j} \right)_{\alpha_0} \quad (4-47)$$

## 2. 特征向量灵敏度

**定义 4-7** 特征向量灵敏度 设  $\mathbf{v}_i$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 是  $A = A(\boldsymbol{\alpha})$  的特征向量, 则  $\left. \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \alpha_j} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0}$

为  $A$  的第  $i$  个特征向量对参数  $\alpha_j$  的特征向量灵敏度。

**例 4-8** 求系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

的半相对特征值灵敏度及特征向量灵敏度。其中, 参数向量为  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T$ , 它的额定值为  $\boldsymbol{\alpha}_0 = [\alpha_{10} \ \alpha_{20}]^T = [3 \ 4]^T$ 。

**解** 设系统的特征方程为

$$|\lambda I - A| = 0$$

即 
$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \alpha_1 & \lambda + \alpha_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_1 = 0$$

故特征值为

$$\lambda_1(A) = -\frac{\alpha_2}{2} + \left[ \frac{\alpha_2^2}{4} - \alpha_1 \right]^{1/2}$$

$$\lambda_2(A) = -\frac{\alpha_2}{2} - \left[ \frac{\alpha_2^2}{4} - \alpha_1 \right]^{1/2}$$

代入  $\boldsymbol{\alpha}_0 = [\alpha_{10} \ \alpha_{20}]^T$  的值, 得特征值的额定值为

$$\lambda_{10} = -1, \quad \lambda_{20} = -3$$

$\lambda_1, \lambda_2$  对  $\alpha_1, \alpha_2$  的半相对灵敏度分别为

$$S_{\alpha_1}^{\lambda_1} = \left. \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha_1} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0} \alpha_{10} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha_{20}^2}{4} - \alpha_{10} \right]^{-1/2} \alpha_{10} = -3/2$$

$$S_{\alpha_2}^{\lambda_1} = \left. \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha_2} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0} \alpha_{20} = -\frac{\alpha_{20}}{2} + \frac{\alpha_{20}^2}{4} \left[ \frac{\alpha_{20}^2}{4} - \alpha_{10} \right]^{-1/2} = 2$$

$$S_{\alpha_1}^{\lambda_2} = -S_{\alpha_1}^{\lambda_1} = 3/2$$

$$S_{\alpha_2}^{\lambda_2} = -\frac{\alpha_{20}}{2} - \frac{\alpha_{20}^2}{4} \left( \frac{\alpha_{20}^2}{4} - \alpha_{10} \right)^{-1/2} = -6$$

该系统的特征向量可求之如下

$$[\lambda_i I - A] \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & -1 \\ \alpha_1 & \lambda_i + \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{bmatrix} = 0$$

故可求得

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

特征向量灵敏度分别为

$$\left. \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \alpha_1} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ S_{\alpha_1}^{\lambda_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ S_{\alpha_1}^{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} \right|_{\alpha_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ S_{\alpha_2}^{\lambda_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} \right|_{\alpha_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ S_{\alpha_2}^{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

## 第二节 频域中的灵敏度函数

### 一、问题的提出

由上节的分析可见，各种时域的灵敏度函数是参数  $\alpha$ 、时间  $t$ 、与输入信号  $u(t)$  的函数；而在灵敏度尺度中，虽然去除了时间变量，却仍然是输入信号  $u(t)$  的函数。因此，为了比较各种系统对参数变化的灵敏度，必须事先规定统一的输入信号，而且，用不同的统一输入信号分析时，所得的公式与图形也往往极不一致，所以，时域灵敏度分析法有它不便之处。

不难想像，如果能用仅与系统的结构有关而与输入信号无关的量来表征系统对参数变化的灵敏度，将会使系统的性能比较与设计工作更加统一且直观与方便。本节要讨论的频域中的灵敏度函数，就是这样的一种系统灵敏度表示法。

本节将研究各种常用的频域灵敏度函数，不用频域量表征的频域灵敏度尺度，以及它们的相互关系。

### 二、伯德灵敏度函数(Bode Sensitivity Function)

#### (一) 伯德灵敏度函数的定义

我们先来研究图 4-6 所示的单变量系统，图中， $G(s, \alpha)$  表示不仅取决于  $s$ ，还同时取决于参数向量  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$  的系统传递函数。

**定义 4-8** 伯德灵敏度函数 设  $G = G(s, \alpha)$  及  $G_0 = G(s, \alpha_0)$  分别是系统的实际及额定的传递函数，其中， $\alpha$  及  $\alpha_0$  则分别为实际的及额定的参数向量，则伯德灵敏度函数  $S_{\alpha_j}^G(s)$  定义为

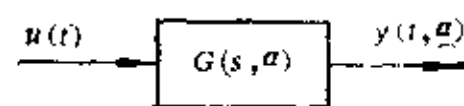


图 4-6

$$S_{\alpha_j}^G(s) \triangleq \left. \frac{\partial \ln G}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{\partial G/G}{\partial \alpha_j / \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{\partial G}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \frac{\alpha_{j0}}{G_0} \quad (4-48)$$

注意，由上述定义可见，伯德灵敏度函数实为相对灵敏度函数，理该写为  $\delta_{\alpha_j}^G$ ，但习惯上总写成  $S_{\alpha_j}^G$ 。

例 4-9 设有图 4-7 所示的闭环控制系统, 图中, 被控对象  $G_1(s, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha_1 s}$ , 参数  $\alpha = \alpha_1$ ,

试求伯德灵敏度函数  $S_{\alpha}^{G_1}$ 。

解 由定义

$$\begin{aligned} S_{\alpha}^{G_1} &= \left. \frac{\partial G_1}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_0} \frac{\alpha_{10}}{G_{10}} = - \left. \frac{s}{(1 + \alpha_1 s)^2} \right|_{\alpha_0} \frac{\alpha_{10}}{\frac{1}{1 + \alpha_{10} s}} \\ &= - \frac{s}{(1 + \alpha_{10} s)^2} \alpha_{10} (1 + \alpha_{10} s) \\ &= - \frac{\alpha_{10} s}{1 + \alpha_{10} s} \end{aligned}$$

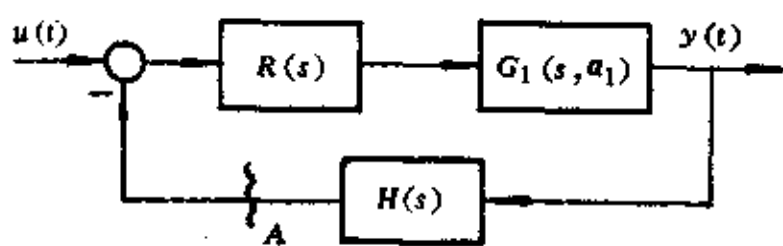


图 4-7

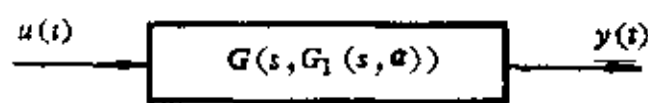


图 4-8

## (二) 伯德灵敏度函数概念的推广

如果已知系统各元部件的传递函数, 则用结构图把它们联成系统后, 可认为这些元部件是构成系统的子系统。因为系统参数变化会导致这些子系统传递函数的相应变化, 所以从结构图看, 这些子系统的传递函数本身成了可变参数。正因此, 灵敏度理论中常称这种子系统为系统的变元。

如果我们对某变元  $G_1$  中的某参数向量  $\alpha$  的影响感兴趣, 可把它用图 4-8 来描述。

由图 4-8 可见, 系统的传递函数  $G$  是一个复合函数  $G[s, G_1(s, \alpha)]$ 。因此, 也可把  $G$  看成是变元  $G_1$  的函数。这样, 就使我们有可能研究不同的变元, 以及同一变元处于系统方块图中不同位置时对系统传递函数的影响。于是可把伯德灵敏度函数进行推广, 得系统对变元的伯德灵敏度函数, 即

$$S_{G_1}^G(s) \triangleq \left. \frac{\partial \ln G}{\partial \ln G_1} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{\partial G/G}{\partial G_1/G} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{\partial G}{\partial G_1} \right|_{\alpha_0} \frac{G_{10}}{G_0} \quad (4-49)$$

例 4-10 试求图 4-7 所示系统的  $S_{\alpha}^{G_1}(s)$ 。

解

$$\begin{aligned} S_{\alpha}^{G_1} &\triangleq \left. \frac{\partial G}{\partial G_1} \right|_{\alpha_0} \frac{G_{10}}{G_0} \\ &= \left. \frac{R(1 + RG_1 H) - RG_1 R H}{(1 + RG_1 H)^2} \right|_{\alpha_0} \frac{G_1}{\frac{RG_1}{1 + RG_1 H}} \bigg|_{\alpha_0} \\ &= \left. \frac{R}{(1 + RG_1 H)^2} \right|_{\alpha_0} \frac{G_1 (1 + RG_1 H)}{RG_1} \bigg|_{\alpha_0} \\ &= \left. \frac{1}{1 + RG_1 H} \right|_{\alpha_0} = \frac{1}{1 + RG_{10} H} \end{aligned}$$

(三) 伯德灵敏度函数与时域输出灵敏度函数的关系  
参看图 4-6, 有

$$Y(s, \alpha) = G(s, \alpha)U(s)$$

对  $\alpha$  的分量  $\alpha_j$  求导之, 得

$$\frac{\partial Y(s, \alpha)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial [G(s, \alpha)U(s)]}{\partial \alpha_j}$$

假设求偏导与进行拉氏变换的过程可以互换, 便有

$$\frac{\partial [L[y(t, \alpha)]]}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} = L \left[ \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} \right] \triangleq L[\sigma_j(t, \alpha_0, u)]$$

考虑前式, 并记

$$\Sigma_j(s, \alpha_0, u) = L[\sigma_j(t, \alpha_0, u)] \quad (4-50)$$

可得

$$\begin{aligned} \Sigma_j(s, \alpha_0, u) &= \left[ \frac{\partial G(s, \alpha)}{\partial \alpha_j} U(s) \right]_{\alpha_0} \\ &= \left[ \frac{\partial G(s, \alpha)}{\partial \alpha_j} \frac{\alpha_j}{G(s, \alpha)} \frac{G(s, \alpha)}{\alpha_j} U(s) \right]_{\alpha_0} \\ &= S_{\alpha_j}^G(s) \frac{G(s, \alpha_0)}{\alpha_{j_0}} U(s) \end{aligned} \quad (4-51)$$

由此, 可由伯德灵敏度函数求得系统的输出灵敏度函数

$$\sigma(t, u, \alpha_0) = L^{-1}[\Sigma(s, \alpha_0, u)] \quad (4-52)$$

(四) 伯德灵敏度函数的运算性质

以纯量参数  $\alpha$  为例, 伯德灵敏度函数具有以下运算性质:

1. 乘法及除法律 设有  $\xi_1 = \xi_1(\alpha)$ ,  $\xi_2 = \xi_2(\alpha)$ , 则

$$\begin{aligned} S_{\xi_1 \xi_2}^{\xi_1 \xi_2} &\triangleq \frac{\partial (\ln \xi_1 \xi_2)}{\partial \ln \alpha} = \frac{\partial}{\partial \ln \alpha} (\ln \xi_1 + \ln \xi_2) \\ &= \frac{\partial \ln \xi_1}{\partial \ln \alpha} + \frac{\partial \ln \xi_2}{\partial \ln \alpha} \\ &= S_{\xi_1}^{\xi_1} + S_{\xi_2}^{\xi_2} \end{aligned} \quad (4-53)$$

$$\begin{aligned} S_{\xi_1 / \xi_2}^{\xi_1 / \xi_2} &\triangleq \frac{\partial (\ln \xi_1 / \xi_2)}{\partial \ln \alpha} = \frac{\partial (\ln \xi_1 - \ln \xi_2)}{\partial \ln \alpha} \\ &= S_{\xi_1}^{\xi_1} - S_{\xi_2}^{\xi_2} \end{aligned} \quad (4-54)$$

2. 复合律 设有  $\xi = \xi(\beta)$ ,  $\beta = \beta(\alpha)$ , 则

$$\begin{aligned} S_{\xi}^{\xi} &\triangleq \frac{\partial \ln \xi}{\partial \ln \alpha} = \frac{\partial \ln \xi}{\partial \ln \beta} \frac{\partial \ln \beta}{\partial \ln \alpha} \\ &= S_{\xi}^{\beta} S_{\beta}^{\alpha} \end{aligned} \quad (4-55)$$

(五) 伯德灵敏度函数与参数诱发误差的关系

由式(4-51), 考虑式(4-55), 可推知

$$\begin{aligned} \Sigma_j(s, \alpha_0, u) &= S_{\alpha_j}^G(s) \frac{G(s, \alpha_0)}{\alpha_{j_0}} U(s) \\ &= S_{\alpha_1}^G S_{\alpha_j}^{\alpha_1} \frac{G(s, \alpha_0)}{\alpha_{j_0}} U(s) \end{aligned}$$

$$= S_{\alpha_1}^{\alpha} S_{\alpha_1}^{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_{j_0}} Y(s, \alpha_0)$$

另一方面

$$\begin{aligned} \Sigma_j(s, \alpha_0, u) &\triangleq L[\sigma_j(t, \alpha_0, u)] \\ &= L\left[\frac{\partial y}{\partial \alpha_j}(t, \alpha_0, u)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \{L[y(t, \alpha_0, u)]\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [Y(s, \alpha_0)] \end{aligned}$$

比较上两式, 得

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} [Y(s, \alpha_0)] = S_{\alpha_1}^{\alpha} S_{\alpha_1}^{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_{j_0}} Y(s, \alpha_0)$$

也即

$$\Delta Y_j(s, \alpha) = S_{\alpha_1}^{\alpha} S_{\alpha_1}^{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_{j_0}} Y(s, \alpha_0) \Delta \alpha_j \quad (4-56)$$

于是

$$Y_j(s, \alpha) = Y(s, \alpha_0) + S_{\alpha_1}^{\alpha} S_{\alpha_1}^{\alpha_1} Y(s, \alpha_0) \frac{\Delta \alpha_j}{\alpha_{j_0}} \quad (4-57)$$

因为  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$ , 故参数向量诱发的总误差为

$$\Delta Y(s, \alpha) = \sum_{j=1}^r S_{\alpha_j}^{\alpha} S_{\alpha_j}^{\alpha_j} Y(s, \alpha_0) \frac{\Delta \alpha_j}{\alpha_{j_0}} \quad (4-58)$$

或者, 改写之, 得相对误差形式如下

$$\frac{\Delta Y(s, \alpha)}{Y(s, \alpha_0)} = S_{\alpha_j}^{\alpha} \sum_{j=1}^r S_{\alpha_j}^{\alpha_j} \frac{\Delta \alpha_j}{\alpha_{j_0}} \quad (4-59)$$

如果系统的结构已知, 它的变元  $G_i$  便也相应确定。因此, 上式中的  $S_{\alpha_j}^{\alpha}$ , ( $j=1, 2, \dots, r$ ) 也就确定了。然而, 上式中的  $S_{\alpha_j}^{\alpha_j}$  却是可变的, 它取决于变元在系统中的位置。正是由于这个缘故, 式(4-59)就成了利用伯德灵敏度函数进行低参数灵敏度系统频域设计的基本关系式。

**例 4-11** 例 4-9 中, 若把系统在图 4-7 中的  $A$  处断开, 试求  $S_{G_1}^{\alpha}$ 。

**解** 若将系统在图 4-7 中的  $A$  处断开, 闭环系统成了开环系统, 此时,  $G = RG_1$ 。于是

$$\begin{aligned} S_{G_1}^{\alpha} &\triangleq \frac{\partial G}{\partial G_1} \bigg|_{\alpha_{1,0}} \frac{G_1}{G} \bigg|_{\alpha_{1,0}} = \frac{\partial (RG_1)}{\partial G_1} \bigg|_{\alpha_{1,0}} \frac{G_1}{RG_1} \bigg|_{\alpha_{1,0}} = R \frac{G_{10}}{RG_{10}} = 1 \\ &= R \frac{G_{10}}{RG_{10}} = 1 \end{aligned}$$

由此例可见, 如果变化变元  $G_1$  在系统中所处的位置, 便可在很大的范围内变化  $S_{G_1}^{\alpha}$ , 因而, 系统对参数的灵敏度也可相应地在很大的范围内进行调整, 这就是设计低参数灵敏度系统的基本原理。

**例 4-12** 设有图 4-9 所示的两个系统, 额定参数  $K_{10} = K_{20} = 100$ , 试证它们是额定等效的系统, 也即, 在额定参数时, 两者有相同的传递函数, 并求两者对  $K_2$  变化的伯德灵敏度。



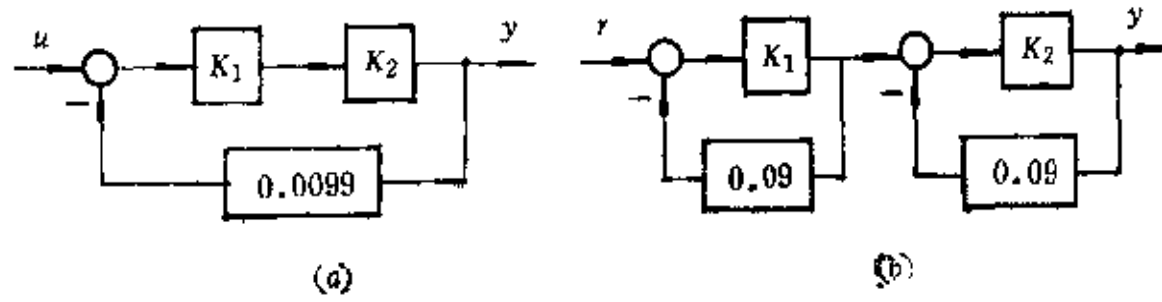


图 4-9

解 由于两个系统的额定传递函数分别为

$$G_a = \frac{K_{10}K_{20}}{1 + 0.0099K_{10}K_{20}} = \frac{100 \times 100}{1 + 0.0099 \times 100 \times 100} = 100$$

$$\begin{aligned} G_b &= \frac{K_{10}}{1 + 0.09K_{10}} \times \frac{K_{20}}{1 + 0.09K_{20}} \\ &= \frac{100}{1 + 0.09 \times 100} \times \frac{100}{1 + 0.09 \times 100} \\ &= 10 \times 10 = 100 \end{aligned}$$

故两者是额定等效的。

若  $K_2$  为可变参数, 则

$$\begin{aligned} S_{K_2}^{G_a} &= \frac{\partial}{\partial K_2} \left( \frac{K_1 K_2}{1 + 0.0099 K_1 K_2} \right) \bigg|_{K_{20}} \frac{K_2}{G_a} \bigg|_{K_{20}} \\ &= \frac{K_1 (1 + 0.0099 K_1 K_2) - K_1 K_2 (0.0099 K_1)}{(1 + 0.0099 K_1 K_2)^2} \bigg|_{K_{20}} \frac{K_2}{\frac{K_1 K_2}{1 + 0.0099 K_1 K_2}} \bigg|_{K_{20}} \\ &= \frac{1}{1 + 0.0099 K_1 K_2} \bigg|_{K_{20}} = 0.01 \end{aligned}$$

$$S_{K_2}^{G_b} = \frac{1}{1 + 0.09 K_2} \bigg|_{K_{20}} = \frac{1}{1 + 0.09 \times 100} = \frac{1}{10} = 0.1$$

如果  $K_2$  变化 10%, 则由于

$$S_{K_2}^{G_a} \triangleq \frac{dG_a/G_a}{dK_2/K_2} \bigg|_{K_{20}} = \frac{dG_a/G_a}{0.1} \bigg|_{K_{20}} = 0.01$$

故  $(dG_a/G_a)_0 = 0.01 \times 0.1 = 0.001 = 0.1\%$

同理, 可求得

$$S_{K_2}^{G_b} \triangleq \left( \frac{dG_b/G_b}{dK_2/K_2} \right)_{K_{20}} = \left( \frac{dG_b/G_b}{0.1} \right)_{K_{20}} = 0.1$$

故  $\frac{dG_b}{G_b} \bigg|_0 = 0.1 \times 0.1 = 0.01 = 1\%$

基于以上计算可见, 从低灵敏度的观点看, 系统 a 比较合理。

本例也可看成用改变变元在系统中位置的办法来改变系统参数灵敏度的例子。

(六) 伯德灵敏度的频率特性

以纯量  $\alpha$  来看, 由伯德灵敏度的定义

$$S_{\alpha}^G \triangleq \left. \frac{dG(s, \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} \frac{\alpha_0}{G_0} = S_{\alpha}^G(s)$$

可见，它是复量  $s$  与  $\alpha$  的函数。若取  $s = j\omega$ ，便能求得伯德灵敏度的频率特性。

1. 常用的  $S_{\alpha}^G(s, \alpha)$  的频率特性表达式如下：

(1) 频率特性的第一种表达式是幅度与相位表达式，也即

$$S_{\alpha}^G(s) \Big|_{s=j\omega} \triangleq S_{\alpha}^G(j\omega) = |S_{\alpha}^G| e^{j\Delta\varphi_{S_{\alpha}^G}} \quad (4-60)$$

(2)  $S_{\alpha}^G$  频率特性的第二种表达式是虚、实部表达式，也即

$$S_{\alpha}^G(j\omega) = \text{Re}(S_{\alpha}^G(j\omega)) + jI_m(S_{\alpha}^G(j\omega)) \quad (4-61)$$

(3)  $S_{\alpha}^G$  频率特性的第三种表达式是用  $G$  的模值与相角来表达，也即，设  $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$ ，则有

$$\begin{aligned} S_{\alpha}^G(j\omega) &= S_{\alpha}^{|G|} e^{j\varphi(\omega)}(j\omega) = S_{\alpha}^{|G|} + S_{\alpha}^{j\varphi(\omega)} \\ &= S_{\alpha}^{|G|}(\omega) + S_{\alpha}^{j\varphi} S_{\alpha}^{\varphi} \\ &= S_{\alpha}^{|G|}(\omega) + j\varphi_0(\omega) S_{\alpha}^{\varphi}(\omega) \end{aligned} \quad (4-62)$$

因而

$$\text{Re}(S_{\alpha}^G(j\omega)) = S_{\alpha}^{|G|}(\omega)$$

$$I_m(S_{\alpha}^G(j\omega)) = \varphi_0(\omega) S_{\alpha}^{\varphi}(\omega)$$

(4)  $S_{\alpha}^G$  频率特性的第四种表达式是用  $S_{\alpha}^G$  的欧氏范数来表达其幅值，而不考虑它的相角。也即，基于

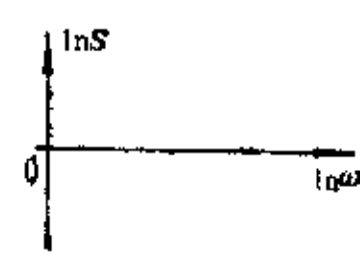
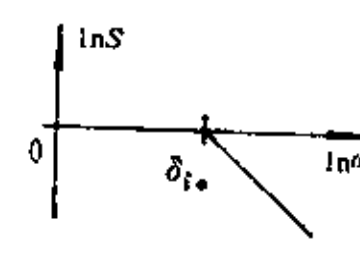
$$S_{\alpha}^G(-j\omega) = \overline{S_{\alpha}^G(j\omega)}$$

有  $|S_{\alpha}^G(j\omega)| = [S_{\alpha}^G(j\omega) S_{\alpha}^G(-j\omega)]^{1/2}, 0 \leq \omega < \infty \quad (4-63)$

应当指出，仅用幅值来表达  $S_{\alpha}^G$  频率特性的做法是有不足之处的，因为它不考虑  $S_{\alpha}^G$  的相角情况。然而，由于  $|S_{\alpha}^G(j\omega)|$  大时，参数  $\alpha$  对  $G$  的影响也必然大这个事实，这种表达法却使灵敏度函数的意义十分明确。正因此，仅用  $S_{\alpha}^G$  的幅值表达的频率特性用得十分广泛。

2. 各种典型环节的伯德灵敏度函数的幅频特性  $|S_{\alpha}^G(j\omega)|$  示于表 4-1 中。

表 4-1 某些典型系统传递函数的伯德灵敏度函数及其幅频特性  $|S_{\alpha}^G(j\omega)|$

参数 $\alpha$	传递函数	灵敏度函数	$\ln S_{\alpha}^G(j\omega)  = \ln S$
放大系数 $K$	$G = K$ $G = K(1+Ts)^{\pm 1}$	$S_{\alpha}^G = 1$ $S_{\alpha}^G = 1$	
实零点与实极点 $\delta_i$	$G = K(s - \delta_i)^{\pm 1}$	$S_{\delta_i}^G = \mp \frac{\delta_{i0}}{s - \delta_{i0}}$	

续表 4-1

参数 $\alpha$	传递函数	灵敏度函数	$\ln S_{\alpha}^c(j\omega)  = \ln S$
共轭极点的阻尼率 $D$	$G = \frac{K\omega_k^2}{s^2 + 2D\omega_k s + \omega_k^2}$	$S_b^c = -\frac{2D\omega_k s}{s^2 + 2D\omega_k s + \omega_k^2}$	
一阶时间常数 $T_i$	$G = K(1 + T_i s)^{-1}$	$S_{T_i}^c = \pm \frac{T_{i0} s}{1 + T_{i0} s}$	
时滞 $T_d$	$G = K e^{-T_d s}$	$S_{T_d}^c = -T_{d0} s$	

由表 4-1 可见以下各点:

- (1) 在全频道范围  $0 \leq \omega \leq \infty$  内, 放大系数的变化对传递函数的变化有 100% 的影响。
- (2) 时滞环节 (又称“死时”环节) 的延时长短对系统的影响随频率的提高而增长。
- (3) 对系统传递函数影响最大的是放大系数与时滞环节的延时长短。在许多情况下, 仅需考虑它们的影响就足够了。

**例 4-13** 设有某系统的传递函数为  $G(s, T) = K e^{-Ts}$ , 参数  $K$  固定, 参数  $T$  变化。试求  $S_T^G(j\omega)$  及  $S_T^{\varphi}(j\omega)$  ( $\varphi$  为  $G$  的相角)。

解

$$\begin{aligned} S_T^G(j\omega) &\triangleq \frac{\partial}{\partial T} (K e^{-j\omega T}) \Big|_{T_0} \frac{T_0}{K e^{-j\omega T_0}} \\ &= -j\omega K e^{-j\omega T_0} \frac{T_0}{K e^{-j\omega T_0}} \\ &= -j\omega T_0 \end{aligned}$$

$$S_T^{\varphi}(j\omega) \triangleq \left[ \frac{\partial |G|}{\partial T} \frac{T}{|G|} \right]_{T_0} = \left[ \frac{\partial K}{\partial T} \frac{T}{|G|} \right]_{T_0} = 0$$

$$S_T^{\varphi}(j\omega) \triangleq \left[ \frac{\partial (-T\omega)}{\partial T} \frac{T}{(-T\omega)} \right]_{T_0} = \left[ -\omega \frac{T}{(-T\omega)} \right]_{T_0} = 1$$

(七) 常用的伯德灵敏度函数的计算公式

1. 如果系统的传递函数为

$$G(s, \alpha) = \frac{N(s, \alpha)}{D(s, \alpha)} \quad (4-64)$$

式中  $N(s, \alpha)$ —— $s, \alpha$  的实连续函数;

$D(s, \alpha)$ —— $s, \alpha$  的另一实连续函数。

则

$$S_{\alpha}^G \triangleq \left. \frac{\partial \ln \frac{N}{D}}{\partial \ln \alpha} \right|_{\alpha_0} = \frac{\partial [\ln N - \ln D]}{\partial \ln \alpha} \Big|_{\alpha_0} = S_{\alpha}^N - S_{\alpha}^D \quad (4-65)$$

例 4-14 设有某前馈系统如图 4-10 所示。若  $G(s, \alpha) \triangleq \frac{Y(s, \alpha)}{U(s)}$ , 求  $S_P^G$ 。

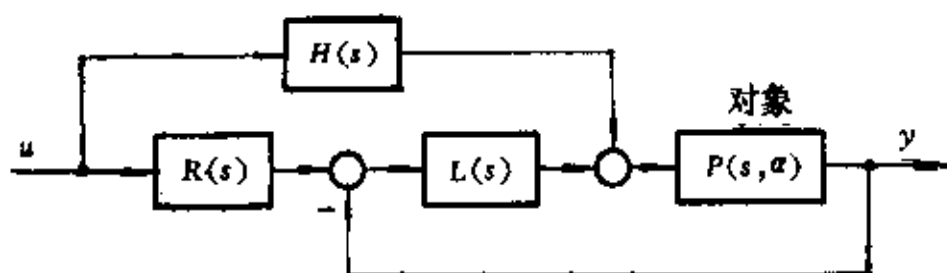


图 4-10

解 先求  $G(s, \alpha)$ 。由信号流图中的梅逊公式, 可得

$$G = \frac{RLP + HP}{1 + LP}$$

设  $G = N/D$ , 其中,  $N = RLP + HP$ ,  $D = 1 + LP$ , 按式(4-64), 便可求得  $S_P^G$ 。因

$$S_P^N \triangleq \left( \frac{\partial N}{\partial P} \frac{P}{N} \right)_{\alpha_0} = \left[ (RL + H) \frac{P}{RLP + HP} \right]_{\alpha_0} = 1$$

$$S_P^D \triangleq \left( \frac{\partial D}{\partial P} \frac{P}{D} \right)_{\alpha_0} = L \frac{P}{1 + LP} \Big|_{\alpha_0}$$

故由式(4-65), 有

$$S_P^G = S_P^N - S_P^D = 1 - \frac{LP_0}{1 + LP_0} = \frac{1}{1 + LP_0}$$

这是一个令人十分惊奇的结果, 因为  $S_P^G$  竟与  $R(s)$  及  $H(s)$  无关, 而仅与  $L$  有关。以上事实为本系统的设计、计算与调整提供了一个合理的方法: 用设计或调整  $R(s)$  及  $H(s)$  来保证对系统的一般性能要求, 而用设计或调整  $L(s)$  来保证对系统的灵敏度要求。常称这种可以对系统的一般性能要求与灵敏度要求分别设计计算与调整的方法为二自由度的设计方法。

2. 如果系统的传递函数为

$$G(s, \alpha) = \frac{G_1(s) + \alpha G_2(s)}{G_3(s) + \alpha G_4(s)} \quad (4-66)$$

可令  $N(s) = G_1(s) + \alpha G_2(s)$ ,  $D(s) = G_3(s) + \alpha G_4(s)$ , 应用式(4-65), 可得

$$\begin{aligned} S_{\alpha}^G &= S_{\alpha}^N - S_{\alpha}^D = \left( \frac{\partial N}{\partial \alpha} \frac{\alpha}{N} \right)_{\alpha_0} - \left( \frac{\partial D}{\partial \alpha} \frac{\alpha}{D} \right)_{\alpha_0} \\ &= G_2 \frac{\alpha_0}{G_1 + \alpha_0 G_2} - G_4 \frac{\alpha_0}{G_3 + \alpha_0 G_4} \\ &= \frac{\alpha_0 (G_2 G_3 - G_1 G_4)}{(G_1 + \alpha_0 G_2)(G_3 + \alpha_0 G_4)} \end{aligned} \quad (4-67)$$

例 4-15 试求图 4-11 所示系统的  $S_{a_1}^G$  与  $S_{a_2}^G$ 。

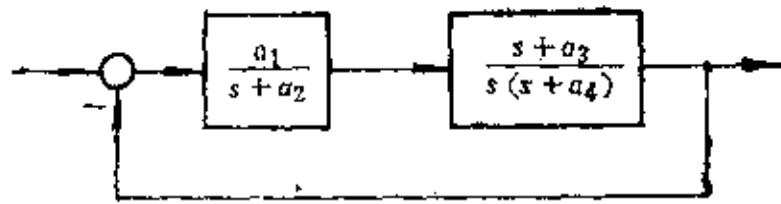


图 4-11

解 系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{\frac{a_1(s+a_3)}{s(s+a_2)(s+a_4)}}{1 + \frac{a_1(s+a_3)}{s(s+a_4)(s+a_2)}} = \frac{a_1s + a_1a_3}{s^3 + (a_2+a_4)s^2 + (a_1+a_2a_4)s + a_1a_3}$$

为求  $S_{a_1}^G$ ，把上式改写成式(4-66)的型式

$$G(s) = \frac{a_1(s+a_3)}{[s^3 + (a_2+a_4)s^2 + a_2a_4s] + a_1(s+a_3)}$$

应用式(4-67)，取  $G_1=0$ ， $G_2=s+a_3$ ， $G_3=s^3+(a_2+a_4)s^2+a_2a_4s$ ， $G_4=s+a_3$ ，可得

$$S_{a_1}^G = \frac{a_{10}[(s+a_{30})(s^3+(a_{20}+a_{40})s^2+a_{20}a_{40}s) - 0(s+a_{30})]}{[s^3+(a_{20}+a_{40})s^2+a_{20}a_{40}s + a_{10}(s+a_{30})]a_{10}(s+a_{30})} = \left[ 1 + \frac{a_{10}(s+a_{10})}{s^3+(a_{20}+a_{40})s^2+a_{20}a_{40}s} \right]^{-1}$$

同理，可求得  $S_{a_2}^G$  为

$$S_{a_2}^G = - \left[ 1 + \frac{s^3+a_{20}s^2+a_{10}s+a_{10}a_{30}}{a_{40}s(s+a_{20})} \right]^{-1}$$

### 三、霍洛维茨(I.M.Horowitz)灵敏度函数

#### (一)霍洛维茨灵敏度函数的定义

由伯德灵敏度函数的定义可见，它仅适用于参数在极小范围内变化的扰动情况。在参数大范围变化的情况下，使用美国著名学者霍洛维茨(Horowitz, I. M.)提出的霍洛维茨灵敏度函数进行系统灵敏度分析十分有效。

**定义 4-9** 霍洛维茨灵敏度函数 设  $G_0$  表示系统的额定传递函数， $a_0$  表示参数的额定值， $G$ 、 $a$  分别表示它们的实际值，即

$$G = G_0 + \Delta G, \quad a = a_0 + \Delta a$$

则霍洛维茨灵敏度函数定义为

$$H_a^G \triangleq \frac{\Delta G/G}{\Delta a/a} = \frac{(G-G_0)/G}{(a-a_0)/a} \quad (4-68)$$

显然，霍洛维茨灵敏度函数也可与伯德灵敏度函数一样，推广到把系统的变元  $G$  当作

参数来看待的情况。于是，有

$$H_{G_1}^G \triangleq \frac{\Delta G/G}{\Delta G_1/G_1} = \frac{(G - G_0)/G}{(G_1 - G_{10})/G_1} \quad (4-69)$$

注意，霍洛维茨灵敏度函数与伯德灵敏度函数的主要不同点在于它是相对于传递函数与参数的实际值而言的灵敏度函数。

由式(4-68)可知

$$\frac{\Delta G}{G} = H_{G_1}^G \frac{\Delta G_1}{G_1}$$

即

$$\frac{G - G_0}{G} = H_{G_1}^G \frac{\Delta G_1}{G_1}$$

于是

$$\frac{G_0}{G} = 1 - \frac{\Delta G_1}{G_1} H_{G_1}^G \quad (4-70)$$

同理，由式(4-69)，可推得类似的公式

$$\frac{G_0}{G_1} = 1 - \frac{\Delta G_1}{G_1} H_{G_1}^{G_1} \quad (4-71)$$

式(4-70)与(4-71)是两个常用的计算公式。

(二) 例题

例 4-16 试求图 4-7 所示系统的  $H_{G_1}^G$  及  $\frac{G_0}{G}$ 。

解 系统的传递函数为

$$G = \frac{G_1 R}{1 + G_1 R H}$$

$$G_0 = \frac{G_{10} R}{1 + G_{10} R H}$$

由定义

$$H_{G_1}^G \triangleq \frac{G - G_0}{G_1 - G_{10}} \frac{G_1}{G}$$

$$= \frac{G_1 - \frac{G_0 G_1}{G}}{G_1 - G_{10}}$$

$$= \frac{G_1 - \frac{1 + G_1 R H}{R} \frac{G_{10} R}{1 + G_{10} R H}}{G_1 - G_{10}}$$

$$= \frac{1}{1 + G_{10} R H}$$

由此可见，对图 4-7 所示的经典闭环控制系统而言，霍洛维茨灵敏度与伯德灵敏度是相等的。

由式(4-71)

$$\begin{aligned} \frac{G_0}{G} &= 1 - H_{G_1}^G \frac{\Delta G_1}{G_1} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + G_{10} R H} \frac{G_1 - G_{10}}{G_1} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{G_{10}}{G_1} + G_{10}RH}{1 + G_{10}RH} \quad (4-72)$$

为说明方便起见，定义

$$L_0 = G_{10}RH$$

为开环传递函数。于是

$$\frac{G_0}{G} = \frac{\frac{G_{10}}{G_1} + L_0}{1 + L_0}$$

### (三) 推论

1. 开环系统的霍洛维茨灵敏度函数等于 1。
2. 式(4-72)是一个很有实用价值的公式，它可用来设计低灵敏度的闭环控制系统。显然，如果对闭环系统规定了低灵敏度的设计要求  $G_0/G$ ，则可用设计额定的开环传递函数  $L_0 = G_{10}RH$  的办法，使在给定的  $G_{10}/G_1$  值的情况下，达到预定的低灵敏度设计要求  $G_0/G$ 。

## 四、比较灵敏度函数与比较灵敏度算子

### (一) 问题的提出

回顾前面讨论的伯德灵敏度函数与霍洛维茨灵敏度函数可见，它们只宜用于解决线性定常单变量系统的灵敏度问题，此外，它们也不便于进行诸如开环与闭环两种系统间的灵敏度比较。美国学者克鲁茨 (Cruz) 与伯金斯 (Perkins) 推广了伯德灵敏度函数的思想，提出了比较灵敏度算子概念，并发展了一整套相应的算法，用于解决线性单变量系统、线性多变量系统及非线性系统的灵敏度问题。以下进行有关的介绍。

### (二) 不同结构系统间的等效概念

设有某一被控对象，现拟采用开环或闭环这两种不同结构的控制方案对它进行控制。如果被控对象中的参数有变，如何比较这两种不同结构系统的参数灵敏度？为要解决这个问题，需要先确立上述开、闭环系统在参数为额定值时在某种意义下的等效，然后，再考虑参数实际值对两种系统的不同影响，进而计算参数灵敏度。

在额定参数时，两个结构不同的系统最直观的等效是两者的输入量与输出量完全一样。因此，引出了最严格，也是最朴素与直观的所谓额定等效的概念。

**定义 4-10 额定等效** 如果在额定参数时，两个不同的系统结构具有相同的输入量和输出量，则称两者为额定等效的系统。

应该指出，并不是在所有情况下都要求象上述额定等效那样严格的系统等效。不少情况下，可使用放松得多的等效条件。通常，为了在额定参数时比较两个不同结构的系统，只要求它们某些适当的额定响应特性相同，或在某个给定范围内一致就够了。因此，引出了在某个等效性能指标  $J_E[\mathbf{x}(t, \mathbf{a}_0)]$  意义下的性能等效概念。

**定义 4-11 性能等效** 对两个具有额定轨迹  $\mathbf{x}_R(t, \mathbf{a}_0)$  与  $\mathbf{x}_S(t, \mathbf{a}_0)$  的系统而言，如果在额定参数  $\mathbf{a}_0$  时，它们的等效性能指标  $J_E[\mathbf{x}_R(t, \mathbf{a}_0)]$  和  $J_E[\mathbf{x}_S(t, \mathbf{a}_0)]$  相等，则称两者是性能等效的。

一般情况下，常取  $L_2$  范数作为上述等效性能指标，也即

$$J_E = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}^T(t, \alpha_0) Z \mathbf{x}(t, \alpha_0) dt$$

有时，也取控制系统的积分误差判据（即所谓的  $ISE$  判据）为  $J_E$ 。

在本章以下的讨论中，一切都以额定等效为基础进行。

### （三）比较灵敏度函数

1. 比较灵敏度概念 设有图 4-12 所示的两个系统，一个是开环的，另一个是闭环的。图中， $P(s, \alpha)$  是受参数变化影响的被控对象； $F(s)$ 、 $R(s)$  及  $H(s)$  则是与参数  $\alpha$  无关的子系统传递函数。下标  $S$  与  $R$  分别表示开环与闭环系统中的情况。以下，以单变量系统为例，比较参数由额定值  $\alpha_0$  变为  $\alpha$  时这两个系统的参数灵敏度。我们基于额定等效的概念来讨论这个问题。

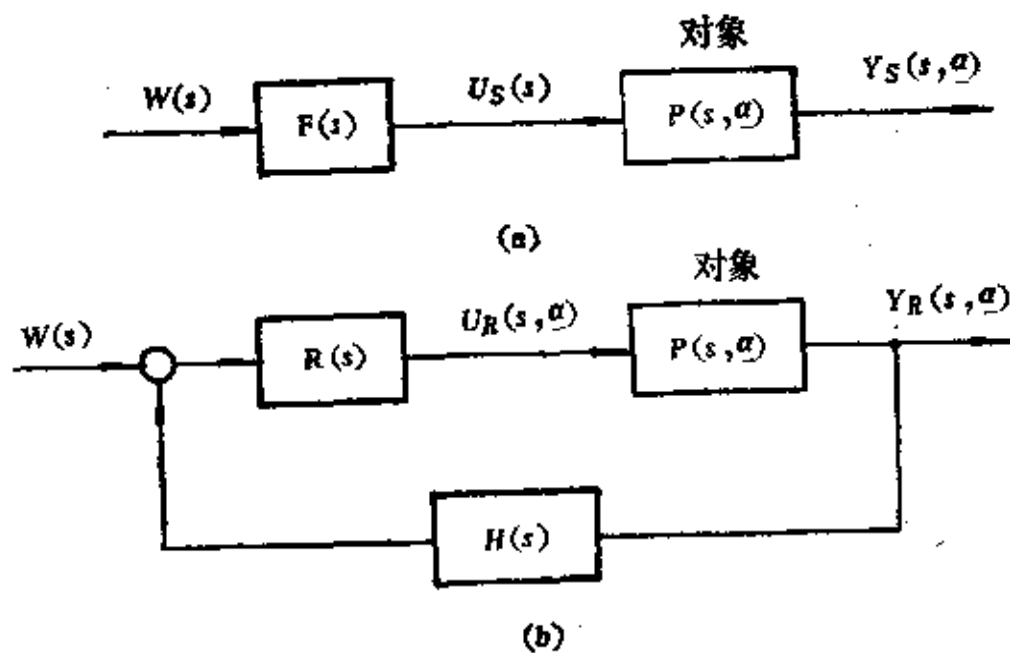


图 4-12

额定参数  $\alpha_0$  时的情况分析

设两个系统是额定等效的，也即， $\alpha = \alpha_0$  时，对两个系统而言，有关系式

$$Y_S(s, \alpha_0) = Y_R(s, \alpha_0)$$

$$U_S(s) = U_R(s, \alpha_0)$$

$$W_S(s) = W_R(s) = W$$

额定参数时，有闭环系统关系式

$$Y_R(s, \alpha_0) = \frac{P(s, \alpha_0)R}{1 + P(s, \alpha_0)RH} W$$

基于额定等效概念，开环系统输出应为

$$Y_S(s, \alpha_0) = P(s, \alpha_0)FW$$

比较以上两式，可求得开环系统的子系统  $F$  的传递函数为

$$F = \frac{R}{1 + HRP(s, \alpha_0)} \quad (4-73)$$

应该指出，在单变量系统的情况下，上述各子系统的传递函数  $H$ 、 $R$ 、 $P$  相乘的先后次序是无关紧要的；但在多变量系统的情况下，这些传递函数相乘的先后次序就不能随便写了。



实际参数  $\alpha$  时的情况分析

实际参数  $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$  时, 开环系统的输出为

$$\begin{aligned} Y_s &= Y_s(s, \alpha) = P(s, \alpha)F(s)W \\ &= \frac{P(s, \alpha)R}{1 + HRP(s, \alpha_0)}W \end{aligned} \quad (4-74)$$

而闭环系统的输出为

$$Y_R = Y_R(s, \alpha) = \frac{P(s, \alpha)R}{1 + HRP(s, \alpha)}W \quad (4-75)$$

开、闭环系统由于  $\alpha$  变化而诱发的输出量误差分别为

$$\begin{aligned} \Delta Y_s &\triangleq Y_s - Y_{s0} = \frac{P(s, \alpha)R}{1 + HRP(s, \alpha_0)}W - \frac{P(s, \alpha_0)R}{1 + HRP(s, \alpha_0)}W \\ &= \frac{[P(s, \alpha) - P(s, \alpha_0)]R}{1 + HRP(s, \alpha_0)}W \\ \Delta Y_R &\triangleq Y_R - Y_{R0} = \frac{P(s, \alpha)R}{1 + HRP(s, \alpha)}W - \frac{P(s, \alpha_0)R}{1 + HRP(s, \alpha_0)}W \\ &= \frac{P(s, \alpha)R[1 + HRP(s, \alpha_0)] - P(s, \alpha_0)R[1 + HRP(s, \alpha)]}{[1 + HRP(s, \alpha)][1 + HRP(s, \alpha_0)]}W \\ &= \frac{[P(s, \alpha) - P(s, \alpha_0)]R}{[1 + P(s, \alpha)RH][1 + P(s, \alpha_0)RH]}W \\ &= \frac{1}{1 + P(s, \alpha)RH} \Delta Y_s \end{aligned} \quad (4-76)$$

**定义 4-12** 比较敏灵敏度函数 复函数

$$S_P(s, \alpha) \triangleq \frac{\Delta Y_R(s, \alpha)}{\Delta Y_s(s, \alpha)} \quad (4-77)$$

表达了以下标  $R$  表示的系统的输出量  $\Delta Y_R(s, \alpha)$  和与之等效的且以下标  $S$  表示的系统输出量  $\Delta Y_s(s, \alpha)$  之间的关系, 称为比较灵敏度函数。

基于这个定义, 上面讨论的额定等效的开、闭环系统的比较灵敏度函数为

$$S_P(s, \alpha) = \frac{1}{1 + P(s, \alpha)R(s)H(s)} \quad (4-78)$$

注意, 上式中,  $P(s, \alpha)$  是对象的实际传递函数, 此外, 由于在推导过程中没有对参数的变化量大小进行任何限制, 所以, 比较灵敏度函数既适用于小参数摄动的情况, 也适用于参数大范围变化时的灵敏度分析。

2. 比较灵敏度函数与伯德灵敏度函数的关系 由公式(4-78)可见, 如果额定参数  $\alpha_0$  的变化极小, 也即, 如果  $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ , 而  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ , 则  $P(s, \alpha) = P(s, \alpha_0 + \Delta\alpha) \approx P(s, \alpha_0)$ 。在这种情况下, 参看例 4-10 的分析结果, 有

$$\begin{aligned} S_P(s, \alpha_0) &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} S_P(s, \alpha) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{1 + P(s, \alpha_0 + \Delta\alpha)RH} \\ &= \frac{1}{1 + P(s, \alpha_0)R(s)H(s)} \\ &= S_P^q(s) \end{aligned} \quad (4-79)$$

由此可见, 参数变化极小时, 比较灵敏度函数就是伯德灵敏度函数。换言之, 比较灵敏

度是伯德灵敏度函数的推广。

此外,若从纯量  $\alpha$  来看,将公式(4-76)的两边通除  $\Delta\alpha$ , 即

$$\frac{\Delta Y_R(s, \alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{1}{1 + P(s, \alpha)RH} \cdot \frac{\Delta Y_S(s, \alpha)}{\Delta\alpha}$$

将上式在  $\alpha = \alpha_0$  处取极限值, 便得

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial Y_R(s, \alpha)}{\partial\alpha} \right|_{\alpha_0} &= \frac{1}{1 + P(s, \alpha)RH} \left. \frac{\partial Y_S(s, \alpha)}{\partial\alpha} \right|_{\alpha_0} \\ &= S_P^G(s) \left. \frac{\partial Y_S(s, \alpha)}{\partial\alpha} \right|_{\alpha_0} \end{aligned}$$

也即

$$L[\sigma_R(t, \alpha_0, u)] = S_P^G(s) L[\sigma_S(t, \alpha_0, u)] \quad (4-80)$$

这个式子说明了伯德灵敏度函数的又一意义, 即, 伯德灵敏度函数表达了开、闭环系统输出灵敏度函数的拉氏变式间的关系。

3. 比较灵敏度函数与霍洛维茨灵敏度函数的关系 由公式(4-77)

$$\begin{aligned} S_P(s, \alpha) &= \frac{\Delta Y_R(s, \alpha)}{\Delta Y_S(s, \alpha)} \\ &= \frac{\Delta G_R(s, \alpha)W(s)}{\Delta G_S(s, \alpha)W(s)} \\ &= \frac{\Delta G_R P(s, \alpha)}{G_R [P(s, \alpha) - P(s, \alpha_0)]} \frac{[P(s, \alpha) - P(s, \alpha_0)] G_S}{\Delta G_S P(s, \alpha)} \frac{G_R}{G_S} \\ &= (H_P^G)_R \frac{1}{(H_P^G)_S} \frac{G_R}{G_S} \\ &= \frac{(H_P^G)_R}{(H_P^G)_S} \frac{G_R}{G_S} \end{aligned} \quad (4-81)$$

这就是比较灵敏度函数与霍洛维茨灵敏度函数间的关系式。

4. 多变量系统的比较灵敏度函数 现在我们来研究多变量系统的比较灵敏度函数。图 4-13 为两个额定等效的多变量开环与闭环系统。设在  $\alpha_0$  时, 两者的额定输出皆为  $Y_0$ 。分析的已知关系为

$$\Delta Y_S(s) \triangleq Y_0 - Y_S$$

$$\Delta Y_R(s) \triangleq Y_0 - Y_R$$

$$Y_S = P(s, \alpha) F_0(s) R$$

$$Y_R =$$

$$[I + P(s, \alpha)GH]^{-1} P(s, \alpha)GR$$

$$U_{R0} = U_{S0} = U_0$$

要求证明的关系式为

$$\Delta Y_R = [I + P(s, \alpha)GH]^{-1} \Delta Y_S \quad (4-82)$$

**证明** 由题给已知关系  $\Delta Y_S(s) = Y_0 - Y_S$ , 两边乘  $(I + PGH)^{-1}$ , 得

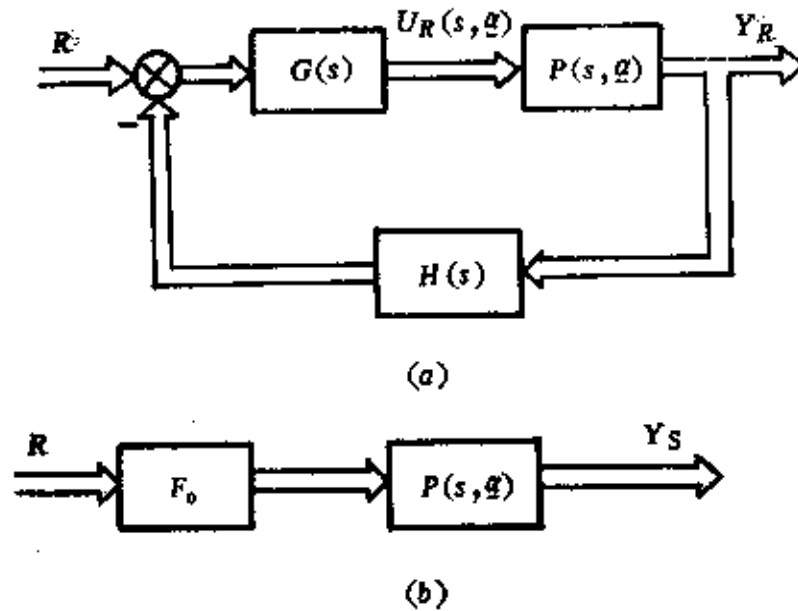


图 4-13

$$\begin{aligned}
 (I + GPH)^{-1} \Delta Y_s &= (I + PGH)^{-1} (Y_0 - Y_s) \\
 &= (I + PGH)^{-1} Y_0 - (I + PGH)^{-1} Y_s \\
 &= (I + PGH)^{-1} Y_0 - (I + PGH)^{-1} P U_{s0}
 \end{aligned}$$

由于  $U_{s0} = U_{r0}$

$$U_{r0} = GR - GHY_{r0}$$

前式成为  $(I + PGH)^{-1} \Delta Y_s = (I + PGH)^{-1} Y_0 - (I + PGH)^{-1} P (GR - GHY_{r0})$

$$= (I + PGH)^{-1} Y_0 - (I + PGH)^{-1} [PGH - PGHY_{r0}]$$

考虑到  $Y_R = (I + PGH)^{-1} PGR$ , 有

$$PGR = (I + PGH) Y_R$$

故前式变成

$$\begin{aligned}
 (I + PGH)^{-1} \Delta Y_s &= (I + PGH)^{-1} Y_0 \\
 &\quad - (I + PGH)^{-1} [(I + PGH) Y_R - PGHY_{r0}] \\
 &= [(I + PGH)^{-1} + (I + PGH)^{-1} PGH] Y_0 \\
 &\quad - (I + PGH)^{-1} (I + PGH) Y_R \\
 &= (I + PGH)^{-1} (I + PGH) Y_0 - Y_R \\
 &= Y_0 - Y_R = \Delta Y_R
 \end{aligned}$$

因此, 与单变量系统相似, 多变量系统的比较灵敏度  $S_p(s, \alpha)$  可定义为

$$\Delta Y_R(s, \alpha) = S_p(s, \alpha) \Delta Y_s(s, \alpha) \quad (4-83)$$

由式(4-82)可知

$$S_p(s, \alpha) = (I + PGH)^{-1} \quad (4-84)$$

在此, 还应该说明几点:

(1) 只要系统的回差阵可以求逆, 或换言之, 只要反回差阵存在, 比较灵敏度函数便必存在;

(2) 如果  $\Delta \alpha \rightarrow 0$ , 则得多变量系统的伯德灵敏度函数阵;

(3) 常用实数表达式

$$S_p^T(-j\omega) Z S_p(j\omega) \quad (4-85)$$

来比较额定等效的开、闭环系统, 其中,  $Z$  为加权阵。

5. 几个例子 为了加深理解, 看两个例子。

**例 4-17** 试求图 4-14 所示的两个额定等效的串、并联系统的伯德灵敏度函数、霍洛维茨灵敏度函数及比较灵敏度函数。

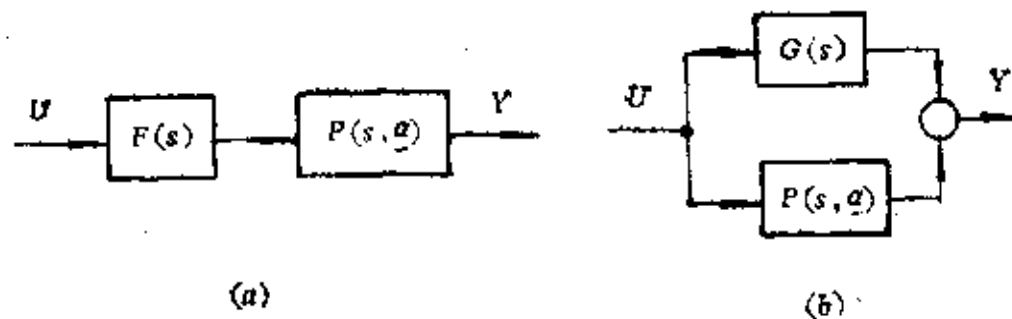


图 4-14

解 由于题给开环串联系统(a)与开环并联系统额定等效, 故有关系式

$$P(s, \alpha_0)F(s) = G(s) + P(s, \alpha_0)$$

于是

$$F(s) = \frac{G(s) + P(s, \alpha_0)}{P(s, \alpha_0)} \\ = 1 + \frac{G(s)}{P(s, \alpha_0)}$$

为书写简便, 设以  $P$ 、 $P_0$  分别表示  $P(s, \alpha)$  及  $P(s, \alpha_0)$ , 上式成为

$$F(s) = 1 + P_0^{-1}G$$

两个系统的额定传递函数分别为

$$G_{a0} = P_0 F = P_0(1 + P_0^{-1}G) = P_0 + G$$

$$G_{b0} = G + P_0$$

它们的实际传递函数为

$$G_a = PF = P(1 + P_0^{-1}G)$$

$$G_b = G + P$$

两个系统的伯德灵敏度函数可求之如下: 对串联系统(a), 有

$$(S_P^G)_a = 1$$

对系统(b), 由于它是开环并联系统, 故有

$$(S_P^G)_b \triangleq \left. \frac{\partial G_b}{\partial P} \right|_{\alpha_0} \frac{P_0}{G_{b0}} = \frac{P_0}{G + P_0}$$

系统(a)、(b)的霍洛维茨灵敏度函数分别为: 对串联系统(a), 有

$$(H_P^G)_a = 1$$

对并联系统(b), 有

$$(H_P^G)_b \triangleq \frac{\Delta G_b}{\Delta P} \frac{P}{G_b} = \frac{(G + P) - (G + P_0)}{P - P_0} \frac{P}{G + P} \\ = \frac{P}{G + P}$$

比较灵敏度可求之如下

$$S_P \triangleq \frac{\Delta Y_b}{\Delta Y_a} = \frac{(G + P)U - (G + P_0)U}{[P(1 + P_0^{-1}G)]U - [P_0(1 + P_0^{-1}G)]U} \\ = \frac{P - P_0}{P + \frac{PG}{P_0} - P_0 - G} = \frac{P_0}{P_0 + G}$$

例 4-18 如将图 4-10 改为多变量系统, 试求它的比较灵敏度函数, 其中,

$$P(s, \alpha) = \begin{bmatrix} P_{11}(s, \alpha) & P_{12}(s, \alpha) \\ P_{21}(s, \alpha) & P_{22}(s, \alpha) \end{bmatrix}, \quad L(s) = \begin{bmatrix} L_{11}(s) & L_{12}(s) \\ L_{21}(s) & L_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$R(s) = \begin{bmatrix} R_{11}(s) & R_{12}(s) \\ R_{21}(s) & R_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix}$$

解 由图可见, 该系统实可化为一个由  $H$  与  $R$ 、 $L$  并联的系统和一个由  $P$ 、 $L$  构成的闭

环系统串联而成，因此，可利用额定等效的概念求得与由  $P$ 、 $L$  构成的闭环系统额定等效的开环系统。由此，该系统的比较灵敏度函数必为

$$\Delta Y_R = S_P \Delta Y_S$$

$$S_P = (I + PL)^{-1} = \frac{\text{adj}(I + PL)}{\det(I + PL)}$$

其中

$$\text{adj}(I + PL) = \begin{bmatrix} 1 + P_{21}L_{12} + P_{22}L_{22} & -(P_{11}L_{12} + P_{12}L_{22}) \\ -(P_{21}L_{11} + P_{22}L_{21}) & 1 + P_{11}L_{11} + P_{12}L_{21} \end{bmatrix}$$

$$\det(I + PL) = (1 + P_{11}L_{11} + P_{12}L_{21})(1 + P_{21}L_{12} + P_{22}L_{22}) - (P_{11}L_{12} + P_{12}L_{22})(P_{21}L_{11} + P_{22}L_{21})$$

6. 比较灵敏度算子 比较灵敏度函数的概念可推广于线性时变与非线性系统，进行相应的参数灵敏度表达。若系统  $R$  与  $S$  额定等效，则比较灵敏度算子表达二个系统参数诱发输出误差间的一阶关系，即

$$\Delta y_R(t, \alpha) \triangleq S_P \Delta y_S(t, \alpha) \quad (4-86)$$

注意，比较灵敏度算子是时域中的量。

## 五、根灵敏度问题

众所周知，对控制系统而言，最重要的问题之一是系统的稳定性。正因此，系统参数变化对系统稳定性的影响是一个十分重要的研究课题。

当采用状态空间模型来研究系统时，它的稳定性问题是由系统阵的特征值所确定的；而用频率法分析系统时，系统稳定性的问题则取决于它的传递函数或传递函数阵的极点在根平面上的位置。由于本节研究频域中的灵敏度问题，所以，我们研究传递函数或传递函数阵中的系数变化对系统极点的影响。

传递函数阵中系数的变化除了影响系统的极点并进而影响系统的稳定性外，还影响系统的零点。由控制理论知道，系统的零点虽然不影响系统的绝对稳定性，它却通过影响过渡过程的振荡强弱而影响系统的相对稳定性。所以，研究参数变化对零点的影响也是保证高质量系统设计所必需的。正因此，参数变化对零点影响也是根灵敏度分析中的一个内容。

### (一) $\alpha$ 参数的根灵敏度

设有系统的传递函数为

$$G(s, \alpha) = \frac{\sum_{p=0}^m b_p(\alpha) s^p}{\sum_{v=0}^n a_v(\alpha) s^v}, \quad m \leq n \quad (4-87)$$

$$\alpha = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_r]^T$$

将它进行因式分解，可得

$$G(s, \alpha) = K(\alpha) \frac{\prod_{p=1}^m [s - s_p^0(\alpha)]}{\prod_{v=1}^n [s - s_v(\alpha)]}, \quad m \leq n \quad (4-88)$$

式中  $s_p^0(\alpha)$ ——传递函数的零点；

$s_p(\alpha)$ ——传递函数的极点;

$K(\alpha)$ ——放大系数。

我们研讨  $\alpha$  参数根灵敏度问题是指当  $\alpha$  参数发生变化时, 它对传递函数的分母及分子多项式的根会发生多大的影响。当然, 我们主要的兴趣在于前者。

1. 实根灵敏度 我们先来定义实根灵敏度。

**定义 4-13 实根灵敏度** 设  $S_i$  表示方程式(4-88)中  $G(s, \alpha)$  的分子或分母多项式的实根, 则半相对灵敏度

$$\tilde{S}_{\alpha_j}^{S_i} \triangleq \frac{\partial S_i}{\partial \ln \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} = \frac{\partial S_i}{\partial \alpha_j / \alpha_j} \Big|_{\alpha_0}, \quad i = 1, 2, \dots, m+n; \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (4-89)$$

称为对参数向量  $\alpha$  的元素  $\alpha_j$  的根灵敏度。

**例 4-19** 设有图 4-15 所示的电网络, 其中,  $R$  为可变参数。试求:

- (1)  $R=2.5$  时, 复阻抗  $Z(s, R)$  对  $R$  的极点灵敏度;
- (2)  $R \leq 2$  时的相应极点灵敏度。

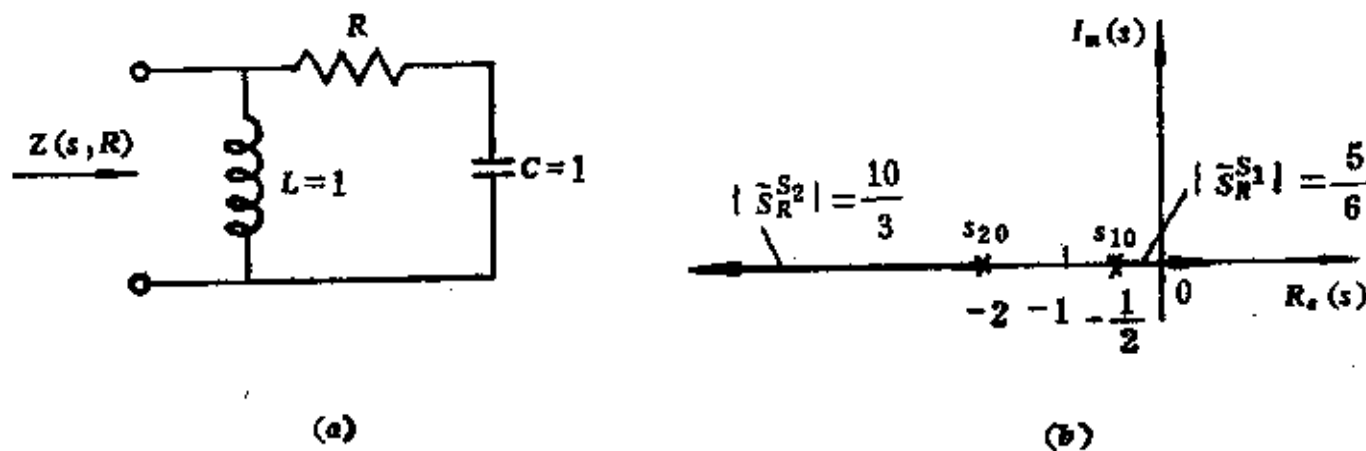


图 4-15

**解** 该网络的复阻抗  $Z(s, R)$  为

$$\begin{aligned} Z(s, R) &= \frac{LS \left( R + \frac{1}{CS} \right)}{LS + \left( R + \frac{1}{CS} \right)} \\ &= \frac{RS^2 + \frac{1}{C}S}{S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

代入  $L=1, C=1$ , 上式成为

$$Z(s, R) = \frac{RS^2 + S}{S^2 + RS + 1}$$

它的特征方程为

$$s^2 + Rs + 1 = 0$$

相应的两个极点表达式为

$$s_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4}}{2} = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} - 1}$$

当  $R = 2.5$  时, 两个极点分别是

$$s_1 = -0.5$$

$$s_2 = -2.0$$

两个极点对参数  $R$  的根灵敏度表达式分别为

$$\begin{aligned} \tilde{S}_R^{s_1} &\triangleq \left( \frac{\partial s_1}{\partial R/R} \right)_{R_0} = \left( \frac{\partial s_1}{\partial R} R \right)_{R_0} = \left( \frac{\partial s_1}{\partial R} \right)_{R_0} R_0 \\ &= \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{4} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} R \right]_{R_0} R_0 \\ &= -\frac{R_0}{2} + \frac{R_0^2}{4} \left( \frac{R_0^2}{4} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_R^{s_2} &\triangleq \left( \frac{\partial s_2}{\partial R/R} \right)_{R_0} = \left( \frac{\partial s_2}{\partial R} \right)_{R_0} R_0 \\ &= -\frac{R_0}{2} - \frac{R_0^2}{4} \left( \frac{R_0^2}{4} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

以  $R = R_0 = 2.5$  代入上两式, 得

$$\tilde{S}_R^{s_1} = 0.833$$

$$\tilde{S}_R^{s_2} = -3.333$$

上述根灵敏度可在根平面上表示出来, 如图 4-15(b) 所示。

以下研究  $R = 2$  时的情况。以  $R = 2$  代入前面的极点表达式, 得  $s_1 = s_2$ , 也即, 出现了重根情况。此时, 相应的根灵敏度  $\tilde{S}_R^{s_1}$  及  $\tilde{S}_R^{s_2}$  可求得为

$$\tilde{S}_R^{s_1} \rightarrow \infty, \quad \tilde{S}_R^{s_2} \rightarrow \infty$$

也即, 在出现重根的额定参数  $R_0 = 2$  处, 参数  $R$  即使发生无限小变化, 也会导致重根立即消失无遗。

为了进一步探清情况, 可作出阻抗  $Z(s, R)$  的根轨迹图, 以看清在  $R = 2$  这个十分特殊的参数值附近的根迹情况。为此, 将  $Z(s, R)$  的特征多项式  $s^2 + Rs + 1 = 0$  进行处理。通式除以  $1 + s^2$ , 可得

$$1 + \frac{R}{1+s^2} s = 0$$

由此, 可画得以  $R$  为参数的根轨迹曲线图 4-16。由图可见, 在参数  $R = 2$  时, 出现了根迹的分离点  $s = 1$ 。于是, 可以断言, 当  $R < 2$  时,  $Z(s, R)$  的根不再在根平面的实轴上了。因而, 公式(4-89)不再适用。也正因此, 引出了求复根灵敏度的问题。

2. 复根灵敏度 一般情况下, 系统传递函数的分子或分母多项式的根为复根。设这一对共轭复根为  $s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ , 于是可定义有关的灵敏度如下。

**定义 4-14** 根的实部灵敏度 设  $s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$  表示方程式(4-88)中  $G(s, \alpha)$  的分子或分母多项式的共轭复根, 则根的实部灵敏度定义为

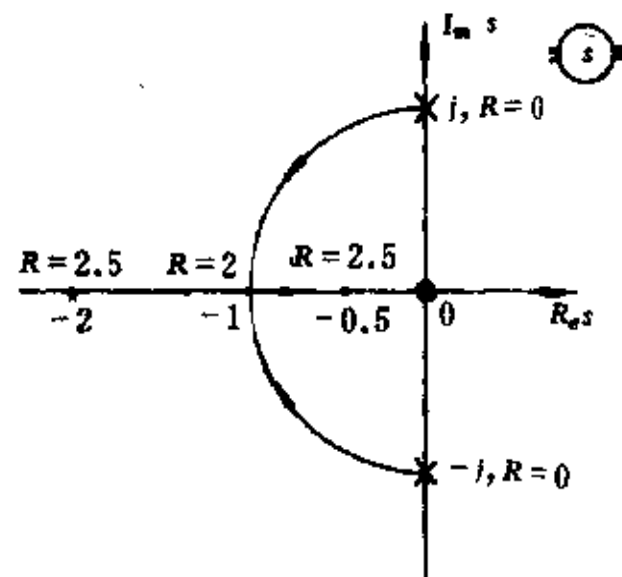


图 4-16

$$\tilde{S}_{a_j}^{\sigma_i} \triangleq \left. \frac{\partial \sigma_i(\mathbf{a})}{\partial \ln a_j} \right|_{\mathbf{a}_0} \quad (4-90)$$

式中  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_r]^T$  ——  $r$  维参数向量。

**定义 4-15 根的虚部灵敏度** 设  $s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$  表示  $G(s, \mathbf{a})$  的分子或分母多项式的共轭复根, 则根的虚部灵敏度定义为

$$\tilde{S}_{a_j}^{\omega_i} \triangleq \left. \frac{\partial \omega_i(\mathbf{a})}{\partial \ln a_j} \right|_{\mathbf{a}_0} \quad (4-91)$$

根的虚部灵敏度又称为频率  $\omega_i(\mathbf{a})$  的灵敏度。

**定义 4-16 复根灵敏度** 复根灵敏度定义为

$$\tilde{S}_{a_j}^s \triangleq \tilde{S}_{a_j}^{\sigma_i} + j\tilde{S}_{a_j}^{\omega_i} \quad (4-92)$$

**例 4-20** 设某系统的传递函数为

$$G(s) = K \frac{s+b}{s^2+a_1s+a_0}$$

其中, 额定参数值为  $b_0=1$ ,  $a_{00}=5$ ,  $a_{10}=2$ 。设  $a_1$  有摄动, 试求零点  $s_1$  的实根灵敏度及极点  $s_2, s_3$  的复根灵敏度。

**解** 由题给条件知,  $G(s) = K \frac{s+b}{s^2+a_1s+a_0}$  的零点为

$$s_1 = -b$$

极点可由分母多项式  $s^2+a_1s+a_0=0$  求得, 为

$$s_2 = -\frac{a_1}{2} + j\left(a_0 - \frac{a_1^2}{4}\right)^{1/2} = \sigma_2 + j\omega_2$$

$$s_3 = -\frac{a_1}{2} - j\left(a_0 - \frac{a_1^2}{4}\right)^{1/2} = \sigma_3 + j\omega_3$$

其中,  $\sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{a_1}{2}$ ,  $\omega_2 = -\omega_3 = \left(a_0 - \frac{a_1^2}{4}\right)^{1/2}$

代入参数额定值, 并以下标“0”表示在各参数的额定值处取值, 可得

$$s_{10} = (-b)_0 = -1$$

$$s_{20} = -1 + j2 = \sigma_{20} + j\omega_{20}$$

$$s_{30} = -1 - j2 = \sigma_{30} + j\omega_{30}$$

$s_1$  的实根灵敏度为

$$\tilde{S}_{a_1}^{\sigma_1} \triangleq \left. \frac{\partial s_1}{\partial a_1/a_1} \right|_{a_1} = \left. \frac{\partial(-b)}{\partial a_1} \right|_{a_1} \Big|_{a_{10}=0}$$

$s_2$  的复根灵敏度为

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{a_1}^s &\triangleq \left[ \frac{\partial}{\partial \ln a_1} (\sigma_2 + j\omega) \right]_{a_1} \\ &= \left( \frac{\partial \sigma_2}{\partial a_1} a_1 \right)_{a_1} + j \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial a_1} a_1 \right)_{a_1} \\ &= -\frac{1}{2} \times 2 + j \left( -\frac{1}{4} \right) \times 2 = -1 - \frac{1}{2}j \end{aligned}$$



$s_3$  的复根灵敏度为

$$\begin{aligned}\bar{S}_{a_1}^{s_3} &= \left[ \frac{\partial}{\partial \ln a_1} (\sigma_3 + j\omega_3) \right]_{s_1} \\ &= \left( \frac{\partial \sigma_3}{\partial a_1} a_1 \right) + j \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial a_1} a_1 \right)_{s_1} \\ &= \left( -\frac{1}{2} \right) \times 2 + j \left( \frac{1}{4} \right) \times 2 = -1 + \frac{1}{2}j\end{aligned}$$

上述各灵敏度的模与相角为

$$\begin{aligned}|\bar{S}_{a_1}^{s_1}| &= 0 \\ |\bar{S}_{a_1}^{s_2}| &= \left| -1 - j\frac{1}{2} \right| = 1.118 \\ \angle \bar{S}_{a_1}^{s_2} &= 206.6^\circ \\ |\bar{S}_{a_1}^{s_3}| &= \left| -1 + j\frac{1}{2} \right| = 1.118 \\ \angle \bar{S}_{a_1}^{s_3} &= 153.4^\circ\end{aligned}$$

为看清根灵敏度的意义，可画相应的根迹图。为此，重看  $G(s)$  的表达式

$$G(s) = K \frac{s+b}{s^2+a_1s+a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

以  $s^2+a_0$  通除  $D(s)$ ，可得  $1+a_1\frac{s}{s^2+a_0}=0$ ，由此可画得  $a_1$  作为参数变化时  $D(s)=0$  的根迹

图。显然，根迹始于  $s^2+a_0=0$  的根处，也即，根迹始于  $s = \pm\sqrt{-a_0} = \pm\sqrt{5}j = \pm 2.236j$  处，分离点则可求得在  $s = -2.236$  处。

$G(s)$  的零点在  $s = -b = -1$  处。

$a_1$  变化时， $G(s)$  的零点  $s_1$ ，极点  $s_2, s_3$  的根迹，及相应的零点、极点的根灵敏度皆示于图 4-17 中。

最后，还应说明几点。首先，由于重根情况无法用实根灵敏度来表达，所以，重根处的根灵敏度应先按复共轭根的根灵敏度求之，然后，令其虚部为零而求得；其次，应该注意，根灵敏度皆系指半相对灵敏度而言，这样做的目的是便于图示。

3. 根灵敏度阵 为了从根迹的观点统一表达系统的根灵敏度性质，在灵敏度理论中还常引用所谓的根灵敏度阵，它的定义如下。

**定义 4-17** 根灵敏度阵 设系统的传递函数为  $G(s, \alpha)$ ，它具有  $m$  个零点， $n$  个极点。如果参数向量为  $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r]^T$ ，则称以下  $(m+n) \times r$  阵

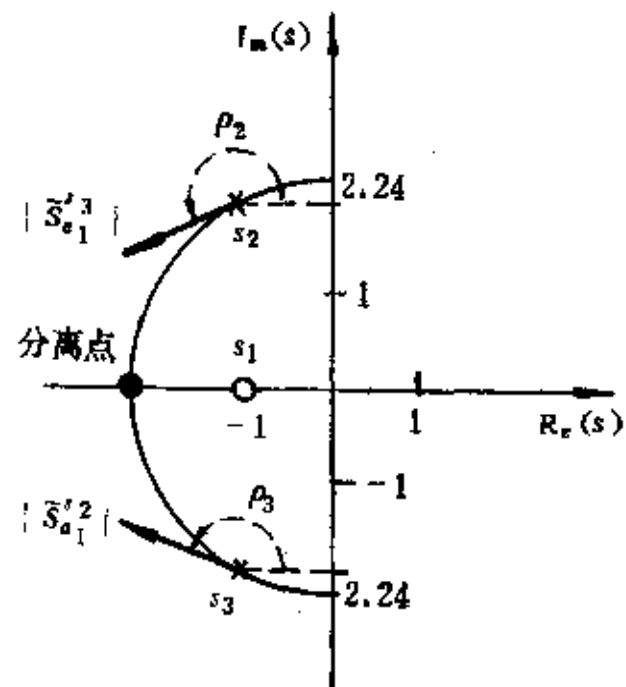


图 4-17

$$\tilde{S}_r = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{\alpha_1}^{z_1} & \tilde{S}_{\alpha_2}^{z_1} & \cdots & \tilde{S}_{\alpha_r}^{z_1} \\ \tilde{S}_{\alpha_1}^{z_2} & \tilde{S}_{\alpha_2}^{z_2} & \cdots & \tilde{S}_{\alpha_r}^{z_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{S}_{\alpha_1}^{z_{m+n}} & \tilde{S}_{\alpha_2}^{z_{m+n}} & \cdots & \tilde{S}_{\alpha_r}^{z_{m+n}} \end{bmatrix} \quad (4-93)$$

为根灵敏度阵。

4. 根灵敏度与伯德灵敏度函数的关系 由于伯德灵敏度函数描述了系统的参数变化对系统传递函数的影响,而传递函数又可通过类似式(4-88)的方式,用放大系数、极点与零点来表达,所以不难想象,根灵敏度与伯德灵敏度函数之间存在着一种内在的关系,即通过对根灵敏度的分析与对放大系数灵敏度的分析,可以求得参数对系统传递函数的影响。以下分析  $\alpha$  参数情况下,系统的根灵敏度与伯德灵敏度函数间的重要关系。

设系统的传递函数为

$$G(s, \alpha) = K(\alpha) \frac{\prod_{\mu=1}^m [s - s_{\mu}^0(\alpha)]}{\prod_{\nu=1}^n [s - s_{\nu}(\alpha)]}$$

先对上述两边取对数

$$\begin{aligned} \ln G(s, \alpha) &= \ln K(\alpha) + \sum_{\mu=1}^m \ln [s - s_{\mu}^0(\alpha)] \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^n \ln [s - s_{\nu}(\alpha)] \end{aligned}$$

接着,将上式对  $\ln \alpha_j$  求偏导数,可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln G(s, \alpha)}{\partial \ln \alpha_j} &= \frac{\partial \ln K(\alpha)}{\partial \ln \alpha_j} + \sum_{\mu=1}^m \frac{1}{s - s_{\mu}^0} \frac{-\partial s_{\mu}^0}{\partial \ln \alpha_j} \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{s - s_{\nu}} \frac{-\partial s_{\nu}}{\partial \ln \alpha_j} \end{aligned}$$

在额定参数  $\alpha_0$  处,按伯德灵敏度的定义改写上式,得

$$S_{\alpha_j}^G = S_{\alpha_j}^K - \sum_{\mu=1}^m \frac{1}{s - s_{\mu}^0(\alpha_0)} \tilde{S}_{\alpha_j}^{z_{\mu}^0} + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{s - s_{\nu}(\alpha_0)} \tilde{S}_{\alpha_j}^{p_{\nu}} \quad (4-94)$$

式中,  $s_{\mu}^0(\alpha) \triangleq s_{\mu}^0(\alpha_0)$ ,  $s_{\nu}(\alpha) \triangleq s_{\nu}(\alpha_0)$  是  $G(s, \alpha_0)$  的额定根。注意,它们包括零点与极点。

式(4-94)是一个重要的公式,它可看成是伯德灵敏度函数的部分分式展式,其中,各根灵敏度是在根  $s = s_{\mu}^0$  及  $s_{\nu}$  处的相应留数。为了简化式(4-94)的写法,假定以  $h_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m+n$  表示  $S_{\alpha_j}^G$  在各根  $s = s_i$  处的相应留数,也即对应的根灵敏度,而以  $h_{m+n+1, j}$  表示常数项,则式(4-94)可改写为

$$S_{\alpha_j}^G(s) = \sum_{i=1}^{m+n} \frac{h_{ij}}{s - s_i} + h_{m+n+1, j}, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (4-95)$$

因此,可认为伯德灵敏度是由放大系数的灵敏度及各加权的根灵敏度所构成。正因此,各根灵敏度对伯德灵敏度函数的影响在各所在根的邻域最大。

最后应当指出,根灵敏度是一种频域的灵敏度尺度。

## (二) $\lambda$ 参数的根灵敏度

1. 单  $\lambda$  参数时的根灵敏度分析 设有  $n$  阶系统, 它的传递函数为  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ , 其中,  $N(s)$  与  $D(s)$  分别为分子与分母多项式, 众所周知, 分母多项式  $D(s)$  就是系统的特征多项式。此外, 在研究  $\lambda$  参数情况时, 它还是系统的额定特征多项式。现考虑极点为负实根这一最简单情况。设该  $n$  阶系统的额定特征方程为

$$D_0(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

当单  $\lambda$  参数由额定参数值  $\lambda_0 = 0$  变为  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 0 + \Delta\lambda = \Delta\lambda$  时, 系统的特征方程变为

$$D(s, \Delta\lambda) = \Delta\lambda s^{n+1} + a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

其中, 各系数为  $\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} a_v = a_{v0}$ ,  $v = 0, 1, \dots, n$ 。以  $\Delta\lambda s^n$  除上式, 得

$$s + \frac{a_n}{\Delta\lambda} + \frac{a_{n-1}}{\Delta\lambda} \frac{1}{s} + \dots + \frac{a_0}{\Delta\lambda} \frac{1}{s^n} = 0$$

设  $\Delta\lambda \rightarrow 0$ , 并以  $s_{n+1}$  表示由于系统阶次的增高而增加的一个极点, 于是, 把上式移项之, 并取极限  $\Delta\lambda \rightarrow 0$ , 得表达式

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{\Delta\lambda} \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{s_{n+1}} + \dots + \frac{a_0}{s_{n+1}^n} \right) \right] \\ &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left( -\frac{a_n}{\Delta\lambda} \right) = -\infty \end{aligned} \quad (4-96)$$

也即, 在单  $\lambda$  参数情况下, 当  $\Delta\lambda \rightarrow 0$  时, 有一个根趋于无限远处。

当  $\Delta\lambda$  十分小时, 则有

$$s_{n+1} \approx -\frac{a_n}{\Delta\lambda} \quad (4-97)$$

此时, 根灵敏度为

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\lambda}^{s_{n+1}} &\triangleq \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\partial s_{n+1}}{\partial \ln \lambda} \Big|_{\lambda_0=0} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\partial s_{n+1}}{\partial \lambda / \lambda} \Big|_{\lambda_0=0} \\ &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left( -\frac{\partial s_{n+1}}{\partial \lambda} \Delta\lambda \right) \Big|_{\lambda_0=0} \\ &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{\partial s_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} \Delta\lambda \right) \Big|_{\lambda_0=0} \\ &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} - \left[ -\frac{a_n}{(\Delta\lambda)^2} \Delta\lambda \right] \Big|_{\lambda_0=0} \\ &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{a_n}{\Delta\lambda} = \infty \end{aligned} \quad (4-98)$$

也即, 当  $\Delta\lambda \rightarrow 0$  时, 根的灵敏度趋于  $\infty$ 。

总之, 我们得到的结论是:  $\lambda$  参数情况下, 参数由额定值  $\lambda_0 = 0$  变为  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \Delta\lambda$  会导致特征方程阶次的提高, 这时, 相应的极点增加了, 这些增加的极点是在无限远处, 此外, 这时的极点灵敏度是无穷大。

### 2. 多参数的情况

在更一般的情况下, 如果参数变化诱发的系统特征方程阶次的变化大于 1, 设为  $m$ , 则可推得类似的结果。

## 六、纯量灵敏度尺度

现在来介绍一种参数向量为  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$  的多参数情况下的纯量灵敏度尺度。由于它能在全频带范围内考虑所有根的灵敏度，因而，它能在全频带范围内进行参数灵敏度的全局估计。

设系统的传递函数为

$$G(s, \alpha) = K(\alpha) \frac{\prod_{p=1}^m [s - s_p^*(\alpha)]}{\prod_{q=1}^n [s - s_q(\alpha)]}$$

式中， $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$ 。由伯德灵敏度函数部分的公式(4-58)

$$\Delta Y(s, \alpha) = \sum_{j=1}^r S_{\alpha_j}^{\alpha} S_{\alpha_j}^{\alpha} Y(s, \alpha_0) \frac{\Delta \alpha_j}{\alpha_{j0}}$$

可推知

$$\frac{\Delta G(s, \alpha)}{G(s, \alpha_0)} = \sum_{j=1}^r S_{\alpha_j}^{\alpha}(s) \frac{\Delta \alpha_j}{\alpha_{j0}} \quad (4-99)$$

为书写的简化，设  $\varepsilon_j \triangleq \frac{\Delta \alpha_j}{\alpha_{j0}}$ ，并取式(4-95)作为  $S_{\alpha_j}^{\alpha}(s)$  的表达式，于是式(4-99)可改

写如下

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G(s, \alpha)}{G(s, \alpha_0)} &= \sum_{j=1}^r \left( \sum_{i=1}^{m+n} \frac{h_{ij}}{s - s_i} + h_{m+n+1,j} \right) \varepsilon_j \\ &= \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^r \frac{h_{ij}}{s - s_i} \varepsilon_j + \sum_{j=1}^r h_{m+n+1,j} \varepsilon_j \end{aligned} \quad (4-100)$$

为进一步简化书写，令

$$f_i \triangleq \sum_{j=1}^r h_{ij} \varepsilon_j \quad i = 1, 2, \dots, m+n+1 \quad (4-101)$$

于是，前式成为

$$\frac{\Delta G(s, \alpha)}{G(s, \alpha_0)} = \sum_{i=1}^{m+n} \frac{f_i}{s - s_i} + f_{m+n+1} \quad (4-102)$$

参看公式(4-94)及(4-95)，由于  $h_{ij}$  表达了  $S_{\alpha_j}^{\alpha}$  在各根  $s = s_i$  处的留数，且  $\varepsilon_j = \frac{\Delta \alpha_j}{\alpha_{j0}}$ ，故  $f_i$  表

示了由于参数变化而诱发的根  $s_i$  的位置变化。为了进行综合考虑，可把方程式(4-101)写成矩阵表达式

$$f = H \varepsilon \quad (4-103)$$

其中

$$f \triangleq [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{m+n+1}]^T$$

$$\varepsilon \triangleq [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_r]^T$$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1r} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m+n+1,1} & \dots & \dots & h_{m+n+1,r} \end{bmatrix} \quad (4-104)$$

注意，上两式中， $f$  可看成是根的摄动向量， $\varepsilon$  是参数摄动向量， $H$  则是根灵敏度阵公

式(4-93)的扩展。因此,式(4-104)可看成是用系统根的灵敏度及放大系数灵敏度来表达整个系统对参数变化的灵敏度的一种表达式。由于 $h_{ij}$ 是复函数,故 $H$ 也是复阵。

基于上述,如果想用一个纯量来表征多维参数 $\alpha$ 的变化对系统性能影响的总效应的话,就应按通常的处理方法,以向量 $f$ 的某种范数来表达。当然,处理起来最方便的范数是欧几里德范数。故表达参数向量 $\alpha$ 对系统总的影响的纯量灵敏度尺度为

$$\|f\| \triangleq (|f_1|^2 + |f_2|^2 + \dots + |f_{m+n+1}|^2)^{1/2} \quad (4-105)$$

上式中,参数变化对系统的影响不象式(4-99)那样通过传递函数的相对变化来表达,而是通过传递函数的根(即它的零点与极点)及放大系数的灵敏度,以等权的方式用纯量数来表达的。如果经验丰富的话,可对各个根及放大系数的影响赋以不同的加权系数。于是,有人定义了以下的加权纯量灵敏度尺度。

**定义 4-18** 加权灵敏度尺度 设  $\text{Re}f$  和  $\text{Im}f$  分别表示式(4-103)中  $f$  的实部与虚部,且令

$$A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_{m+n+1})$$

$$B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_{m+n+1})$$

为两个各具正、实元素的对角加权阵,则  $f$  的范数

$$m \triangleq [(\text{Re}f)^T A (\text{Re}f) + (\text{Im}f)^T B (\text{Im}f)]^{1/2} \quad (4-106)$$

称为加权灵敏度尺度。

实际上,加权阵  $A$  与  $B$  是很难选的。

### 七、闭环幅频特性的最大模灵敏度

考虑如图 4-18 所示的闭环系统的幅频特性,设其最大值发生在  $\omega_m$  处,则可定义最大模灵敏度如下。

**定义 4-19** 最大模灵敏度 设  $|G(j\omega, \alpha_0)|$  是系统的额定闭环幅频特性,令  $M = \max_{\omega} |G(j\omega, \alpha_0)|$  是  $|G(j\omega, \alpha_0)|$  在全频道中的最大值,它发生在  $\omega = \omega_m$  处,则偏导数

$$S_m \triangleq \left. \frac{\partial M}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{\partial |G(j\omega_m, \alpha)|}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \quad (4-107)$$

称为系统的最大模灵敏度。

在经典控制理论中,最大模又称为振荡性指标。这种最大模灵敏度可用下法计算:设用  $G$  与  $\bar{G}$  分别表示  $G(j\omega_m, \alpha)$  及  $G(-j\omega_m, \alpha)$ , 则有

$$\begin{aligned} S_m &= \left. \frac{\partial M}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = \frac{1}{2M} \left. \frac{\partial (G\bar{G})}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \\ &= -\frac{M}{2} \left. \frac{\partial \ln(G^{-1}\bar{G}^{-1})}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \\ &= -\frac{M}{2} \left[ \bar{G} \frac{\partial \bar{G}^{-1}}{\partial \ln \alpha_j} + G \frac{\partial G^{-1}}{\partial \ln \alpha_j} \right]_{\alpha_0} \end{aligned}$$

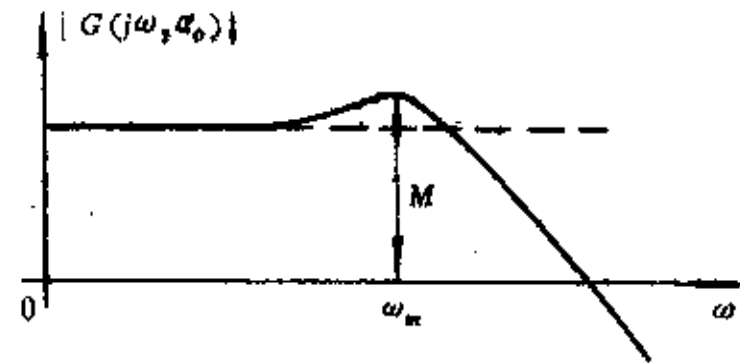


图 4-18

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{M}{2} \left[ 2 \operatorname{Re} \frac{G \partial G^{-1}}{\partial \ln \alpha_j} \right]_{\alpha_0} \\
 &= -M \operatorname{Re} \left( G \frac{\partial G^{-1}}{\partial \ln \alpha_j} \right)_{\alpha_0}
 \end{aligned} \tag{4-108}$$

例 4-21 设有图 4-19 所示的闭环反馈系统。已知：

(1)  $H(s) = 1$ ;

(2) 开环传递函数为

$$\begin{aligned}
 L(s, \alpha) &= R(s)P(s, \alpha)H(s) \\
 &= \frac{10(1+0.5s)(1+s)}{(1+0.1s)(1+10s)} \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)}
 \end{aligned}$$

(3)  $\alpha = [K \ T_1 \ T_2]^T$  为参数向量;

(4)  $\alpha_0 = [K_0 \ T_{10} \ T_{20}]^T = [10 \ 0.5 \ 1]^T$  为额定参数值。

试求： $T_1$  改变时的  $S_m$ 。

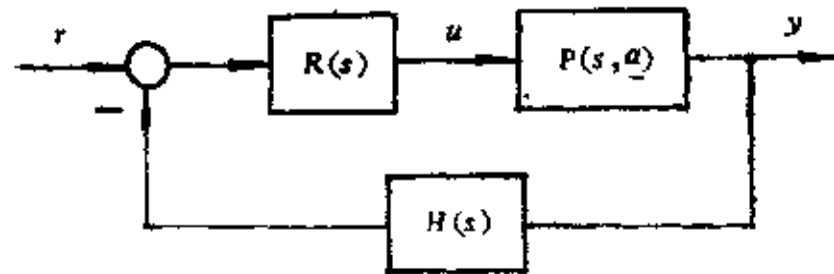


图 4-19

解 开环传递函数  $L(s, \alpha_0)$  为

$$\begin{aligned}
 L(s, \alpha_0) &= \frac{10(1+0.5s)(1+s)}{(1+0.1s)(1+10s)} \frac{10}{(1+0.5s)(1+s)} \\
 &= \frac{100}{(1+0.1s)(1+10s)}
 \end{aligned}$$

闭环传递函数为

$$G(s, \alpha_0) = \frac{L(s, \alpha_0)}{1+L(s, \alpha_0)} = \frac{100}{s^2 + 10.1s + 101}$$

因此，可由  $G(s, \alpha_0)$  的分母多项式求得谐振频率  $\omega_0$  及阻尼系数  $\xi$ 。因  $\omega_0^2 = 101$ ，故谐振频率  $\omega_0 = 10.05$ ；由于  $2\xi\omega_0 = 10.1$ ，阻尼系数则为  $\xi = \frac{10.1}{2\omega_0} = 0.502$ 。于是，闭环幅频特性最大值发生的频率为

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{1-2\xi^2} = 10.05 \sqrt{1-2 \times 0.502^2} = 7.08$$

在  $\omega_m$  处的闭环幅频特性最大值为

$$\begin{aligned}
 M &= |G(j\omega_m, \alpha_0)| \\
 &= \frac{100}{|(j\omega_m)^2 + 10.1(j\omega_m) + 101|_{\omega_m=7.08}} = 1.14
 \end{aligned}$$

由公式(4-108)，考虑到  $G(s, \alpha_0) = \frac{L(s, \alpha_0)}{1+L(s, \alpha_0)}$  及  $\alpha_j = T_1$ ，故最大模灵敏度可求得，也

即,

$$\begin{aligned}
 S_m &\triangleq \left( \frac{\partial M}{\partial \ln \alpha_j} \right)_{\alpha_0} = -M \operatorname{Re} \left( \frac{\partial G^{-1}}{\partial \ln \alpha_j} \right)_{\alpha_0} \\
 &= -M \operatorname{Re} \left( \frac{L}{1+L} \frac{\partial \left( \frac{1+L}{L} \right)}{\partial \ln T_1} \right)_{\alpha_0} \\
 &= -M \operatorname{Re} \left[ \frac{L}{1+L} \left[ \frac{L dL - (1+L) dL}{L^2} / \partial \ln T_1 \right] \right)_{\alpha_0} \\
 &= -M \operatorname{Re} \left[ \frac{L}{1+L} \frac{(-dL)}{L^2} / \partial \ln T_1 \right]_{\alpha_0} \\
 &= M \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{1+L} \frac{1}{L} dL / \partial \ln T_1 \right]_{\alpha_0} \\
 &= M \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{1+L} \frac{\partial \ln L}{\partial \ln T_1} \right]_{\alpha_0} \\
 &= M \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{1+L_0} \left( \frac{\partial \ln L}{\partial \ln T_1} \right)_{\alpha_0} \right]
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 L_0 &= L(j\omega_m, \alpha_0) = \frac{100}{(1+0.1s)(1+10s)} \Big|_{s=j\omega_m} \\
 &= \frac{100}{(1+0.1 \times j \times 7.08)(1+10 \times j \times 7.08)} \\
 &= \frac{100}{(1+j0.708)(1+j70.8)} \\
 &= 1.153 L - 124.5^\circ \\
 \left( \frac{\partial \ln L(j\omega_m, T_1)}{\partial \ln T_1} \right)_{\alpha_0} &= \frac{\partial L(j\omega_m, T_1)}{\partial T_1} \Big|_{\alpha_0} \frac{T_{10}}{L_0} \\
 &= \left( \frac{\frac{-10(1+0.5s)(1+s)}{(1+0.1s)(1+10s)(1+T_{20}s)} \cdot \frac{T_{10}}{10(1+0.5s)(1+s)10}}{(1+T_{10}s)^2} \right)_{s=j\omega_m} \\
 &= \left( \frac{-sT_{10}}{(1+T_{10}s)^2 \frac{1}{1+T_{10}s}} \right)_{s=j\omega_m} \\
 &= \frac{-sT_{10}}{1+T_{10}s} \Big|_{s=j\omega_m} \\
 &= -\frac{j\omega_m T_{10}}{1+T_{10}j\omega_m} = -\frac{j7.08 \times 0.5}{1+j0.5 \times 7.08} = 0.96 L - 164.2^\circ
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 S_m &= M \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{1+L_0} \left( \frac{\partial \ln L}{\partial \ln T_1} \right)_{\alpha_0} \right] \\
 &= 1.14 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{1+1.15 L - 124.5^\circ} \times 0.96 L - 164.2^\circ \right] \\
 &= 1.14 \operatorname{Re}(0.95 L - 94.2^\circ) = 0.08
 \end{aligned}$$

因而 
$$\Delta M = S_m \frac{\Delta T_{10}}{T_{10}} = -0.08 \times \frac{\Delta T}{T_{10}}$$

在结束本章前，下面对性能指标灵敏度作个简单的介绍。

动态系统常以性能指标作为依据进行设计，以求达到这些性能指标的预定值或最佳值，故引出了研究参数变化对性能指标影响的灵敏度问题。由于性能指标是一个纯量，所以，表征性能指标的参数灵敏度的量必为某种灵敏度尺度。

**定义 4-20** 性能指标灵敏度 设  $J$  是用于系统设计的性能指标，且设它是参数  $\alpha$  的连续函数，则称偏导数

$$J_{\alpha} \triangleq \frac{\partial J}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} \quad (4-109)$$

为性能指标灵敏度。

基于上述定义，如果  $J = J(\alpha)$ ， $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]^T$ ，则有

$$\begin{aligned} J_{\alpha} &\triangleq \left[ \frac{\partial J}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha_0}, \frac{\partial J}{\partial \alpha_2} \Big|_{\alpha_0}, \dots, \frac{\partial J}{\partial \alpha_r} \Big|_{\alpha_0} \right] \\ &= [J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \dots, J_{\alpha_r}] \end{aligned} \quad (4-110)$$

显然，此时  $J_{\alpha}$  是一个向量，称为性能指标灵敏度向量。

上述定义中的  $J$  是十分广泛的。如果系统按最小超调量进行设计，按性能指标的含义，系统阶跃响应的超调量甚至也可看成是一种性能指标。然而，实际上，控制系统中的性能指标常是指积分判据或目标泛函。常用的性能指标有：

(1) 各种积分判据，如  $ISE$  判据  $J = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon^2 dt$ ， $IAE$  判据  $J = \int_{t_0}^{t_f} |\varepsilon| dt$ ， $ITSE$  判据  $J = \int_{t_0}^{t_f} t \varepsilon^2 dt$  等等。以上各式中， $\varepsilon = r - y$ ， $r$  是指令信号， $y$  是输出信号。

(2) 各种目标泛函，如博尔赞型目标泛函，拉格朗日型目标泛函及迈耶型目标泛函等。

应该指出，性能指标灵敏度的引出虽然合乎逻辑，然而，它仍有一些不足之处，使它不便于应用。例如，它不能用于时间最佳控制问题的参数灵敏度分析及不宜用于开、闭环最佳系统参数灵敏度的比较。

## 习 题

4-1 已知系统传递函数  $G(s) = 1/(1+s^2\omega^2)$ ，输入为单位阶跃函数  $u(t) = 1(t)$  时，证明其输出灵敏度函数  $\sigma = (\partial y / \partial \omega)_{\omega}$  发散。

4-2 给定系统的微分方程  $\ddot{y} + 2\delta\omega\dot{y} + \omega^2 y = \omega^2 1(t)$ ， $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ ，求使输出灵敏度函数  $\sigma = (\partial y / \partial \omega)_{\omega}$  发散的阻尼率  $\delta$  的值，并从稳定性的角度来讨论其结果。

4-3 反馈结构图 4-20(a)、(b)、(c) 中， $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$ 、 $G_4$  为传递函数， $K$  为常数，

(1) 求  $G(s) = Y(s)/U(s)$  对  $G_2$  的伯德灵敏度函数；

(2) 求  $G(s)$  对  $G_2$  的比较灵敏度函数；

(3) 给出零灵敏度的条件。



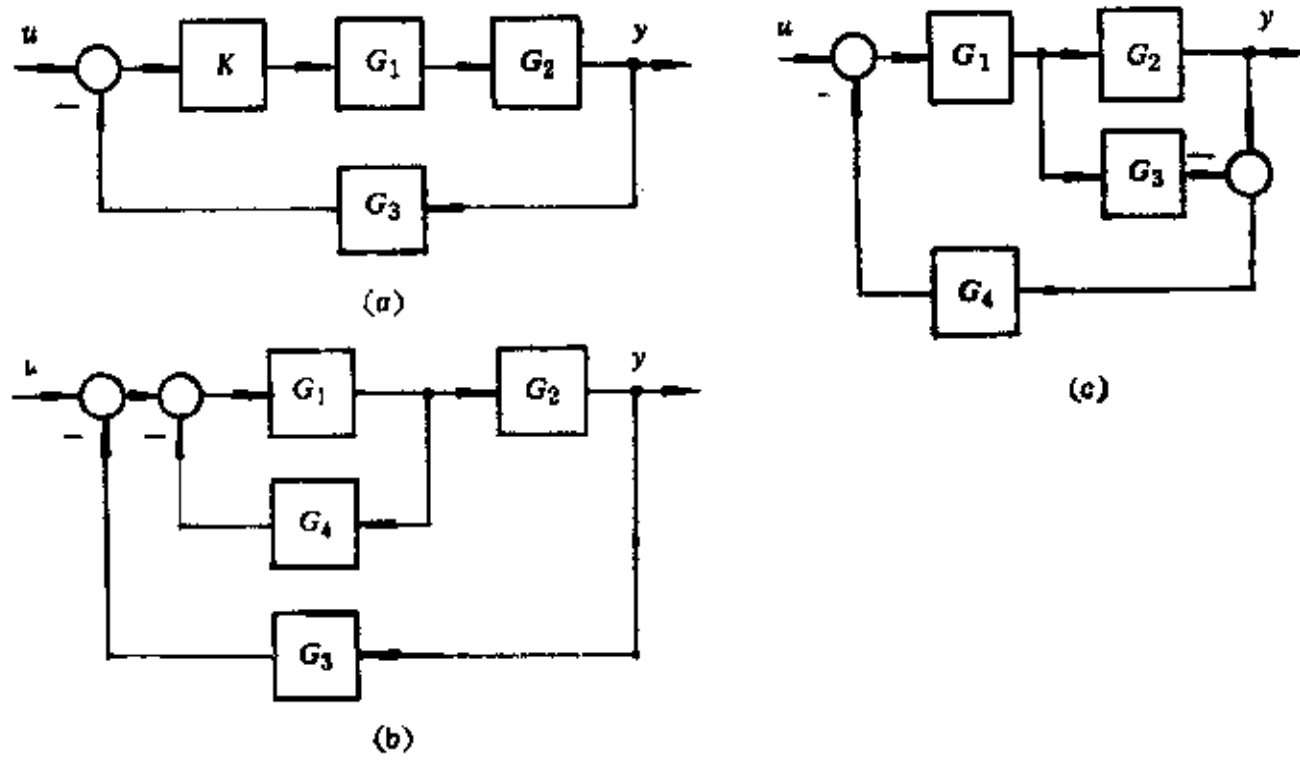


图 4-20

4-4 图 4-21 为一低通滤波器。假定  $C$  的容差与  $R$  的相近，求输出灵敏度函数在下列情况下与  $R$  的关系：

(1)  $u_1 = \delta(t)$

(2)  $u_1 = 1(t)$

并讨论其结果。

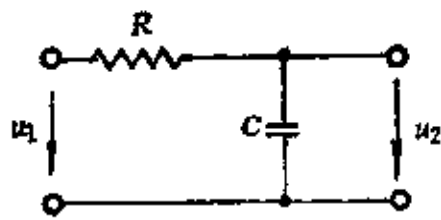


图 4-21

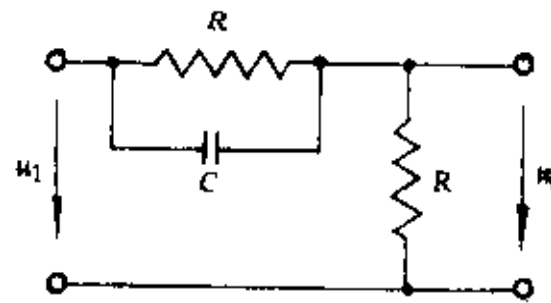


图 4-22

4-5 图 4-22 所示的网络，传递函数  $G(s) = u_2(s, C)/u_1(s)$ 。求该网络的伯德灵敏度函数  $S_C^G$  与  $C$  的关系。

4-6 图 4-23(a) 中增益  $K_1$  可变： $K/2 \leq K_1 \leq 2K$ 。求图(b)中的  $h$  和  $K_2$ ，使得  $K_1$  从  $K/2$  变到  $2K$  时，总的传递函数  $G(s)$  变化 20%；而  $K_1 = K$  时，两图等效。

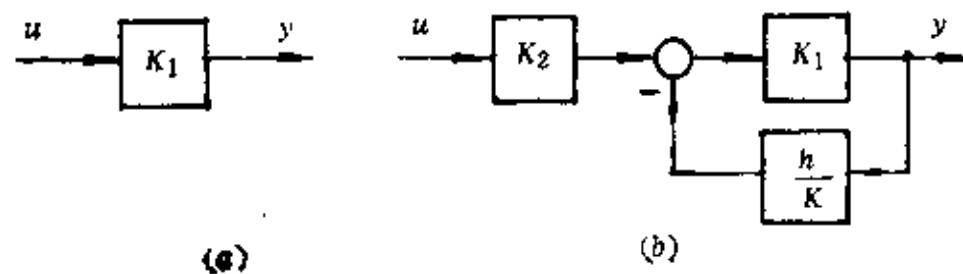


图 4-23

4-7 图 4-24 中结构图的状态向量定义为  $x = [x_1 \ x_2]^T$ , 参数向量定义为  $\alpha = [K \ T]^T$ , 求轨迹灵敏度矩阵  $\lambda = (\partial x / \partial \alpha)_{\alpha_0}$ , 假定  $\alpha < 1$  且所有初始条件都为 0。

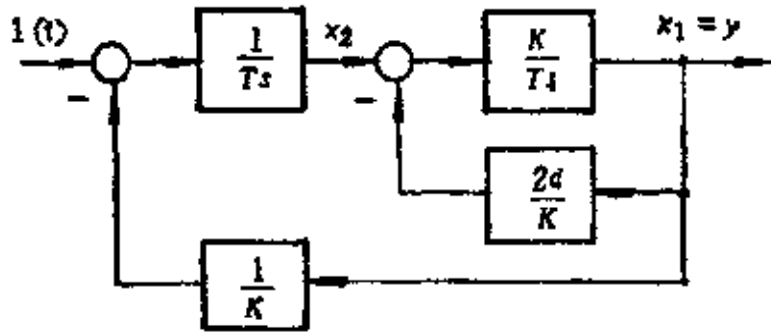


图 4-24

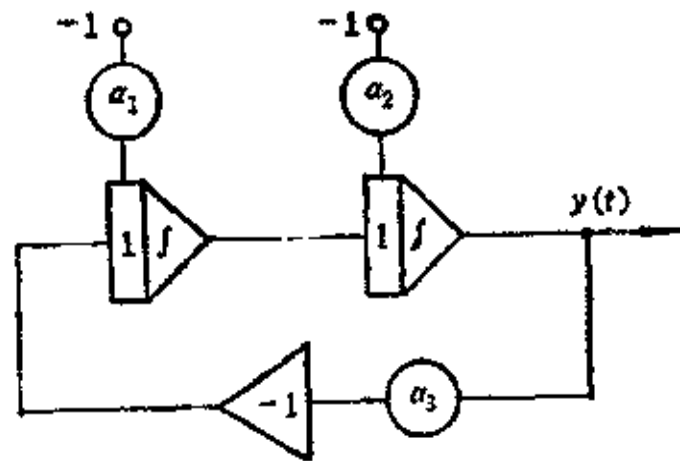


图 4-25

4-8 图 4-25 为一个振荡器的规范化模拟计算机图形。

- (1) 求输出函数  $y(t, \alpha)$ , 其中  $\alpha = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ 。
- (2) 计算对所有参数的输出灵敏度向量  $\sigma(t, \alpha_0)$ 。

## 第五章 输出灵敏度函数的计算与测量法

本章介绍各种输出灵敏度函数的常用计算与测量法，着重介绍解析法及模拟计算法。进一步的有关内容请参看文献[6]。

### 第一节 用拉氏变换法求输出灵敏度函数

#### 一、问题的提出

输出灵敏度函数最直观的计算法是按定义直接进行。为此，分别在额定参数  $\alpha_0$  及实际参数  $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ ， $\Delta\alpha \ll \alpha_0$ ，情况下解系统的输入-输出微分方程，以求得额定输出值  $y(t, \alpha_0)$  及实际输出值  $y(t, \alpha)$ 。按定义，输出灵敏度可求得为

$$\sigma(t, \alpha_0) = \frac{\Delta y(t, \alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{y(t, \alpha) - y(t, \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \quad (5-1)$$

上述算法并不理想，原因是在  $\Delta\alpha \ll \alpha_0$  情况下，计算准确度常难保证。不论用模拟计算或数值积分法，计算的结果都有误差。假设计算  $y(t, \alpha_0)$  和  $y(t, \alpha)$  的误差分别为  $\varepsilon_2$  与  $\varepsilon_1$ ，且以  $e = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$  表示合成误差，则参数变化的诱发误差为

$$\Delta y(t, \alpha) = [y(t, \alpha) + \varepsilon_1] - [y(t, \alpha_0) + \varepsilon_2] = \Delta y + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \Delta y + e \quad (5-2)$$

输出灵敏度函数成为

$$\sigma(t, \alpha_0) \triangleq \frac{\Delta y(t, \alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{\Delta y(t, \alpha)}{\Delta\alpha} + \frac{e}{\Delta\alpha} = \sigma(t, \alpha_0) + \frac{e}{\Delta\alpha} \quad (5-3)$$

由于  $\Delta\alpha \ll \alpha_0$ ， $e$  又常与  $\Delta\alpha$  同属一个数量级，故上式中计算误差不会很小， $\sigma(t, \alpha_0)$  与  $\sigma(t, \alpha_0) + \frac{e}{\Delta\alpha}$  出入很大。

如能设法保证  $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$ ，则  $e = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$  很小，计算准确度就会提高。这样，当  $\alpha$  变化时， $e = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$  极小。用式(5-1)进行  $\sigma(t, \alpha_0)$  的直接计算就可行了。

鉴于上述，若用模拟机进行计算，必须避开计算  $\Delta y$ ，而以直接算  $\sigma(t, \alpha_0)$  为佳。下述的拉氏变换法就是一种直接计算  $\sigma(t, \alpha_0)$  的可行方法。

#### 二、用拉氏变换法计算输出灵敏度函数

设有系统的微分方程，应用拉氏变换法，最终可得其解为

$$y(t, \alpha) = L^{-1}[G(s, \alpha)U(s)] \quad (5-4)$$

式中  $G(s, \alpha)$ ——系统的传递函数；

$U(s)$ ——系统输入信号的拉氏变换。

于是，输出灵敏度为

$$\sigma(t, \alpha_0) \triangleq \left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} = \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} L^{-1}[G(s, \alpha)U(s)] \right]_{\alpha_0}$$

如果求极限  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  与求拉氏反变换的过程可以互换, 则有

$$\sigma(t, \alpha_0) = L^{-1} \left[ \left. \frac{\partial G(s, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} U(s) \right] \quad (5-5)$$

或者, 在上式右端的分子、分母中同乘  $\alpha_0 G(s, \alpha_0)$ , 便可求得

$$\sigma(t, \alpha_0) = L^{-1} \left[ S_{\alpha}^G(s) \frac{Y(s, \alpha_0)}{\alpha_0} \right] \quad (5-6)$$

式中  $S_{\alpha}^G(s)$ ——伯德灵敏度函数。

**例 5-1** 设有图 5-1(a) 所示 R-C 网络, 若输入量为电压  $u(t) = 1(t)$ , 输出量为电容上的电压  $y(t)$ , 试求参数  $T = RC$  变化时的输出灵敏度。

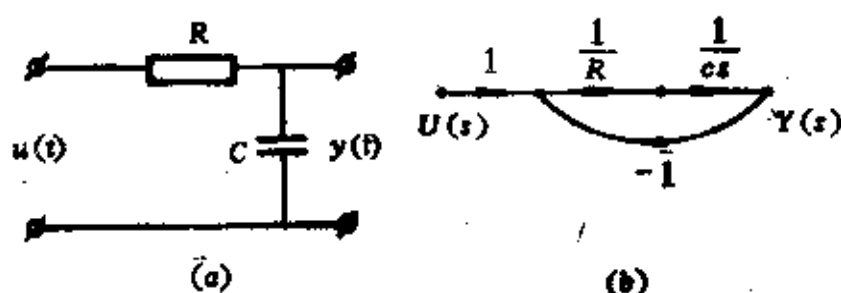


图 5-1

**解** 由图(b), 可求得该网络的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

由于  $T$  为可变参数, 故额定传递函数为

$$G(s, T_0) = \frac{1}{1 + T_0 s}$$

实际传递函数为

$$G(s, T) = \frac{1}{1 + Ts}$$

由于  $\alpha = T$ , 故由式(5-5), 有

$$\left. \frac{\partial G(s, \alpha)}{\partial T} \right|_{T_0} = - \frac{s}{(1 + T_0 s)^2}$$

及

$$\sigma(t, \alpha_0) = L^{-1} \left[ - \frac{s}{(1 + T_0 s)^2} \frac{1}{s} \right] = - \frac{t}{T_0^2} e^{-t/T_0}$$

### 三、若干说明

1. 以上求法的基本假定是求极限与求拉氏反变换的过程可以互换, 也即

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \left( \frac{1}{2\pi j} \int_c \frac{\partial G(s, \alpha)}{\partial \alpha} U(s) e^{st} ds \right) = \frac{1}{2\pi j} \int_c \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{\partial G(s, \alpha)}{\partial \alpha} U(s) e^{st} ds \quad (5-7)$$

实际上,公式(5-7)不是恒真的。有关的研究结果指出:

(1)对 $\alpha$ 参数而言,式(5-7)恒真,即对 $\alpha$ 参数而言,公式(5-5)或(5-6)恒成立。

(2)由于传递函数中不含初始条件,故对 $\beta$ 参数而言,没有必要研究这个问题。

(3)对 $\lambda$ 参数而言,仅当由于 $\lambda=0$ 变为 $\lambda \neq 0$ 而使系统实际方程的阶次提高所造成的附加根具负实部时,式(5-7)才成立。

以上结论的证明及例题可参看文献[6]。

2. 计算输出灵敏度的拉氏变换法有以下不足之处:

(1)仅宜用于3阶以下的系统。对高于3阶以上的系统,计算十分繁复。

(2)不能用于求非线性系统的输出灵敏度。

(3)方法不直观。

## 第二节 输出灵敏度方程

各种直接求解输出灵敏度函数 $\sigma(t, \alpha_0)$ 的方法中,用途最广且最实用的是输出灵敏度方程的解析法与模拟法。这些方法的基本构思是将系统的微分方程对感兴趣的变异参数求偏导数,以得输出灵敏度函数 $\sigma(t, \alpha_0)$ ,  $\sigma(t, \beta_0)$ 或 $\sigma(t, \lambda_0)$ 的微分方程。然后用解析法或模拟法解这些常被称之为“灵敏度方程”或“灵敏度模型”的方程,以得对各种参数的输出灵敏度函数。本节拟先介绍各种情况下的输出灵敏度方程。

### 一、定常参数的灵敏度方程

#### (一) 单参数、单变量系统的输出灵敏度方程

设系统的输入-输出微分方程为

$$\begin{aligned} f(y^{(n)}, \dots, \dot{y}, y, t, \alpha) &= 0 \\ y^{(i)}(t_0) &= \beta_i, \quad i=0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (5-8)$$

注意,这个微分方程可以是线性的或非线性的,方程中的系数可以是定常的,也可以是时变的。此外,由于系统的输入量 $u(t)$ 是 $t$ 的函数,所以, $u(t)$ 也已隐含于方程中了。

不难想象,方程式(5-8)的解及其各阶导数是时间 $t$ 、参数 $\alpha$ 及初始条件 $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ 的函数,也即

$$\begin{aligned} y &= y(t, \alpha, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, \alpha, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= y^{(n)}(t, \alpha, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \end{aligned} \quad (5-9)$$

将方程式(5-8)对 $\alpha$ 求导,可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0 \end{aligned}$$

因 $\partial t / \partial \alpha = 0$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} = 1$ , 故上式成为

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \quad (5-10)$$

因这个方程对任何  $\alpha$  值皆成立, 故对  $\alpha$  的额定值  $\alpha_0$  也真, 即

$$\left( \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} = 0 \quad (5-11)$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} &\triangleq \sigma(t, \alpha_0) \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} &\triangleq \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \right]_{\alpha_0} = \sigma'(t, \alpha_0) \\ &\vdots \\ \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} &\triangleq \left[ \frac{d^n}{dt^n} \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \right]_{\alpha_0} = \sigma^{(n)}(t, \alpha_0) \end{aligned} \quad (5-12)$$

故式 (5-11) 成为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \Big|_{\alpha_0} \sigma^{(n)}(t, \alpha_0) + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \Big|_{\alpha_0} \sigma^{(n-1)}(t, \alpha_0) + \dots \\ + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\alpha_0} \sigma(t, \alpha_0) = - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} \end{aligned} \quad (5-13)$$

这就是系统的输出灵敏度方程。

鉴于我们研究  $\alpha$  参数的情况, 系统微分方程的初始条件  $\beta_i, i=0, 1, \dots, n-1$  与参数  $\alpha$  无关, 故

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(t_0)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \beta_0}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial \dot{y}(t_0)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial y^{(n-1)}(t_0)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \beta_{n-1}}{\partial \alpha} = 0 \end{aligned}$$

输出灵敏度方程式 (5-13) 的初始条件成为

$$\begin{aligned} \sigma(t_0) &= 0 \\ \sigma'(t_0) &= 0 \\ &\vdots \\ \sigma^{(n-1)}(t_0) &= 0 \end{aligned} \quad (5-14)$$

总之, 系统在额定参数  $\alpha_0$  处的输出灵敏度方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \Big|_{\alpha_0} \sigma^{(n)}(t, \alpha_0) + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \Big|_{\alpha_0} \sigma^{(n-1)}(t, \alpha_0) + \dots \\ + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\alpha_0} \sigma(t, \alpha_0) = - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} \\ \sigma(t_0) = \sigma'(t_0) = \dots = \sigma^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{aligned} \quad (5-15)$$

由此可见, 尽管系统的微分方程可以是线性、非线性、定常或时变的, 它的输出灵敏度方程式 (5-15) 却总是与原方程同阶的线性常系数非齐次微分方程, 它的初始条件皆为零。

(二) 单变量系统多参数时的输出灵敏度方程

如果系统具有  $r$  个可变的参数，这些参数可用参数向量  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$  来表示。对  $\alpha$  中的某元  $\alpha_j$  而言，系统的输出灵敏度方程为

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \Big|_{\alpha_0} \sigma_j^{(n)}(t, \alpha_{j0}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\alpha_0} \sigma_j(t, \alpha_{j0}) = - \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} \quad (5-16)$$

$$\sigma_j(t_0) = \sigma_j'(t_0) = \dots = \sigma_j^{(n-1)}(t_0) = 0$$

因此，对  $r$  维的  $\alpha$  向量情况而言，这样的输出灵敏度方程及相应的零初始条件共有  $r$  个，且这些方程的型式皆相同。显然，它们可用相同的计算机程序计算，或者用同样的排版方案在模拟计算机上解题，所以计算工作量并没有太大的增加，这是十分有利的。

### (三) 线性常系数微分方程的输出灵敏度方程

我们进一步来研究方程式 (5-8) 中的  $f$  是线性常系数函数情况下的输出灵敏度方程。由公式 (5-15) 不难想象，此时，系统的输出灵敏度方程也是一个常系数的线性方程，但方程的右端却因具体情况而有所不同。

**例 5-2** 设某系统的实际微分方程为

$$a_n(\alpha)y^{(n)} + a_{n-1}(\alpha)y^{(n-1)} + \dots + a_0(\alpha)y = u(t) \quad (5-17)$$

式中  $a_i(\alpha)$ ,  $i=0, 1, \dots, n$ ——系数；

$\alpha$ ——纯量参数；

$u(t)$ ——与参数无关的系统输入量，

试求输出灵敏度方程。

**解** 此题情况下

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, t, \alpha) = a_n(\alpha)y^{(n)} + a_{n-1}(\alpha)y^{(n-1)} + \dots + a_0(\alpha)y - u(t) = 0 \quad (5-18)$$

将它的左端对参数  $\alpha$  求导，得

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

在额定参数  $\alpha_0$  处，有

$$a_{n,0}(\alpha)\sigma^{(n)}(t, \alpha_0) + a_{n-1,0}(\alpha)\sigma^{(n-1)}(t, \alpha_0) + \dots + a_{0,0}(\alpha)\sigma(t, \alpha_0) = - \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} \quad (5-19)$$

上式中， $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$  无法直接求得。为此研究式 (5-18) 第一个等式的右半部分。此时，由于认为  $f = a_n(\alpha)y^{(n)} + a_{n-1}(\alpha)y^{(n-1)} + \dots + a_0(\alpha)y - u = 0$  故可把  $f$  看成为

$$f = f[a_n(\alpha), a_{n-1}(\alpha), \dots, a_0(\alpha), y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, u] = 0$$

对  $\alpha$  求导，得

$$\left( \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_0} \frac{\partial a_0}{\partial \alpha} \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = 0$$

于是

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = - \left( \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_0} \frac{\partial a_0}{\partial \alpha} \right)$$

在  $\alpha_0$  处, 上式成为

$$\left( \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} = - \left( \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_0} \frac{\partial a_0}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0}$$

也即

$$a_{n,0} \sigma^{(n)}(t, \alpha_0) + a_{n-1,0} \sigma^{(n-1)}(t, \alpha_0) + \dots + a_{0,0} \sigma(t, \alpha_0) = - \left[ \left( \frac{\partial a_n}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} y^{(n)} + \left( \frac{\partial a_{n-1}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} y^{(n-1)} + \dots + \left( \frac{\partial a_0}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} y \right] \quad (5-20)$$

比较式 (5-19) 与 (5-20) 的右端, 可知

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} = \left( \frac{\partial a_n}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} y^{(n)}(t, \alpha_0) + \left( \frac{\partial a_{n-1}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} y^{(n-1)}(t, \alpha_0) + \dots + \left( \frac{\partial a_0}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} y(t, \alpha_0) \quad (5-21)$$

将它代入式 (5-19) 的右端, 可得系统的输出灵敏度方程及初始条件如下

$$a_{n,0}(\alpha) \sigma^{(n)}(t, \alpha_0) + a_{n-1,0}(\alpha) \sigma^{(n-1)}(t, \alpha_0) + \dots + a_{0,0}(\alpha) \sigma(t, \alpha_0) = - \left[ \left( \frac{\partial a_n}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} y^{(n)}(t, \alpha_0) + \left( \frac{\partial a_{n-1}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} y^{(n-1)}(t, \alpha_0) + \dots + \left( \frac{\partial a_0}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} y(t, \alpha_0) \right] \quad (5-22)$$

$$\sigma(t_0, \alpha_0) = \sigma'(t_0, \alpha_0) = \dots = \sigma^{(n-1)}(t_0, \alpha_0) = 0$$

**例 5-3** 上题中, 设诸  $a_i$ , ( $i=0, 1, \dots, n$ ) 本身就是可变参数  $a_i$ , 且  $a_i \neq 0$ , 试求系统输出灵敏度方程。

**解** 此题情况下, 系统的方程为

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = u(t) \quad (5-23)$$

由于诸  $a_i$ , ( $i=0, 1, \dots, n$ ) 皆为  $\alpha$  参数, 即  $\alpha = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n]^T$ , 故这是多参量的问题。

在本题情况下, 式 (5-8) 成为

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, t, \alpha) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y - u = 0 \quad (5-24)$$

将式 (5-24) 对  $a_j$  求导, 可得

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial a_j} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial a_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_j} + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial a_j} + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial a_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_0} \frac{\partial a_0}{\partial a_j} = 0$$

$$\text{也即} \quad a_n \sigma_j^{(n)}(t, a_j) + a_{n-1} \sigma_j^{(n-1)}(t, a_j) + \dots + a_0 \sigma_j(t, a_j) = - \frac{\partial f}{\partial a_j} = y^{(n)}(t, a_j)$$

在额定参数  $a_{j,0}$  处, 有

$$a_{n,0} \sigma_j^{(n)}(t, a_{j,0}) + a_{n-1,0} \sigma_j^{(n-1)}(t, a_{j,0}) + \dots + a_{0,0} \sigma_j(t, a_{j,0}) = - y^{(n)}(t, a_{j,0}) \quad (5-25)$$

$$j = 0, 1, \dots, n$$



初始为条件为

$$\sigma_j(t_0, a_{j,0}) = \sigma_j(t_0, a_{j,0}) = \dots = \sigma^{(n-1)}(t_0, a_{j,0}) = 0 \quad j = 0, 1, \dots, n$$

比较方程式 (5-17) 与 (5-25) 可见, 在额定参数  $a_0$  时, 两式的左端完全相似, 右端则不一样。在求得额定方程解的情况下, 灵敏度方程的右端便可知晓。因此, 在画得系统额定参数时的信号流图后, 便能很快画得相应的灵敏度方程的信号流图并用模拟计算机解题。这个情况示于图 5-2 中。

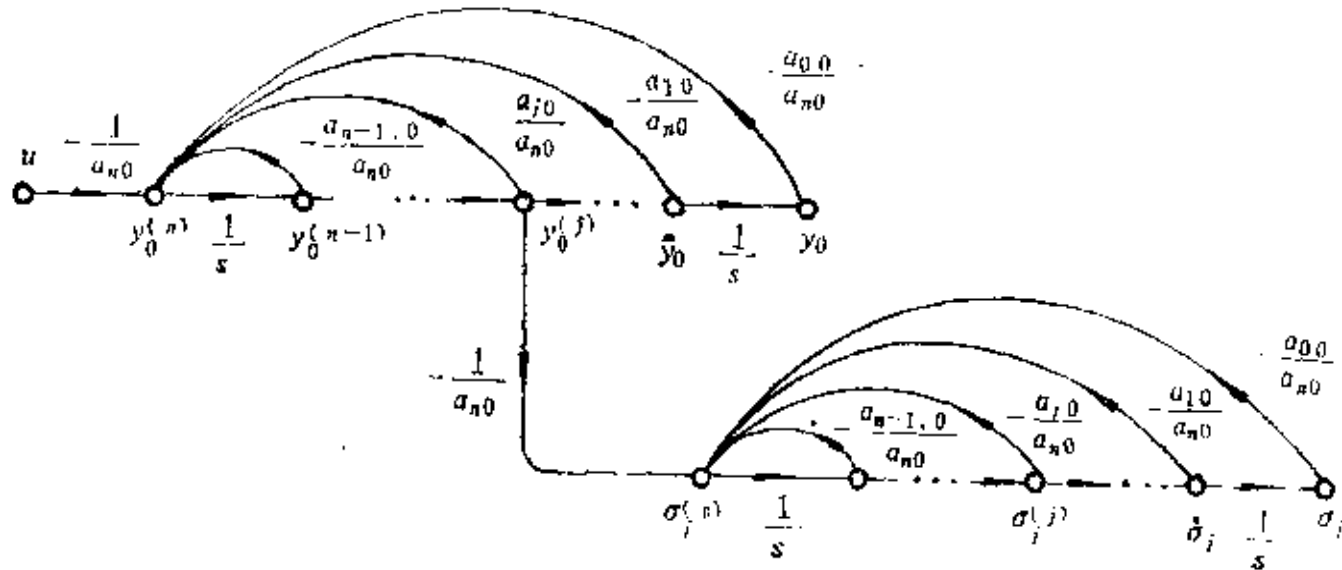


图 5-2

#### (四) 非线性定常系统的输出灵敏度方程

若  $f$  是非线性函数, 但其中系数及参数皆为定常者时, 由下例可见, 所得的灵敏度方程是同阶的变系数线性方程, 其右端则视具体情况而异。此外, 零初始条件这个特点仍保持。

**例 5-4** 求与范德堡 (Van der Pol) 方程相应的灵敏度方程。

范德堡方程是很有名的非线性方程, 它可表达如下

$$\begin{aligned} f(y, \dot{y}, y, \alpha, t) &= \ddot{y} - \alpha(1 - y^2)\dot{y} + y = 0, \\ y(0) &= y_0^0, \quad \dot{y}(0) = y_1^0 \end{aligned} \quad (5-26)$$

其中, 参数是  $\alpha$ , 将上式对参数  $\alpha$  求偏导数, 可得

$$\ddot{\sigma}(t, \alpha) - \alpha(1 - y^2)\sigma(t, \alpha) + (2\alpha y\dot{y} + 1)\sigma(t, \alpha) = (1 - y^2)\dot{y}$$

在额定参数时, 得以下灵敏度方程

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}(t, \alpha_0) - \alpha_0(1 - y_0^2)\sigma(t, \alpha_0) + (2\alpha_0 y_0 \dot{y}_0 + 1)\sigma(t, \alpha_0) &= (1 - y_0^2)\dot{y}_0, \\ \sigma(t_0, \alpha_0) &= \dot{\sigma}(t_0, \alpha_0) = 0 \end{aligned} \quad (5-27)$$

这是一个线性变系数方程, 其中, 变系数是由于非线性微分方程中有  $y^{(4)}$  与  $y$  的乘积项, 所以在求  $\partial f / \partial y^{(4)}$  时必有含  $y$  项出现之故。因此, 当  $f$  是非线性函数时, 所得的灵敏度方程为线性变系数微分方程式。

如果参数  $\alpha$  是定常的, 但  $f$  却是非线性时变函数, 则一般也得线性时变的灵敏度方程。

#### (五) 线性时变系统的输出灵敏度方程

若  $f$  是线性时变的微分方程, 所得的输出灵敏度方程的系数必与  $f$  者相同。

**例 5-5** 马蒂 (Mathieu) 方程的灵敏度方程 马蒂方程是有名的变系数方程

$$f(\ddot{y}, \dot{y}, y, \alpha, \omega, t) = \ddot{y} + (1 - \alpha \cos \omega t) y = 0, \quad (5-28)$$

$$y(0) = y_0^0, \quad \dot{y}(0) = y_1^0$$

试求对  $\omega$  的灵敏度方程。

解 将式 (5-28) 对  $\omega$  求偏导数, 有

$$\ddot{\sigma}(t, \omega) + (1 - \alpha \cos \omega t) \sigma(t, \omega) = -\alpha y t \sin \omega t$$

额定参数  $\omega_0$  时, 得灵敏度方程

$$\ddot{\sigma}(t, \omega_0) + (1 - \alpha_0 \cos \omega_0 t) \sigma(t, \omega_0) = -\alpha_0 y_0 t \sin \omega_0 t \quad (5-29)$$

$$\sigma(0) = \dot{\sigma}(0) = 0$$

式中,  $y_0$  由额定系统微分方程  $\ddot{y} + (1 - \alpha_0 \cos \omega_0 t) y = 0$  求得。

由此例可见, 就灵敏度方程的齐次部分看, 它和系统额定的原微分方程一样, 但右端的激励函数与初始条件则不同。

#### (六) 多变量系统的输出灵敏度方程

如果多变量系统有  $q$  个输出量, 则对每一个输出量,  $r$  维参数向量  $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r]^T$  会导致  $r$  个灵敏度方程。因此, 对  $q$  个输出量而言, 可得输出灵敏度方程共  $q \times r$  个。

### 二、时变 $\alpha$ 参数的输出灵敏度方程

设  $\alpha$  为非定常的时变参数, 即

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon g(t) = \alpha(t)$$

式中  $\alpha_0$ ——额定参数值;

$\varepsilon$ ——常数;

$g(t)$ ——均匀有界的可积向量函数。

由式 (4-16) 知, 输出灵敏度函数为

$$\sigma_\varepsilon \triangleq \sigma(t, \alpha_0, g) \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y[(\alpha_0 + \varepsilon g), t] - y(\alpha_0, t)}{\varepsilon}$$

以下为说明方便, 看纯量参数情况。当研究定常参数情况时, 输出灵敏度为  $\sigma(t, \alpha_0) \triangleq \left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}$ , 它对时间的导数为  $\dot{\sigma}(t, \alpha_0) \triangleq \frac{d}{dt} \left[ \left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \right]$ 。而当参数为时变者时, 情况变了, 此时, 有

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t, \alpha(t)) &= \frac{d}{dt} \sigma[t, \alpha(t)] = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \dot{\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \end{aligned} \quad (5-30)$$

其中,  $\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ 。也即, 定常参数与时变参数时灵敏度函数的导数相差  $\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ 。因此, 如果对时变参数  $\alpha$  变化很慢的话, 可以认为  $\dot{\sigma}(t, \alpha(t)) \approx \dot{\sigma}$ , 也即, 定常参数时的灵敏度方程可足够准确地表达慢变参数时的灵敏度方程。如果参数  $\alpha$  变化很快, 这样做的误差就大了。

为简单起见, 以下推导单个快变的时变参数  $\alpha$  情况下的输出灵敏度方程, 此时  $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon g(t)$ 。

对系统方程

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, t, \alpha) = 0$$

求全微分

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} dy^{(n)} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} dy^{(n-1)} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

假设考虑系统的结构不随时间变化的平稳情况, 即, 设  $\frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$ , 于是上式成为

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} dy^{(n)} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} dy^{(n-1)} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0$$

以  $\varepsilon g(t)$  代替  $d\alpha$  代入上式, 有

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} dy^{(n)} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} dy^{(n-1)} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \varepsilon g(t) = 0$$

由于时变参数时的输出量为  $y = y(t, \alpha(t))$ , 考虑此时的输出灵敏度定义式(4-16), 以  $\varepsilon$  通除上式, 在额定参数  $\alpha_0$  附近, 得

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_{\alpha_0} \sigma_y^{(n)} + \left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \right|_{\alpha_0} \sigma_y^{(n-1)} + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\alpha_0} \sigma_y = - \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} g(t) \quad (5-31)$$

显然, 上式的各初始条件值仍为零, 即

$$\sigma_y(t_0) = \sigma_{y'}(t_0) = \dots = \sigma_{y^{(n-1)}}(t_0) = 0$$

我们可以仿前定常  $\alpha$  参数的情况, 探讨系统方程  $f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, t, \alpha) = 0$  为线性定常、线性时变及非线性等各种不同情况时的相应输出灵敏度方程。不难想象, 如果  $f$  为非线性者, 则方程式(5-31)中的  $\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} \right|_{\alpha_0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  会是时变的; 如  $f$  为线性定常者, 则

$\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} \right|_{\alpha_0}$  也将是定常的。至于右端激励函数  $\left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}$  则可由系统的额定方程求得, 而函数  $g(t)$  则应该预先给定。

**例 5-6** 某系统的微分方程已知如下

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y}^2 + \alpha_2 y = u, \quad y(0) = \beta_0, \quad y(1) = \beta_1$$

设  $\alpha_1$  为时变参数, 它的变化规律为  $\alpha_1 = \alpha_{10} + \varepsilon \sin \omega t$ 。试求输出灵敏度方程。

**解** 题给系统方程为

$$f(\ddot{y}, \dot{y}, y, \alpha, \omega, t) = \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y}^2 + \alpha_2 y = u$$

用方程式(5-31)进行计算, 其中,  $\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(2)}} \right|_{\alpha_0} = 1$ ,  $\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(1)}} \right|_{\alpha_0} = 2\alpha_1 \dot{y}$ ,  $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\alpha_0} = \alpha_2$ ,  $\left. \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_0} = \dot{y}^2$ ,

$\left. \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_0} g(t) = \dot{y}^2 \sin \omega t$ , 于是, 输出灵敏度方程为

$$\ddot{\sigma}_y + 2\alpha_{10} \dot{y}_0 \sigma_{y'} + \alpha_{20} \sigma_y = - \dot{y}_0^2 \sin \omega t$$

$$\sigma_y(0) = \sigma_{y'}(0) = 0$$

上式中,  $\dot{y}_0$ ,  $\dot{y}_0^2$  由解系统方程求得  $y$  后, 再求相应的导数  $\dot{y}$ , 最后代入额定参数值后得到。



总之,  $\beta$  参数输出灵敏度方程是与系统方程同阶的线性齐次方程, 其初始条件却不全为零。

**例 5-7** 设知某系统的微分方程为

$$\dot{y} + 2ty = 0, \quad y(0) = y^0$$

且知当  $y(0) = 1$  时, 该方程的解为  $y = \exp(-t^2)$ 。若取  $y(0) = 1$  为额定参数值, 即  $y_0(0) = 1$ , 求对初始条件  $y(0)$  的输出灵敏度方程。

**解** 题给系统方程为

$$f(\dot{y}, y, t) = \dot{y} + 2ty = 0$$

将上式在额定值  $y_0(0) = 1$  处对  $y$  求导, 可得

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right|_{y_0} \frac{\partial \dot{y}}{\partial y(0)} \Big|_{y_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_0} \frac{\partial y}{\partial y(0)} \Big|_{y_0} = 0$$

于是, 得初值问题方程

$$\sigma + 2t\sigma = 0, \quad \sigma(0) = 1$$

其中,  $\sigma = \left. \frac{\partial y}{\partial y(0)} \right|_{y_0}$ 。

注意, 由于所求得的输出灵敏度方程及相应的初始条件皆与系统方程及其初始条件相同, 故可由题给信息知

$$\sigma(t) = \exp(-t^2)$$

#### 四、 $\lambda$ 参数输出灵敏度方程

##### (一) $\lambda$ 参数的输出灵敏度方程

按  $\lambda$  参数的定义及前面讲过的知识, 在  $\lambda$  参数情况下, 系统实际方程的阶次比额定方程 ( $\lambda = 0$ ) 的阶次要高。为讨论明了起见, 设仅高 1 次, 系统的实际方程设为

$$f(y^{(n+1)}, y^{(n)}, \dots, y, t, \lambda) = 0 \quad (5-33)$$

式中, 所有包含  $y^{(n+1)}$  的各项皆应乘以函数  $\phi_\nu(\lambda)$ , 下标  $\nu$  是指包含  $y^{(n+1)}$  的各项的次序。按  $\lambda$  参数的含意, 显然应有关系式:  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \phi_\nu(\lambda) = 0, \forall \nu$ 。

将式 (5-33) 对  $\lambda$  求导, 得

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} \frac{\partial y^{(n+1)}}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \lambda} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \quad (5-34)$$

考虑到上述关于引入  $\phi_\nu(\lambda)$  的用意, 不难设想, 当  $\lambda = 0$  时, 凡含  $\frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}}$  的项皆为零, 故若

取  $\sigma_\lambda \triangleq \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0}$ , 则在额定参数  $\lambda = 0$  处, 有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_{\lambda=0} \sigma_\lambda^{(n)} + \left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \right|_{\lambda=0} \sigma_\lambda^{(n-1)} + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\lambda=0} \sigma_\lambda = - \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \quad (5-35)$$

这就是  $\lambda$  参数的输出灵敏度方程。观察此方程可见, 它与定常  $\alpha$  参数时的输出灵敏度方程完全相似。不难推想, 即使实际方程比额定方程的阶次高得多, 上述这种与定常  $\alpha$  参数输出灵敏度方程的相似性仍真。然而,  $\lambda$  参数输出灵敏度方程的初始条件值却不仅不等于零, 而且还不易确定, 这是一个重要的特点。

**例 5-8** 设知某系统的实际微分方程为

$$\lambda y^{(n+1)} + (a_n + b\lambda)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = u$$

式中,  $u$  是与参数无关的输入信号;  $\lambda, a_n, \dots, a_0$  为参数。设  $\lambda$  很小, 作系统设计计算时可略去不计。求对参数  $\lambda$  的输出灵敏度方程。

**解** 由题意可知, 这里要求的是  $\lambda$  参数情况下的输出灵敏度方程式(5-35), 其中, 各参数可求之如下

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_{\lambda=0} &= (a_n + b\lambda)_{\lambda=0} &&= a_{n,0} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \right|_{\lambda=0} &= a_{n-1}|_{\lambda=0} &&= a_{n-1,0} \\ &\vdots &&\vdots \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\lambda=0} &= a_0|_{\lambda=0} &&= a_{0,0} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} &= (y^{(n+1)} + by^{(n)})_{\lambda=0} = y_0^{(n+1)} + b_0y_0^{(n)} \end{aligned}$$

于是, 输出灵敏度方程为

$$a_{n,0}\sigma_\lambda^{(n)} + a_{n-1,0}\sigma_\lambda^{(n-1)} + \dots + a_{0,0}\sigma_\lambda = -y_0^{(n+1)} - b_0y_0^{(n)}$$

(二)  $\lambda$  参数输出灵敏度方程的初值问题

1,  $\lambda$  参数输出灵敏度函数初值的突变现象  $\lambda$  参数输出灵敏度方程的初始条件不象  $\alpha$  参数时那样全部为零。这是由于系统实际方程的阶次比  $\lambda=0$  的退化方程的阶次高所造成的。例如, 设系统的实际方程是  $n+3$  阶的, 而退化方程为  $n$  阶的, 则为简化系统计算而降阶的做法导致置  $y^{(n+2)}(t_0), y^{(n+1)}(t_0), y^{(n)}(t_0)$  这三个初始条件而不顾。然而, 由退化方程出发, 却可求得初始时刻  $t_0$  时与上述三个高阶导数值相应的三个  $y$  的高阶导数值。显然, 上述两者不会正好相等。于是, 随着  $\lambda$  值的变化, 从退化方程的角度看, 发生了初始条件值的突变。这样,  $\lambda$  参数输出灵敏度方程的初始条件不仅不会等于零, 而且还不得不用  $\delta(t)$  等属于奇异函数(又称分布函数)范畴的高阶奇异函数来描述上述突变造成的影响。因而, 灵敏度方程的初值问题变得复杂化了。

**例 5-9** 设有某系统的实际方程为二阶方程

$$\lambda \ddot{y} + T\dot{y} + y = 1(t)$$

初始条件为  $y(0, \lambda) = \dot{y}(0, \lambda) = 0$ 。如果  $\lambda$  极小, 可以略而不计, 求输出灵敏度一阶导数的初始值

$$\sigma_\lambda(t_0) \triangleq \left[ \frac{d}{dt} \sigma_\lambda(t) \right]_{t_0} = \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right] \right\}_{\lambda=0, t_0} = \left[ \frac{\partial \dot{y}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0, t_0}$$

**解** 由题意知,  $\lambda$  极小, 可略而不计, 故退化方程成为

$$T\dot{y} + y = 1(t)$$

由于这是一阶方程, 所以, 原实际方程的初始条件  $\dot{y}(0, \lambda) = 0$  不考虑了。也即, 我们得到的是初值问题

$$T\dot{y} + y = 1(t), \quad y(0, 0) = 0$$

解此方程, 可得

$$y(t, 0) = 1 - e^{-t/T}$$

对上式求导, 还可求得

$$\dot{y}(t, 0) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$

故  $\dot{y}(0, 0) = \frac{1}{T}$

由以上分析可见, 实际方程退化为退化方程后, 它的初值  $\dot{y}(0, \lambda) = 0$  变为  $\dot{y}(0, 0) = 1/T$ 。换言之, 在初始时刻  $t=0$  时, 由于参数  $\lambda$  由  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$  变为  $\lambda_0 = 0$  造成的退化过程使得初值  $\dot{y}(0, \lambda) = 0$  突变为  $\dot{y}(0, 0) = \frac{1}{T}$ 。所以, 在  $t=0$  时,  $\sigma_{\lambda}(t_0) = \left( \frac{\partial \dot{y}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0, t_0}$  不存在。由此

推知, 输出灵敏度函数  $\sigma_{\lambda}$  在  $t=0$  时不连续。

2.  $\lambda$  参数输出灵敏度函数初值问题的解法 既然  $\lambda$  参数输出灵敏度函数的初值在初始时刻发生突变, 我们就可仿效经典控制理论中的处理方法以初始时刻有脉冲, 信号  $\delta(t)$  作为系统输入来解初值问题:

(1) 取  $t = +0$  进行系统灵敏度分析, 也即, 不计  $\delta(t)$  对系统灵敏度方程的影响, 灵敏度方程的初始条件皆取与  $t = +0$  相应的值。

(2) 考虑初始时刻  $t=0$ , 并引用相应的奇异函数理论进行有关的分析。如果用系统的实际方程进行研究, 则由前面的分析可知, 既然  $\lambda$  参数的输出灵敏度方程与  $\alpha$  参数者完全类似, 这些实际的初始条件当然也应与  $\alpha$  参数时一样, 全部为零。

3. 解决  $\lambda$  参数输出灵敏度函数初值问题的第一种方法。 根据上述第一种考虑, 解输出灵敏度函数初值问题的第一种方法要求确定初始条件  $\sigma(+0), \sigma'(+0), \dots, \sigma^{(n-1)}(+0)$ 。为此, 可分以下三个步骤进行:

(1) 在  $t=0$  的邻域用  $y$  的线性方程逼近系统方程, 并用适当的时间函数来逼近输入函数  $u(t)$ 。

(2) 求输出量  $y$  及其各阶导数的拉氏变式

$$Y_i(s, \lambda) \triangleq L[y^{(i)}(t, \lambda)] = s^i Y(s, \lambda), \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5-36)$$

(3) 求相应的灵敏度函数的拉氏变式

$$\Sigma_{ik}(s, 0) \triangleq \frac{\partial Y_i(s, \lambda)}{\partial \lambda_k} \Big|_{\lambda=0} = L[\sigma_{ik}(t, 0)] \quad k = 1, \dots, r, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5-37)$$

它可表达成

$$\Sigma_{ik}(s, 0) = \frac{N_{ik}(s)}{D_{ik}(s)} + P_{ik}(s) \quad (5-38)$$

式中  $N_{ik}(s), D_{ik}(s)$  ——  $s$  的多项式, 且  $\deg N_{ik}(s) < \deg D_{ik}(s)$ ;

$P_{ik}(s)$  ——  $s$  的多项式, 可为 0 或 1。

$P_{ik}(s)$  的拉氏反变换式是由各种奇异函数构成的。由于本法只考虑  $t = +0$  开始的各种情况, 所以  $P_{ik}(s)$  对  $\sigma_{ik}$  不产生任何影响, 也即,  $t > 0$  时

$$\sigma_{ik}(t, 0) \triangleq \sigma_{ik}^{(i)}(t, 0) = L^{-1} \left[ \frac{N_{ik}(s)}{D_{ik}(s)} \right] \quad (5-39)$$

(4) 应用拉氏变换的初值定理, 求灵敏度函数的各初值

$$\sigma_k^{(i)}(+0, 0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ s \frac{N_{ik}(s)}{D_{ik}(s)} \right] \quad (5-40)$$

(5) 确定灵敏度方程, 并用上述初始条件解初值问题。

**例 5-10** 试用上述方法求例 5-9 所示系统的输出灵敏度方程及初始条件。

**解** 以下对照前述步骤进行。

由于该系统的实际方程

$$\lambda \ddot{y} + T \dot{y} + y = 1(t)$$

已是  $y$  的线性方程, 且  $\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$  已是  $s$  的有理分式, 故本题情况下, 步骤

(1) 的要求已自然满足。

由步骤(2), 对实际方程进行拉氏变换, 得

$$\lambda s^2 Y + TsY + Y = 1/s$$

故得

$$Y_0(s, \lambda) = \frac{1}{s(\lambda s^2 + Ts + 1)}$$

由步骤(3), 有

$$\begin{aligned} \Sigma_0(s, 0) &\triangleq \left. \frac{\partial Y_0(s, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{1}{s(\lambda s^2 + Ts + 1)} \right] \right\}_{\lambda=0} \\ &= -\frac{s^2}{s(1+Ts)^2} = -\frac{N_0(s)}{D_0(s)} \end{aligned}$$

由此可见,  $P_0(s) = 0$ 。

按步骤(4), 由初值定理, 得初始条件

$$\sigma(0, 0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ -\frac{s^2}{(1+Ts)^2} \right] = -\frac{1}{T^2}$$

由步骤(5), 以下求灵敏度方程并解初值问题。系统实际方程可表达为

$$f(y^{(2)}, y^{(1)}, y, t, \lambda) = \lambda \ddot{y} + T \dot{y} + y - 1(t) = 0$$

故

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \right|_{\lambda=0} = T, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right|_{\lambda=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = y_0,$$

于是, 输出灵敏度方程为

$$T \sigma_{\lambda} + \sigma_{\lambda} = -y_0$$

以下求上式中要求的  $y_0$ 。由于额定参数  $\lambda_0 = 0$  时, 额定方程为

$$T \dot{y} + y = 1(t)$$

且由例 5-9 知, 初始条件为  $y(0, \lambda)|_{\lambda=0} = 0$ , 故解此初值问题得

$$y = 1 - e^{-t/T}$$

它的一阶与二阶导数分别为

$$\dot{y} = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$

$$\ddot{y} = -\frac{1}{T^2} e^{-t/T}$$

故

$$y_0 = y|_{\lambda=0} = -\frac{1}{T^2} e^{-t/T}$$

至此, 可得求  $\lambda$  参数输出灵敏度函数的初值问题的完整表达式为



$$T\sigma_x + \sigma_x = \frac{1}{T^2} e^{-t/T}$$

$$\sigma(+0, 0) = -\frac{1}{T^2}$$

解此方程，可得输出灵敏度函数为

$$\sigma(t, 0) = \left(\frac{t}{T} - 1\right) \frac{1}{T^2} e^{-t/T}, \quad t > 0$$

4. 解  $\lambda$  参数输出灵敏度函数初值问题的第二种方法。根据前述解初值问题的第二种想法，初值问题的第二种解法步骤如下所述。

(1) 仿定常  $\alpha$  参数情况，对系统的实际方程，建立  $\lambda \neq 0$  且  $t=0$  为计时点的非退化的  $\lambda$  参数输出灵敏度方程。注意，由于此时  $\lambda \neq 0$ ，故与该方程相应的各初始条件值皆为零。

(2) 将上述非退化方程进行拉氏变换。

(3) 对系统实际方程进行拉氏变换，以求得非退化灵敏度方程右端函数  $\partial f/\partial \lambda$  的拉氏变式  $L[\partial f/\partial \lambda]$ 。

(4) 解上述变换了的非退化方程，以求得  $\Sigma_x = L[\sigma_x]$ 。

(5) 令  $\lambda = 0$ 。

(6) 对  $\Sigma_x$  进行反变换，以求得  $\sigma_x(t, 0)$ 。

用这种方法时， $\lambda$  参数输出灵敏度函数初始条件的突变造成的效应体现于上述非退化灵敏度方程的右端函数  $(\partial f/\partial \lambda)_{\lambda=0}$  中。由于步骤(3)用对系统的实际方程进行拉氏变换的方法求  $L[\partial f/\partial \lambda]$ ，并于步骤(5)中取  $\lambda = 0$ ，故这种方法本身已自动地处理了  $t=0$  时  $(\partial f/\partial \lambda)_{\lambda=0}$  中的不连续现象，这当然是求之不得的。

**例 5-11** 试用本法求例 5-9 所示系统的输出灵敏度函数。

**解** 例 5-9 所示系统的系统实际方程为

$$\lambda \ddot{y} + T \dot{y} + y = 1(t)$$

初始条件为

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

由步骤(1)，仿定常  $\alpha$  参数情况求非退化灵敏度方程。为此，把系统实际方程看成

$$f(y, \dot{y}, y, \lambda, t) = \lambda \ddot{y} + T \dot{y} + y - 1(t) = 0$$

将上述方程对  $\lambda$  求导

$$\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$$

得非退化灵敏度方程

$$\lambda \ddot{\sigma}_x + T \dot{\sigma}_x + \sigma_x = -\dot{y}_x$$

由于  $f$  中不含初始条件，故各初始条件值皆为零，即

$$\sigma_x(0, \lambda) = 0, \quad \dot{\sigma}_x(0, \lambda) = 0$$

前式中， $\sigma_x \triangleq \partial y/\partial \lambda$ ， $\dot{y}_x$  则为系统实际方程解的二阶导数。

按步骤(2)，将前式拉氏变换之，得

$$\lambda s^2 \Sigma_x + T s \Sigma_x + \Sigma_x = L\left[-\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right] = -s^2 Y_x$$

由步骤(3), 为求上式中的  $L\left[-\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right]$ , 将系统实际方程进行拉氏变换, 得

$$\lambda s^2 Y_\lambda + TsY_\lambda + Y_\lambda = 1/s$$

由此可求得

$$s^2 Y_\lambda = \frac{s}{\lambda s^2 + Ts + 1}$$

按步骤(4), 将上式的结果代入前面的公式中, 可求得

$$\Sigma_\lambda = -\frac{s}{(\lambda s^2 + Ts + 1)^2}$$

由步骤(5), 令上式中的  $\lambda = 0$ , 得

$$\Sigma_\lambda \Big|_{\lambda=0} = -\frac{s}{(Ts + 1)^2}$$

最后, 按步骤(5), 对上式进行反变换, 便得要求的输出灵敏度函数

$$\sigma_\lambda(t, 0) = \left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T^2}\right)e^{-t/T}$$

显然, 这个结果与用前面第一法求得者相同。

## 五、简要的结论

以下以定理的形式对以上各种情况的输出灵敏度函数的初值问题进行归纳。

**定理 5-1** 不论原系统的特性如何, 输出灵敏度方程总是与系统的额定方程同阶的线性微分方程。对  $\alpha$  参数情况而言, 各初始条件值皆为零。对  $\beta$  参数时, 初始条件值是 1 或 0。至于  $\lambda$  参数时, 则应用专门的方法进行初始条件的确定。

## 第三节 高阶灵敏度方程

### 一、概述

如果参数的变化范围很大, 由公式(3-6)可见, 只用一阶灵敏度函数求取参数变化的诱发输出量, 会造成很大的误差。在这种情况下, 希望还能求得二阶以上的高阶灵敏度函数, 以保证参数灵敏度计算的准确度。由高阶灵敏度函数的定义 3-2 知, 在单参数情况下, 二阶灵敏度该是  $v \triangleq \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha_0}$ , 而在双参数  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T$  情况下, 混合型的偏导数  $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}\right)_{\alpha_0} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1}\right)_{\alpha_0}$  就成为相应的灵敏度函数了。综上所述可见, 有两种不同的高阶灵敏度函数的定义。

以下, 以单参数  $\alpha$  情况为例, 推导二阶输出灵敏度方程。

### 二、二阶输出灵敏度方程

设系统的实际方程为

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, t, \alpha) = 0$$

将它对参数  $\alpha$  求导

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \quad (5-41)$$

由于  $f$  对  $y$  的各阶导数仍为  $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, t, \alpha$  的函数, 为表达清晰, 设取以下记法

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(r)}} \triangleq g_r[y^{(n)}(t, \alpha), y^{(n-1)}(t, \alpha), \dots, y(t, \alpha), \alpha, t] \triangleq h_r(t, \alpha) \quad r=0, 1, \dots, n \quad (5-42)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} \triangleq g_{n+1}[y^{(n)}(t, \alpha), y^{(n-1)}(t, \alpha), \dots, y(t, \alpha), \alpha, t] \triangleq h_{n+1}(t, \alpha) \quad (5-43)$$

于是, 式 (5-41) 成为

$$h_n(t, \alpha) \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} + h_{n-1}(t, \alpha) \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha} + \dots + h_0(t, \alpha) \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -h_{n+1}(t, \alpha) \quad (5-44)$$

将上式对  $\alpha$  求导, 也即, 求对  $\alpha$  的二阶导数, 有

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial h_n(t, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} + h_n(t, \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} \right] \right\} + \left\{ \frac{\partial h_{n-1}(t, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha} \right. \\ & \quad \left. + h_{n-1}(t, \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha} \right] \right\} + \dots + \left\{ \frac{\partial h_0(t, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right. \\ & \quad \left. + h_0(t, \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right] \right\} = - \frac{\partial h_{n+1}(t, \alpha)}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (5-45)$$

其中,

$$\frac{\partial h_r}{\partial \alpha} = \frac{\partial g_r}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial g_r}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial g_r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial g_r}{\partial \alpha}, \quad r=0, 1, \dots, n+1 \quad (5-46)$$

将式 (5-45) 中各项归并之,

$$\begin{aligned} & h_n(t, \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} \right] + h_{n-1}(t, \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha} \right] + \dots + h_0(t, \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right] \\ & = - \frac{\partial h_n(t, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial \alpha} - \frac{\partial h_{n-1}(t, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha} - \dots - \frac{\partial h_0(t, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial h_{n+1}}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (5-47)$$

考虑到以下关系

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha_0} \triangleq \nu, \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} \right) \right]_{\alpha_0} \triangleq \nu', \dots, \left[ \frac{d^n}{dt^n} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} \right) \right]_{\alpha_0} \triangleq \nu^{(n)} \quad (5-48)$$

在额定参数  $\alpha_0$  处, 得关系式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \Big|_{\alpha_0} \nu^{(n)} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \Big|_{\alpha_0} \nu^{(n-1)} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\alpha_0} \nu \\ & = - \frac{\partial h_0}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} \sigma - \frac{\partial h_1}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} \sigma' - \dots - \frac{\partial h_n}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} \sigma^{(n)} - \frac{\partial h_{n+1}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} \end{aligned} \quad (5-49)$$

这个式子的齐次部分显然与一阶输出灵敏度方程的齐次部分完全相似, 而其右端则含有低阶灵敏度函数或额定输出量的导数项。

由于系统方程的诸初始条件  $\beta_i(t_0)$ ,  $i=0, 1, \dots, n-1$  与  $\alpha$  无关, 故  $\frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha} = 0, i=0, 1, \dots,$

$n-1$ 。正因此,  $\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \alpha} = \frac{\partial^3 \beta_i}{\partial \alpha^3} = \dots = \frac{\partial^{(n-1)}(\beta_i)}{\partial \alpha^{(n-1)}} = 0$ 。即:  $y^{(i)}(t_0) = 0, i = 0, 1, \dots, n-1$ 。总之,  $\alpha$  参数的二阶输出灵敏度方程的初值问题归结为零初始条件下的方程式(5-49)。

**例题 5-12** 求以下系统对各系数  $a_j, j = 0, 1, \dots, n$  的二阶输出灵敏度方程

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = u(t)$$

**解** 由系统方程, 移项之, 有

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y - u(t) = 0$$

为求各阶输出灵敏度方程, 可把它看成以下方程

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, u(t)) = 0$$

将上式对各系数  $a_j, j = 0, 1, \dots, n$  求导, 可得

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial a_j} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial a_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_j} = - \frac{\partial f}{\partial a_j}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

于是, 有

$$a_n \frac{\partial y^{(n)}}{\partial a_j} + a_{n-1} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial a_j} + \dots + a_0 \frac{\partial y}{\partial a_j} = - y^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

重复上述过程, 可求得二阶灵敏度方程, 或者, 等效地, 将上式对  $a_j$  求导

$$a_n \frac{\partial^2 y^{(n)}}{\partial a_j^2} + a_{n-1} \frac{\partial^2 y^{(n-1)}}{\partial a_j^2} + \dots + \frac{\partial y^{(j)}}{\partial a_j} + \frac{\partial^2 y^{(j)}}{\partial a_j^2} a_j + \dots + a_0 \frac{\partial^2 y}{\partial a_j^2} = - \frac{\partial y^{(j)}}{\partial a_j}$$

移项之, 得

$$a_n \frac{\partial^2 y^{(n)}}{\partial a_j^2} + a_{n-1} \frac{\partial^2 y^{(n-1)}}{\partial a_j^2} + \dots + a_0 \frac{\partial^2 y}{\partial a_j^2} = - 2 \frac{\partial y^{(j)}}{\partial a_j}$$

代入额定参数值, 便得二阶灵敏度方程

$$a_{n0} y_j^{(n)} + a_{n-1,0} y_j^{(n-1)} + \dots + a_{00} y_j = - 2 \sigma_j^{(j)}$$

由于上述, 不难推知, 高阶灵敏度方程可仿照上述二阶灵敏度方程同理推得。

以下定理是上述内容的总结:

**定理 5-2** 任何阶的灵敏度方程皆具有相同的齐次部分, 它的特点是: 线性, 且与系统额定方程同阶, 它们的右端则由低阶灵敏度函数或额定输出量的导数项构成。

#### 第四节 灵敏度方程的解法

在学习了列写各种系统输出灵敏度方程的方法后, 现在来讨论它们的解法。由于各种输出灵敏度方程中常含有与系统额定方程的解有关的量, 所以, 如果参数向量为  $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r]^T$ , 为解灵敏度方程, 可以利用以下两个常微分方程:

(1) 系统的额定方程

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, t, \alpha) = 0 \quad (5-50)$$

及各初始条件值  $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ 。

(2) 系统的输出灵敏度方程

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \Big|_{\alpha_0} \sigma_j^{(n)} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \Big|_{\alpha_0} \sigma_j^{(n-1)} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\alpha_0} \sigma_j = - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0}, \quad j=1, 2, \dots, r \quad (5-51)$$

及相应的各初始条件值  $\sigma_j(0), \dots, \sigma_j^{(n-1)}(0)$ 。

以上两个微分方程构成了一个解输出灵敏度方程的微分方程组，常称它为组合系统。

解组合系统的方法分两大类，一为解析法，另一为结构模拟法。本节简要介绍这两种方法。

### 一、解析法

解析法的任务是解输出灵敏度方程及系统额定方程。前者在一般情况下是线性时变方程。一般讲，宜用微分算符  $p$  构成的算子来解灵敏度方程。设以  $H(p, \alpha_0)$  表示线性算子，

$u_1(t, \alpha_0) \triangleq - \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0}$ ，则

$$H(p, \alpha_0) \sigma_j(t, \alpha_0) = u_1(t, \alpha_0) \quad (5-52)$$

如进一步用线性或非线性的算子  $K(p, \alpha_0)$  表示  $u_1(t, \alpha_0)$  与系统输入量  $u(t)$  的关系，即

$$u_1(t, \alpha_0) \triangleq K(p, \alpha_0) u(t) \quad (5-53)$$

则前式成为

$$H(p, \alpha_0) \sigma_j(t, \alpha_0) = K(p, \alpha_0) u(t) \quad (5-54)$$

解此方程，可得

$$\sigma_j(t, \alpha_0) = H^*(p, \alpha_0) K(p, \alpha_0) u(t) \quad (5-55)$$

式中  $H^*(p, \alpha_0)$  ——  $H(p, \alpha_0)$  的反运算子，即  $H^*(p, \alpha_0) H(p, \alpha_0) = 1$

如果灵敏度方程为定常的，有  $H^*(p, \alpha_0) = H^{-1}(p, \alpha_0)$ ，经拉氏变换后，可得

$$\sigma(t, \alpha_0) = L^{-1} \left[ \frac{U_1(s, \alpha_0)}{H(s, \alpha_0)} \right] = L^{-1} \left[ \frac{K(s, \alpha_0)}{H(s, \alpha_0)} \right] U(s) \quad (5-56)$$

**例 5-13** 设某系统的传递函数为

$$G(s, \tau) = \frac{Y(s, \tau)}{U(s)} = [(1+Ts)^2(1+\tau s)]^{-1}$$

其中，参数  $T$  及  $\tau$  的额定值分别为  $T_0 = 10$  秒， $\tau_0 = 9$  秒。试求输入信号  $u(t) = 1(t)$  时，系统对参数  $\tau$  的输出灵敏度函数。

**解** 本题情况下，仅知系统的传递函数，故需先求灵敏度方程。为此，由系统实际方程出发，并代入  $U(s) = L[u(t)] = 1/s$ ，有

$$(1+Ts)^2(1+\tau s)Y(s, \tau) = \frac{1}{s}$$

将上式在额定参数  $\tau_0$  附近对  $\tau$  求导，并令  $\Sigma(s, \tau_0) \triangleq \frac{\partial Y(s, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau_0} \triangleq L[\sigma]$  可得在  $\tau_0$  处

的灵敏度方程的运算式为

$$(1+T_0s)^2(1+\tau_0s)\Sigma(s, \tau_0) = -(1+T_0s)^2sY(s, \tau_0)$$

于是  $\Sigma(s, \tau_0) = -\frac{s}{1+\tau_0s} Y(s, \tau_0)$

$$= -\frac{s}{1+\tau_0 s} \left[ \frac{1}{(1+T_0 s)^2(1+\tau_0 s)} U(s) \right]$$

$$= -\frac{1}{(1+T_0 s)^2(1+\tau_0 s)^2}$$

进行拉氏反变换, 可得

$$\sigma(t, \tau_0) = L^{-1}[\Sigma(s, \tau_0)]$$

$$= \left[ \frac{2T_0\tau_0}{(T_0-\tau_0)^3} - \frac{t}{(T_0-\tau_0)^2} \right] e^{-t/T_0} + \left[ \frac{2T_0\tau_0}{(\tau_0-T_0)^3} - \frac{t}{(\tau_0-T_0)^2} \right] e^{-t/\tau_0}$$

代入  $T_0, \tau_0$  的具体数据, 最后得灵敏度函数为

$$\sigma(t, \tau_0) = (180-t)e^{-t/110} - (180+t)e^{-t/90}$$

如用算子法来解本题, 则由前面的灵敏度方程的运算式可知, 算子  $H(s, \alpha_0)$  及  $K(s, \alpha_0)$  分别为

$$H(s, \alpha_0) = (1+T_0 s)^2(1+\tau_0 s)$$

$$K(s, \alpha_0) = -(1+T_0 s)^2 s \frac{1}{(1+T_0 s)^2(1+\tau_0 s)}$$

因此, 可由公式 (5-55) 求得  $\sigma(t, \tau_0)$

应该强调, 用运算符  $p$  及算子解题时, 应特别注意以下各关系式

$$p \frac{1}{p} = 1 \quad (5-57)$$

$$\frac{1}{p} p \neq 1 \quad (5-58)$$

此外, 若  $H(p) = G(p) \frac{N(p)}{G(p)D(p)}$ , 则有  $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ 。然而, 若  $H(p) = \frac{1}{G(p)} \times \frac{G(p)N(p)}{D(p)}$ , 则一般情况下,  $H(p) \neq \frac{N(p)}{D(p)}$ 。以上各关系的证明详见文献[8]。

## 二、变元法

变元法是结构模拟法的一种, 它的特点是无需知道系统数学模型的解析表达式, 仅需知道系统的结构图及受参数变化影响的变元部分的传递函数及其变化, 便能求得整个系统对该参数的输出灵敏度。显然, 这对分析复杂的大系统的参数灵敏度是十分有利的。以下以定常系统为例, 介绍它的原理。

### (一) 变元法原理

设有受一个  $\alpha$  参数变化影响的某线性定常系统, 其中仅有一个受  $\alpha$  参数影响的变元子系统  $G(s, \alpha)$ , 整个系统的输入量与参数  $\alpha$  无关, 初始条件也与参数  $\alpha$  无关, 在参数为额定值时, 系统的情况示于图 5-3。注意, 图中及以后的讨论中时域量用英文小写字母表示, 相应的频域量则用大写英文字母表示。

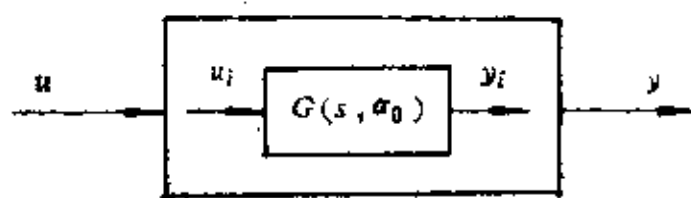


图 5-3

现在假设参数变为  $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ , 于是, 变元的传递函数相应地变为  $G(s, \alpha) = G(s, \alpha_0) + \Delta G = G_0 + \Delta G$ 。由于可能存在的内反馈作用, 变元的输入量  $u_i$  变为  $u_i + \Delta u_i$ , 在它的作用

下，变元的输出量成了  $y_i + \Delta y_i$ 。用频域量描写之，有

$$Y_i + \Delta Y_i = (U_i + \Delta U_i)(G_0 + \Delta G) = (U_i + \Delta U_i)G_0 + (U_i + \Delta U_i)\Delta G \quad (5-59)$$

这时，整个系统的输出量也变为  $y + \Delta y$ ，如图 5-4 所示。

如果参数扰动  $\Delta\alpha$  极小，它造成的变元传递函数的变化  $\Delta G$  也很小，因此，式 (5-59) 中，乘积项  $\Delta U_i \Delta G$  是高阶微量，可以不计。于是，在一次近似的前提下，式 (5-59) 成为

$$\begin{aligned} Y_i + \Delta Y_i &= (U_i + \Delta U_i)G_0 + U_i \Delta G \\ &= (U_i + \Delta U_i)G_0 + U_i \Delta G \end{aligned} \quad (5-60)$$

这个公式可用图 5-5 描绘。式中各量皆为图中各量的拉氏变式。

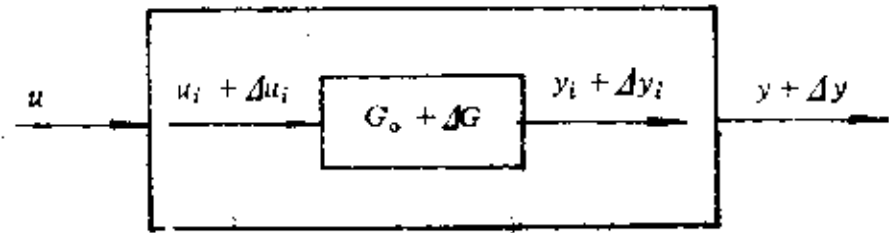


图 5-4

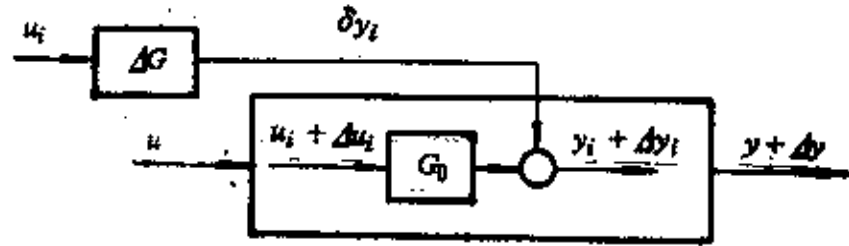


图 5-5

由于  $Y_i = G_0 U_i$ ，加之考虑叠加原理，可把由于  $\alpha$  变化造成的相应的变量间的关系与额定参数时的变量间的关系分开考虑。基于这个基本观点，再考虑到  $U_i$  是额定参数时变元  $G_0$  的输入，可以用引入额定系统模型及系统灵敏度模型的办法，来描绘只考虑参数变化所诱发的各增量间关系的系统模型，如图 5-6 所示。

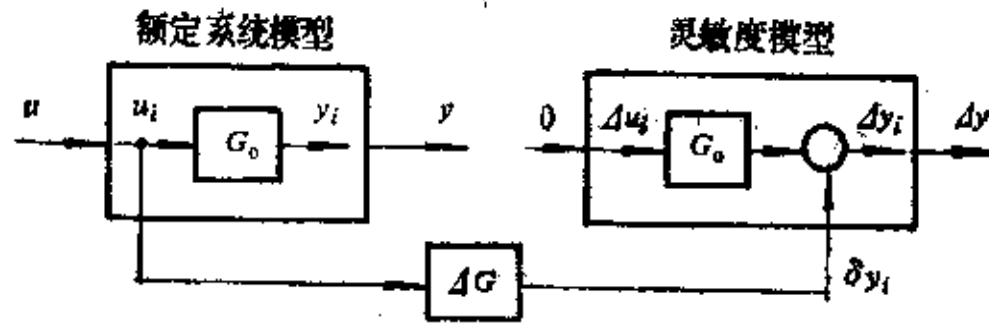


图 5-6

因为我们的目的是测量系统的输出灵敏度函数  $\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha_0}$ ，而不是  $\Delta y$ ，所以，我们可在图 5-6 中凡与参数变化  $\Delta\alpha$  有关的各量处皆除以  $\Delta\alpha$ ，且令  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ ，经这样处理后，最后得图 5-7。用这个图便能求得变元的参数变化所造成的系统的输出参数灵敏度函数  $\left.\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{\alpha_0} = \sigma(t, \alpha_0)$ 。

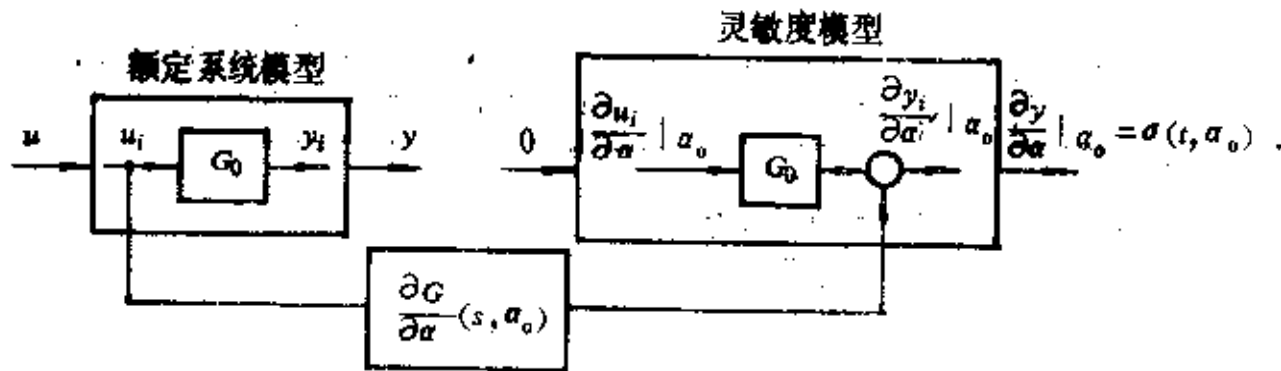


图 5-7

**例 5-14** 设有系统如图 5-8 所示。由于除变元外不知该系统中其它各子系统的确切传递函数。故只得采用变元法求取输出灵敏度函数。试画出用该法求输出灵敏度函数  $\sigma = \frac{\partial y}{\partial T} \Big|_{x_0}$  的结构图。

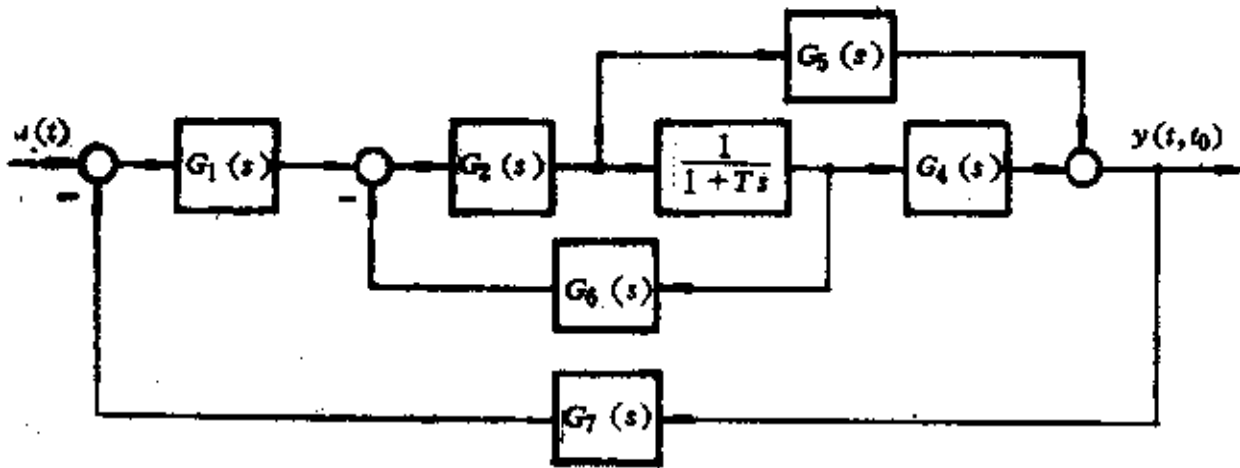


图 5-8

**解** 由前述变元法原理图 5-7 知, 为求取输出灵敏度函数  $\sigma = \frac{\partial y}{\partial T} \Big|_{x_0}$  需要画出额定参数时的系统模型, 输入为零时的灵敏度模型, 及一附加联接块  $\partial G/\partial \alpha$ 。因  $\alpha = T$ , 变元的传递函数  $G = \frac{1}{1+Ts}$ , 故联接块的传递函数为

$$\frac{\partial G}{\partial T} \Big|_{x_0} = \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{1+Ts} \right) \right]_{x_0} = - \frac{s}{(1+T_0s)^2}$$

结果, 求取  $\sigma = \frac{\partial y}{\partial T} \Big|_{x_0}$  的结构图如图 5-9 所示。

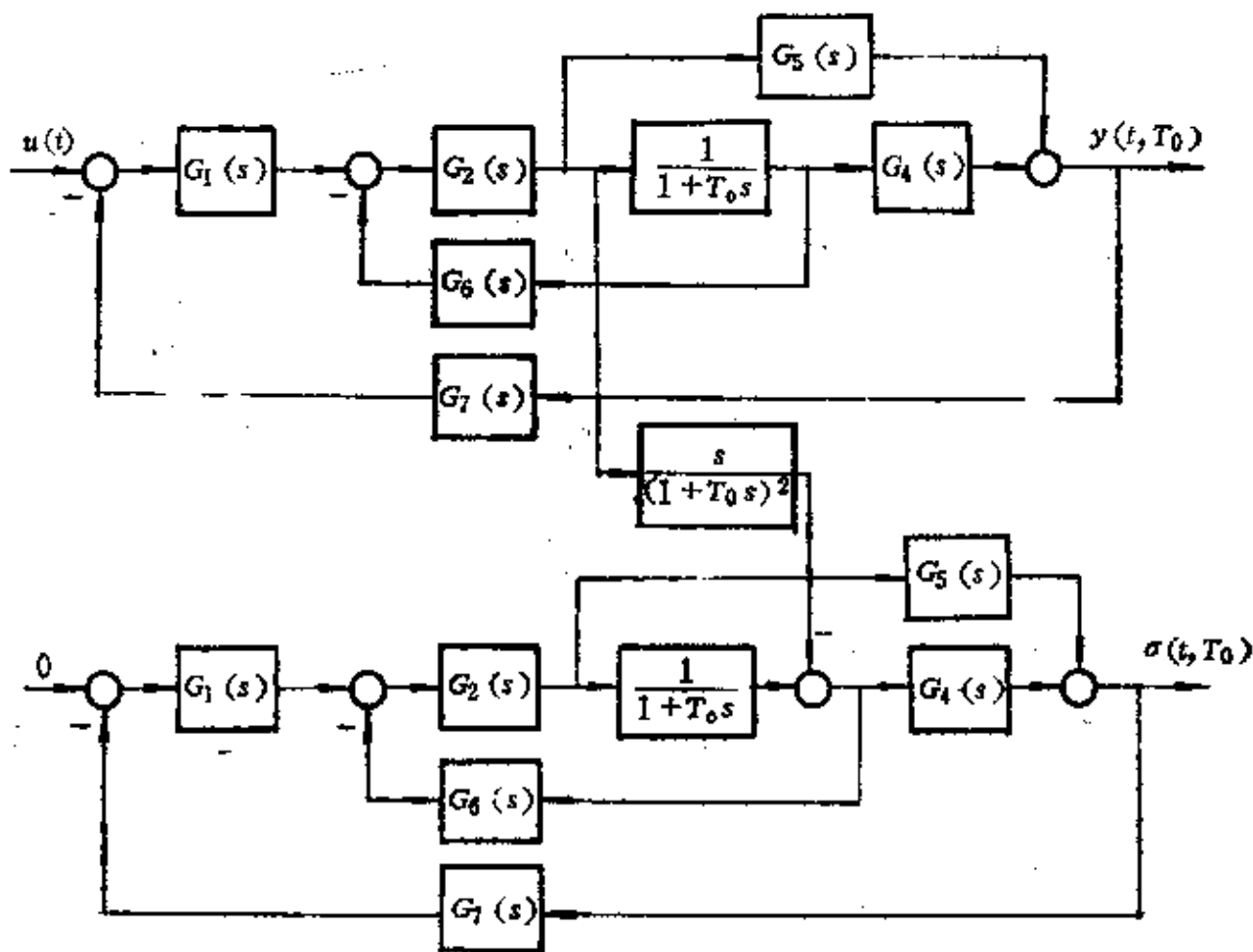


图 5-9



最后, 还应说明几点:

(1) 以上变元法的原理可以图 5-6 作进一步说明。由图中的联接块部分可见,  $\delta Y_i(s, \alpha) = \Delta G(s, \alpha) U_i(s, \alpha)$ , 故拼凑之, 有

$$\Delta Y(s, \alpha) = U(s) \frac{U_i(s, \alpha)}{U(s)} \Delta G(s, \alpha) \frac{\Delta Y(s, \alpha)}{\delta Y_i(s, \alpha)} \quad (5-61)$$

为书写简便计, 令

$$G_1(s, \alpha) \triangleq \frac{U_i(s, \alpha)}{U(s)}, \quad G_2(s, \alpha) \triangleq \frac{\Delta Y(s, \alpha)}{\delta Y_i(s, \alpha)} \quad (5-62)$$

于是, 式 (5-61) 成为

$$\Delta Y(s, \alpha) = G_1(s, \alpha) G_2(s, \alpha) \Delta G(s, \alpha) U(s) \quad (5-63)$$

以  $\Delta \alpha$  通除上式并取  $\Delta \alpha \rightarrow 0$ , 便得在  $\alpha_0$  值邻域的输出灵敏度函数的拉氏变换表达式

$$\Sigma(s, \alpha_0) = L[\sigma(t, \alpha_0)] = G_1(s, \alpha_0) G_2(s, \alpha_0) \left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} U(s) \quad (5-64)$$

现在来看上式中  $G_1(s, \alpha_0) G_2(s, \alpha_0)$  的意义。假如我们按定义直接求  $\Sigma(s, \alpha_0)$ , 并令系统的传递函数为  $F(s, \alpha)$ , 则有

$$\begin{aligned} \Sigma(s, \alpha_0) &\triangleq \left. \frac{\partial Y(s, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{\partial [F(s, \alpha) U(s)]}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{\partial F(s, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} U(s) \\ &= \left[ \frac{\partial F(s, \alpha)}{\partial G(s, \alpha)} \frac{\partial G(s, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha_0} U(s) \end{aligned} \quad (5-65)$$

式中,  $G(s, \alpha)$  为变元的传递函数。

比较式 (5-64) 和式 (5-65), 可见

$$G_1(s, \alpha_0) G_2(s, \alpha_0) = \frac{\partial F(s, \alpha)}{\partial G(s, \alpha)} \quad (5-66)$$

这个式子说明,  $G_1(s, \alpha_0)$  与  $G_2(s, \alpha_0)$  的串联联接等效于整个系统的传递函数对变元的绝对灵敏度。因此, 用变元法时, 为测量由于参数变化而造成的输出灵敏度函数, 无需知道整个系统的传递函数与变元传递函数的解析关系, 仅需知道系统的结构图, 即知道系统的结构就行了。

(2) 如果感兴趣的参数有  $r$  个, 则为求对  $r$  个参数的输出灵敏度, 需要一个额定的系统模型及  $r$  个灵敏度模型。

(3) 如果系统中有  $q$  个子系统受同一参数  $\alpha$  的影响, 则额定的系统模型仍然只需一个, 灵敏度模型也只需一个, 但在这两个模型中该引出的变元及中间联接块也应相应增加。

(二) 用变元法求  $\lambda$  参数情况的输出灵敏度函数

变元法特别适宜于求解  $\lambda$  参数的输出灵敏度函数, 这是因为使用变元法可以避开  $\lambda$  参数灵敏度方程的初始条件问题。具体的求法如下: 先按系统的实际方程, 模仿上述  $\alpha$  参数情况的变元法, 进行类似的处理。在求得  $\partial G / \partial \lambda$  后, 再令  $\lambda = 0$ , 这样, 就把复杂的初始条件问题避开了。请看下例。

**例 5-15** 试用变元法求例 5-9 所示系统在  $u(t) = 1(t)$  作用下对参数  $\lambda$  的灵敏度函数。

**解** 例 5-9 中的系统实际方程为

$$\lambda \ddot{y} + T \dot{y} + y = u, \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

其中,  $u(t) = 1(t)$ 。

由上述方程出发, 可求得

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\lambda s^2 + Ts + 1} = \frac{\frac{1}{\lambda s^2}}{1 + \frac{T}{\lambda} \frac{1}{s} + \frac{1}{\lambda s^2}}$$

于是, 按梅逊公式, 可画得系统实际方程的信号流图如图 5-10 所示。

仿  $\alpha$  参数情况来处理本题。由变元法原理可知, 系统的灵敏度模型应与上述系统实际模型一样, 所异者仅在输入信号为零, 输出信号为  $\sigma(t, \alpha_0)$ 。系统灵敏度模型如图 5-11 所示。

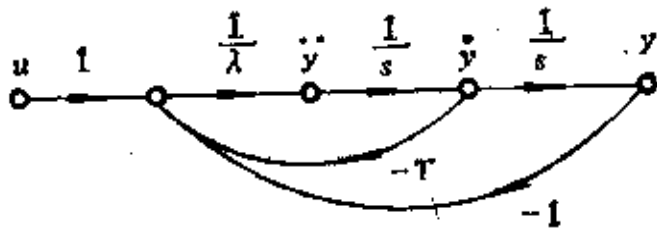


图 5-10

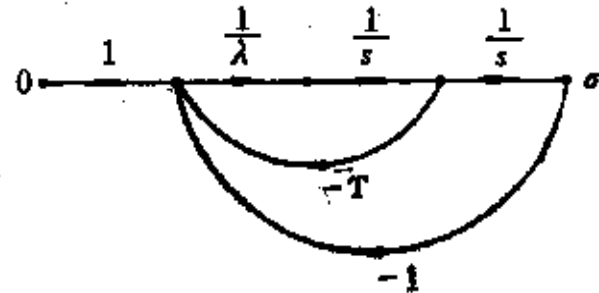


图 5-11

由于  $\lambda \neq 0$  时的系统变元传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{\lambda}$$

故变元法中的中间块的传递函数为

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\lambda^2}$$

基于上述, 可得以下按变元法测量  $\partial y / \partial \lambda$  的完整测量线路图 5-12。

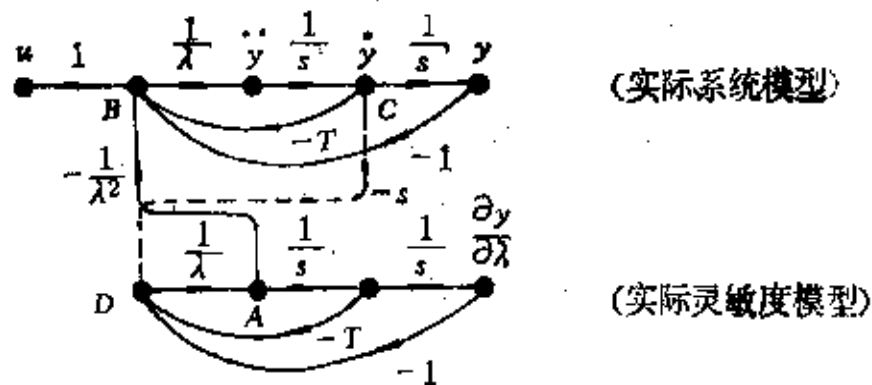


图 5-12

在求得  $\partial G / \partial \lambda = -\frac{1}{\lambda^2}$  后, 令  $\lambda = 0$ , 可得  $\partial G / \partial \lambda = -\infty$ , 故图 5-12 中的 A 点无法确定。为保证 A 点的唯一性, 可以在保证传递函数值不变的前题下, 把中间联接块改由图中的 B 点出发, 经 C、D 最后到 A 点。这样, 由 C 到 D 的传递函数变为  $-s$ , 如图 5-13 所示。

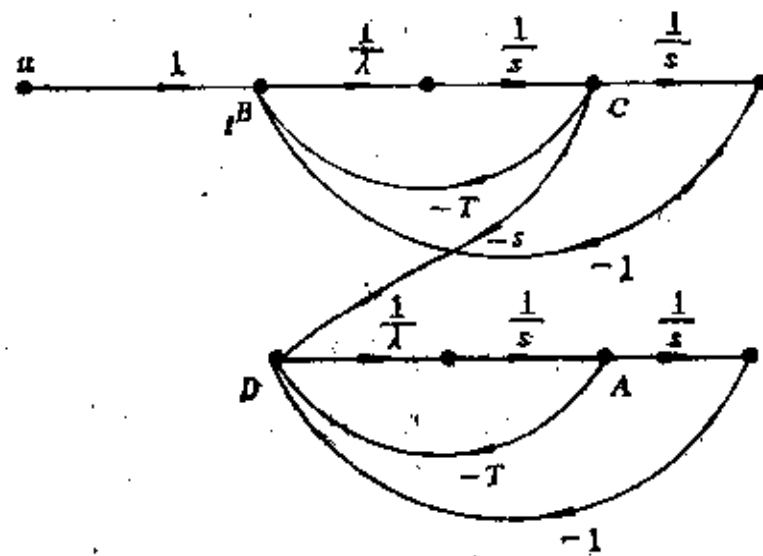


图 5-13

令  $\lambda = 0$ , 可把图 5-13 简化成图 5-14。

为消除微分环节, 可把图 5-14 变成图 5-15, 并推得与之等效的结构图 5-16。

为消除微分环节, 可把图 5-14 变成图 5-15, 并推得与之等效的结构图 5-16。

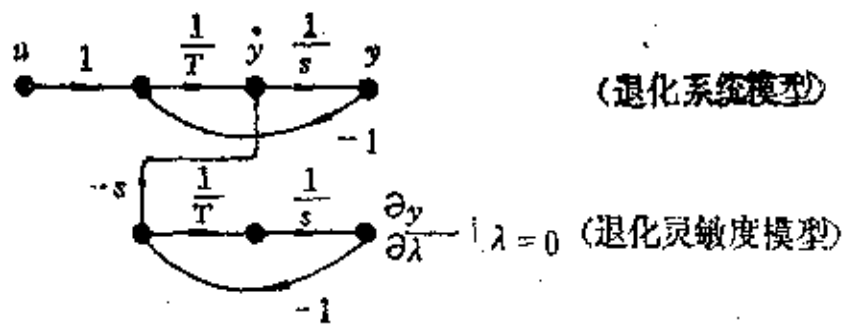


图 5-14

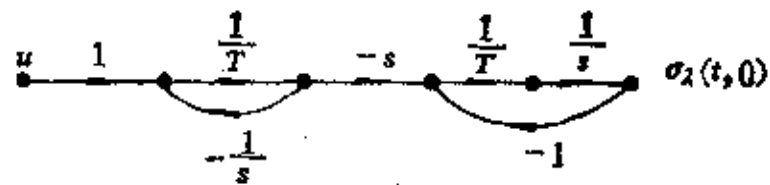


图 5-15

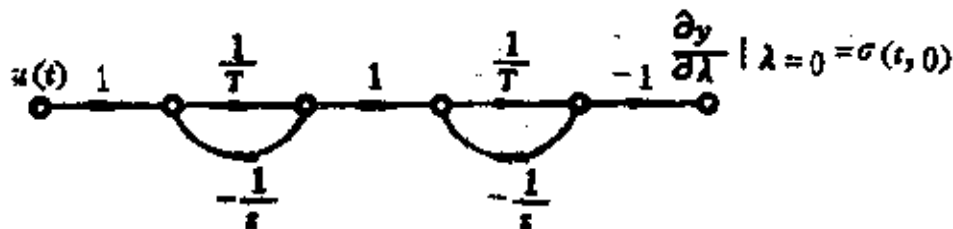


图 5-16

顺便指出，用图 5-16 可极方便地求得初始条件  $\sigma_\lambda(+0,0)$ 。这是因为，由拉氏变换的初值定理，可得

$$\sigma_\lambda(+0,0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \Sigma_\lambda(s,0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1/T}{1 + \frac{1}{T} \frac{1}{s}} \frac{1/T}{1 + \frac{1}{T} \frac{1}{s}} \frac{1}{s} = 1/T^2$$

由此可见，只需在图 5-16 中令  $s \rightarrow \infty$  即可求得  $\sigma_\lambda(+0,0)$ 。显然，用这种办法求  $\lambda$  参数输出灵敏度方程的初始条件是十分省事的。

### (三)用变元法求 $\beta$ 参数时的输出灵敏度函数

当系统方程的初始条件作为可变参数时，由于整个系统的结构与初始条件无关，所以灵敏度模型与原系统有完全一样的结构，它的输入讯号则是系统的输入  $u$  与各初始条件  $y^j(0) = \beta_j, j=0,1,\dots,n-1$ 。如果初始条件  $y^i(0) = \beta_i$  是感兴趣的参数，则将这些输入讯号对参数  $\beta_i$  求导的结果为  $\frac{\partial u}{\partial \beta_i} = 0, \frac{\partial \beta_j}{\partial \beta_i} = 0, j \neq i, \frac{\partial \beta_i}{\partial \beta_i} = 1$ 。结果的灵敏度模型如图 5-17 所示。

**例 5-16** 设有图 5-18 所示的状态反馈系统。如果初始条件向量  $y(0) = [y(0) \quad \dot{y}(0)]$  中的  $\dot{y}(0)$  为可变的参数，试用变元法求系统的输出灵敏度函数。

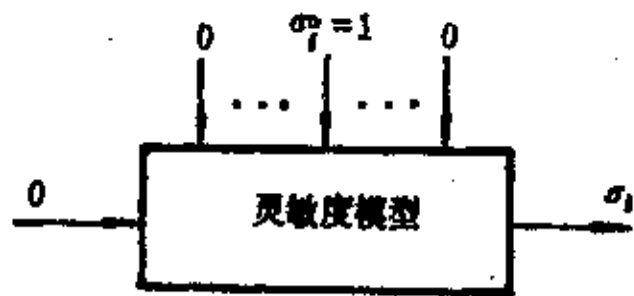


图 5-17

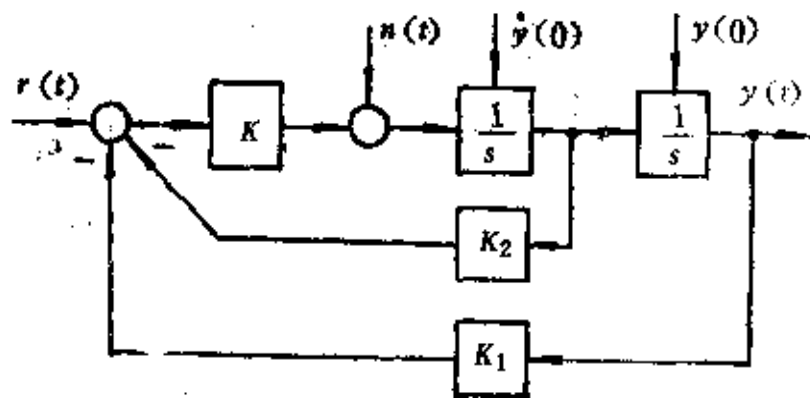


图 5-18

解 此时, 系统的灵敏度模型如图 5-19 所示。它就是变元法中的组合系统。因此, 不难求得输出灵敏度函数  $\sigma(t, y_0(0))$ 。

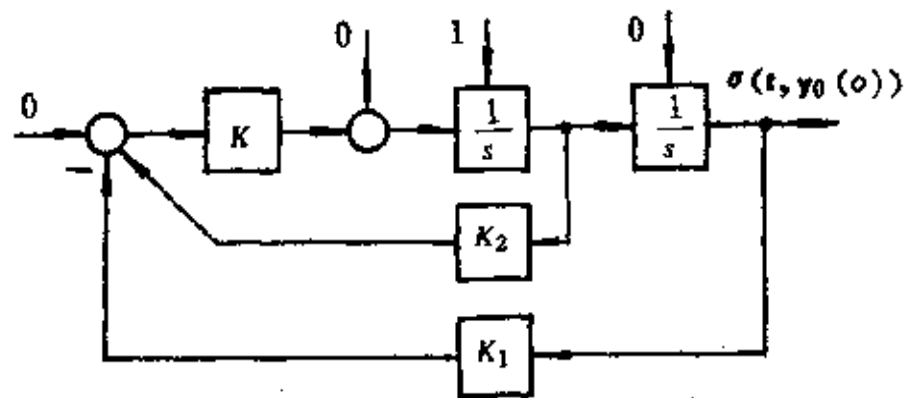


图 5-19

## 第五节 灵敏度点法

在许多情况下, 常常需要同时知道系统对所有参数的输出灵敏度函数。在这种情况下, 如果应用变元法, 就需要建立许多灵敏度模型, 很不经济, 于是, 出现了本节要介绍的灵敏度点法。这种方法能够利用一个灵敏度模型同时测量一个线性系统对所有参数的输出灵敏度函数。

### 一、灵敏度点法的工作原理

#### (一) 基本构思

设有一个线性定常系统, 它的传递函数为  $G(s, \alpha)$ , 参数向量  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$ , 为了分析上的方便, 还假定每个参数只影响一个变元  $G_j(s, \alpha_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , 现研究在一个灵敏度模型上同时测定  $r$  个半相对输出灵敏度函数

$$\sigma_j(t, \alpha_0) \triangleq \left. \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\alpha_0}, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (5-67)$$

的方法。

如果求拉氏变换与求偏导的过程可以互换, 在频域中, 上式等效于频域中的半相对灵敏度函数

$$\tilde{\Sigma}_j(s, \alpha_0) \triangleq \left. \frac{\partial Y(s, \alpha)}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\alpha_0}, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (5-68)$$

假设  $U(s)$  与参数  $\alpha_j$  无关, 并考虑关系式  $Y(s, \alpha) = G(s, \alpha)U(s)$ , 有

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_j(s, \alpha_0) &= \left[ \frac{\partial}{\partial \ln \alpha_j} Y(s, \alpha) \right]_{\alpha_0} = \left[ \frac{\partial}{\partial \ln \alpha_j} G(s, \alpha) U(s) \right]_{\alpha_0} \\ &= \left[ \frac{\partial G(s, \alpha)}{\partial \ln G_j(s, \alpha_j)} \frac{\partial \ln G_j(s, \alpha_j)}{\partial \ln \alpha_j} \frac{Y(s, \alpha)}{G(s, \alpha)} \right]_{\alpha_0} \end{aligned} \quad (5-69)$$

如果定义

$$S_{\alpha_j}^G(s) \triangleq \left. \frac{\partial \ln G}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \triangleq F_j(s) \quad (5-70)$$

$$S_{\alpha_j}^{G_j}(s) \triangleq \left. \frac{\partial \ln G_j}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \triangleq H_j(s) \quad (5-71)$$

则前式成为

$$\tilde{\Sigma}_j(s, \alpha) \approx S_{\alpha_j}^{G_j}(s) S_{\alpha_j}^{G_j}(s) Y(s, \alpha_0) = F_j(s) H_j(s) Y(s, \alpha_0) \quad (5-72)$$

考察上式，由于  $F_j(s)$  是系统对各变元  $G_j$  的伯德灵敏度函数，它仅取决于系统的结构，而  $H_j(s)$  是系统各变元对各有关参数的伯德灵敏度函数，它仅取决于具体的变元，与系统的结构无关。所以，即使同一个变元，由于它在系统中的位置不同， $F_j(s)$  也不相同。因此，我们的任务在于探求  $F_j(s)$  与系统结构的关系，以便仅用一个灵敏度模型来同时求得系统对各变元的灵敏度函数  $F_j$ ，并进而结合每一个  $H_j(s)$  以求得  $\Sigma_j(s, \alpha)$ 。

以上就是灵敏度点法的基本构思。

### (二) $F_j$ 及 $\Sigma_j(s, \alpha_0)$ 的求法

我们以图 5-20 所示的经典反馈结构来进行讨论。该系统共有  $r$  个变元  $G_j = G_j(s, \alpha_j)$ ， $j = 1, 2, \dots, r$ 。图中，用虚线框住的部分以  $L_i$  表示。用结构图变换法将  $B_{2i-1}$  点以外的各变元构成的反馈支路变换成一个等效的反馈传递函数  $M_i$ ，而将  $B_{2i-1}$  与输出点之间所有串联的变元变换成等效的传递函数  $N_i$ 。显然

$$-M_i = \sum_{k=i+1}^{r/2} (-G_{2k}) \prod_{p=i}^{k-1} G_{2p+1} \quad (5-73)$$

$$N_i = \prod_{k=i+1}^{r/2} G_{2k-1} = G_{2i+1} \cdots G_{r-1} \quad (5-74)$$

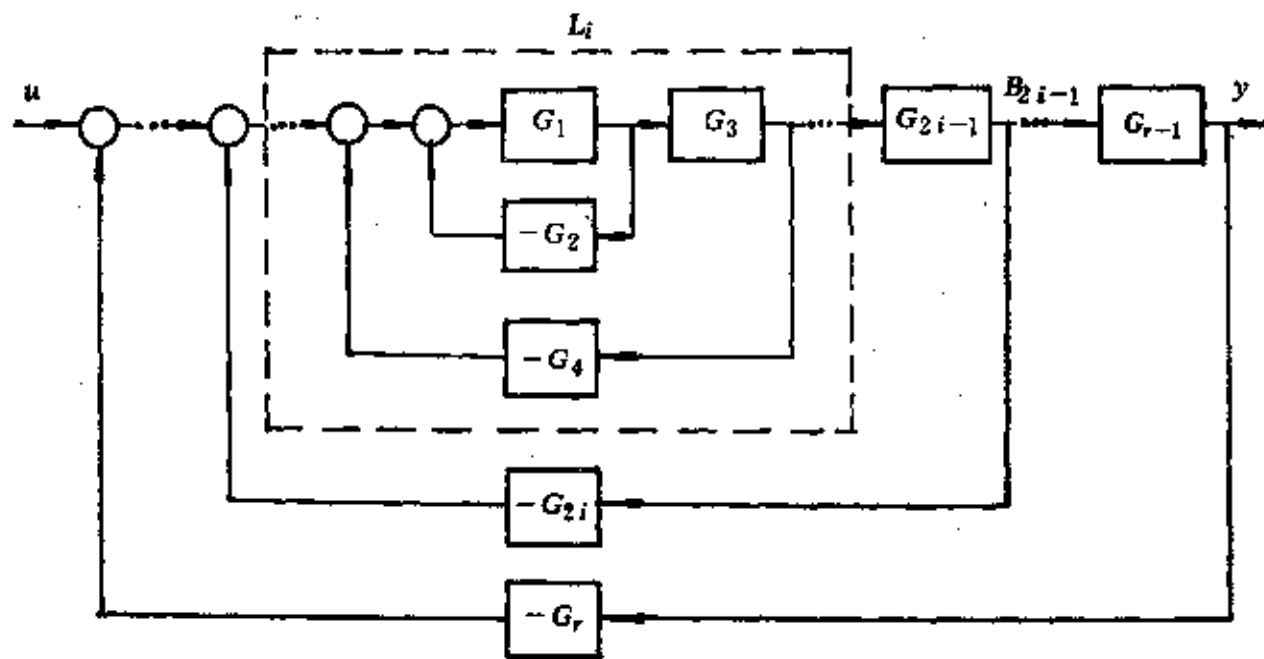


图 5-20

为了帮助读者理解，图 5-21 画出了一个  $r = 10$  的相应系统图，对该图来讲，由于取  $i = 3$ ，故  $L_i = L_3$ ， $B_{2i-1} = B_5$ ， $-M_i = -M_3 = (-G_8)G_7 + (-G_{10})G_7G_9$ ， $N_i = N_3 = G_7G_9$ 。

经上述变换后，图 5-20 所示的系统变成了图 5-22 所示的等效系统。

进一步把两个并联的子系统  $M_i$  与  $G_{2i}$  合成之，令  $P_i = M_i + G_{2i}$ ，则得等效系统图 5-23。

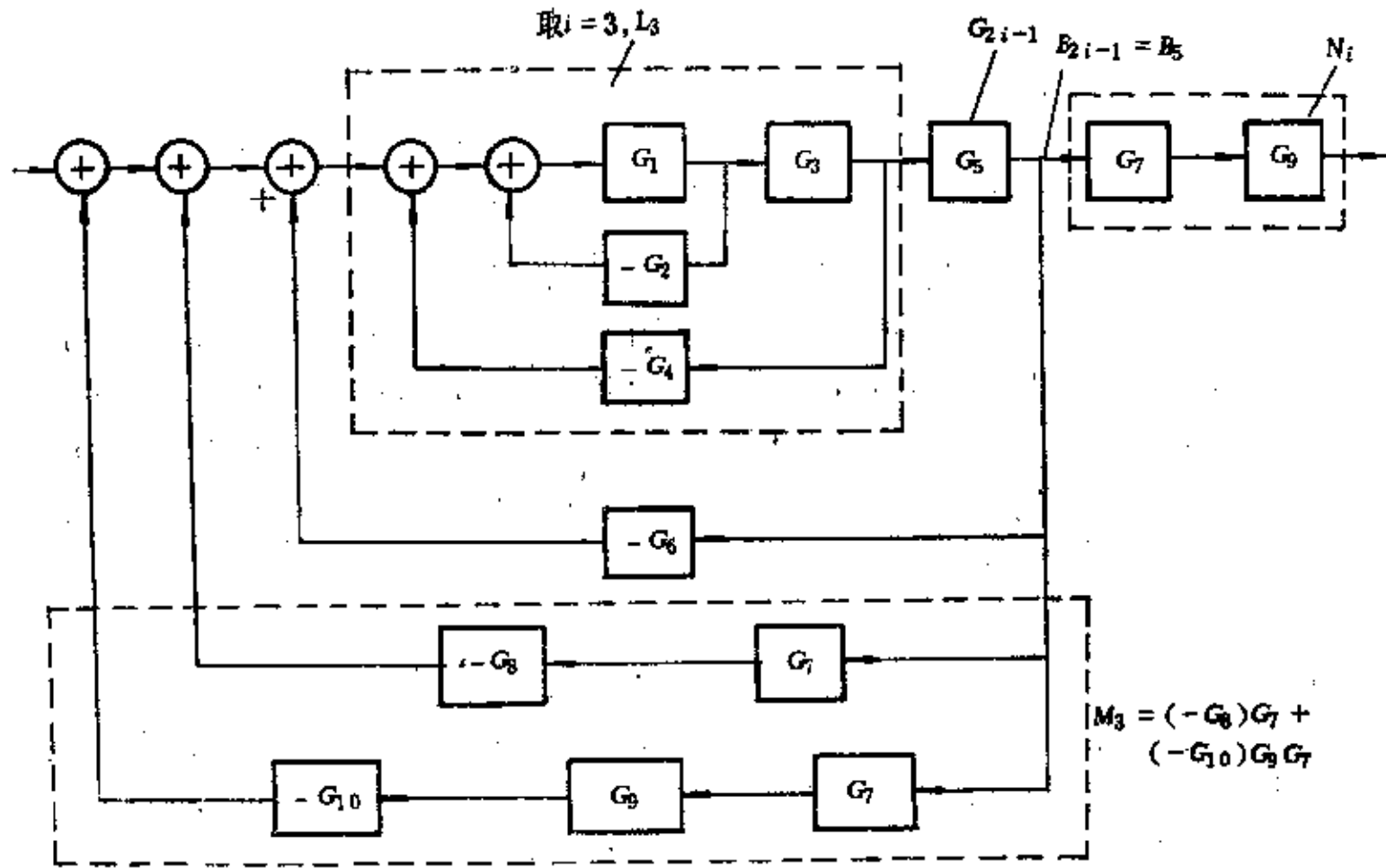


图 5-21

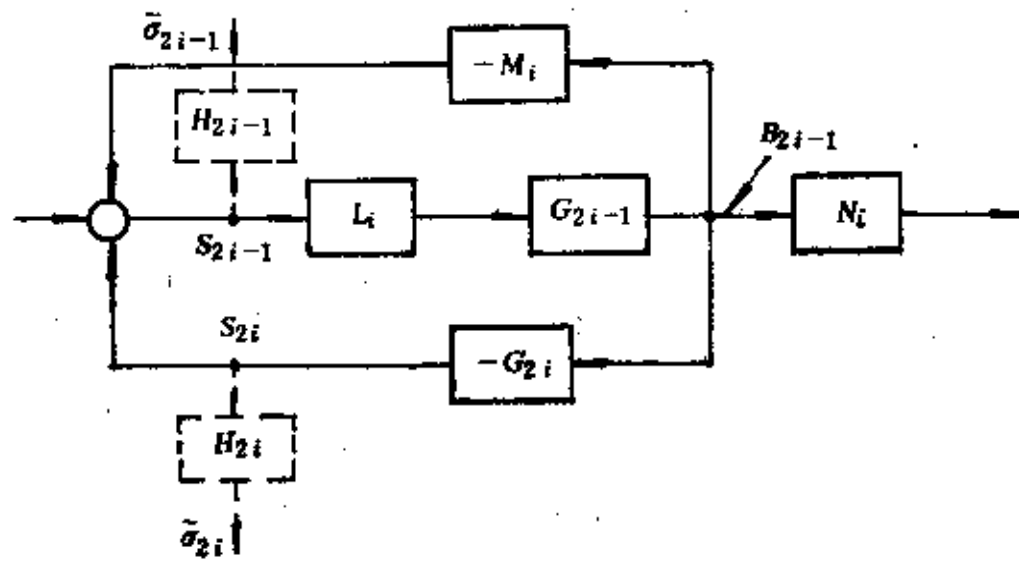


图 5-22

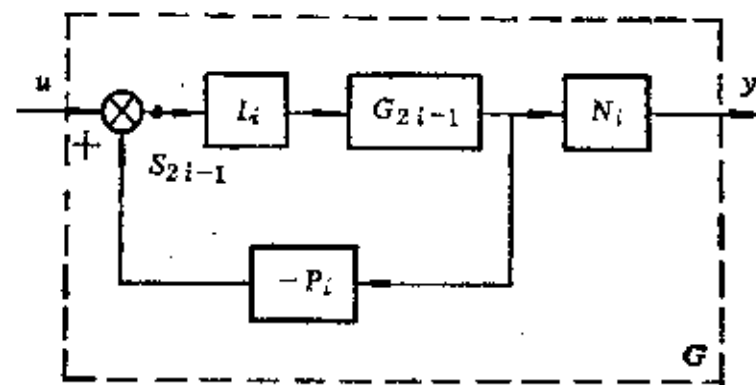


图 5-23

该图的传递函数为

$$G = \frac{N_i L_i G_{2i-1}}{1 + L_i P_i G_{2i-1}} \quad (5-75)$$

将上式对  $G_{2i-1}$  求导之, 有

$$\frac{\partial G}{\partial G_{2i-1}} = \frac{1}{1 + L_i P_i G_{2i-1}} \frac{G}{G_{2i-1}} \quad (5-76)$$

故  $S_{G_{2i-1}}^G(s) \triangleq F_{2i-1}(s) = \left[ \frac{\partial G/G}{\partial G_{2i-1}/G_{2i-1}} \right]_{\alpha_0} = \left[ \frac{\partial G/\partial G_{2i-1}}{G/G_{2i-1}} \right]_{\alpha_0}$

$$= \frac{1}{1 + L_i P_i G_{2i-1}} \Big|_{\alpha_0} \quad (5-77)$$

参看图 5-23 可见, 上式实为系统输入量  $u$  与子系统  $L_i$  前的点  $S_{2i-1}$  之间的传递函数。因此, 如以  $y(t, \alpha_0)$  代替  $u$  作为输入量的话, 便得输出量  $F_{2i-1} Y(s, \alpha_0)$ 。显然, 如在输出点再接以  $H_{2i-1}(s) \triangleq \frac{\partial \ln G_{2i-1}}{\partial \ln \alpha_{2i-1}}$  的话, 便在子系统  $H_{2i-1}(s)$  的输出端求得系统对第  $2i-1$  个参数的输出半相对灵敏度函数  $\Sigma_{2i-1}(s, \alpha_0)$ , 这个情况示于图 5-24 中。

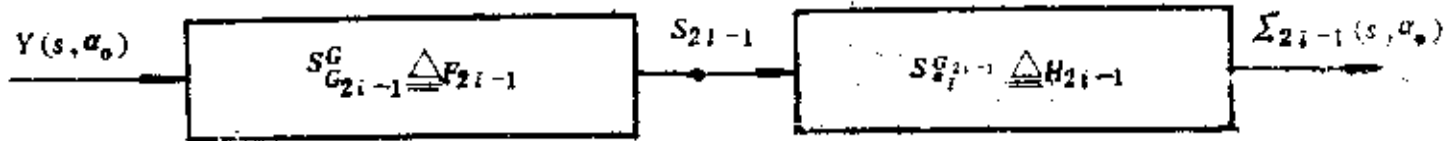


图 5-24

这样, 系统对  $r$  个参数中编号为奇数的参数的输出灵敏度函数便可用上述方法求得。

系统对  $r$  个参数中编号为偶数的参数的输出灵敏度函数可仿此同样求得。此时, 应把图 5-22 变成图 5-25 所示的等效系统, 并求得

$$G = \frac{N_i Q_i}{1 + Q_i G_{2i}} \quad \text{然后, 求 } \partial G/\partial G_{2i}$$

并由此求得

$$S_{G_{2i}}^G(s) \triangleq F_{2i} = - \frac{Q_i G_{2i}}{1 + Q_i G_{2i}} \Big|_{\alpha_0}$$

$$= \frac{Q_i (-G_{2i})}{1 + Q_i G_{2i}} \Big|_{\alpha_0} \quad (5-78)$$

最后, 按公式 (5-72) 便可求得对编号为偶数的参数的输出灵敏度函数。这个结果形象地示于图 5-26 中。

综上所述, 可见以下几点:

- (1) 只要选用一个与额定系统模型完全一样的模型作为系统的灵敏度模型, 并在该模型的输入端上加上额定系统模型

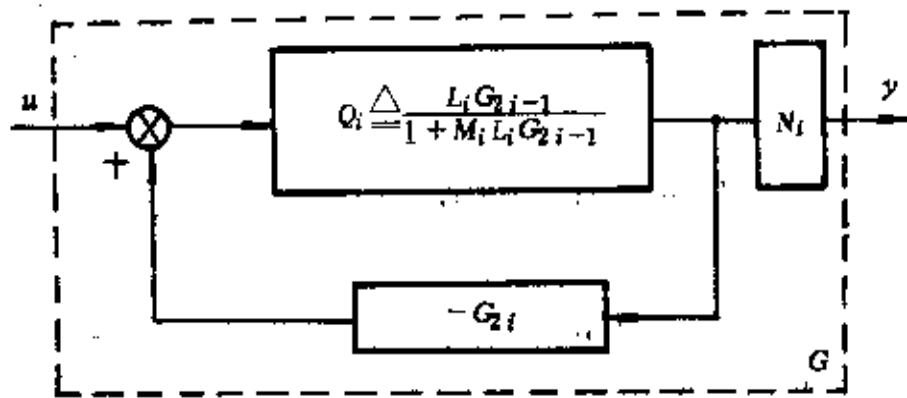


图 5-25

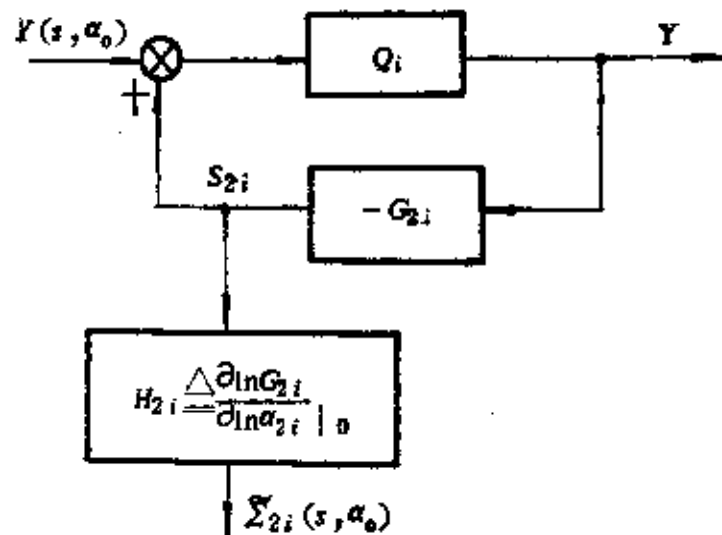


图 5-26

的输出量  $y(t, \alpha_0)$ , 便可同时测得系统对  $r$  个参数的半相对输出灵敏度函数。

(2) 上述各半相对输出灵敏度函数的测点是系统结构的一部分, 称为系统的灵敏度点。

图 5-20 所示系统的灵敏度模型, 各灵敏度点及输出半相对灵敏度的测法, 可参看图 5-27。

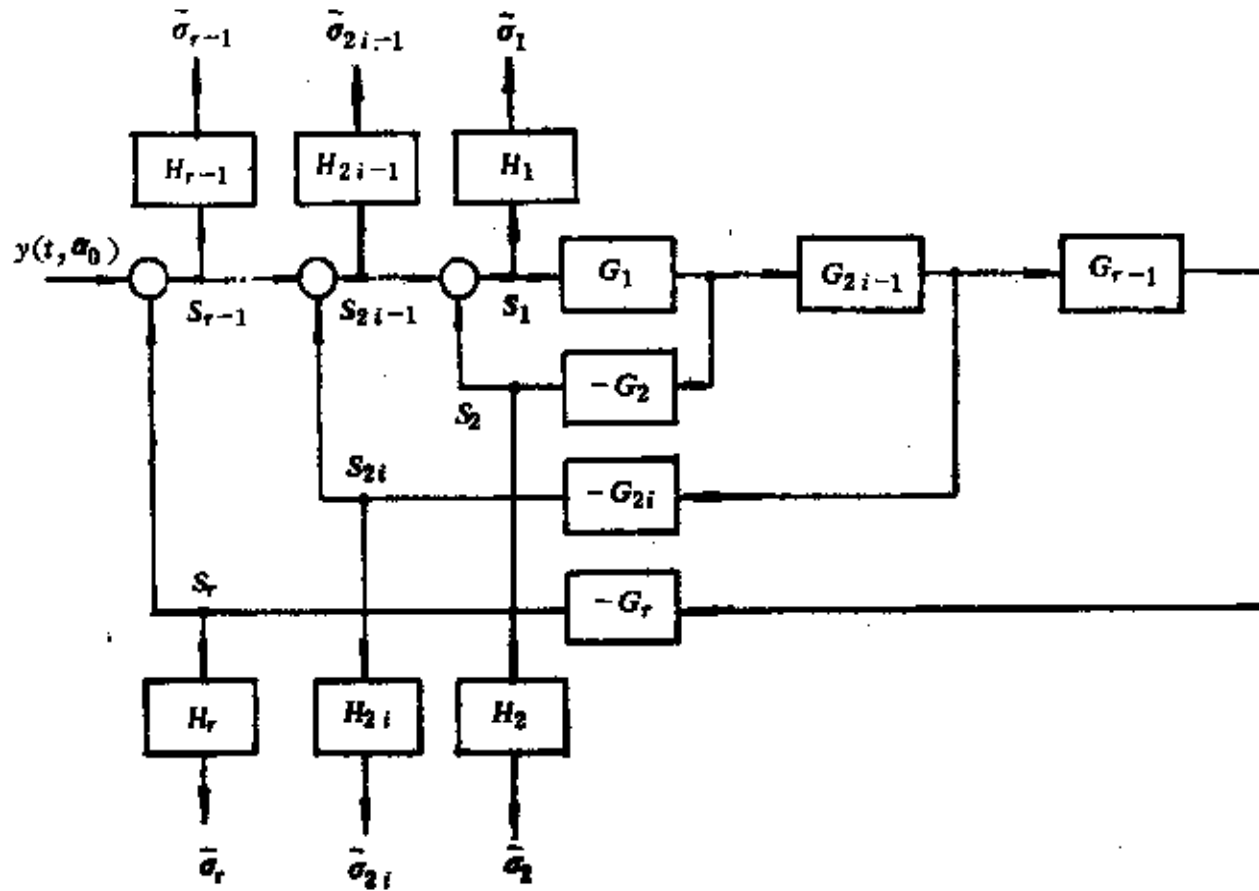


图 5-27

## 二、例题

**例 5-17** 设有图 5-28 所示的系统, 图中, 参数向量  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T$ 。

(1) 试求为同时求得半相对输出灵敏度  $\sigma_1$  及  $\sigma_2$  而必须设置的灵敏度点。

(2) 画出输入信号  $u(t)$  作用时, 为同时测量  $\sigma_1$  及  $\sigma_2$  所需的结构图。

(3) 推导  $\Sigma_1 \triangleq L[\sigma_1]$  及  $\Sigma_2 \triangleq L[\sigma_2]$  的表达式。

(4) 画出同时测得各二阶半相对输出灵敏度

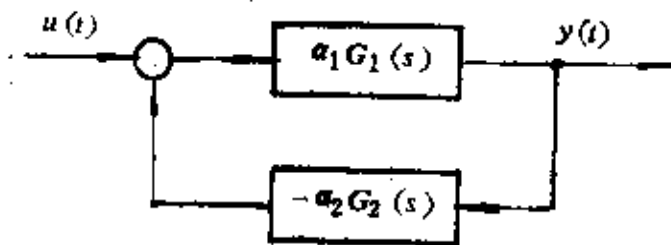


图 5-28

$$v_1 \triangleq \frac{\partial^2 y}{(\partial \ln \alpha_1)^2} \Big|_{\alpha_0}, \quad v_2 \triangleq \frac{\partial^2 y}{(\partial \ln \alpha_2)^2} \Big|_{\alpha_0},$$

$$v_{12} = v_{21} = \frac{\partial^2 y}{\partial \ln \alpha_1 \partial \ln \alpha_2} \Big|_{\alpha_0}$$

所需的结构图。

**解**

(1) 求灵敏度点 由图 5-28 可见, 可把它的前向环节  $\alpha_1 G_1(s)$  看成为一个变元。因此, 为求系统对影响这个变元的参数  $\alpha_1$  的半相对输出灵敏度  $\sigma_1$ , 需在该变元的输入端点  $S_1$



处设灵敏度点。同样，可把  $\alpha_2 G_2(s)$  看成是系统的另一变元。由于它处于反馈回路中，故按前述原理知，应在它的输出端  $S_2$  处设置灵敏度点，以测量  $\sigma_2$ 。详细情况见图 5-29。

(2) 求  $u(t)$  作用时测量  $\sigma_1, \sigma_2$  的结构图。由灵敏度点法的原理所述可知，测  $\sigma_1$  与  $\sigma_2$  所需的灵敏度模型在结构上是与系统的额定模型完全一样的，不同之处仅在于输入信号不是  $u(t)$  而是  $y(t, \alpha_0)$ 。因此，当系统输入信号  $u(t)$  作用时，为测量  $\sigma_1$  及  $\sigma_2$ ，还需要引用系统的额定模型，以便产生  $y(t, \alpha_0)$ 。因此， $\sigma_1, \sigma_2$  的测量结构图应如图 5-29 所示。

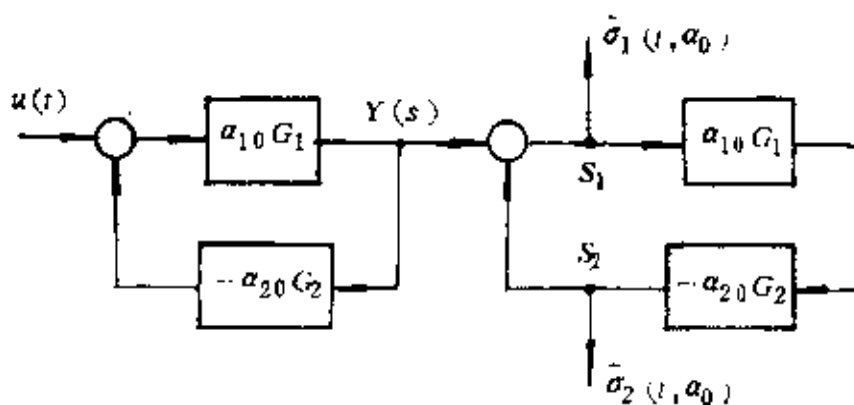


图 5-29

注意，图中

$$H_1(s) \triangleq S_{\alpha_1}^{\alpha_1 \sigma_1} \triangleq \left. \frac{\partial \ln(\alpha_1 G_1)}{\partial \ln \alpha_1} \right|_{\alpha_0} = G_1 \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{10} G_1} = 1$$

$$H_2(s) \triangleq S_{\alpha_2}^{\alpha_2 \sigma_2} \triangleq \left. \frac{\partial \ln(\alpha_2 G_2)}{\partial \ln \alpha_2} \right|_{\alpha_0} = G_2 \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{20} G_2} = 1$$

(3) 求  $\tilde{\Sigma}_1 = L[\sigma_1]$  及  $\tilde{\Sigma}_2 = L[\sigma_2]$  的表达式 由灵敏度点法原理知，

$$\tilde{\Sigma}_j(s, \alpha_0) = \left[ \frac{\partial \ln G}{\partial \ln G_j} \frac{\partial \ln G_j}{\partial \ln \alpha_j} Y(s, \alpha) \right]_{\alpha_0} = S_{\alpha_j}^G S_{\alpha_j}^{\sigma_j} Y(s, \alpha_0)$$

本题情况下

$$\tilde{\Sigma}_1(s, \alpha_0) = S_{\alpha_1}^G S_{\alpha_1}^{\sigma_1} Y(s, \alpha_0)$$

其中， $S_{\alpha_1}^G$  是灵敏度模型的输入端到灵敏度点  $S_1$  的传递函数。因此，参看图 5-29，可知

$$S_{\alpha_1}^G = \frac{1}{1 + \alpha_{10} \alpha_{20} G_1 G_2}$$

此外，由前推导知

$$S_{\alpha_1}^{\sigma_1} = 1$$

$Y(s, \alpha_0)$  也可由图 5-29 推得为

$$Y(s, \alpha_0) = \frac{\alpha_{10} G_1}{1 + \alpha_{10} \alpha_{20} G_1 G_2} U(s)$$

于是

$$\tilde{\Sigma}_1(s, \alpha_0) = \frac{\alpha_{10} G_1(s) U(s)}{[1 + \alpha_{10} \alpha_{20} G_1(s) G_2(s)]^2}$$

同理，由于

$$\tilde{\Sigma}_2(s, \alpha_0) = S_{\alpha_2}^G S_{\alpha_2}^{\sigma_2} Y(s, \alpha_0)$$

其中， $S_{\alpha_2}^G$  是灵敏度模型的输入端到灵敏度点  $S_2$  的传递函数。故由图 5-29 可求得

$$S_{\alpha_2}^G = \frac{-\alpha_{10} \alpha_{20} G_1 G_2}{1 + \alpha_{10} \alpha_{20} G_1 G_2}$$

考虑到前已求得

$$S_{\alpha_2}^{y_2} = 1$$

$$Y(s, \alpha_0) = \frac{\alpha_{10} G_1}{1 + \alpha_{10} \alpha_{20} G_1 G_2} U(s)$$

故得

$$\Sigma_2(s, \alpha) = -\frac{\alpha_{10}^2 \alpha_{20} G_1^2 G_2}{(1 + \alpha_{10} \alpha_{20} G_1 G_2)^2} U(s)$$

(4) 求二阶灵敏度函数的测量结构图 由  $\nu_1 \triangleq \frac{\partial^2 y}{(\partial \ln \alpha_1)^2}$  先求  $\bar{N}_1(\alpha) \triangleq L(\nu_1)$  的表达式。

由于

$$\begin{aligned} \bar{N}_1(\alpha) \triangleq L(\nu_1) &= L\left[\frac{\partial^2 y}{(\partial \ln \alpha_1)^2}\right] = \frac{\partial^2}{(\partial \ln \alpha_1)^2} (LY) \\ &= \frac{\partial^2}{(\partial \ln \alpha_1)^2} Y(s, \alpha) = \frac{\partial^2 Y(s, \alpha)}{\left(\frac{1}{\alpha_1} \partial \alpha_1\right)^2} = \frac{\partial^2 Y(s, \alpha)}{\partial \alpha_1^2} \alpha_1^2 \end{aligned}$$

代入  $\alpha$  的额定值  $\alpha_0$ , 便得

$$\bar{N}_1 = [\bar{N}_1(\alpha)]_{\alpha_0} = \left[\frac{\partial^2 Y(s, \alpha)}{\partial \alpha_1^2} \alpha_1^2\right]_{\alpha_0}$$

将公式  $Y(s, \alpha) = \frac{\alpha_1 G_1}{1 + \alpha_1 \alpha_2 G_1 G_2} U(s)$  对  $\alpha_1$  求导一次, 有

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_1} = \frac{G_1 U}{(1 + \alpha_1 \alpha_2 G_1 G_2)^2}$$

再求导一次, 得

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha_1^2} = \frac{-2(1 + \alpha_1 \alpha_2 G_1 G_2) \alpha_2 G_1 G_2 G_1 U}{(1 + \alpha_1 \alpha_2 G_1 G_2)^4}$$

代入  $\bar{N}_1$  的表达式中, 可得

$$\bar{N}_1 = -\frac{2\alpha_{10} \alpha_{20} G_1(s) G_2(s) \Sigma_1}{1 + \alpha_{10} \alpha_{20} G_1(s) G_2(s)}$$

同理, 可求得

$$\bar{N}_2 = [L(\nu_2)]_{\alpha_0} = -2 \frac{\alpha_{10} G_1 \alpha_{20} G_2}{1 + \alpha_{10} \alpha_{20} G_1 G_2} \Sigma_2$$

$$\bar{N}_{1,2} = [L(\nu_{1,2})]_{\alpha_0} = 2 \frac{1}{1 + \alpha_{10} \alpha_{20} G_1 G_2} \Sigma_1$$

因此,  $\frac{1}{2} \nu_1$  及  $\frac{1}{2} \nu_{1,2}$  及  $\frac{1}{2} \nu_2$  的测法如图 5-30 所示。

**例 5-18** 设有某线性系统, 它的数学模型是  $n$  阶微分方程

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = u(t), \quad a_n = 1$$

如果方程中的诸系数  $a_i, i=1, 2, \dots, n-1$  皆为可变系数, 试用灵敏度点法测系统对诸  $a_i$  的半相对输出灵敏度函数及绝对灵敏度。

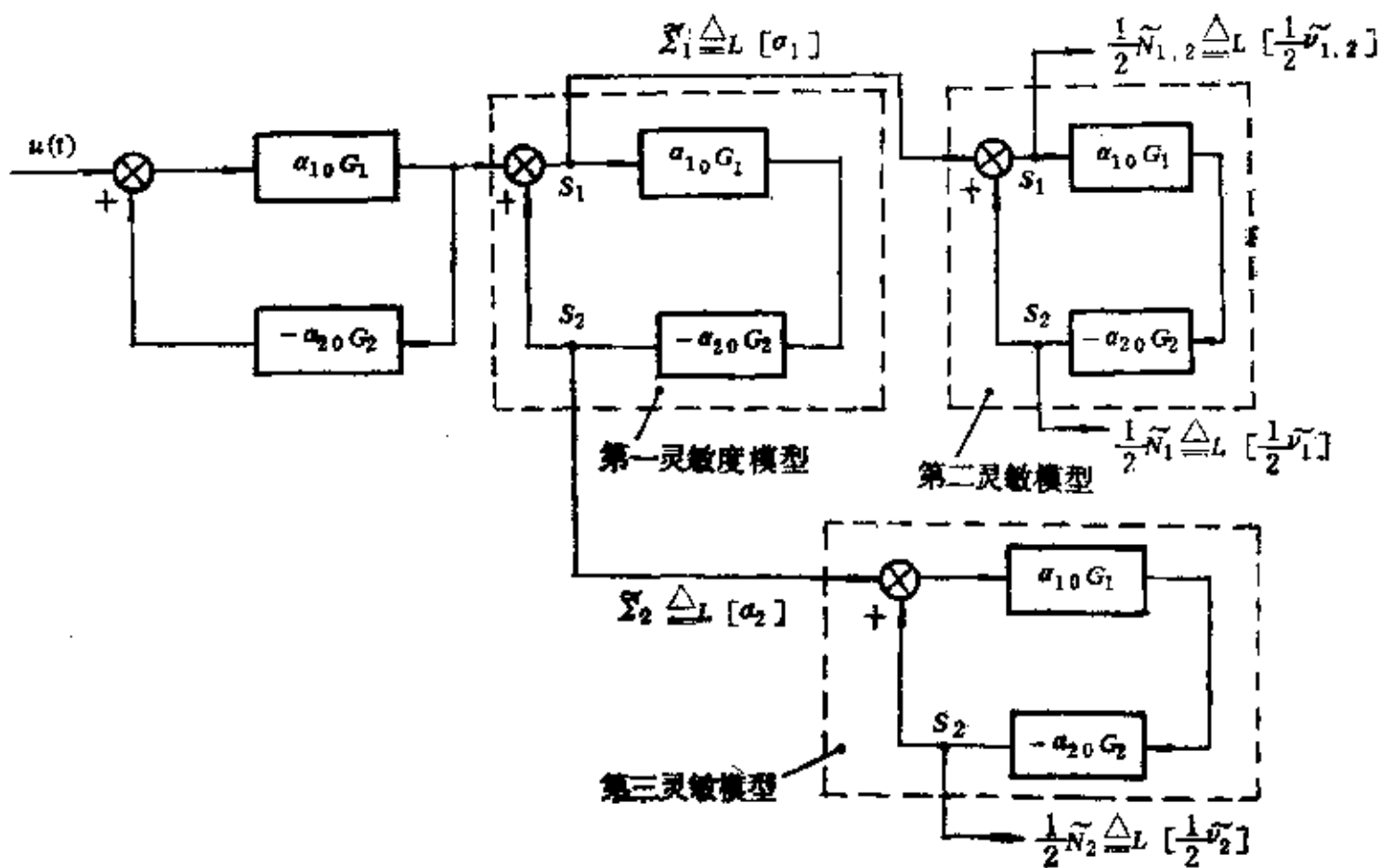


图 5-30

解 为用灵敏度点法测系统的半相对输出灵敏度，首先，应把上述数学模型化为图5-20那样的结构图，然后，利用与它完全一样的灵敏度模型来寻找灵敏度点，并求得要求的半相对输出灵敏度。为此，首先把题给数学模型

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = u(t)$$

化为相变型的结构图5-31。

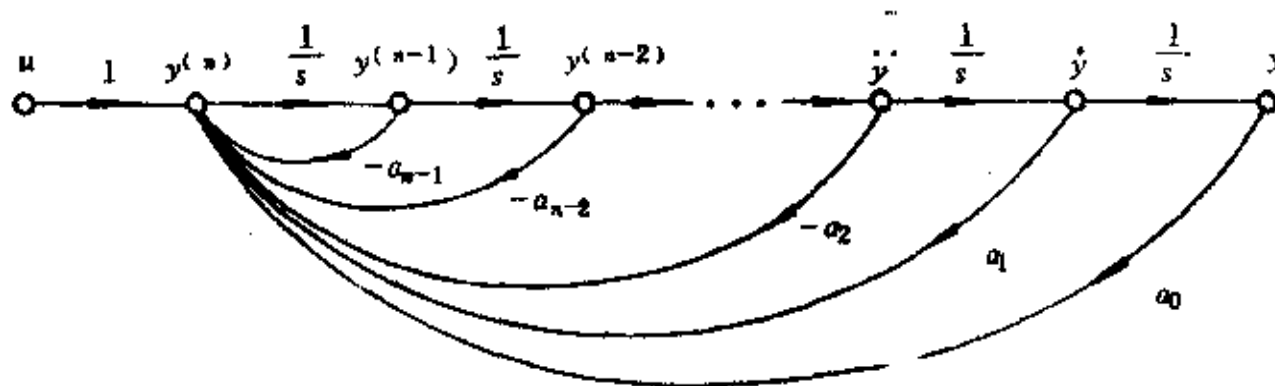


图 5-31

在此图的基础上，画如图 5-32 所示的灵敏度模型，并以  $y(t)$  作为它的输入信号。按灵敏度点法的原理，各反馈元件  $a_j$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  的输出端点便是相应的各灵敏度点。

由于 
$$H_i(s) \triangleq \frac{\partial \ln G_i}{\partial \ln a_i} \Big|_{a_0} = \frac{\partial G_i}{\partial a_i} \Big|_{a_0} \frac{a_{i0}}{G_{i0}} = \frac{\partial a_i}{\partial a_i} = \frac{\partial a_i}{\partial a_i} \Big|_{a_0} \frac{a_{i0}}{a_{i0}} = 1$$

故在图 5-32 的各灵敏度点处便能测得相应的半相对输出灵敏度  $\sigma_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ 。

利用图 5-32 还能求得绝对输出灵敏度  $\sigma_i$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ 。这是由于半相对灵敏度与绝对灵敏度间存在着关系

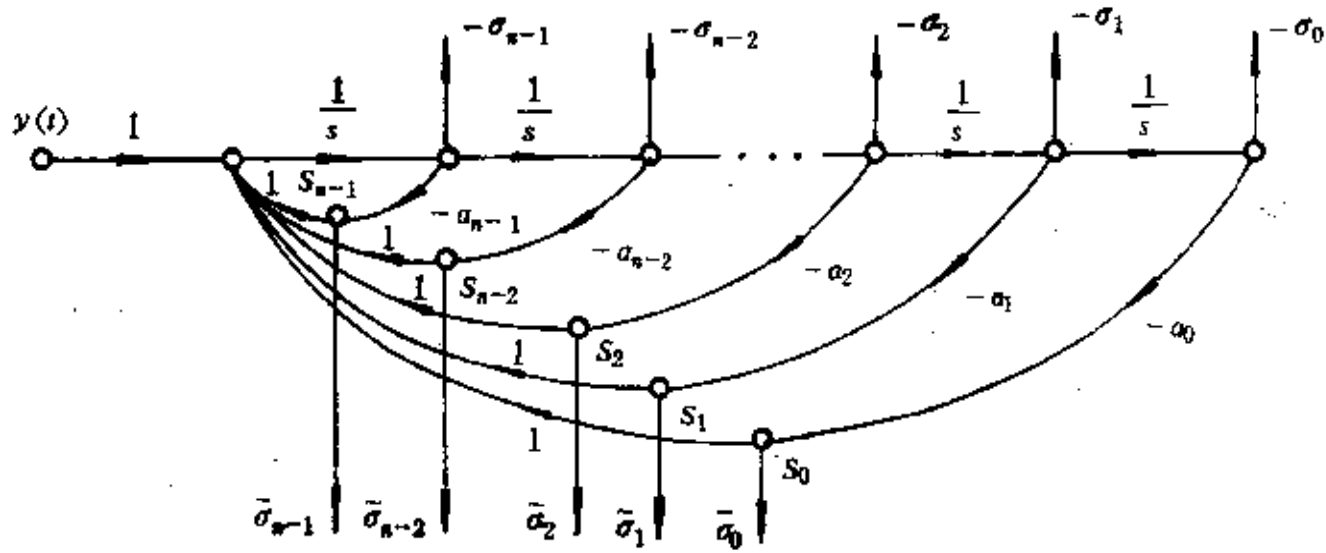


图 5-32

$$\sigma_i \triangleq \left. \frac{\partial y}{\partial \ln a_i} \right|_{a_0} = \left( \frac{\partial y}{\partial a_i} a_i \right)_{a_0} = \sigma_i a_{i0}$$

因此

$$\sigma_i = \frac{\sigma_i}{a_{i0}}$$

于是, 由图 5-32 中各反馈元件  $a_i$ ,  $i=0, 1, \dots, n-1$  的输入端能测得  $-\sigma_i$  值。

**例 5-19** 设有某二阶系统, 它的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

今有人按图 5-33 所排的解题方案用模拟计算机解题, 图中,  $a$ 、 $b$  为系数电位器的可调系数。试求参数向量  $\alpha = [a \ b]^T$  时, 同时测得系统对  $a$ 、 $b$  的半相对输出灵敏度函数的方法。

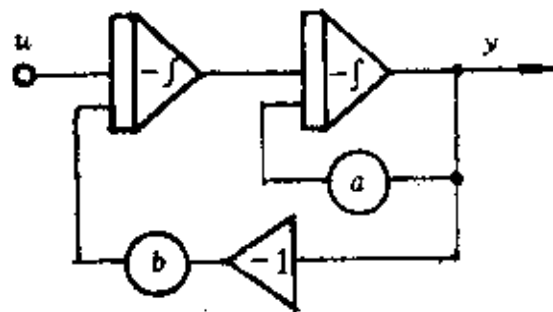


图 5-33

**解** 按题意要求, 为同时测得上述系统对参数  $a$ 、 $b$  的半相对输出灵敏度, 本题采用灵敏度点法。首先把原系统变为类似图 5-20 那样的结构。由于系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1/s^2}{1 + \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2}}$$

故由信号流图理论中的梅逊公式, 可把图 5-33 改画成如图 5-34 所示的相变型结构图。由该图, 按灵敏度点法的原理, 并考虑到  $H_1(s) = \frac{\partial \ln a}{\partial \ln a} = 1$ ,  $H_2(s) = 1$ , 便可求得两个灵敏度点  $S_a$  及  $S_b$ , 并进行  $\sigma_a$  及  $\sigma_b$  的测量。

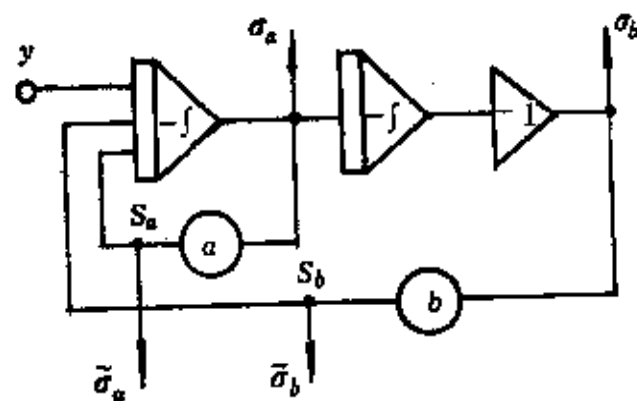


图 5-34

### 三、一些说明

在以上论述中, 都假定一个参数只影响一个变元。如果有两个参数  $\alpha_{j1}$ ,  $\alpha_{j2}$  影响同一个变元  $G_j$ , 即

$$G_j = G_j(s, \alpha_{j1}, \alpha_{j2})$$

则根据对伯德灵敏度分析的公式(4-59)

$$\frac{\Delta Y(s, \alpha)}{Y(s, \alpha_0)} = S_{\alpha_1}^{\alpha} \sum_{j=1}^r S_{\alpha_j}^{\alpha_j} \frac{\Delta \alpha_j}{\alpha_{j0}}$$

可采用在灵敏度点  $S_j$  处并联联接  $H_{j1}$  及  $H_{j2}$  的办法, 同时测得  $\sigma_{j1}$  及  $\sigma_{j2}$ 。

这个方法当然可以推广到一个变元受更多参数同时影响的情况。

重复应用灵敏度点法, 能够测得高阶半相对输出灵敏度函数。对此, 可参看例 5-17。

实用上, 还经常遇到以下两种情况值得一提:

(1) 若感兴趣的可变参数是系统的放大系数, 也即, 变元的传递函数为  $G_i(s, \alpha_i) = \alpha_i A_i(s)$ , 此时, 由于

$$H_i(s) \triangleq \left. \frac{\partial \ln G_i}{\partial \ln \alpha_i} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha_0} \frac{\alpha_{i0}}{G_{i0}} = A_i \frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{i0} A_i} = 1$$

故由灵敏度点可直接测得半相对输出灵敏度函数。

(2) 若变元的传递函数为两个传递函数的乘积, 且其中仅有一个传递函数取决于可变参数  $\alpha_i$ , 也即,  $G_i(s, \alpha_i) = A_i(s) B_i(s, \alpha_i)$ , 此时,  $H_i(s)$  仍等于 1。因此, 仍可在灵敏度点处直接测得半相对灵敏度函数。

由于用灵敏度点法时, 灵敏度模型的输入量总是系统的额定输出量  $Y(s, \alpha_0)$ , 故用该法同时测量系统对各参数的半相对灵敏度时, 可以把系统的额定模型与灵敏度模型相联在一起, 进行各  $\sigma_i$  的测定。此时, 系统的输入信号  $u(t)$  加在系统的额定模型处, 它的额定输出  $y(t, \alpha_0)$  则作为输入信号加到灵敏度模型上, 通过各灵敏度点便可测得诸  $\sigma_i$ 。

另一种做法是先用  $u(t)$  加在系统额定模型的输入端, 测得额定输出  $y_0(t)$ , 并将它储存之, 以便往后作为输入信号加到灵敏度模型上测量  $\sigma_i$ 。

最后要提醒的是: 灵敏度点法仅适用于线性系统。

关于灵敏度点法的进一步知识, 可参看文献[6]。

## 习 题

5-1 给定微分方程  $a_1 a_2 \ddot{y} + a_1 a_3 \dot{y} + a_3 y = 1(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ ,  $a_{i0} \neq 0$ 。

(1) 求对应  $a_1$  ( $a_{10} \neq 0$ ) 和初始条件  $y(0)$  的灵敏度方程。

(2) 画出信号流图以测量灵敏度函数  $\sigma_1 = (\partial y / \partial a)_{\alpha_{i0}}$ 。

(3) 求灵敏度函数的拉氏变换式  $\Sigma_1 = L[\sigma_1]$ 。

5-2 质点  $m$  在真空中以恒重力加速度  $g$  下落, 起点为  $y(t_0)$ , 初速度  $\dot{y}(t_0)$ 。求位置  $y(t)$  对  $m$ ,  $y(t_0)$ ,  $\dot{y}(t_0)$  的灵敏度函数。

5-3 一个三阶系统, 传递函数  $G(s, T_1) = [(1 + T_1 s)(1 + T s)^2]^{-1}$ , 若  $T_1$  小于  $T$ , 可以忽略, 即  $T_{10} = 0$ 。求所有初始条件都为零且输入  $u(t) = 1(t)$  时的灵敏度函数  $\sigma_1 = (\partial y / \partial T_1)_{T_{10}}$ 。

5-4 已知 Van der pol 方程  $\ddot{y} - \alpha(1 - y^2)\dot{y} + y = 0$ , 且 (1)  $\alpha_0 = 1$ ; (2)  $\alpha_0 = 0$ , 求对  $\alpha$  的二阶灵敏度方程。

5-5 时变系统微分方程  $\ddot{y} + (a + b \cos \omega t) = 0$ , 初始条件  $y(0) = \beta_0$ ,  $\dot{y}(0) = \beta_1$ 。

(1) 求对  $a$  的输出灵敏度方程;

(2) 作出模拟计算机图以测量输出灵敏度函数。

5-6 给定结构图 5-35, 画出结构图以测量。

(1) 对  $\omega$  的输出灵敏度,

(2) 对  $\beta_0$  的输出灵敏度。

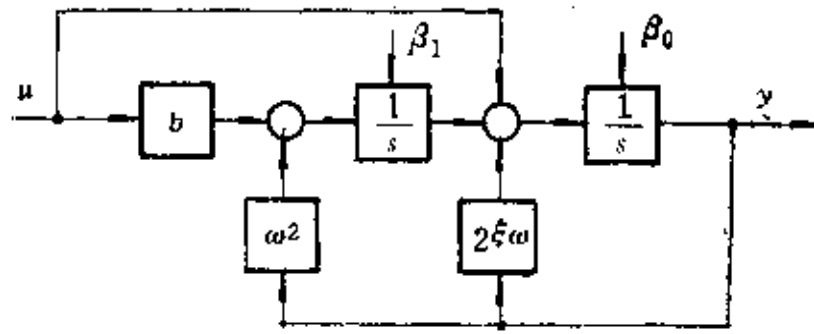


图 5-35

5-7 画结构图, 用变元法求图 5-36 的多变量反馈系统中与参数向量  $\alpha$  有限变化相对应的输出误差向量  $\Delta y$ 。

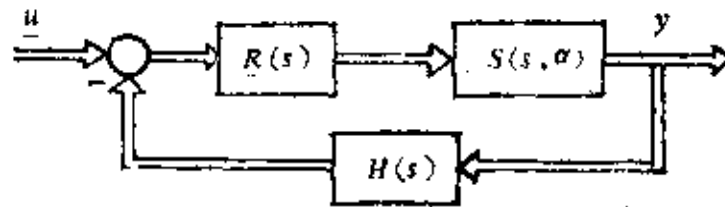


图 5-38

5-8 系统传递函数为  $G(s) = (s+b)/[(s+a_1)(s+a_2)]$ , 求同时产生对应于参数  $a_1, a_2, b$  的输出绝对灵敏度函数的信号流图。

## 第六章 轨迹灵敏度函数的计算与测量方法

本章介绍轨迹灵敏度函数的计算与测量方法。前已述及，在用状态空间法分析与设计系统时，轨迹灵敏度函数是用以描述系统参数变异对系统性能影响的重要手段之一。由于系统的动态方程与直接描写系统输入-输出关系的数学模型都是微分方程，所以，轨迹灵敏度函数的计算与测量方法和输出灵敏度函数的计算与测量方法颇有相似之处，然而，前者还有许多本身的特点，本章拟结合这些特点来探讨轨迹灵敏度函数的计算与测量方法。

### 第一节 定常参数情况的轨迹灵敏度方程

#### 一、定常 $\alpha$ 参数情况的状态灵敏度方程

定常  $\alpha$  参数时，最一般的系统动态方程由状态方程

$$\dot{x} = f(x, t, u, \alpha), \quad x(t_0) = x^0 \quad (6-1)$$

及输出方程

$$y = g(x, t, u, \alpha) \quad (6-2)$$

组成，其中， $x$  为  $n$  维状态向量， $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$  为  $r$  维的参数向量， $u$  为与  $\alpha$  无关的输入向量， $f$  为  $n$  维的一般向量函数， $y$  则为  $q$  维的输出向量。由于参数  $\alpha$  变化会导致状态向量及输出向量的同时变化，故为了了解参数对整个系统性能的影响，必须对它们进行分别研究。以下依次分别进行。

#### (一) 轨迹灵敏度方程的一般表达式

为研究轨迹灵敏度方程，设想参数向量  $\alpha$  中的某元  $\alpha_j$ ， $j=1, 2, \dots, r$  发生了变化。以下，仍然采用对有关方程取偏导数的分析方法，于是，将方程式 (6-1) 对  $\alpha_j$ ， $j=1, 2, \dots, r$  求偏导数。

考虑到方程式 (6-1) 实为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, t, u, \alpha) \\ f_2(x, t, u, \alpha) \\ \vdots \\ f_n(x, t, u, \alpha) \end{bmatrix}$$

且由数学知识知

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_j} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial \alpha_j \\ \partial x_2 / \partial \alpha_j \\ \vdots \\ \partial x_n / \partial \alpha_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

故有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial a_j} &= \begin{bmatrix} \partial \dot{x}_1 / \partial a_j \\ \partial \dot{x}_2 / \partial a_j \\ \vdots \\ \partial \dot{x}_n / \partial a_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1(x, t, u, \alpha) / \partial a_j \\ \partial f_2(x, t, u, \alpha) / \partial a_j \\ \vdots \\ \partial f_n(x, t, u, \alpha) / \partial a_j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial a_j \\ \partial x_2 / \partial a_j \\ \vdots \\ \partial x_n / \partial a_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial a_j \\ \partial f_2 / \partial a_j \\ \vdots \\ \partial f_n / \partial a_j \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_j} + \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad j = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (6-3)$$

式中

$$\frac{\partial f}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (6-4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_j} \triangleq \left[ \frac{\partial f_1}{\partial a_j} \quad \frac{\partial f_2}{\partial a_j} \quad \dots \quad \frac{\partial f_n}{\partial a_j} \right]^T \quad (6-5)$$

假设对时间求导与对参数  $\alpha$  求导的次序可以互换, 并定义

$$\lambda_j \triangleq \left. \frac{\partial x}{\partial a_j} \right|_{\alpha_0} \quad (6-6)$$

则在各参数  $\alpha_j$  的额定值  $\alpha_{j0}$  处, 有关系式

$$\lambda_j = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\alpha_0} \lambda_j + \left. \frac{\partial f}{\partial a_j} \right|_{\alpha_0} \quad (6-7)$$

注意, 以上各式中, 为书写方便, 取下标 " $\alpha_0$ " 表示在额定参数值  $\alpha_{j0}$ ,  $j=0, 1, \dots, r$  处取值。由于状态向量的初值与参数无关, 故上式的初始条件显然是

$$\lambda_j(0) = \frac{\partial x^0}{\partial a_j} = 0 \quad (6-8)$$

以上两式的统一体

$$\lambda_j = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\alpha_0} \lambda_j + \left. \frac{\partial f}{\partial a_j} \right|_{\alpha_0}, \quad \lambda_j(0) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (6-9)$$

表达了系统的轨迹灵敏度初值问题。常称式 (6-9) 为轨迹灵敏度方程。

如果应用前面讲的轨迹灵敏度阵的概念, 可把上式表达得更为简洁, 也即, 由于

$$A \triangleq [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \quad (6-10)$$

故由式 (6-9) 可得



$$\dot{A} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\alpha_0} A + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} \quad A^0 = 0 \quad (6-11)$$

式中

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_r} \end{bmatrix}$$

$$A^0 = [\lambda_1(0) \lambda_2(0) \dots \lambda_r(0)]$$

### (二) 向量输出灵敏度方程的一般表达式

由于输出方程式(6-2)也是系统动态方程的组成部分,所以,在使用状态空间法分析系统时,为了全面表征系统的性能,需要探讨输出灵敏度函数及其与轨迹灵敏度函数间的关系。为此,将式(6-2)对 $\alpha_j$ 求偏导数,可得

$$\sigma_j \triangleq \frac{\partial y}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\alpha_0} \lambda_j + \frac{\partial g}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (6-12)$$

式中

$$\frac{\partial g}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_q}{\partial x_1} & \frac{\partial g_q}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_q}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

这就是向量输出灵敏度方程。

如果应用输出灵敏度矩阵的概念,即

$$\Sigma \triangleq [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_r] \quad (6-13)$$

则式(6-12)可更简单地表达为

$$\Sigma = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\alpha_0} A + \frac{\partial g}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} \quad (6-14)$$

式中, $\partial g/\partial x$ 与 $\partial g/\partial \alpha$ 皆为雅可比阵。此外,由于输出灵敏度方程为代数方程,故不存在初始条件问题。

### (三) 定常 $\alpha$ 参数情况下状态灵敏度方程的一般表达式

通常,将方程式(6-11)与(6-14)统称为状态灵敏度方程,即,系统的状态灵敏度方程为

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\alpha_0} A + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} & A^0 = 0 \\ \Sigma = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\alpha_0} A + \frac{\partial g}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} \end{cases} \quad (6-15)$$

由上可见,不论原系统是否是线性的,描写 $\alpha$ 参数影响的状态灵敏度方程却总是由线性的轨迹灵敏度方程与线性的输出灵敏度方程所组成,其中,前者是具零初始条件的线性一阶

微分方程，尽管它的系数可能是时变的，而后者则是一阶线性代数方程。

**例 6-1** 试将以下范德堡 (Van der Pol) 方程化为相变型状态方程，并求其轨迹灵敏度方程

$$\ddot{y} - \alpha(1 - y^2)\dot{y} + y = 0, \quad y(0) = \beta_1, \quad \dot{y}(0) = \beta_2$$

**解** 先将上式化为相变型的状态方程。为此，设

$$\begin{aligned} x_1 &\triangleq y \\ x_2 &\triangleq \dot{y} \end{aligned}$$

于是，得相变型状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= \beta_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \alpha(1 - x_1^2)x_2, & x_2(0) &= \beta_2 \end{aligned}$$

为求其轨迹灵敏度方程，将以上两式对  $\alpha$  求偏导数，并在参数额定值  $\alpha_0$  处取值，可得

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} &= \left. \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \\ \left. \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} &= -(1 + 2\alpha_0 x_{10} x_{20}) \left. \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} + \alpha_0(1 - x_{10}^2) \left. \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} + (1 - x_{10}^2)x_{20} \end{aligned}$$

由于  $\lambda_1 \triangleq \left. \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}$ ,  $\lambda_2 \triangleq \left. \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}$

故得轨迹灵敏度方程为以下变系数的一阶向量微分方程式

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + 2\alpha_0 x_{10} x_{20}) & \alpha_0(2 - x_{10}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (1 - x_{10}^2)x_{20} \end{bmatrix} \\ \lambda(0) = 0 \end{cases}$$

#### (四) 线性定常系统的状态灵敏度方程

众所周知，线性定常系统是最通常且应用最广的系统，以下研究这种系统在  $\alpha$  参数情况下的状态灵敏度方程。

1. 轨迹灵敏度方程 设线性系统的方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x^0 \quad (6-16)$$

$$y = Cx + Du \quad (6-17)$$

其中， $A = A(\alpha)$ ,  $B = B(\alpha)$ ,  $C = C(\alpha)$ ,  $D = D(\alpha)$ ,  $x = x(t, \alpha)$ ,  $y = y(t, \alpha)$ , 而  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$ 。

以下讨论中，假设  $u(t)$  与参数  $\alpha$  无关。将式 (6-16) 对  $\alpha_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$  求导，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha_j} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [A(\alpha)x + B(\alpha)u] \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [A(\alpha)x(t, \alpha)] + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [B(\alpha)u(t)] \\ &= A(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [x(t, \alpha)] + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [A(\alpha)]x(t, \alpha) + \frac{\partial B(\alpha)}{\partial \alpha_j} u(t) \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, r$$

将上式在额定参数  $\alpha_0$  处取值，并以下标 “ $\alpha_0$ ” 表示相应的值，便得

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_j &= A(\alpha_0)\lambda_j + \left. \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} x_0 + \left. \frac{\partial B(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} u(t) \\ \lambda_j(0) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (6-18)$$

这就是线性定常系统的轨迹灵敏度方程。

如果引用轨迹灵敏度矩阵的概念，可把上式表示得更为简洁。因此，可得

$$\begin{aligned} \dot{A} &= [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_r] \\ &= A_0 A + \left. \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} x_0 + \left. \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} u(t), \quad A(t_0) = 0 \end{aligned} \quad (6-19)$$

式中 
$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} x \triangleq \left[ \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} x \quad \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} x \quad \dots \quad \frac{\partial A}{\partial \alpha_r} x \right] \quad (6-20)$$

应该特别指出的是：由于数学中只定义了纯量对向量的导数及向量对向量的导数，所以，式(6-19)中的矩阵对向量的导数是无法处理的。那么，式(6-19)中的  $\frac{\partial A}{\partial \alpha} x$  是怎么得来并如何计算它呢？为回答这个问题，我们来探讨式(6-20)，将它进一步处理如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \alpha} &\triangleq \left[ \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_1} x(\alpha, t) \quad \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_2} x(\alpha, t) \quad \dots \quad \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_r} x(\alpha, t) \right] \\ &= \left[ \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_1} x(\alpha, t) \quad \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_2} x(\alpha, t) \quad \dots \quad \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_r} x(\alpha, t) \right]_{\alpha \rightarrow \alpha} \\ &= \left[ \frac{\partial [A(\alpha)x(\alpha, t)]}{\partial \alpha_1} \quad \frac{\partial [A(\alpha)x(\alpha, t)]}{\partial \alpha_2} \quad \dots \quad \frac{\partial [A(\alpha)x(\alpha, t)]}{\partial \alpha_r} \right]_{\alpha \rightarrow \alpha} \\ &= \left. \frac{\partial [A(\alpha)x(\alpha, t)]}{\partial \alpha} \right|_{\alpha \rightarrow \alpha} \\ &= \left[ \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha} x(\alpha, t) \right]_{\alpha \rightarrow \alpha} \end{aligned}$$

上式说明了式(6-19)中  $\frac{\partial A}{\partial \alpha} x$  项的来源及相应的处理方法。讲得更确切些，如果矩阵  $A(\alpha)$  为

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} A_{11}(\alpha) & A_{12}(\alpha) & \dots & A_{1n}(\alpha) \\ A_{21}(\alpha) & A_{22}(\alpha) & \dots & A_{2n}(\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}(\alpha) & A_{n2}(\alpha) & \dots & A_{nn}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (6-21)$$

则式(6-19)中的  $\frac{\partial A}{\partial \alpha} x$  可计算如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \alpha} x &= \left[ \frac{\partial [A(\alpha)x(\alpha, t)]}{\partial \alpha} \right]_{\alpha \rightarrow \alpha} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{bmatrix} A_{11}(\alpha)x_1(\alpha, t) + A_{12}(\alpha)x_2(\alpha, t) + \dots + A_{1n}(\alpha)x_n(\alpha, t) \\ A_{21}(\alpha)x_1(\alpha, t) + A_{22}(\alpha)x_2(\alpha, t) + \dots + A_{2n}(\alpha)x_n(\alpha, t) \\ \dots \\ A_{n1}(\alpha)x_1(\alpha, t) + A_{n2}(\alpha)x_2(\alpha, t) + \dots + A_{nn}(\alpha)x_n(\alpha, t) \end{bmatrix}_{\alpha \rightarrow \alpha} \end{aligned} \quad (6-22)$$

例 6-2 设某线性系统的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases}$$

其中  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ ,  $c = [1 \ 0]$ ,  $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$

试求轨迹灵敏度方程。

解 由式(6-19)知, 轨迹灵敏度方程为

$$\dot{A} = A_0 A + \frac{\partial A}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} x_0 + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} u(t) \quad A(t_0) = 0$$

本题情况下

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial A}{\partial \alpha} x &= \frac{\partial [A(\alpha)x(t, \alpha)]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t, \alpha) \\ x_2(t, \alpha) \end{bmatrix} \right] \Big|_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{bmatrix} x_2(t, \alpha) \\ \alpha_1 x_1(t, \alpha) + \alpha_2 x_2(t, \alpha) \end{bmatrix} \Big|_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1(t, \alpha) & x_2(t, \alpha) & 0 \end{bmatrix} \Big|_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1(t, \alpha) & x_2(t, \alpha) & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha} &= \frac{\partial b}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

将以上计算结果取相应于额定参数  $\alpha_0 = [\alpha_{10} \ \alpha_{20} \ \alpha_{30}]^T$  处的值并代入式(6-19), 便得要求的轨迹灵敏度方程。

2. 向量输出灵敏度方程 仿前, 将方程式(6-17)对  $\alpha_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$  求导, 便可推得向量输出灵敏度方程如下

$$\sigma_j = C(\alpha_0) \frac{\partial x}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} + \frac{\partial C}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} x_0 + \frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} u(t) \quad (6-23)$$

引用输出灵敏度矩阵的概念, 便可仿前将上式表达为

$$\Sigma = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_r] = C_0 A + \frac{\partial C}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} x_0 + \frac{\partial D}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} u(t) \quad (6-24)$$

其中,  $\frac{\partial C}{\partial \alpha} x$  及  $\frac{\partial D}{\partial \alpha} u(t)$  的求法与  $\frac{\partial A}{\partial \alpha} x$  的求法相同。

3. 线性定常系统在定常  $\alpha$  参数时的状态灵敏度方程 由于系统的动态方程由状态方程

与输出方程组成，故系统的状态灵敏度方程相应地由方程式(6-19)及方程式(6-24)组成，即，状态灵敏度方程为

$$\begin{cases} \dot{A} = A_0 A + \frac{\partial A}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} x_0 + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} u(t) & A(t_0) = 0 \\ \Sigma = C_0 A + \frac{\partial C}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} x_0 + \frac{\partial D}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} u(t) \end{cases} \quad (6-25)$$

系统状态灵敏度方程可用图6-1表示。

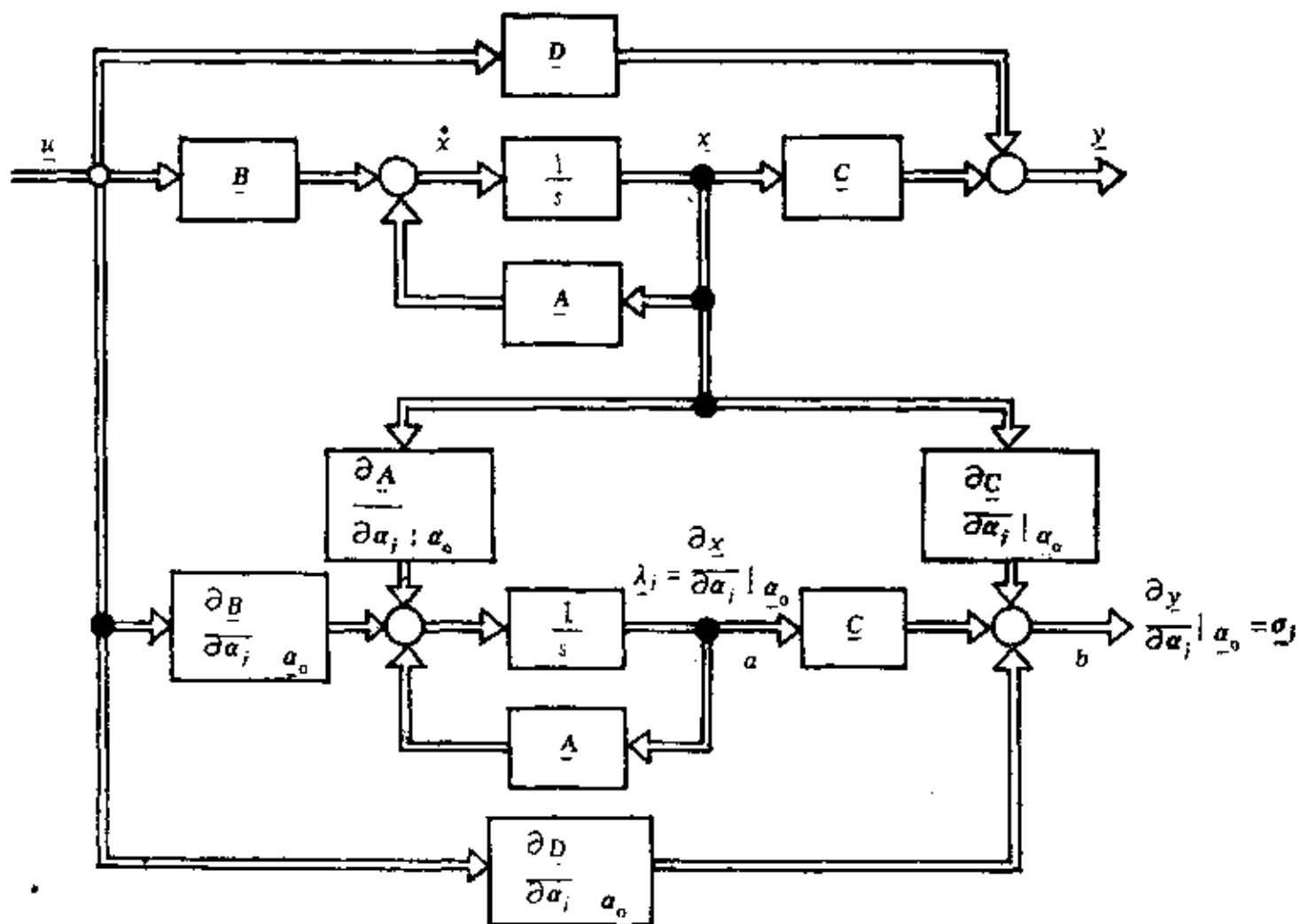


图 6-1

最后应该指出，如果以上所讨论的各系统是被控对象，为了实现对它的控制，引用了外反馈，以上各式中的  $u(t)$  便不再是与  $\alpha$  无关的了。这时，反映到方程式(6-18)及(6-23)中便应分别增加一个附加项  $\mu = B_0 \frac{\partial u}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0}$  及  $D_0 \frac{\partial u}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0}$ ，常称上述附加项  $\mu$  为灵敏度控制向量。通过适当的外反馈回路设计，可以用它来补偿轨迹灵敏度方程式(6-18)中的“灵敏度干扰向量”项  $\frac{\partial A}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} x_0 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} u(t)$ ，以得到低参数灵敏度系统。

## 二、定常 $\beta$ 参数情况的状态灵敏度方程

### (一) 轨迹灵敏度方程

设系统动态方程为

$$\dot{x} = f(x, t, u, \alpha), \quad x(t_0) = \beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n]^T \quad (6-26)$$

$$y = g(x, t, u, \alpha) \quad (6-27)$$

其中,  $\beta$  为感兴趣的可变参数向量。

将式(6-26)对  $\beta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  求导, 由于函数  $f$  与  $\beta$  无明显关系, 故有

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta_j} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \beta_j}$$

将上式在额定参数值  $\beta_0$  处取值, 并定义

$$\lambda_j \triangleq \left. \frac{\partial x}{\partial \beta_j} \right|_{\beta_0}$$

便得关系式

$$\lambda_j = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\beta_0} \lambda_j \quad (6-28)$$

现在来看上式的初始条件, 由于  $x(t_0) = \beta$ , 故

$$\frac{\partial x_k(t_0)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \beta_k}{\partial \beta_j} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (6-29)$$

于是,  $\beta$  参数情况下的轨迹灵敏度方程为

$$\lambda_j = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\beta_0} \lambda_j, \quad \lambda_{kj}(t_0) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases} \quad (6-30)$$

(二) 向量输出灵敏度方程

对式(6-27)求导, 便可求得向量输出灵敏度方程如下

$$\sigma_j = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\beta_0} \lambda_j \quad (6-31)$$

其中,

$$\sigma_j \triangleq \frac{\partial g}{\partial \beta_j}$$

(三) 状态灵敏度方程

综上所述,  $\beta$  参数情况下的状态灵敏度方程的一般表达式为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_j = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\beta_0} \lambda_j, & \lambda_{kj}(t_0) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \\ \sigma_j = \left. \frac{\partial d}{\partial x} \right|_{\beta_0} \lambda_j, & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (6-32)$$

对线性定常系统而言, 状态灵敏度方程成为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_j = A_0 \lambda_j, & \lambda_{kj}(t_0) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \\ \sigma_j = C_0 \lambda_j, & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (6-33)$$

显然, 这个方程与系统的状态方程具有相同的齐次部分, 但初始条件不同。

### 三、定常 $\lambda$ 参数情况的状态灵敏度方程

首先, 对以下讨论中所使用的文字符号作些说明。由于轨迹灵敏度常用字母  $\lambda$  表示, 所以, 与第四章一样, 为了避免符号的混淆, 以下讨论中, 皆用  $\alpha$  表示  $\lambda$  参数, 而用  $\lambda$  表示轨迹灵敏度函数。

其次, 由第四章所述可知, 为了讨论方便, 引用单个  $\lambda$  参数  $\alpha$  时, 系统的实际方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t, \mathbf{u}, \alpha), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \\ \alpha \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t, \mathbf{u}, \alpha), \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}^0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t, \mathbf{u}, \alpha)\end{aligned}\tag{6-34}$$

以下的讨论就是基此而进行的。

最后，这里假设定理 4-1 中所提的条件得到满足。

(一)  $\lambda$  参数的轨迹灵敏度方程

为求轨迹灵敏度方程，假设  $\lambda$  参数  $\alpha$  为纯量。将方程式(6-34)中的三个式子分别对  $\alpha$  求导，得

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial \alpha} = 0\tag{6-35}$$

$$\alpha \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \alpha} - \dot{\mathbf{z}}, \quad \frac{\partial \mathbf{z}^0}{\partial \alpha} = 0\tag{6-36}$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha}\tag{6-37}$$

应该强调，在此阶段，上述各有关方程的初始条件皆设为零。以下讨论中，取下标“0”表示在额定值  $\alpha = 0$  处取值。

取  $\alpha = 0$ ，且定义

$$\lambda \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} \right|_0, \quad \eta = \left. \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \alpha} \right|_0\tag{6-38}$$

式(6-35)及(6-36)成为

$$\dot{\lambda} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_0 \lambda + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right|_0 \eta + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \right|_0\tag{6-39}$$

$$\eta = \left( \left. \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{z}} \right|_0 \right)^{-1} \left[ \left. \dot{\mathbf{z}}_0 - \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}} \right|_0 \lambda - \left. \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \alpha} \right|_0 \right]\tag{6-40}$$

其中， $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}$  为方阵。

将式(6-40)代入式(6-39)，有

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \left[ \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}} \right]_0 \lambda \\ &\quad + \left[ \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \right]_0 \dot{\mathbf{z}}_0 - \left[ \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \alpha} \right]_0 + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \right|_0\end{aligned}\tag{6-41}$$

这就是退化的  $\lambda$  参数的轨迹灵敏度方程。其中， $\dot{\mathbf{z}}_0$  是由系统额定方程中得来的已知函数。

至于灵敏度向量  $\eta$ ，则可由式(6-40)展开求得

$$\eta = - \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{z}} \right]_0 \lambda + \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1}_0 \dot{\mathbf{z}}_0 - \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1}_0 \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \alpha} \Big|_0\tag{6-42}$$

**例 6-3** 求例 4-4 所示系统的轨迹灵敏度方程。

**解** 由例 4-4，该系统的实际状态方程是

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ L_a \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} k_t \\ -k_b & -R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

为以下讨论之便, 取  $x = \omega$ ,  $z = i_a$ ,  $a = k_t/J$ ,  $k = k_b$ , 可得

$$\dot{x} = ax$$

$$L_a \dot{z} = -kx - R_a z + u$$

将上两式对  $\lambda$  参数  $L_a$  求偏导数, 且假设对时间求偏导与对参数求偏导的次序可以互换, 可得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial L_a} \right)_0 = a \frac{\partial z}{\partial L_a}$$

及

$$L_a \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z}{\partial L_a} \right) + \frac{dz}{dt} = -k \frac{\partial x}{\partial L_a} - R_a \frac{\partial z}{\partial L_a}$$

令  $L_a = 0$ , 且以  $\frac{\partial z}{\partial L_a}$  的计算结果代入上两式的第一式中, 可得

$$\dot{\lambda} = -\frac{ak}{R_a} \lambda - \frac{a}{R_a} \dot{z}_0$$

这就是要求的  $\lambda$  参数轨迹灵敏度方程。

### (二) $\lambda$ 参数向量输出方程

将式(6-34)的第三式对  $a$  求导, 有

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial a} \quad (6-43)$$

在额定参数  $a = 0$  处取上式中的各导数值, 并考虑到式(6-38)及式(6-40), 可得

$$\begin{aligned} \sigma = & \left[ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial z} \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} \right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial x} \right]_0 \lambda + \left[ \frac{\partial g}{\partial z} \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} \right)^{-1} \right]_0 \dot{z}_0 \\ & - \left[ \frac{\partial g}{\partial z} \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} \right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial a} \right]_0 + \frac{\partial g}{\partial a} \Big|_0 \end{aligned} \quad (6-44)$$

这是  $\lambda$  参数的向量输出方程

### (三) 轨迹灵敏度方程的初始条件确定法。

上述轨迹灵敏度方程式(6-41)的初始条件是什么? 是否仍然是零初始条件? 由第五章第二节的讨论知, 在使用直接描写系统输入与输出关系的数字模型时, 处理  $\lambda$  参数输出灵敏度方程的初始条件问题是十分复杂的, 这是由于在初始时刻  $t = 0$  处, 由实际方程转为退化方程会导致输出灵敏度函数的不连续性。现在, 尽管我们改用系统的动态方程来描述系统, 但由  $\lambda$  参数本身的定义可知, 我们仍有将实际方程转为阶次较低的退化方程的问题。因此, 在初始时刻  $t = 0$  时, 轨迹灵敏度函数  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  的不连续性问题依然存在。不难想象, 处理轨迹灵敏度方程的初始条件问题仍然会是十分复杂的, 而且, 我们仍然可以采用第五章中所讲的三种办法来处理这个初始条件问题。这里, 我们拟介绍苏联学者华西列也娃 (A. Б. Васильева) 提出的一个专门处理  $\lambda$  参数问题的一般解析方法。

华西列也娃提出, 在  $t_0 = t_0^+$  的瞬刻,  $\lambda$  参数灵敏度方程的初始条件可按下式求得



$$\lambda(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \{f[x(t_0), z(\tau), t_0, u(t_0), 0] - f[x(t_0), z_0(t_0), t_0, u(t_0), 0]\} d\tau \quad (6-45)$$

式中  $x(t_0)$ ——系统实际方程的初始状态值，  
 $u(t_0)$ ——系统实际方程的初始输入值；  
 $z_0(t_0)$ ——系统退化方程的初始条件值，简记为  $z_0^0$ ；  
 $z(\tau)$ ——某辅助方程的解。

注意，上述求  $z(\tau)$  的辅助方程为

$$\begin{aligned} \frac{dz(\tau)}{d\tau} &= f_1[x(t_0), z(\tau), 0, u(t_0), t_0] \\ z(\tau) \Big|_{\tau=t_0} &= z^0 \end{aligned} \quad (6-46)$$

式中  $f_1$ ——方程式(6-34)中所定义的函数；  
 $z^0$ ——系统实际方程的给定初始条件向量。

以上定理不拟证明了，现以一例说明其使用方法。

**例 6-4** 设有图 6-2 所示的系统，它由两个一阶环节串联而成。两个环节的时间常数  $T_1$  与  $T_2$  的关系为  $T_1 \ll T_2$ ，故  $T_1$  可以略去。试求  $u(t) = U_0 1(t)$  时， $\lambda$  参数轨迹灵敏度方程，相应的初始条件及轨迹灵敏度函数。

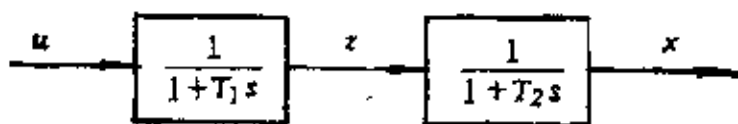


图 6-2

**解** 由题意知，时间常数  $T_1$  是  $\lambda$  参数。进行灵敏度分析的目的是看  $T_1$  略去会造成多大的误差。具体求解过程如下：

(1) 求系统的实际状态方程 由图可见， $X = \frac{1}{1+T_2s} Z$ ， $Z = \frac{1}{1+T_1s} U$ ，因此，可推知系统的实际状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{x}{T_2} + \frac{z}{T_2} = f(x, z, t, u, \alpha), \\ T_1 \dot{z} &= -z + u = f_1(x, z, t, u, \alpha) \end{aligned}$$

(2) 求退化方程 由于  $T_1$  是  $\lambda$  参数，故只要令  $T_1 = 0$ ，便能由以上两式求得退化方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -\frac{x_0}{T_2} + \frac{z_0}{T_2} \\ 0 &= -z_0 + u_0 \end{aligned}$$

(3) 检验定理 4-1 所提的条件是否满足 定理 4-1 中提出的辅助方程为

$$\begin{aligned} \frac{dz(\tau)}{d\tau} &\triangleq f_1[x, z(\tau), t, u, \alpha] \Big|_{\alpha=\lambda} \\ &= -z(\tau) + u \end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [-z(\tau) + u] = -1$$

显然,  $\frac{\partial f_1}{\partial z}$  的特征值为  $-1$ , 故满足定理 4-1 所提出的条件。正因此, 可以用退化方程来定义  $\lambda$  参数轨迹灵敏度函数。即

$$\lambda \triangleq \left( \frac{\partial x}{\partial T_1} \right)_0$$

$$\eta \triangleq \left( \frac{\partial z}{\partial T_1} \right)_0$$

(4) 求  $\lambda$  参数轨迹灵敏度方程 将上述系统实际方程对  $\lambda$  参数  $T_1$  求导, 得

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial T_1} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial T_1} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial T_1} = -\frac{1}{T_2} \frac{\partial x}{\partial T_1} + \frac{1}{T_2} \frac{\partial z}{\partial T_1}$$

$$\frac{\partial (T_1 \dot{z})}{\partial T_1} = \dot{z} + T_1 \frac{\partial \dot{z}}{\partial T_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial T_1} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial T_1} = -1 \frac{\partial z}{\partial T_1}$$

对上两式中的导数在额定参数  $T_1 = 0$  处取值, 并考虑  $\lambda$  及  $\eta$  的定义, 即得要求的轨迹灵敏度方程

$$\lambda = -\frac{1}{T_2} \lambda + \frac{1}{T_2} \eta$$

$$0 = -\eta - \dot{z}_0$$

(5) 求上述方程的初始条件 按上述华西列也娃提出的初始条件求法, 应首先求辅助方程

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = f_1[x(t_0), z(\tau), 0, u(t_0), t_0]$$

的解。本题情况下,  $x(t_0)$  未给出,  $u(t_0) = u(t_0^+) = U_0$ ,  $t_0 = t_0^+ = 0^+$ , 故辅助方程为

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = -z + u_0$$

$$z(\tau) \Big|_{\tau=t_0} = z_0$$

由于题中未给出系统实际方程的初始条件  $z^0$ , 故在以后的计算中保留这个符号。这个方程的解可求得为

$$z(\tau) = z^0 e^{-\tau} + U_0(1 - e^{-\tau})$$

于是, 由方程式(6-41)可得轨迹灵敏度方程的初始条件  $\lambda(t_0)$  为

$$\lambda(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \{ f[x(t_0), z(\tau), t_0, u(t_0), 0] - f[x(t_0), z_0(t_0), t_0, u(t_0), 0] \} d\tau$$

$$= \frac{1}{T_2} \int_{t_0}^{\infty} [-x^0 + z(\tau) + x_0 - z_0^0] d\tau$$

考虑前述退化方程中的第二个方程

$$0 = -z_0 + u_0$$

有  $z_0 = u_0$ , 因此  $z_0(t_0^+) = u_0(t_0^+) = u(t_0^+) = U_0$  也即

$$z_0^0 \triangleq z(t_0^+)$$

将  $z_0$  的值代入  $\lambda(t_0)$  的算式中, 可得

$$\begin{aligned}\lambda(t_0) &= \frac{1}{T_2} \int_{t_0}^{\infty} [-x^0 + z^0 e^{-\tau} + U_0(1 - e^{-\tau}) + x^0 - U_0] d\tau \\ &= \frac{1}{T_2} \int_{t_0}^{\infty} (z^0 e^{-\tau} - U_0 e^{-\tau}) d\tau \\ &= \frac{1}{T_2} [z_0 e^{-t_0} - U_0 e^{-t_0}]\end{aligned}$$

(6) 求  $\lambda$  参数轨迹灵敏度函数 基于上述, 在本题情况下,  $\lambda$  参数轨迹灵敏度初值问题的方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -\frac{1}{T_2} \lambda + \frac{1}{T_2} \eta, & \lambda(t_0) = \frac{1}{T_2} (z_0 - U_0) \\ 0 = -\eta - z_0 \end{cases}$$

(7) 求  $\lambda$  参数的轨迹灵敏度函数  $\eta$  及  $\lambda$  由上面轨迹灵敏度方程中的第二式

$$0 = -\eta - z_0$$

可知

$$\eta = -z_0$$

由退化方程中的第二式知,  $z_0 = u_0 = u(t_0) = u(t_0^+) = U_0$ , 故得

$$\eta = 0$$

将上述结果代入轨迹灵敏度初值问题方程的第一式中, 便可求得

$$\lambda(t) = -\frac{1}{T_2} (z_0 - U_0) e^{-t/T_2}$$

关于这个解的正确性, 可以用对系统实际方程进行求解, 将该解对  $T_1$  求导, 最后, 令其中的  $T_1 = 0$  来进行验证。要注意的是, 本例中的各量皆为纯量。

## 第二节 时变参数情况的轨迹灵敏度方程

### 一、时变参数情况下系统轨迹灵敏度方程的一般表达式

现在来讨论参数为时变情况时的系统轨迹灵敏度方程。假设系统的实际方程为

$$\dot{x} = f(x, \alpha, t, u) \quad (6-47)$$

其中参数  $\alpha$  是时变的,  $u(t)$  与  $\alpha$  无关。

由第四章第一节所述可知, 时变参数  $\alpha(t)$  常表达为

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \varepsilon g(t) \quad (6-48)$$

式中  $\varepsilon$  —— 常数, 数值很小;

$g(t)$  —— 均匀有界的已知可积函数。

如果取  $g(t)$  展开式中的一阶变量  $\delta\alpha(t)$  为式 (6-48) 中的  $g(t)$ , 即令

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \varepsilon \delta\alpha(t) \quad (6-49)$$

则在它的影响下, 必会诱发状态变量增量  $\Delta x$ 。这个变量可足够准确地表达为

$$\Delta x \triangleq \varepsilon \delta x \quad (6-50)$$

式中  $\delta x$ —— $x$  的一阶变量。

于是, 有

$$x - x_0 = \Delta x = \varepsilon \delta x \quad (6-51)$$

这样表达的好处是可以应用泰勒展开法作为工具, 来推导灵敏度方程。因此, 由式(6-47)及式(6-51), 有

$$\dot{x}_0 + \varepsilon \delta \dot{x} = f(x_0 + \varepsilon \delta x, \alpha_0 + \varepsilon \delta \alpha, t, u) \quad (6-52)$$

将上式右端在  $x_0, \alpha_0$  两点展成泰勒级数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 + \varepsilon \delta \dot{x} = f(x_0, \alpha_0, t, u) + \left. \frac{\partial f(x, \alpha, t, u)}{\partial x} \right|_{\alpha_0} \varepsilon \delta x \\ + \left. \frac{\partial f(x, \alpha, t, u)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \varepsilon \delta \alpha + R(\varepsilon) \end{aligned} \quad (6-53)$$

式中  $R(\varepsilon)$ ——高阶微量, 它满足  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ R(\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} \right] = 0$ 。考虑到额定参数时的关系

$$\dot{x}_0 = f(x_0, \alpha_0, t, u), \quad x(t_0) = x^0 \quad (6-54)$$

由式(6-53)可得

$$\varepsilon \delta \dot{x} = \varepsilon \left. \frac{\partial f(x, \alpha, t, u)}{\partial x} \right|_{\alpha_0} \delta x + \varepsilon \left. \frac{\partial f(x, \alpha, t, u)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \delta \alpha + R(\varepsilon)$$

两边通除  $\varepsilon$ , 且取  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 使得

$$\delta \dot{x} = \left. \frac{\partial f(x, \alpha, t, u)}{\partial x} \right|_{\alpha_0} \delta x + \left. \frac{\partial f(x, \alpha, t, u)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \delta \alpha$$

这就是时变参数情况下轨迹灵敏度方程的一般表达式。由于初始条件  $x(t_0) = x^0$  与参数  $\alpha$  无关, 所以, 上式的初始条件为

$$\delta x^0 = 0$$

于是, 状态向量的一阶变量  $\delta x$  可由以下灵敏度方程求得

$$\delta \dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\alpha_0} \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \delta \alpha, \quad \delta x^0 = 0 \quad (6-55)$$

这个方程与定常  $\alpha$  参数的轨迹灵敏度方程在形式上完全相同, 差异点有两个: 首先, 它是  $\delta x$  的方程, 而不是  $\lambda_j = \frac{\partial x}{\partial \alpha_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  的方程; 其次, 它的系数可能是时变的。

## 二、时变参数情况下线性定常系统的轨迹灵敏度方程

设线性定常系统的动态方程为

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(\alpha)x(t, \alpha) + B(\alpha)u(t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (6-56)$$

$$y(t, \alpha) = C(\alpha)x(t, \alpha) + D(\alpha)u(t) \quad (6-57)$$

若时变参数  $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon \delta \alpha(t)$ , 则仿前所述, 参数改变诱发的矩阵  $A$  的变化可表达为

$$\Delta A = A[\alpha_0 + \varepsilon \delta \alpha(t)] - A(\alpha_0) = \varepsilon \delta A + R(\varepsilon)$$

同样, 矩阵  $B, C, D$  的变化也可仿此同样表达。因此, 方程式(6-56)及(6-57)可改写

如下

$$\frac{d}{dt}(x_0 + \varepsilon \delta x) = (A_0 + \Delta A)(x_0 + \varepsilon \delta x) + (B_0 + \Delta B)u \quad (6-58)$$

$$y_0 + \varepsilon \delta y = (C_0 + \Delta C)(x_0 + \varepsilon \delta x) + (D_0 + \Delta D)u \quad (6-59)$$

初始条件则为

$$\begin{cases} x(t_0) = x^0 \\ \delta x(t_0) = 0 \end{cases}$$

由方程式(6-56), (6-57), 考虑额定方程后, 可得

$$\begin{cases} \varepsilon \delta \dot{x} = A_0 \varepsilon \delta x + \Delta A x_0 + \Delta A \varepsilon \delta x + \Delta B u, & \delta x(t_0) = 0 \\ \varepsilon \delta y = C_0 \varepsilon \delta x + \Delta C x_0 + \Delta C \varepsilon \delta x + \Delta D u \end{cases}$$

在上两等式的两边通除  $\varepsilon$ , 且取  $\lim \varepsilon \rightarrow 0$ , 最后可得灵敏度方程

$$\delta \dot{x} = A_0 \delta x + \delta A x_0 + \delta B u, \quad \delta x^0 = 0 \quad (6-60)$$

$$\delta y = C_0 \delta x + \delta C x_0 + \delta D u \quad (6-61)$$

这两个式子在结构上与定常参数时的轨迹灵敏度方程完全相似。

综上所述可见, 时变参数情况下, 如果只研究状态向量及输出向量的一阶变量  $\delta x$  与  $\delta y$ , 则所得的灵敏度方程与定常参数时所得者完全类似。

### 第三节 轨迹灵敏度方程的解法

轨迹灵敏度方程的解法共有两大类; 一为解析法, 二为结构法。由于结构法颇具特色, 故本节仅介绍结构法。

#### 一、结构法

从系统结构的观点出发, 对轨迹灵敏度方程进行解释, 并借此用建立结构模型的办法来解灵敏度方程, 这就是结构法的实质。这种构思的实际实现方法是用模拟法测定轨迹灵敏度函数。

用模拟法测定轨迹灵敏度函数是在轨迹灵敏度模型上进行的。这里, 轨迹灵敏度模型是指用轨迹灵敏度方程表达的物理系统。前已述及, 任何系统的轨迹灵敏度方程总为线性的, 因此, 在结构法中, 不论原系统是否线性的, 轨迹灵敏度模型却总是线性的。如果原系统是线性系统, 情况就更为有利。这时, 轨迹灵敏度方程与原系统方程具有相同的齐次部分, 所不同的仅是右端的激励函数及初始条件而已。这样, 在定常  $\alpha$  参数情况下, 轨迹灵敏度函数的测量线路就是图 6-1 所示的结构方块图。图中, 上图部分是原系统的结构方块图, 下图部分是轨迹灵敏度模型。图中还画出了两个模型间的相互耦合关系。轨迹灵敏度  $\lambda_j$  及输出灵敏度  $\sigma_j$  则分别由图中  $a$  点及  $b$  点测得。

应当指出, 图 6-1 仅是一个参数  $\alpha_j$  时的测量结构。如果感兴趣的是  $r$  维的参数向量  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$ , 需要的轨迹灵敏度模型就应相应地增加为  $r$  个。关于这点, 请看以下例题。

**例 6-5** 设有某系统, 它用相变型方程表达如下

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), & \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

如果三个参数  $a_1, a_2, a_3$  都测得不很准, 试画出求该系统对这三个参数的轨迹灵敏度向量和输出灵敏度向量的信号流程图。

解 由以前分析可知, 相应的轨迹灵敏度方程及输出灵敏度方程为式(6-18)及式(6-23)

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_j = A_0 \lambda_j + \left. \frac{\partial A}{\partial a_j} \right|_{\mathbf{a}_0} \mathbf{x}_0 + \left. \frac{\partial B}{\partial a_j} \right|_{\mathbf{a}_0} u(t), & \lambda_j(t_0) = 0 \\ \alpha_j = C_0 \lambda_j + \left. \frac{\partial C}{\partial a_j} \right|_{\mathbf{a}_0} \mathbf{x}_0 + \left. \frac{\partial D}{\partial a_j} \right|_{\mathbf{a}_0} u(t) \\ j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

为此, 需求额定参数  $\mathbf{a}_0 = [a_{10} \ a_{20} \ a_{30}]^T = [a_{10} \ a_{20} \ a_{30}]^T$  处的  $\left. \frac{\partial A}{\partial a_j} \right|_{\mathbf{a}_0}$ ,  $\left. \frac{\partial B}{\partial a_j} \right|_{\mathbf{a}_0}$ ,  $\left. \frac{\partial C}{\partial a_j} \right|_{\mathbf{a}_0}$ ,

$\left. \frac{\partial D}{\partial a_j} \right|_{\mathbf{a}_0}$  各值。显然

$$\left. \frac{\partial A}{\partial a_1} \right|_{\mathbf{a}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial a_2} \right|_{\mathbf{a}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial a_3} \right|_{\mathbf{a}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial B}{\partial a_1} \right|_{\mathbf{a}_0} = \left. \frac{\partial B}{\partial a_2} \right|_{\mathbf{a}_0} = \left. \frac{\partial B}{\partial a_3} \right|_{\mathbf{a}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial a_1} \right|_{\mathbf{a}_0} = \left. \frac{\partial C}{\partial a_2} \right|_{\mathbf{a}_0} = \left. \frac{\partial C}{\partial a_3} \right|_{\mathbf{a}_0} = [0 \ 0 \ 0]$$

$$\left. \frac{\partial D}{\partial a_1} \right|_{\mathbf{a}_0} = \left. \frac{\partial D}{\partial a_2} \right|_{\mathbf{a}_0} = \left. \frac{\partial D}{\partial a_3} \right|_{\mathbf{a}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故有

$$\dot{\lambda}_j = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{1j} \\ \dot{\lambda}_{2j} \\ \dot{\lambda}_{3j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{1j} \\ \lambda_{2j} \\ \lambda_{3j} \end{bmatrix} + \left. \frac{\partial A}{\partial a_j} \right|_{\mathbf{a}_0} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_j = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \lambda_{1j} \\ \lambda_{2j} \\ \lambda_{3j} \end{bmatrix} = \lambda_{1j}$$

$$j = 1, 2, 3$$

考虑  $\left[ \frac{\partial A}{\partial a_j} \right]_{a_0}$ ,  $j = 1, 2, 3$  的具体结果, 得

$$\dot{\lambda}_j = \begin{bmatrix} \lambda_{1j} \\ \lambda_{2j} \\ \lambda_{3j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_{10} & -a_{20} & -a_{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{1j} \\ \lambda_{2j} \\ \lambda_{3j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_{j0} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_j = \lambda_{1j}$$

$$j = 1, 2, 3$$

初始条件皆为零。

基于上述, 可画得图 6-3 所示的测量轨迹灵敏度函数的结构信号流图。

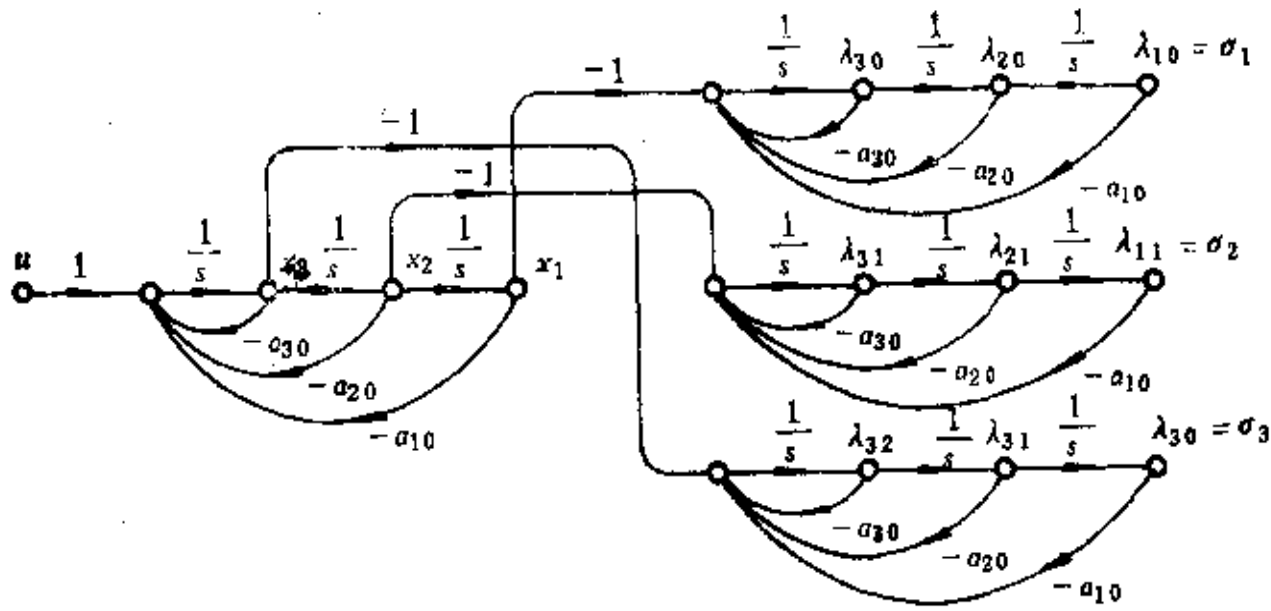


图 6-3

由图 6-3 可见, 这个图的情况与按第五章第四节中变元法原理画得者完全相同 (请读者试用变元法画一下)。因此, 得到了一个重要的推论: 可用变元法原理测量轨迹灵敏度函数。

至此, 自然会产生一个问题: 对线性系统, 第五章中讲的灵敏度点法是否也适用于测量轨迹灵敏度? 假如适用, 测量轨迹灵敏度函数的结构就可以简化得多了。以下来探讨这个问题。

## 二、威尔基 (Wilkie) 与伯金斯 (Perkins) 定理

由上述可知, 对一个  $n$  阶系统, 如果参数向量为  $r$  阶的, 为了测量所有的轨迹灵敏度函数, 需要用  $r$  个灵敏度模型。这是相当不方便的。因此, 提出了同时测量轨迹灵敏度函数的最小结构问题。美国学者威尔基与伯金斯首次解决了这个问题。他们提出, 对一个有  $r$  个参数的  $n$  阶线性定常系统来讲, 只要用一个  $n$  阶的灵敏度模型与原系统的模型一起, 就能同时测得该系统所有的  $n r$  个轨迹灵敏度函数。为要证明这件事, 他们研究了  $n$  阶系统中各轨迹

灵敏度函数度间的关系，并提出了两个定理。以下先论证这两个重要的定理，然后再来说明前述结论的正确性。

(一) 威-伯定理的前提条件

设有任意  $n$  阶系统，它的动态方程为

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{b}u \quad x(0) = 0 \quad (6-62)$$

$$y = \bar{c}x \quad (6-63)$$

现用线性变换  $x = Tz$ ，把它变为相变型

$$\dot{z} = Az + bu \quad z(0) = 0 \quad (6-64)$$

$$y = cz \quad (6-65)$$

式中  $A$ ——相变型系统阵；

$b$ ——相变型输入阵；

$c$ ——相变型输出阵。

显然

$$A = T^{-1}\bar{A}T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \quad (6-66)$$

$$b = T^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6-67)$$

上式中，各  $a_i$  是原系统特征方程的系数，即

$$|\lambda I - \bar{A}| = |\lambda I - A| = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1 = 0 \quad (6-68)$$

以下的讨论都是针对上述这种相变型的系统模型而言的。

(二) 完全对称性定理

1. 完全对称性定理

**定理 6-1** 完全对称性定理 如果定义灵敏度向量为

$$\xi_j \triangleq \left. \frac{\partial z}{\partial a_j} \right|_{a_0} \quad (6-69)$$

也即

$$\xi_{ij} = \left. \frac{\partial z_i}{\partial a_j} \right|_{a_0}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

且定义灵敏度矩阵为

$$\xi = [\xi_{ij}] = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n] \quad (6-70)$$

则灵敏度矩阵具有以下的完全对称性

$$\xi_{ij} = \xi_{i+1, j-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 2, 3, \cdots, n \quad (6-71)$$

也即，灵敏度阵



$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} & \cdots & \xi_{1,n-1} & \xi_{1n} \\ \xi_{12} & \xi_{13} & & & & \xi_{2n} \\ \xi_{13} & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \xi_{n-1,n} & \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \cdots & \xi_{n-1,n} & \xi_{nn} \end{bmatrix} \quad (6-72)$$

中，所有反对角线中的元素都是相等的。或换言之，在所有的  $n \times n$  个轨迹灵敏度中，仅有  $n + (n-1) = 2n-1$  个独立的轨迹灵敏度函数。

**证明** 将相变型状态方程式(6-64)在额定参数  $\alpha_0$  处对  $\alpha_j$  求导，为简化符号起见，把表示额定值处取值的下标“0”略去。假设对时间求导与对  $\alpha_j$  求导的次序可以互换，则由相变型方程的特点，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial \alpha_j} &= \frac{\partial z_2}{\partial \alpha_j} \\ \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial \alpha_j} &= \frac{\partial z_3}{\partial \alpha_j} \\ &\vdots \\ \frac{\partial \dot{z}_{n-1}}{\partial \alpha_j} &= \frac{\partial z_n}{\partial \alpha_j} \\ \frac{\partial \dot{z}_n}{\partial \alpha_j} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [-a_1 z_1 - a_2 z_2 - \cdots - a_n z_n + u] \\ &= - \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial z_i}{\partial \alpha_j} - z_j, \quad \frac{\partial z(0)}{\partial \alpha_j} = 0 \end{aligned} \quad (6-73)$$

显然，这可看成是原系统的一种灵敏度模型。

另一方面，对  $\alpha_{j+1}$  求导，同样不把下标“0”写出，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial \alpha_{j+1}} &= \frac{\partial z_2}{\partial \alpha_{j+1}} \\ \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial \alpha_{j+1}} &= \frac{\partial z_3}{\partial \alpha_{j+1}} \\ &\vdots \\ \frac{\partial \dot{z}_{n-1}}{\partial \alpha_{j+1}} &= \frac{\partial z_n}{\partial \alpha_{j+1}} \\ \frac{\partial \dot{z}_n}{\partial \alpha_{j+1}} &= - \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial z_i}{\partial \alpha_{j+1}} - z_{j+1}, \quad \frac{\partial z(0)}{\partial \alpha_{j+1}} = 0 \end{aligned} \quad (6-74)$$

这个方程也可看成是原系统的一种灵敏度模型。

对上式中的最后一个方程积分之，考虑到

$$\frac{\partial z_n(0)}{\partial \alpha_{j+1}} = 0$$

得

$$\int_0^t \frac{\partial \dot{z}_n}{\partial \alpha_{j+1}} d\tau = \frac{\partial z_n}{\partial \alpha_{j+1}} = - \sum_{i=1}^n a_i \int_0^t \frac{\partial z_i}{\partial \alpha_{j+1}} d\tau - \int_0^t z_{j+1} d\tau \quad (6-75)$$

将式(6-74)中前面的  $n-1$  个方程代入上式，且考虑初始条件  $z_j(0) = 0$ ，可得

$$\frac{\partial \dot{z}_{n-1}}{\partial a_{j+1}} = -\alpha_j \int_0^t \frac{\partial z_i}{\partial a_{j+1}} d\tau - \sum_{i=2}^n a_i \frac{\partial z_{i-1}}{\partial a_{j+1}} - z_j \quad (6-76)$$

现定义新变量

$$\begin{aligned} w_1(t) &\triangleq \int_0^t \frac{\partial z_1}{\partial a_{j+1}} d\tau \\ w_2(t) &\triangleq \dot{w}_1(t) = \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial a_{j+1}} \\ w_3(t) &\triangleq \dot{w}_2(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z_1}{\partial a_{j+1}} \right) = \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial a_{j+1}} = \frac{\partial z_2}{\partial a_{j+1}} \\ &\vdots \\ w_n(t) &\triangleq \frac{\partial z_{n-1}}{\partial a_{j+1}} \end{aligned} \quad (6-77)$$

将式(6-77)中的各变量代入式(6-76), 有

$$\dot{w}_n = -\alpha_1 w_1 - \sum_{i=2}^n a_i w_i - z_j \quad (6-78)$$

把上式与式(6-77)中各变量依次排列之, 便得下式

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= w_3 \\ &\vdots \\ \dot{w}_{n-1} &= w_n \\ \dot{w}_n &= - \sum_{i=1}^n a_i w_i - z_j, \quad w(0) = 0 \end{aligned} \quad (6-79)$$

这又是原系统的一种灵敏度模型。

将式(6-79)与式(6-73)相比较, 并考虑微分方程解的唯一性定理, 我们得到了一个重要  
的关系式

$$w = \frac{\partial z}{\partial a_j} \quad (6-80)$$

此式等效于

$$w_1 \triangleq \int_0^t \frac{\partial z_1}{\partial a_{j+1}} d\tau = \frac{\partial z_1}{\partial a_j} \quad (6-81)$$

及

$$w_k = \frac{\partial z_{k-1}}{\partial a_{j+1}} = \frac{\partial z_k}{\partial a_j}, \quad k = 2, 3, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6-82)$$

于是, 定理得证。

2. 推论 基于上述, 可推论如下:

(1) 将前面的关系式

$$w_1 \triangleq \int_0^t \frac{\partial z_1}{\partial a_{j+1}} d\tau = \frac{\partial z_1}{\partial a_j}$$

对  $t$  求导, 可得

$$\frac{\partial z_1}{\partial a_{j+1}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z_1}{\partial a_j} \right) = \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial a_j} \quad (6-83)$$

这是一个重要的关系式，用它可以推得另一种灵敏度模型。

(2) 由方程式(6-83)，(6-77)及关系式

$$w = \frac{\partial z}{\partial a_j}$$

可得

$$w_1 = \frac{\partial z_1}{\partial a_j}$$

$$w_2 = \dot{w}_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z_1}{\partial a_j} \right) = \frac{\partial}{\partial a_j} \dot{z}_1 = \frac{\partial z_1}{\partial a_{j+1}}$$

$$w_3 = \dot{w}_2 = \frac{\partial z_1}{\partial a_{j+2}}$$

⋮

$$w_n = \dot{w}_{n-1} = \frac{\partial z_1}{\partial a_{j+(n-1)}}$$

将关系式

$$w_n = - \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i - z_j$$

$$w(0) = 0$$

也加入前面各式的行列中，便可得图 6-4 所示的一种灵敏度模型，图中，取  $\xi_{i,j}$  中的  $i = 1$ 。

如在图 6-4 中取  $j = 1$ ，并考虑到  $z_j$  需由原系统的额定模型取得，故可把原系统的模型与灵敏度模型联在一起，得到测量轨迹灵敏度的组合系统模型图 6-5。

(3) 由于取  $j = 1$  时，方程 (6-73) 相应于灵敏度点的情况，故基此推知，第五章中讲过的灵敏度点法可看成是完全对称性定理的一种特例。

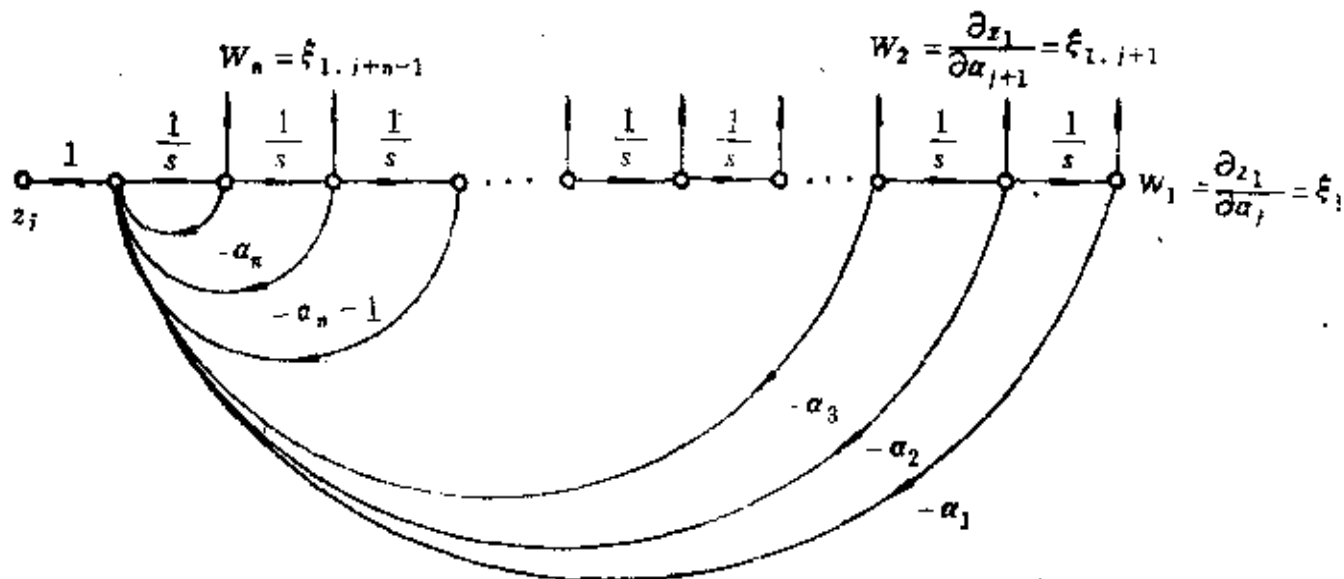


图 6-4

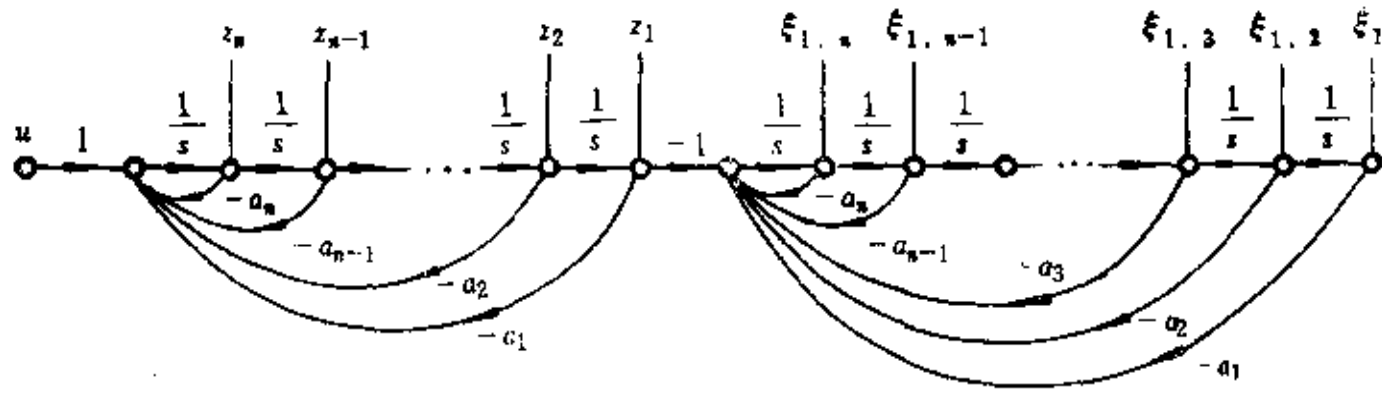


图 6-5

(三)完全同时性定理

**定理 6-2 完全同时性定理** 当系统用相变型表达时, 所有的轨迹灵敏度函数

$$\xi_{ij} = \left. \frac{\partial z_j}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (6-84)$$

都可由一个组合系统模型中状态变量的线性组合来测定。这个组合系统是由系统的额定模型和它的任意一种灵敏度模型所构成的。

**证明** 现利用图 6-4 所示的系统灵敏度模型来进行定理的证明。由上述完全对称性定理的推论(2)知, 以下几个灵敏度函数

$$\xi_{1j} = \left. \frac{\partial z_1}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

可由图 6-5 所示的组合系统模型测得。参看公式(6-72)所示的灵敏度阵, 再根据完全对称性定理可见, 该阵的左上三角阵中的元素已能完全由该组合系统模型测得。剩下的问题是测上述矩阵中最右边的(n-1)个灵敏度函数。

$$\xi_{kn} = \left. \frac{\partial z_{kn}}{\partial \alpha_n} \right|_{\alpha_0}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

以下论证这 n-1 个灵敏度函数可由上述组合系统的状态变量的线性组合求得。

先看  $\xi_{2n} = \left. \frac{\partial z_2}{\partial \alpha_n} \right|_{\alpha_0}$  的情况。参看图 6-5, 在图中灵敏度模型的第 k 个节点处, 它的状态变量是

$$\frac{\partial z_1}{\partial \alpha_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

又由系统相变型表示法的特点知,  $\dot{z}_1 = z_2$ , 故

$$\frac{\partial \dot{z}_1}{\partial \alpha_n} = \frac{\partial z_2}{\partial \alpha_n}$$

此外, 由各灵敏度函数的对称关系, 有

$$\frac{\partial z_1}{\partial \alpha_n} = \frac{\partial z_n}{\partial \alpha_1}$$

同时考虑上述三方面, 在式(6-73)中取 j=1, 并计及对称关系, 可得

$$\xi_{2n} = \frac{\partial z_2}{\partial \alpha_n} = \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial \alpha_n} = \frac{\partial z_n}{\partial \alpha_1}$$

$$\begin{aligned}
&= -z_1 - \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial z_i}{\partial a_1} \\
&= -z_1 - \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial z_1}{\partial a_i}
\end{aligned} \tag{6-85}$$

显然,  $\xi_{2n}$  是前述组合系统中各状态变量的线性组合。

再看  $\xi_{3n} = \left. \frac{\partial z_3}{\partial a_n} \right|_{\alpha_0}$  的情况。由相变型系统的特点, 式(6-83), (6-85)及灵敏度函数的对称关系, 有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_3}{\partial a_n} &= \frac{\partial z_2}{\partial a_n} = -z_1 - \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial z_1}{\partial a_i} \\
&= -z_2 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial z_1}{\partial a_i} - a_n \frac{\partial z_1}{\partial a_n} \\
&= -z_2 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial z_1}{\partial a_{i+1}} - a_n \frac{\partial z_1}{\partial a_n} \\
&= -z_2 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial z_1}{\partial a_{i+1}} - a_n \frac{\partial z_2}{\partial a_n} \\
&= -z_2 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial z_1}{\partial a_{i+1}} - a_n \left[ z_1 - \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial z_1}{\partial a_i} \right]
\end{aligned}$$

显然, 上式又是组合系统中各状态变量的线性组合。

仿此, 一直可以证得  $\xi_{nn}$  也是组合系统中各状态变量的线性组合。

如用原系统的其它灵敏度模型来证明, 结论也一样。

至此, 定理证毕。

#### (四) 结论与例题

由上述两个定理可见, 对一个具有  $r$  个参数的任意  $n$  阶线性定常系统而言,  $n \cdot r$  个轨迹灵敏度函数并非都独立, 如果用原系统模型及任一种单个灵敏度模型构成一个组合系统, 则所有这些灵敏度函数都可通过直接测量或间接计算法, 由该组合系统的各状态变量求得。显然, 这是灵敏度点法的推广。

**例 6-6** 设某系统的方程如下

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 & z_1(0) &= 0 \\
\dot{z}_2 &= z_3 & z_2(0) &= 0 \\
\dot{z}_3 &= -a_1 z_1 - a_2 z_2 - a_3 z_3 + u, & z_3(0) &= 0 \\
y &= z_1
\end{aligned}$$

试求可同时求得各轨迹灵敏度的组合系统的信号流程图。

**解** 在本题情况下, 系统是 3 阶的, 参数向量  $\alpha = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ , 即  $r = 3$ , 因此, 轨迹灵敏度阵为

$$\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3] = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{bmatrix}$$

对这个轨迹灵敏度阵, 除  $\xi_{11}$  及  $\xi_{33}$  外, 根据完全对称性定理, 可知

$$\begin{aligned}\xi_{21} &= \xi_{12} \\ \xi_{31} &= \xi_{22} = \xi_{13} \\ \xi_{32} &= \xi_{23}\end{aligned}$$

故独立的灵敏度函数共  $2n-1=2 \times 3-1=5$  个, 它们是  $\xi_{11}$ ,  $\xi_{33}$ ,  $\xi_{21}$  (或  $\xi_{12}$ ),  $\xi_{31}$  (或  $\xi_{22}$ ,  $\xi_{13}$ ),  $\xi_{32}$  (或  $\xi_{23}$ )。

基于上述对称性, 我们可以有许多组合模型的构成方案, 例如, 用将原方程对参数  $\alpha_1$  求导的方法, 可以构成直接测量  $\xi$  阵中第一列元素的灵敏度模型, 并由此构成相应的组合系统模型, 求得所有其它的灵敏度函数  $\xi_{12}$ ,  $\xi_{22}$ ,  $\xi_{32}$  及  $\xi_{13}$ ,  $\xi_{23}$ ,  $\xi_{33}$ 。假如我们将原方程对  $\alpha_2$  求导, 并由此构成相应的组合系统, 问题就转为直接测定  $\xi_{12}$ ,  $\xi_{22}$  及  $\xi_{32}$  并间接计算其它几个灵敏度函数  $\xi_{11}$ ,  $\xi_{21}$ ,  $\xi_{31}$  及  $\xi_{13}$ ,  $\xi_{23}$ ,  $\xi_{33}$  了。当然, 我们也可构成直接测定第一行元素  $\xi_{11}$ ,  $\xi_{12}$ ,  $\xi_{13}$  的灵敏度模型及相应的组合系统, 并在直接测得  $\xi_{11}$ ,  $\xi_{12}$ ,  $\xi_{13}$  后, 计算  $\xi$  中第 2 及第 3 行的各灵敏度函数。总之, 选取灵敏度模型并籍以构成组合系统的方案是很多的。

下面, 我们选取直接测定  $\xi$  阵中第一列元素  $\xi_{11}$ ,  $\xi_{21}$ ,  $\xi_{31}$  的灵敏度模型, 并以此方案作进一步的说明。

将原方程对  $\alpha_1$  求导, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_1}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial z_2}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial z_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial z_3}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial z_3}{\partial \alpha_1} &= -a_1 \frac{\partial z_1}{\partial \alpha_1} - a_2 \frac{\partial z_2}{\partial \alpha_1} - a_3 \frac{\partial z_3}{\partial \alpha_1} - z_1\end{aligned}$$

由此, 可得灵敏度模型。把这个模型与原系统的模型按要求相连, 便得图 6-6 所示的组合系统模型。

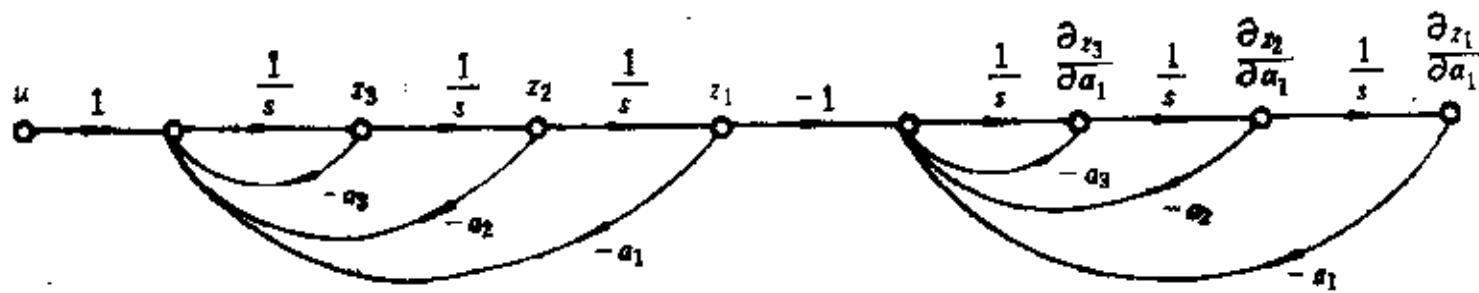


图 6-6

由这个图, 可以直接测定  $\xi$  中第一列的诸元素

$$\xi_{11} = \left. \frac{\partial z_1}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_0}, \quad \xi_{21} = \left. \frac{\partial z_2}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_0}, \quad \xi_{31} = \left. \frac{\partial z_3}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_0}$$

按威-伯定理,  $\xi$  中的其它各元素  $\xi_{12}$ ,  $\xi_{22}$ ,  $\xi_{32}$  及  $\xi_{13}$ ,  $\xi_{23}$ ,  $\xi_{33}$  也可由该组合系统求得。这是因为, 基于灵敏度函数的完全对称性及式(6-83), 再考虑相变型结构的特点, 可推得阵  $\xi$  中的第 2 列各元素  $\xi_{12}$ ,  $\xi_{22}$ ,  $\xi_{32}$ , 即

$$\xi_{12} = \frac{\partial z_1}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial z_1}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial z_2}{\partial \alpha_1}$$

$$\xi_{22} = \frac{\partial z_2}{\partial a_2} = \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial a_1} = \frac{\partial z_3}{\partial a_1}$$

$$\xi_{32} = \frac{\partial z_3}{\partial a_2} = \frac{\partial \dot{z}_3}{\partial a_1} = -a_1 \frac{\partial z_1}{\partial a_1} - a_2 \frac{\partial z_2}{\partial a_1} - a_3 \frac{\partial z_3}{\partial a_1} - z_1$$

同理，可求得  $\xi$  中的第 3 列元素为

$$\xi_{13} = \frac{\partial z_1}{\partial a_3} = \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial a_2} = \frac{\partial z_2}{\partial a_2} = \frac{\partial z_3}{\partial a_1}$$

$$\xi_{23} = \frac{\partial z_2}{\partial a_3} = \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial a_2} = \frac{\partial z_3}{\partial a_2} = -a_1 \frac{\partial z_1}{\partial a_1} - a_2 \frac{\partial z_2}{\partial a_1} - a_3 \frac{\partial z_3}{\partial a_1} - z_1$$

$$\xi_{33} = \frac{\partial z_3}{\partial a_3} = \frac{\partial \dot{z}_3}{\partial a_2}$$

注意，上式中  $\frac{\partial \dot{z}_3}{\partial a_2}$  是未知的。可设想将原方程对  $a_2$  求导来求它，即

$$\frac{\partial \dot{z}_1}{\partial a_2} = \frac{\partial z_2}{\partial a_2}$$

$$\frac{\partial \dot{z}_3}{\partial a_2} = \frac{\partial z_3}{\partial a_2}$$

$$\frac{\partial \dot{z}_3}{\partial a_2} = -a_1 \frac{\partial z_1}{\partial a_2} - a_2 \frac{\partial z_2}{\partial a_2} - a_3 \frac{\partial z_3}{\partial a_2} - z_2$$

将上式中的第 3 式代入  $\xi_{33} = \frac{\partial \dot{z}_3}{\partial a_2}$  的公式中，得

$$\begin{aligned} \xi_{33} &= \frac{\partial z_3}{\partial a_3} = \frac{\partial \dot{z}_3}{\partial a_2} = -a_1 \frac{\partial z_1}{\partial a_2} - a_2 \frac{\partial z_2}{\partial a_2} - a_3 \frac{\partial z_3}{\partial a_2} - z_2 \\ &= -a_1 \frac{\partial z_2}{\partial a_1} - a_2 \frac{\partial z_3}{\partial a_1} - a_3 \left( -a_1 \frac{\partial z_1}{\partial a_1} - a_2 \frac{\partial z_2}{\partial a_1} - a_3 \frac{\partial z_3}{\partial a_1} - z_1 \right) - z_2 \\ &= a_1 a_3 \frac{\partial z_1}{\partial a_1} - (a_1 - a_2 a_3) \frac{\partial z_2}{\partial a_1} - (a_2 - a_3^2) \frac{\partial z_3}{\partial a_1} + a_3 z_1 - z_2 \end{aligned}$$

本题的计算结果示于图 6-7 及图 6-8 中。

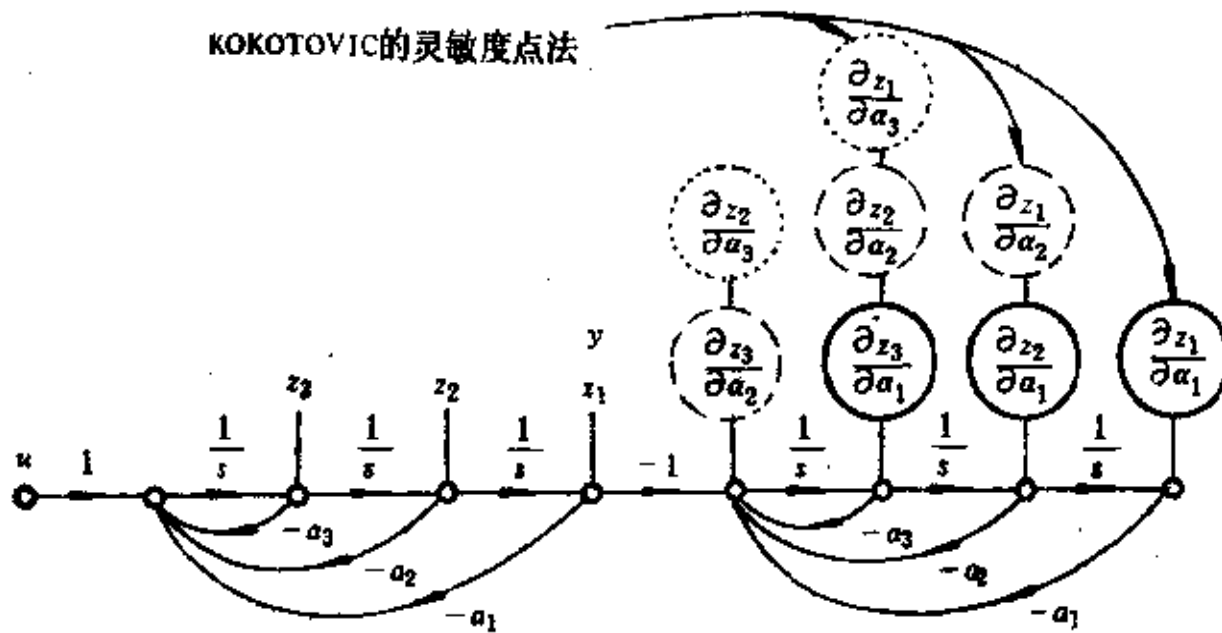


图 6-7

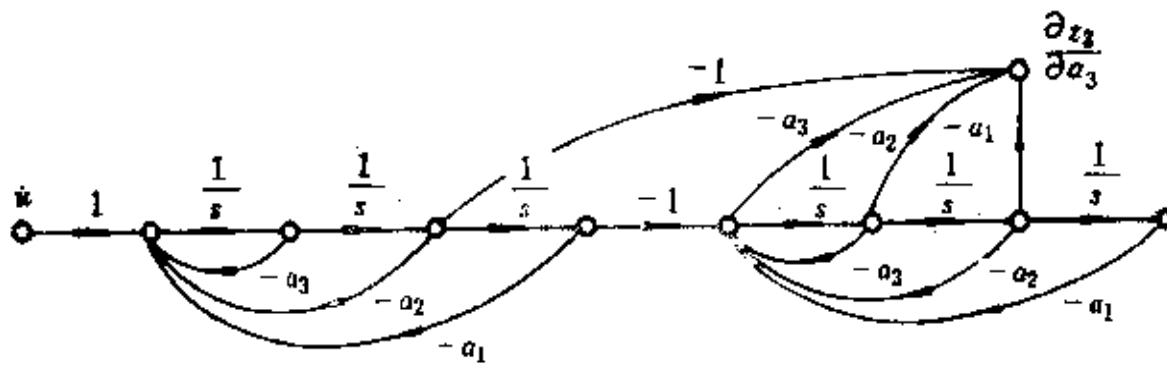


图 6-8

## 第四节 特征值灵敏度确定法

### 一、有关的基础知识

#### (一) 特征值问题的提出

我们先从数学的角度来回顾一下特征值问题的提出。设有以下微分方程组

$$\dot{x} = Ax(t) \quad (6-86)$$

为解以上方程，设解为  $x_i = c_i e^{\lambda t}$ ，即

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda t} \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = e^{\lambda t} C \quad (6-87)$$

式中  $\lambda$  —— 特征值

$C$  —— 特征向量， $C \triangleq [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]^T$ 。

将式(6-87)代入式(6-86)，考虑到  $e^{\lambda t}$  为纯量，有

$$\lambda C = AC$$

也即

$$(\lambda I - A)C = 0 \quad (6-88)$$

于是，解微分方程的问题就变成了解式(6-88)所示的线性代数方程问题。由此求得的  $\lambda$  及  $C$  确定了微分方程的解。由此可见，特征值的问题实质上是解微分方程的问题。

从控制理论的观点看，由于系统是用数学模型来表征的，故特征值决定了系统的动态响应及相应的动态特征。

#### (二) 左、右特征向量的概念

为了便于实际应用，人们研究了各种不同矩阵的特征值与特征向量情况，并进行了比较。对本节所讲的内容来讲，最感兴趣的是探讨任意方阵  $A$  及其转置阵  $A^T$  的特征值及其特征向量的关系。以下研究这个问题。

1. 方阵  $A^T$  与  $A$  具有相同的特征值 设有某方阵  $A$ ，它的所有特征值的集合构成了所谓的  $A$  的特征值谱  $\lambda(A)$ 。 $\lambda(A)$  可由以下特征方程求得

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (6-89)$$

对  $A$  的转置方阵  $A^T$  而言，它的特征值谱  $\mu(A^T)$  则应由特征方程



$$|A^T - \mu I| = 0 \quad (6-90)$$

求得。显然

$$\begin{aligned} |A^T - \mu I| &= |(A^T - \mu I)^T| \\ &= |A - \mu I| = 0 \end{aligned} \quad (6-91)$$

将上式与式(6-89)相比较, 可见

$$\mu = \lambda \quad (6-92)$$

也即,  $A$  与  $A^T$  有相同的特征值  $\lambda_j$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ 。

2. 方阵  $A^T$  与  $A$  的特征向量不相同 方阵  $A^T$  与  $A$  具有相同的特征值, 它们的特征向量是否相同? 以下探讨这个问题。

以  $A$  看, 由特征值的定义, 有

$$A\mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j \quad (6-93)$$

式中  $\lambda_j$  ——  $\lambda(A)$  中的一个特征值;

$\mathbf{u}_j$  —— 与  $\lambda_j$  相应的特征向量。

由  $A^T$  看, 有

$$A^T \mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k \quad (6-94)$$

式中  $\lambda_k$  ——  $\mu(A^T) = \lambda(A^T)$  中的一个特征值;

$\mathbf{v}_k$  —— 与  $\lambda_k$  相应的特征向量。

将式(6-93)两边左乘向量  $\mathbf{v}_k^T$ , 有

$$\mathbf{v}_k^T A \mathbf{u}_j = \mathbf{v}_k^T \lambda_j \mathbf{u}_j \quad (6-95)$$

而将式(6-94)转置之, 并右乘  $\mathbf{u}_j$ , 可得

$$\mathbf{v}_k^T A \mathbf{u}_j = \lambda_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{u}_j \quad (6-96)$$

由式(6-95)和式(6-96)可得

$$(\lambda_j - \lambda_k) \mathbf{v}_k^T \mathbf{u}_j = 0 \quad (6-97)$$

探讨上式, 有关系式

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{u}_j = \begin{cases} \text{任意常数 } c, & j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases} \quad (6-98)$$

若取上式中的任意常数  $c = 1$ , 便得

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{u}_j = \delta_{kj}, \quad (6-99)$$

式中  $\delta_{kj}$  为克隆乃克函数(Kronecker delta),

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (6-100)$$

因此, 尽管方阵  $A$  与  $A^T$  的特征值相同, 它们的相应特征向量却不相同, 两者是以关系式(6-99)相连系着的。如果我们以向量  $\mathbf{v}_k$  及  $\mathbf{u}_j$  的范数  $\|\mathbf{v}_k\|$ ,  $\|\mathbf{u}_j\|$  的乘积除式(6-98)中的第一式, 并取常数  $c = \|\mathbf{v}_k\| \|\mathbf{u}_j\|$ , 便有

$$\frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{u}_j}{\|\mathbf{v}_k\| \|\mathbf{u}_j\|} = \frac{c}{c} = 1$$

为了方便, 我们仍以  $v_k$  表示  $\frac{v_k}{\|v_k\|}$ ,  $u_j$  表示  $\frac{u_j}{\|u_j\|}$ , 便得规格化表达式

$$v_k^T u_j = \delta_{kj} \quad (6-101)$$

应该强调, 这个式子的外观尽管与式(6-98)一样, 但实际上却是经过了规格化的式(6-99)。我们常用这个经过规格化了的公式来研讨问题。

3. 左、右特征向量 在常规情况下, 基于特征值的定义, 特征值与其相应的特征向量总是用形如(6-93)的公式相联系, 这时,  $u_j$  总是处在阵  $A$  的右端。因此, 常称  $u_j$  为  $A$  的右特征向量。

然而, 以公式(6-94)来看, 如果把它转置之, 便有

$$v_k^T A = \lambda_k v_k^T \quad (6-102)$$

在这个式子中, 向量  $v_k$  却处在阵  $A$  的左边了, 所以, 这个实为  $A^T$  的特征向量常称为  $A$  的左特征向量。

顺便指出,  $A$  的左特征向量又常称为  $A$  的伴随特征向量。由前述可见,  $A$  的左、右特征向量是以式(6-99)或式(6-101)相联系的。

### (三) 模态阵

1.  $A$  的模态阵 由数学知识知道, 对任一具有相互各异的特征值  $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$  的方阵  $A$  而言, 相应的特征向量也必不同。如果把这  $n$  个特征向量  $u_1, u_2, \dots, u_n$  组成一个矩阵, 这个非奇异的矩阵称为模态阵。也即, 模态阵为

$$U \triangleq [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \quad (6-103)$$

用  $A$  的模态阵可以将矩阵  $A$  进行对角化。这在控制系统中意味着实现状态解耦。事实上, 由特征值的定义, 可得

$$A[u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

也即

$$AU = U \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (6-104)$$

于是

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = U^{-1}AU \quad (6-105)$$

这就实现了  $A$  的对角化。

2.  $A^T$  的模态阵 基于上述, 如果  $A$  的特征值  $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$  各异, 则  $A$  的转置阵  $A^T$  的特征向量  $v_i, i=1, 2, \dots, n$  也必各异。这些互异的特征向量构成的阵

$$V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \quad (6-106)$$

便是  $A^T$  的模态阵, 它也是个非奇异阵。

3. 模态阵  $U$  与  $V$  的相互关系 由公式(6-101)可推知

$$\begin{bmatrix} v_1^T u_1 & v_1^T u_2 & \dots & v_1^T u_n \\ v_2^T u_1 & v_2^T u_2 & \dots & v_2^T u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n^T u_1 & v_n^T u_2 & \dots & v_n^T u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \end{bmatrix} = I$$

若用式(6-103)及式(6-106)来表达上式, 便得

$$V^T U = I \quad (6-107)$$

转置之, 有

$$U^T V = I \quad (6-108)$$

式(6-107)与式(6-108)是  $A$  与  $A^T$  的模态阵  $U$  与  $V$  间的相互关系式。

## 二、特征值的灵敏度求法

有了以上的基础知识, 我们可以来研究特征值的灵敏度求法。以下分几种情况来探讨。

(一)由系统阵  $A$  的左、右特征向量求特征值灵敏度

我们的课题如下: 设系统的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

并知实际系统的参数向量  $\alpha$  与建模所得的参数额定值  $\alpha_0$  不一样, 这反映到系统阵  $A$  中, 为

$$A = [a_{ij}(\alpha)]_{n \times n} \quad (6-109)$$

式中  $a_{ij}$ ——阵  $A$  的元素。

现若  $A$  阵的左、右特征向量可以求得, 要求半相对灵敏度函数  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial \ln \alpha_j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ 。

由特征值的定义出发, 可以解决这个问题。因为参数  $\alpha$  的扰动使  $A$  阵发生了变化, 故必使  $A$  的特征值谱及相应的特征向量也随之而变。基于这个考虑, 将方程

$$A u_i = \lambda_i u_i$$

对  $\alpha_j$  求导, 有

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha_j} u_i + A \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial \alpha_j} u_i + \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j}$$

将上式前乘  $A$  的左特征向量  $v_i^T$ , 可得

$$v_i^T \frac{\partial A}{\partial \alpha_j} u_i + v_i^T A \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} = v_i^T \frac{\partial \lambda_i}{\partial \alpha_j} u_i + v_i^T \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j}$$

考虑关系式(6-102), 上式成为

$$v_i^T \frac{\partial A}{\partial \alpha_j} u_i = v_i^T \frac{\partial \lambda_i}{\partial \alpha_j} u_i$$

于是

$$\left( \frac{\partial \lambda_i}{\partial \alpha_j} \right)_{\alpha_0} = \left( \frac{v_i^T \frac{\partial A}{\partial \alpha_j} u_i}{v_i^T u_i} \right)_{\alpha_0} \quad (6-110)$$

相应的半相对灵敏度函数为

$$\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \ln a_j}\right)_{a_0} = \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial a_j}\right)_{a_0} a_{j0} = \left(\frac{v_i^T \frac{\partial A}{\partial a_j} u_i}{v_i^T u_i}\right)_{a_0} a_{j0},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

如果按公式(6-99)计算, 则因  $v_i^T u_i = 1$ ,

故有

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial a_j} = v_i^T \frac{\partial A}{\partial a_j} u_i \quad (6-112)$$

及

$$\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \ln a_j}\right)_{a_0} = \left(v_i^T \frac{\partial A}{\partial a_j} u_i\right)_{a_0} a_{j0} \quad (6-113)$$

作为一个特例, 如果在计算过程中  $A$  的各元  $a_{jl}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$  本身是参数, 则情况简化不少。看下例。

**例 6-7** 设有系统阵  $A$  为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

其中, 可变参数为  $a = a_{12}$ , 试求  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{12}}$ 。

**解** 由公式(6-112), 有

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{12}} = v_i^T \frac{\partial A}{\partial a_{12}} u_i$$

由题给数据, 可求得

$$\frac{\partial A}{\partial a_{12}} = \frac{\partial}{\partial a_{12}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$u_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \end{bmatrix}$$

$$v_i = \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{bmatrix}$$

因此

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{12}} = [v_{i1} \ v_{i2}] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \end{bmatrix} = v_{i1} u_{i2}$$

由此例不难推知, 当参数是阵  $A$  的元  $a_{jl}$  时, 特征值灵敏度函数为

$$\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{jl}}\right)_{a_0} = v_{ij0} u_{il0}, \quad i, j, l = 1, 2, \dots, n \quad (6-114)$$

半相对灵敏度函数则为

$$\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \ln a_{jl}}\right)_{a_0} = v_{ij0} u_{il0} a_{jl0}, \quad i, j, l = 1, 2, \dots, n \quad (6-115)$$

上两式中, 向量  $u_i$  及  $v_i$  中的分量可以是所谓经过规格化处理过的量, 也即, 它们都是用该向量本身的范数除过的量, 也可以是未经上述规格化处理的原始向量。

**例 6-8** 设某系统阵为

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试求：特征值， $A$ 的左、右特征向量，并求 $A$ 阵的元 $a_{23}$ 有摄动 $\delta a_{23} = -0.8$ 时的特征值灵敏度函数及实际的特征值。

解 先求特征值。由公式 $|\lambda I - A| = 0$ ，可求得

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0$$

因此，特征值为 $\lambda_1 = 1$ ， $\lambda_2 = -1 + i$ ， $\lambda_3 = -1 - i$

求相应的右特征向量。 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量可求之如下

$$\begin{aligned} (\lambda_1 I - A)\mathbf{u}_1 &= \begin{bmatrix} 1+2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

而它的二阶子行列式不都为零，故知

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

因此，可用下式求 $\mathbf{u}_1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \dots\dots\dots \\ u_{13} \end{bmatrix} = 0$$

令 $u_{13} = 1$ ，可求得 $u_{11} = 0$ ， $u_{12} = 1$ ，也即

$$\mathbf{u}_1 = [u_{11} \ u_{12} \ u_{13}]^T = [0 \ 1 \ 1]^T$$

$\lambda_2 = -1 + i$ 的特征向量可仿此用下法求得

$$(\lambda_2 I - A)\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} (-1+i)+2 & 1 & -1 \\ -1 & -1+i & -1 \\ 1 & 0 & (-1+i)-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{rank}(\lambda_2 I - A) = 2$$

$$\begin{bmatrix} i+1 & 1 & \vdots & -1 \\ \dots\dots\dots & & & \\ -1 & -1+i & \vdots & -1 \\ 1 & 0 & \vdots & -2+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ \dots\dots \\ u_{23} \end{bmatrix} = 0$$

令  $u_{23} = 2+i$ , 可求得  $[u_{21} \ u_{22}]^T = [5 \ -3 \ -4i]^T$ , 于是

$$u_2 = [u_{21} \ u_{22} \ u_{23}]^T = [5 \ -3-4i \ 2+i]^T$$

$\lambda_3 = -1-i$  的特征向量必与  $\lambda_2$  的特征向量相互共轭, 故

$$u_3 = [u_{31} \ u_{32} \ u_{33}]^T = [5 \ -3+4i \ 2-i]^T$$

A 阵的左特征向量可由  $A^T$  仿上法求得。求得的该向量  $v_k, k=1, 2, 3$  应满足式(6-99)。A 阵的三个左特征向量分别为

$$v_1 = [-0.2 \quad 0.2 \quad 0.8]^T$$

$$v_2 = [0.1+0.1i \quad 0.1i \quad -0.1i]^T$$

$$v_3 = [0.1-0.1i \quad -0.1i \quad 0.1i]^T$$

以下求特征值灵敏度函数。由公式(6-114), 可求得

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{23}} = v_{12} u_{13} = 0.2 \times 1 = 0.2$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial a_{23}} = v_{22} u_{23} = -0.1 + 0.2i$$

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial a_{23}} = v_{32} u_{33} = -0.1 - 0.2i$$

最后, 求实际的特征值  $\hat{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T$

$$\hat{\lambda}_1 = \lambda_1 + \frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{23}} \delta a_{23} = 0.84$$

$$\hat{\lambda}_2 = \lambda_2 + \frac{\partial \lambda_2}{\partial a_{23}} \delta a_{23} = -0.92 + 0.84i$$

$$\hat{\lambda}_3 = \lambda_3 + \frac{\partial \lambda_3}{\partial a_{23}} \delta a_{23} = -0.92 - 0.84i$$

由于特征值灵敏度的计算工作量往往很大, 所以通常引用特征值灵敏度矩阵  $S_i$  来进行检验。 $S_i$  的定义为

$$S_i \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{11}} & \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{12}} & \dots & \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{1n}} \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{21}} & \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{22}} & \dots & \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{2n}} \\ \dots\dots\dots & & & \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{n1}} & \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{n2}} & \dots & \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{nn}} \end{bmatrix} \quad (6-116)$$

由公式(6-103), (6-106)及(6-114)可得

$$\begin{aligned}
S_i &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{11}} & \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{12}} & \dots & \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{1n}} \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{21}} & \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{22}} & \dots & \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{n1}} & \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{n2}} & \dots & \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{nn}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_{i1}u_{i1} & v_{i1}u_{i2} & \dots & v_{i1}u_{in} \\ v_{i2}u_{i1} & v_{i2}u_{i2} & \dots & v_{i2}u_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{in}u_{i1} & v_{in}u_{i2} & \dots & v_{in}u_{in} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \vdots \\ v_{in} \end{bmatrix} [u_{i1} \ u_{i2} \ \dots \ u_{in}] \\
&= v_i u_i^T \\
&= v_i \langle u_i, i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{6-117}$$

$S_i$  阵的性质是

$$S_i S_k = \delta_{ik} S_i, \quad i, k=1, 2, \dots, n \tag{6-118}$$

及

$$\sum_{i=1}^n S_i = I \tag{6-119}$$

式中,  $\delta_{ik}$  为 Kronecker delta 函数。

(二) 系统阵  $A$  的元素  $a_{jk}$ ,  $j, k=1, 2, \dots, n$  变化时, 求特征值灵敏度的另一种方法  
 设系统阵  $A = [a_{jk}]$ ,  $j, k=1, 2, \dots, n$ , 相应的特征方程为

$$f[\lambda(A), A] = |\lambda I - A| \tag{6-120}$$

$$= \prod_{\nu=1}^n [\lambda - \lambda_\nu(A)] \tag{6-121}$$

$$= \lambda^n + \sum_{\mu=1}^n a_\mu(A) \lambda^{\mu-1} \tag{6-122}$$

$$= 0$$

式中  $a_\mu$  —— 特征方程的系数,  $\mu=1, 2, \dots, n$ 。

设  $a_{jk}$ ,  $j, k=1, 2, \dots, n$  为可变参数, 将特征方程对  $\ln a_{jk}$  求导之, 即

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \ln a_{jk}} + \frac{\partial f}{\partial \ln a_{jk}} \frac{\partial \ln a_{jk}}{\partial \ln a_{jk}} = 0, \quad \lambda = \lambda_i \tag{6-123}$$

于是, 有

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \ln a_{jk}} = - \frac{\partial f / \partial \ln a_{jk}}{\partial f / \partial \lambda} \Big|_{\lambda = \lambda_i}$$

$$\sum_{\mu=1}^n \left[ \frac{\partial \alpha_{\mu}(A)}{\partial \ln a_{jk}} \right] \lambda_i^{\mu-1} = \prod_{\nu=1, \nu \neq i}^n (\lambda_i - \lambda_{\nu}) \quad (6-124)$$

这种求特征值半相对灵敏度法的特点是可以不求特征向量。

**例 6-9** 设系统阵  $A$  为相变型, 即

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 \cdots - \alpha_n \end{bmatrix}$$

且若所有的 0 及 1 元素皆无摄动, 可变参数为  $\alpha_{\mu}$ , 试用式(6-124)求  $\partial \lambda_i / \partial \ln \alpha_{\mu}$

**解** 在本题情况下, 特征方程为

$$f(\lambda, \alpha) = \lambda^n + \alpha_n \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_2 \lambda + \alpha_1 = 0 \quad (6-125)$$

故由式(6-124), 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \ln \alpha_{\mu}} &= - \frac{\sum_{\mu=1}^n \left( \frac{\partial \alpha_{\mu}}{\partial \ln \alpha_{\mu}} \right) \lambda_i^{\mu-1}}{\prod_{\nu=1, \nu \neq i}^n (\lambda_i - \lambda_{\nu})} \\ &= - \frac{\lambda_i^{\mu-1} \alpha_{\mu}}{\prod_{\nu=1, \nu \neq i}^n (\lambda_i - \lambda_{\nu})} \quad \mu = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \quad (6-126)$$

作为上述方法的进一步推广, 还常定义综合的半相对特征值灵敏度函数, 以此来同时考虑  $A$  的所有元  $a_{jk}$ ,  $j, k = 1, 2, \cdots, n$  的摄动对系统特征值的影响。如以下标“0”表示额定值时的情况,  $\Delta \tilde{\lambda}_i$  表示  $\Delta \lambda_i$  的共轭复根, 则综合的半相对特征值灵敏度函数  $\tilde{S}_{\lambda_i}$  的定义为

$$\tilde{S}_{\lambda_i} \triangleq \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \sup_{|\Delta \ln a_{jk}| \leq \Delta} \sum_{j,k} \Delta \lambda_i (\Delta \ln a_{jk}), \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad (6-127)$$

其中,  $\Delta \ln a_{jk} \triangleq [d(\ln a_{jk})]_0 = \frac{1}{a_{jk0}} da_{jk} = \frac{\Delta a_{jk}}{a_{jk0}}$ ,  $\Delta = \left( \frac{\Delta a_{jk}}{a_{jk0}} \right)_0$ ,  $\Delta = \left( \frac{\Delta a_{jk}}{a_{jk0}} \right)_0$ ,  
 $\sup \Delta \lambda_i = |\Delta \tilde{\lambda}_i|$ 。

如果定义

$$f_{\lambda}(\lambda_i) \triangleq \prod_{\nu=1, \nu \neq i}^n (\lambda_i - \lambda_{\nu}) \quad (6-128)$$

则由式(6-126), 有

$$\begin{aligned} \partial \lambda_i &= - \frac{\lambda_i^{\mu-1} \alpha_{\mu}}{f_{\lambda}(\lambda_i)} \partial \ln \alpha_{\mu} \\ &= - \frac{\lambda_i^{\mu-1} \Delta \alpha_{\mu}}{f_{\lambda}(\lambda_i)} \quad i, \mu = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \quad (6-129)$$

于是, 式(6-127)成为

$$\tilde{S}_{\lambda_i} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \sup_{|\Delta \ln \alpha_{\mu}| \leq \Delta} \frac{1}{f_{\lambda}(\lambda_i)} \sum_{\mu=0}^{n-1} (-\lambda_i^{\mu} \Delta \alpha_{\mu+1}) \quad (6-130)$$



当  $\lambda_i$  为实数时, 有

$$\bar{S}_{A^{\lambda_i}} = \frac{1}{|f_{\lambda}(\lambda_i)|} \sum_{\mu=0}^{n-1} |\lambda_i^{\mu} \alpha_{\mu+1}| \quad (6-131)$$

例 6-10 设系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} x, \quad \alpha_{10} = 3, \quad \alpha_{20} = 4$$

试求半相对特征值灵敏度函数与综合的半相对特征值灵敏度函数。

解 特征值的一般表达式可由特征方程

$$|\lambda I - A| = 0$$

求得, 即

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_1 = 0$$

故

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_1}}{2}$$

代入额定参数  $\alpha_{10}, \alpha_{20}$ , 使得特征值的额定值为

$$\lambda_{10} = -1, \quad \lambda_{20} = 3$$

由于本题的状态方程是相变型的, 故特征值对参数  $\alpha_1$  及  $\alpha_2$  的半相对灵敏度函数可由公式 (6-126) 求之

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \lambda_1}{\partial \ln \alpha_1} \right|_{\alpha_0} &= - \frac{\lambda_{10}^0 \alpha_{10}}{\lambda_{10} - \lambda_{20}} = -3/2 \\ \left. \frac{\partial \lambda_1}{\partial \ln \alpha_2} \right|_{\alpha_0} &= - \frac{\lambda_{10} \alpha_{20}}{\lambda_{10} - \lambda_{20}} = 2 \\ \left. \frac{\partial \lambda_2}{\partial \ln \alpha_1} \right|_{\alpha_0} &= - \frac{\lambda_{20}^0 \alpha_{10}}{\lambda_{20} - \lambda_{10}} = 3/2 \\ \left. \frac{\partial \lambda_2}{\partial \ln \alpha_2} \right|_{\alpha_0} &= - \frac{\lambda_{20} \alpha_{20}}{\lambda_{20} - \lambda_{10}} = -6 \end{aligned}$$

由于  $A$  阵的所有特征值皆为实数, 故综合的半相对特征值灵敏度函数可由公式 (6-131) 求得为

$$\begin{aligned} \bar{S}_{A^{\lambda_1}} &= \frac{1}{|f_{\lambda}(\lambda_1)|} \sum_{\mu=0}^{n-1} |\lambda_1^{\mu} \alpha_{\mu+1}| \\ &= \frac{|\lambda_{10}^0 \alpha_{10}| + |\lambda_{10}^1 \alpha_{20}|}{|\lambda_{10} - \lambda_{20}|} = 7/2 \\ \bar{S}_{A^{\lambda_2}} &= \frac{|\lambda_{20}^0 \alpha_{10}| + |\lambda_{20}^1 \alpha_{20}|}{|\lambda_{20} - \lambda_{10}|} = 15/2 \end{aligned}$$

(三) 计算特征值灵敏度的第三种方法

对一般的状态方程, 可用下式计算半相对特征值灵敏度函数

$$\left. \frac{\partial \lambda_i}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\alpha_0, \lambda_i} = \alpha_{j0} \frac{t_r[\text{Adj}(A - \lambda I)] \cdot \frac{\partial A}{\partial \alpha_j}}{t_r[\text{Adj}(A - \lambda I)]} \quad (6-132)$$

有人曾用此式证明过<sup>[10]</sup>，当用模拟计算机进行系统模拟计算时，约当型的状态方程对参数变异最不敏感。因此，进行系统模拟计算时，应用约当型的状态方程是比较合适的。

### 习 题

6-1 质点  $m$  在真空中下落，加速度  $g$  恒定， $x = [y \dot{y}]^T$  为系统状态， $m, \beta_1, \beta_2$  的额定值非零，求对  $m, \beta_1 = y(t_0), \beta_2 = \dot{y}(t_0)$  的轨迹灵敏度向量。

6-2 图 6-9 所示的三阶系统中， $a, b, T$  和  $K$  为常数。设  $T$  足够小（相对于  $1/b$ ）可以忽略，增益  $K$  很大，可认为  $K = \infty$ ；

(1) 画出  $T = 0$  和  $K = \infty$  时的退化结构图，

(2) 求对  $\Delta a$  的轨迹灵敏度方程，

(3) 用变元法求单位阶跃输入时的轨迹灵敏度函数  $\lambda_1 = (\partial x_1 / \partial \Delta a)_0, \eta_1 = (\partial x_2 / \partial \Delta a)_0$  和  $\eta_2 = (\partial x_3 / \partial \Delta a)_0$ 。

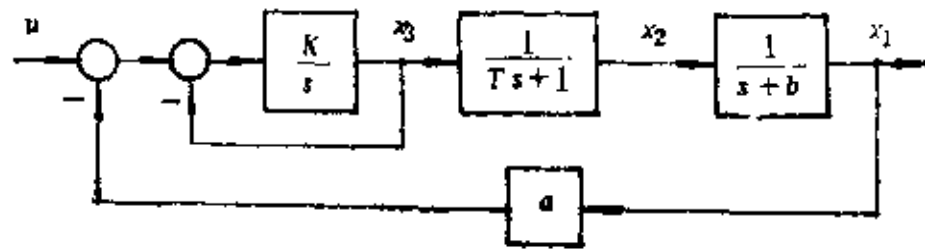


图 6-9

6-3 系统状态方程为  $\dot{x} = z, x(0) = 0; \dot{z} = -Tz - x + 1(t), z(0) = 0$ 。用华西列也娃法求  $\alpha_0 = 0$  时对  $a$  的轨迹灵敏度方程。

6-4 一个单输入单输出的  $n$  阶系统，其动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \quad x(0) = x^0 \\ y &= cx + du, \end{aligned}$$

其中， $A = A(\alpha), b = b(\alpha), c = C(\alpha), d = d(\alpha)$ 。若状态  $x$  以  $u = r - Kx$  的规律反馈，其中  $r$  为参考输入， $K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$  为  $1 \times n$  阶常数矩阵；

(1) 求对任一参数元  $\alpha_j$  的轨迹和向量输出灵敏度函数，

(2) 将结果用图形表示。

6-5 系统状态方程为  $\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3, \dot{z}_3 = z_4, \dot{z}_4 = -\alpha_1 z_1 - \alpha_2 z_2 - \alpha_3 z_3 - \alpha_4 z_4 + u$ ，所有初值均为 0，试画信号流图，以同时测量所有轨迹灵敏度函数  $\zeta_{i1} = (\partial z_i / \partial \alpha_1)_{\alpha_0}$ 。

6-6 设有系统状态方程  $\dot{x} = Ax + bu$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

若已知额定的参数值为  $\alpha_{10} = 6, \alpha_{20} = 11, \alpha_{30} = 6$ ，求对应于  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的半相对特征值灵敏度及对  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  给定容差的最敏感特征值。

## 第七章 频域灵敏度函数的确定法

本章讨论频域灵敏度函数及灵敏度尺度的确定法，即研究伯德灵敏度函数，霍洛维茨灵敏度函数，比较灵敏度函数，及根灵敏度函数的确定法。由于伯德灵敏度函数、霍洛维茨灵敏度函数及比较灵敏度函数间有十分密切的关系，且前两种可看成是比较灵敏度函数的特例，所以，限于篇幅，我们仅讨论比较灵敏度函数的确定方法。讨论根灵敏度函数的确定法时，着眼点与前章不一样，这里是从频域进行探讨。

### 第一节 比较灵敏度函数的确定法

本节讨论比较灵敏度函数的确定法，具体探讨单变量线性及非线性时变系统两方面的比较灵敏度函数确定问题。

#### 一、单变量线性系统的比较灵敏度函数确定法

在第四章中，我们曾针对图 4-12 所示的典型闭环系统情况，讨论了与比较灵敏度函数  $S_p(s, \alpha)$  有关的问题。由式(4-78)可知

$$S_p(s, \alpha) = [1 + P(s, \alpha)R(s)H(s)]^{-1} \quad (7-1)$$

显然，如果参数变异很小，即  $P(s, \alpha) \approx P(s, \alpha_0)$ ，式(7-1)可用在图 7-1 中的 (a) 处加入输入量，而在 (b) 处测得输出量的办法求得。

鉴于公式(4-77)的关系

$$\begin{aligned} \Delta Y_R(s, \alpha) \\ = S_p(s, \alpha) \Delta Y_S(s, \alpha) \end{aligned} \quad (7-2)$$

测量  $S_p(s, \alpha)$  的完整结构图如图 7-2 所示。图中，左边的系统是系统的额定模型，右边的系统则是图 7-1 所示的灵敏度模型。基于开、闭环系统的额定等效概念

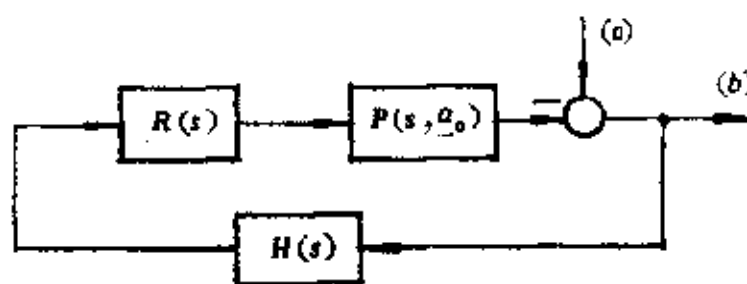


图 7-1

和关系式  $\Delta Y_S = \Delta P U_s$ 、 $\Delta P = P(s, \alpha) - P(s, \alpha_0)$  及  $U_s = \frac{Y_0}{P_0} = \frac{R}{1 + P_0 R H} W$ ，图 7-2 是不难理解的。值得注意的是，这个结构图与应用变元法求灵敏度函数的图形十分相似。

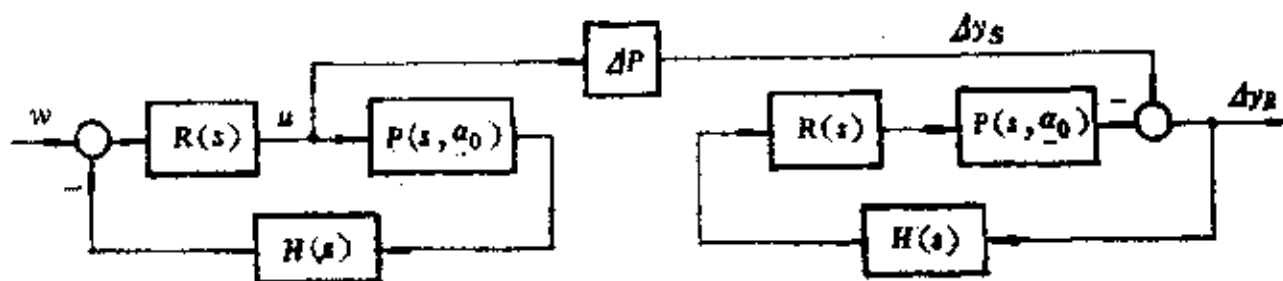


图 7-2

## 二、非线性时变系统的比较灵敏度算子确定法

设被控对象是一个非线性时变系统，对这种系统，频域法是无能为力的。因此，与以前讨论的线性系统情况不同，以下讨论比较灵敏度算子的测量问题。

设想对被控对象进行开环与闭环两种不同方案的控制。为了讨论比较灵敏度算子的问题，与以前研究比较灵敏度函数时一样，我们假定开环与闭环两个不同的系统是额定等效的，也即，额定参数时，在同样的系统输入  $w$  作用下，两个系统有相同的输出。假设被控对象的动态方程为

$$\dot{x} = f(x, u, a, t) \quad (7-3)$$

$$y = g(x, w, a, t) \quad (7-4)$$

式中  $x$ ——状态向量；  
 $y$ ——输出向量；  
 $w$ ——系统的输入指令信号；  
 $u$ ——对被控对象的控制作用；  
 $a$ ——参数向量；  
 $t$ ——时间变量。

如分别以下标  $R$  及  $S$  表示闭环与开环系统情况，则当系统输入皆为  $w$  时， $u_R(t, a_0) = u_S(t, a_0)$ 。

对闭环系统而言，由于存在反馈作用，所以被控对象的输入是

$$u_R(t, a) = h_R(y, w, t) \quad (7-5)$$

而对相应的开环系统而言，则有

$$u_S(t, a) = h_S(w, t) \quad (7-6)$$

将(7-3)，(7-4)两式对  $a$  的分量  $a_j$  在额定值  $a_0$  处求导。对闭环系统有

$$\frac{d}{dt} \left. \frac{\partial x_R}{\partial a_j} \right|_{a_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{a_0} \left. \frac{\partial x_R}{\partial a_j} \right|_{a_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{a_0} \left. \frac{\partial h_R}{\partial y} \right|_{a_0} \left. \frac{\partial y_R}{\partial a_j} \right|_{a_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial a_j} \right|_{a_0} \quad (7-7)$$

$$\left. \frac{\partial y_R}{\partial a_j} \right|_{a_0} = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{a_0} \left. \frac{\partial x_R}{\partial a_j} \right|_{a_0} + \left. \frac{\partial g}{\partial a_j} \right|_{a_0} \quad (7-8)$$

而对开环系统，则有

$$\frac{d}{dt} \left. \frac{\partial x_S}{\partial a_j} \right|_{a_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{a_0} \left. \frac{\partial x_S}{\partial a_j} \right|_{a_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial a_j} \right|_{a_0} \quad (7-9)$$

$$\left. \frac{\partial y_S}{\partial a_j} \right|_{a_0} = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{a_0} \left. \frac{\partial x_S}{\partial a_j} \right|_{a_0} + \left. \frac{\partial g}{\partial a_j} \right|_{a_0} \quad (7-10)$$

由公式(7-7)至(7-10)各式，可得

$$\lambda_R - \lambda_S = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{a_0} (\lambda_R - \lambda_S) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{a_0} \left. \frac{\partial h_R}{\partial y} \right|_{a_0} \sigma_R \quad (7-11)$$

$$\sigma_R - \sigma_S = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{a_0} (\lambda_R - \lambda_S) \quad (7-12)$$

式中  $\lambda_R$ ——闭环系统轨迹灵敏度向量；  
 $\lambda_S$ ——开环系统轨迹灵敏度向量；  
 $\sigma$ ——输出灵敏度向量。

公式(7-11)与公式(7-12)表达了  $\sigma_R$  与  $\sigma_S$  的关系。因此,可以把这两个时域中的输出灵敏度函数用一个时变运算符  $S_P$  联系起来,即

$$\sigma_R = S_P \{ \sigma_S \} \quad (7-13)$$

上式对所有的  $\alpha_j, j=1, 2, \dots, r$  皆真。为了考虑  $\alpha$  的所有分量的影响,可用下式处理之

$$\sum_{j=1}^r \sigma_{R_j} d\alpha_j = S_P \left\{ \sum_{j=1}^r \sigma_{S_j} d\alpha_j \right\} \quad (7-14)$$

这个式子实际上是开、闭环系统输出量间的关系

$$\Delta Y_R = S_P \{ \Delta Y_S \} \quad (7-15)$$

于是,非线性时变运算符  $S_P$  可由图 7-3 所示的灵敏度结构方块图间接测得。

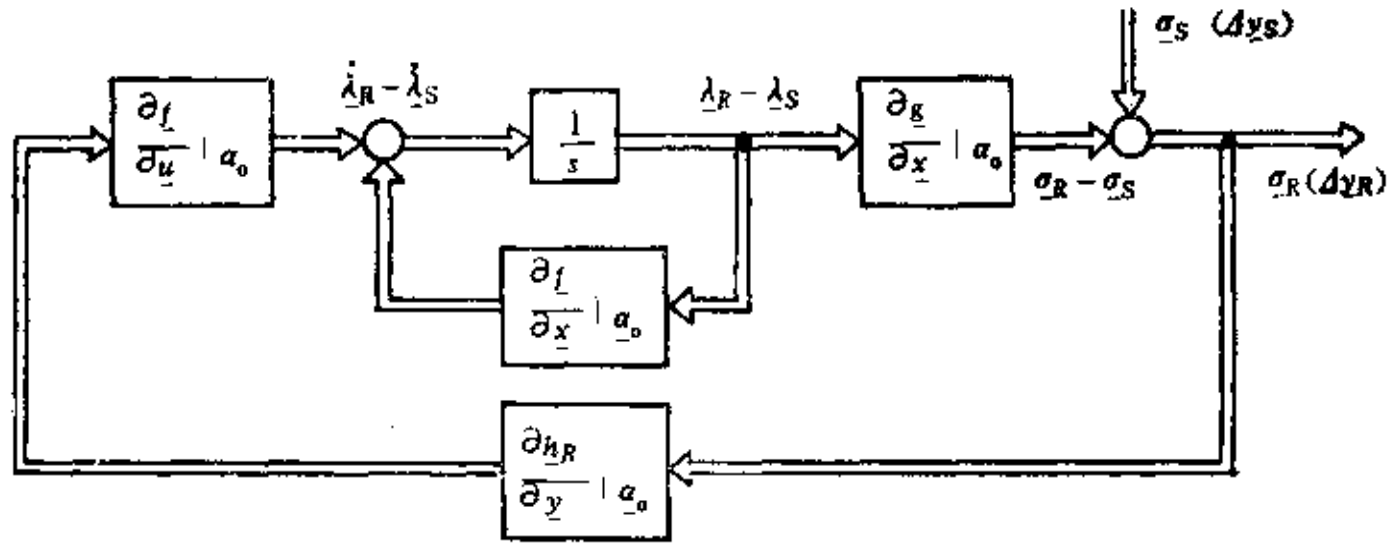


图 7-3

例 7-1 设有线性时变系统如下

$$\dot{x} = A(t, \alpha)x + B(t, \alpha)u$$

$$y = C(t, \alpha)x$$

闭环控制律为

$$u_R = H(t)y_R + R(t)w$$

开环控制律为

$$u_S = R_S(t)w$$

试求比较灵敏度算子  $S_P$  的模拟计算图。

解 在本题情况下,式(7-11)与式(7-12)成为

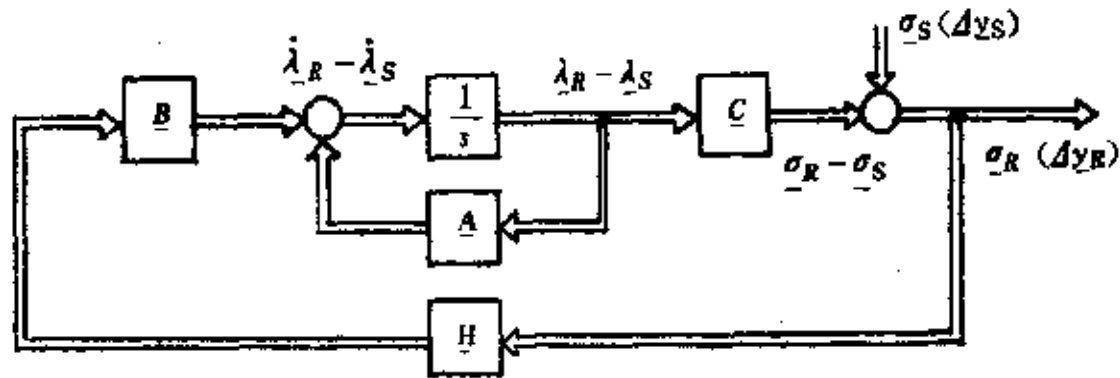


图 7-4

$$\begin{aligned}\lambda_R - \lambda_S &= A(\lambda_R - \lambda_S) + BH\sigma_R \\ \sigma_R - \sigma_S &= C(\lambda_R - \lambda_S)\end{aligned}$$

于是, 求运算符  $S_P$  的模拟图如图 7-4 所示。

图 7-4 中, 开环输出灵敏度向量  $\sigma_S$  可仿图 7-1 画得。

关于比较灵敏度算子确定法的进一步知识, 可参看文献[18]。

## 第二节 特征根灵敏度的求法

### 一、要研究的问题

本节研究系统参数变化时, 如何由特征多项式求根的相对与半相对灵敏度函数的方法。已知的关系式为系统的传递函数

$$G(s, \alpha) = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu}(\alpha) s^{\mu}}{\sum_{k=0}^n a_k(\alpha) s^k}, \quad m \leq n \quad (7-16)$$

显然, 特征方程为

$$\sum_{k=0}^n a_k(\alpha) s^k = 0 \quad (7-17)$$

式中  $\alpha$ ——参数向量,  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$ 。

以下分单根与重根两种情况进行讨论。

### 二、特征方程的根为单根时的根灵敏度计算法

#### (一) 半相对根灵敏度的计算

设特征方程式(7-17)的根为单根, 现先研究第  $i$  个单根  $s_i$  对  $\alpha$  向量中第  $j$  个参数  $\alpha_j$  的半相对根灵敏度  $\bar{S}_{\alpha_j}^{s_i}$ 。为此, 将式(7-17)对  $\alpha_j$  求导, 即

$$\sum_{k=0}^n \frac{\partial a_k}{\partial \alpha_j} s_i^k + \sum_{k=0}^n a_k k s_i^{k-1} \frac{\partial s_i}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (7-18)$$

于是

$$\frac{\partial s_i}{\partial \alpha_j} = - \frac{\sum_{k=0}^n \left( \frac{\partial a_k}{\partial \alpha_j} \right) s_i^k}{\sum_{k=0}^n k a_k s_i^{k-1}} \quad (7-19)$$

半相对根灵敏度为

$$\bar{S}_{\alpha_j}^{s_i} \triangleq \frac{\partial s_i}{\partial \alpha_j} \bigg|_{\alpha_0} = - \frac{\sum_{k=0}^n \left( \frac{\partial a_k}{\partial \alpha_j} \right) \bigg|_{\alpha_0} s_{i0}^k}{\sum_{k=1}^n k a_{k0} s_{i0}^{k-1}} \quad (7-20)$$

**例 7-2** 试用式(7-20)求例题 4-20 所给系统对参数  $a_1$  的半相对根灵敏度。

**解** 由例 4-20 可知, 该系统的传递函数为

$$G(s) = K \frac{s + b}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

其中, 各参数的额定值为  $b_0 = 1$ ,  $a_{00} = 5$ ,  $a_{10} = 2$ 。

额定参数时, 特征方程为

$$s^2 + a_{10} s + a_0 = s^2 + 2s + 5 = 0$$

于是，特征方程的根为

$$s_{20} = -1 + j2$$

$$s_{30} = -1 - j2$$

这显然是单根情况，故可套用公式(7-20)求半相对根灵敏度函数如下

$$\begin{aligned} \bar{S}_{20}^{\alpha_1} &= \frac{-a_{10} \sum_{k=0}^n \left( \frac{\partial a_k}{\partial \alpha_1} \right)_{\alpha_0} s_{10}^k}{\sum_{k=1}^n k a_{k0} s_{10}^{k-1}} \Big|_{\alpha_0} \\ &= \frac{-a_{10} \left( \frac{\partial a_0}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha_0} s_{20}^0 + \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha_0} s_{20}^1 + \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha_0} s_{20}^2 \right)}{a_{10} s_{20}^0 + 2a_{20} s_{20}^1} \\ &= -1 - j \frac{1}{2} \\ \bar{S}_{30}^{\alpha_1} &= \frac{-a_{10} \left( 0 + \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_1} s_{30}^1 + 0 \right)}{a_{10} s_{30}^0 + 2a_{20} s_{30}^1} \\ &= -1 + j \frac{1}{2} \end{aligned}$$

显然，这个结果与由例 4-20 求得者相同。

## (二) 根的相对灵敏度计算

1. 实根情况 如果特征方程的根为实数，则根的相对灵敏度可由下式求得

$$\begin{aligned} \bar{S}_{i0}^{\alpha_j} &\triangleq \frac{\partial s_i}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} \frac{\alpha_{j0}}{s_{i0}} \\ &= -\alpha_{j0} \frac{\sum_{k=0}^n \left( \frac{\partial a_k}{\partial \alpha_j} \right)_{\alpha_0} s_{i0}^k}{\sum_{k=0}^n k a_{k0} s_{i0}^k} \end{aligned} \quad (7-21)$$

2. 复根情况 如果特征方程的根为复根，即

$$s_i = \sigma_i + j\omega_i \quad (7-22)$$

由第四章公式(4-92)知，此时

$$\bar{S}_{i0}^{\alpha_j} \triangleq \bar{S}_{\sigma_i}^{\alpha_j} + j \bar{S}_{\omega_i}^{\alpha_j} \quad (7-23)$$

式中  $\bar{S}_{\sigma_i}^{\alpha_j}$  —— 根的实部灵敏度， $\bar{S}_{\sigma_i}^{\alpha_j} \triangleq \frac{\partial \sigma_i}{\partial \ln \alpha_j} \Big|_{\alpha_0}$ ，

$\bar{S}_{\omega_i}^{\alpha_j}$  —— 根的虚部灵敏度， $\bar{S}_{\omega_i}^{\alpha_j} \triangleq \frac{\partial \omega_i}{\partial \ln \alpha_j} \Big|_{\alpha_0}$ 。

于是，根的相对灵敏度  $\bar{S}_{i0}^{\alpha_j}$  可求得为

$$\begin{aligned} \bar{S}_{i0}^{\alpha_j} &= \frac{1}{\sigma_{i0}} \bar{S}_{\sigma_i}^{\alpha_j} + j \frac{1}{\omega_{i0}} \bar{S}_{\omega_i}^{\alpha_j} \\ &= \frac{1}{\sigma_{i0}} \operatorname{Re}\{\bar{S}_{i0}^{\alpha_j}\} + j \frac{1}{\omega_{i0}} \operatorname{Im}\{\bar{S}_{i0}^{\alpha_j}\} \end{aligned} \quad (7-24)$$

式中,  $\tilde{S}_{\alpha_1}^{*2}$  仍可由公式 (7-20) 求得。

**例 7-3** 求例 7-2 的根相对灵敏度  $\tilde{S}_{\alpha_1}^{*2}$  及  $\tilde{S}_{\alpha_1}^{*3}$ 。

**解** 由例 7-2 可知

$$\sigma_{20} = \sigma_{30} = -1$$

$$\omega_{20} = 2$$

$$\omega_{30} = -2$$

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{\alpha_1}^{*2} &= -1 - j\frac{1}{2} \\ &= \operatorname{Re}\{\tilde{S}_{\alpha_1}^{*2}\} + j\operatorname{Im}\{\tilde{S}_{\alpha_1}^{*2}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{\alpha_1}^{*3} &= -1 + j\frac{1}{2} \\ &= \operatorname{Re}\{\tilde{S}_{\alpha_1}^{*3}\} + j\operatorname{Im}\{\tilde{S}_{\alpha_1}^{*3}\}\end{aligned}$$

故

$$\operatorname{Re}\{\tilde{S}_{\alpha_1}^{*2}\} = \operatorname{Re}\{\tilde{S}_{\alpha_1}^{*3}\} = -1$$

$$\operatorname{Im}\{\tilde{S}_{\alpha_1}^{*2}\} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Im}\{\tilde{S}_{\alpha_1}^{*3}\} = \frac{1}{2}$$

由公式 (7-24) 可求得

$$\tilde{S}_{\alpha_1}^{*4} = 1 - j\frac{1}{4}$$

$$\tilde{S}_{\alpha_1}^{*5} = 1 - j\frac{1}{4}$$

### 三、特征根为重根时的根灵敏度算法

设特征方程为

$$F(s, \alpha) = 0 \quad (7-25)$$

其中,  $s = s_i$  是它的根。

如果  $s_i$  是  $F$  的  $\nu$  重根, 也即

$$F = (s - s_i)^\nu g(s, \alpha) = 0$$

由代数知识可知, 此时,  $F$  对  $s_i$  的首  $\nu - 1$  阶导数皆为零, 即

$$\frac{\partial F}{\partial s_i} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_i^2} = 0$$

⋮

$$\frac{\partial^{\nu-1} F}{\partial s_i^{\nu-1}} = 0$$



于是,  $F$  的全微分  $dF$  可表达为

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial s_i} ds_i + \sum_{j=1}^r \frac{\partial F}{\partial a_j} \Big|_0 da_j \\ &= \frac{1}{v!} \frac{\partial^v F}{\partial s_i^v} (ds_i)^v + \sum_{j=1}^r \frac{\partial F}{\partial a_j} da_j = 0 \end{aligned} \quad (7-26)$$

解此方程, 可得

$$ds_i = \left[ -\frac{v!}{\left(\frac{\partial^v F}{\partial s_i^v}\right)} \sum_{j=1}^r \frac{\partial F}{\partial a_j} da_j \right]_{s_i, a_0}^{1/v}, \quad j=1, 2, \dots, r \quad (7-27)$$

若定义根的绝对灵敏度为

$$S_{a_j}^{s_i} \triangleq \frac{(\partial s_i)^v}{\partial a_j} \Big|_{a_0} = -v! \left[ \frac{\partial F / \partial a_j}{\partial^v F / \partial s_i^v} \right]_{s_i, a_0}, \quad j=1, 2, \dots, r \quad (7-28)$$

则根的总改变量为

$$\Delta s_i = \left[ \sum_{j=1}^r S_{a_j}^{s_i} \Delta a_j \right]^{1/v} \quad (7-29)$$

式中  $v$  ——  $s_i$  的重根阶数。

根的一半相对灵敏度则可由下式定义

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{a_j}^{s_i} &\triangleq \frac{(\partial s_i)^v}{\partial a_j} \Big|_{a_0} a_{j0} \\ &= -v! a_{j0} \left[ \frac{\partial F / \partial a_j}{\partial^v F / \partial s_i^v} \right]_{s_i, a_0} \end{aligned} \quad (7-30)$$

应该指出, 通常情况下, 特征多项式  $F$  可分解为下式

$$F(s, \alpha) = F_1(s) + \alpha F_2(s) \quad (7-31)$$

此时

$$\partial F / \partial \alpha = F_2(s)$$

考虑式(7-31), 上式成为

$$\partial F / \partial \alpha = -\frac{F_1(s)}{\alpha}$$

将上式代入式(7-30)中, 注意此时  $\alpha = a_j$ , 可得

$$\tilde{S}_{a_j}^{s_i} = v! \left[ -\frac{F_1(s)}{\partial^v F / \partial s_i^v} \right]_{s_i, a_0} \quad (7-32)$$

这是一个很有用的公式。

**例 7-4** 设有特征方程为

$$F(s, a_1) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

式中  $a_0$  —— 固定参数, 其额定值为  $a_{00} = 8$ ;

$a_1$  —— 可变参数, 其额定值为  $a_{10} = 12$ ;

$a_2$  —— 固定参数, 其额定值为  $a_{20} = 6$ 。

试求该特征方程的根  $s_i$  对参数  $a_1$  的半相对根灵敏度, 并求当  $a_1$  相对于额定值改变 10% 时, 根  $s_i$  的诱发变化量。

**解** 由题给特征方程可知, 额定参数时, 特征多项式为

$$s^3 + a_{20}s^2 + a_{10}s + a_{00} = s^3 + 6s^2 + 12s + 8 \\ = (s + 2)^3$$

因此，特征方程的根  $s_1$  是三重根

$$s_{10} = -2$$

为求半相对根灵敏度  $\tilde{S}_{a_1}^{s_1}$ ，可利用公式(7-30)。此时， $\nu = 3$ ；

$$\left. \frac{\partial F}{\partial a_j} \right|_{a_0} = \left. \frac{\partial F}{\partial a_1} \right|_{a_0} = s_{10} = -2$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 3s^2 + 2a_2s + a_1$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 6s + 2a_2$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial s^3} = 6$$

于是，由式(7-30)，可得

$$\tilde{S}_{a_1}^{s_1} = -\nu |a_{10}| \left[ \frac{\partial F / \partial a_1}{\partial^3 F / \partial s^3} \right]_{s_1, a_0} \\ = 3! \times 12 \frac{s_{10}}{6} = 24$$

当然，如果把特征方程化为式(7-31)的形式，也可求得相同的结果。

由于  $s_1$  是个实根，故当  $a_1$  相对于额定值改变 10% 时， $s_1$  沿实轴的变化量可由公式(7-27)求得为

$$\Delta s_1 = \left[ -\frac{\nu |a_{10}|}{(\partial^3 F / \partial s^3)} \sum_{j=1}^r \frac{\partial F}{\partial a_j} da_j \right]_{s_1, a_0}^{1/\nu} \\ = \left[ -\frac{3!}{6} \times (-2) \times (0.1) \times 12 \right]^{1/3} \\ = \sqrt[3]{2.4} = 1.339$$

### 第三节 反馈系统的根灵敏度

现在，我们针对反馈系统的情况来讨论根的灵敏度问题，也就是说，我们把开环放大系数  $K$ 、被控对象传递函数的系数、极点及零点等作为系统的参数，来研究它们的变异对闭环系统根的影响。

#### 一、系统部件的参数改变时闭环系统的根灵敏度

##### (一)研究的课题

我们考虑图 7-5 所示的经典反馈系统。

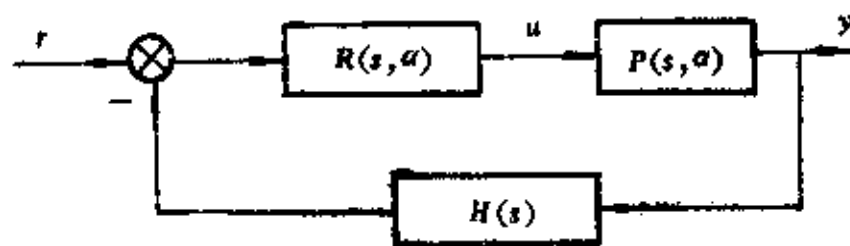


图 7-5

该系统的传递函数为

$$G(s, \alpha) = \frac{P(s, \alpha)R(s, \alpha)}{1 + P(s, \alpha)R(s, \alpha)H(s, \alpha)} \quad (7-33)$$

$$= K(\alpha) \frac{\prod_{\mu} [s - s_{\mu}(\alpha)]}{\prod_{\nu} [s - s_{\nu}(\alpha)]} \quad (7-34)$$

式中  $\alpha$ ——参数向量;

$K(\alpha)$ ——放大系数, 是  $\alpha$  的函数;

$s_{\mu}(\alpha)$ ——闭环系统的零点, 是  $\alpha$  的函数;

$s_{\nu}(\alpha)$ ——闭环系统的极点, 也是  $\alpha$  的函数。

设诸零点与极点无重根, 要求确定根的半相对灵敏度

$$\tilde{S}_{\alpha_j}^{s_j} \triangleq \left( \frac{\partial s_j}{\partial \ln \alpha_j} \right)_{\alpha} \quad (7-35)$$

(二) 求  $\tilde{S}_{\alpha_j}^{s_j}$  的一般公式

由公式(7-33), 有

$$\begin{aligned} G^{-1}(s, \alpha) &= [P(s, \alpha)R(s, \alpha)]^{-1} + H(s, \alpha) \\ &= L^{-1}(s, \alpha) + H(s, \alpha) \end{aligned} \quad (7-36)$$

式中

$$L(s, \alpha) \triangleq P(s, \alpha)R(s, \alpha) \quad (7-37)$$

将式(7-36)取对数

$$\ln G^{-1}(s, \alpha) = \ln [L^{-1}(s, \alpha) + H(s, \alpha)]$$

并将上式对  $\ln \alpha_j$  求导之

$$\frac{\partial (-\ln G)}{\partial \ln \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \ln \alpha_j} \{ \ln [L^{-1}(s, \alpha) + H(s, \alpha)] \}$$

于是, 得

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \ln G}{\partial \ln \alpha_j} &= \frac{\partial [\ln(L^{-1} + H)]}{\partial \alpha_j} \alpha_j \\ &= \frac{1}{L^{-1} + H} \left( \frac{\partial L^{-1}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \right) \alpha_j \\ &= \alpha_j G(s, \alpha) \left( \frac{\partial L^{-1}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \right), \quad j = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (7-38)$$

将上式在  $\alpha = \alpha_0$  处取值, 并回忆第四章的公式(4-94)

$$S_{\alpha_j}^{s_j} = S_{\alpha_j}^{\kappa_j} - \sum_{\mu=1}^m \frac{1}{s - s_{\mu 0}^0(\alpha)} \tilde{S}_{\alpha_j}^{s_{\mu 0}^0} + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{s - s_{\nu 0}^0} \tilde{S}_{\alpha_j}^{s_{\nu 0}^0}$$

便有:

$$-\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{s-s_{\nu 0}} \tilde{S}_{\alpha_j}^{\alpha_j} + \sum_{\mu=1}^m \frac{1}{s-s_{\mu 0}} \tilde{S}_{\alpha_j}^{\alpha_j} - S \tilde{S}_j = \alpha_{j0} G(s, \alpha_0) \left[ \frac{\partial L^{-1}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \right]_{\alpha_0} \quad (7-39)$$

将上式的两边乘  $-(s-s_{\nu 0})$  且取  $s \rightarrow s_{\nu 0}$ , 可得

$$\tilde{S}_{\alpha_j}^{\alpha_j} = -\alpha_{j0} [(s-s_{\nu 0})G(s, \alpha_0)]_{s_{\nu 0}} \left[ \frac{\partial L^{-1}(s_{\nu}, \alpha)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial H(s_{\nu}, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right]_{\alpha_0, s_{\nu 0}} \quad (7-40)$$

这是由系统组成元件的传递函数求根灵敏度的一般公式。

(三) 被控对象传递函数中参数有变时, 求  $\tilde{S}_{\alpha_j}^{\alpha_j}$  的公式。

如果图 7-5 中的  $R$  和  $H$  与  $\alpha$  无关, 问题便转为考虑被控对象参数变化对根灵敏度的影响。此时, 公式(7-40)成为

$$\tilde{S}_{\alpha_j}^{\alpha_j} = -\alpha_{j0} [(s-s_{\nu 0})G(s, \alpha_0)]_{s_{\nu 0}} \frac{\partial L^{-1}(s_{\nu}, \alpha)}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} \quad (7-41)$$

由于上式方括号中的项是  $G(s, \alpha_0)$  对  $s_{\nu 0}$  的留数  $\text{Res}_{s_{\nu 0}}(G_0)$ , 故上式又可改写为

$$\tilde{S}_{\alpha_j}^{\alpha_j} = -\text{Res}_{s_{\nu 0}}(G_0) \frac{\partial L^{-1}(s_{\nu}, \alpha)}{\partial \ln \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} \quad (7-42)$$

式中  $G_0$ —— $G(s, \alpha_0)$  的简记符号。

如果系统为单位反馈, 即  $H(s) = 1$ , 则由于  $s_{\nu 0}$  是  $G(s, \alpha_0)$  的极点, 故  $s_{\nu 0}$  是  $G(s, \alpha_0)^{-1}$  的零点, 因此, 由式(7-36)可见, 当  $s = s_{\nu 0}$  时, 有关系式

$$L^{-1}(s_{\nu 0}, \alpha_0) + H(s) = 0$$

也即,

$$L^{-1}(s_{\nu 0}, \alpha_0) = -H = -1$$

因此, 由式(7-42), 有

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\alpha_j}^{\alpha_j} &= -\text{Res}_{s_{\nu 0}}(G_0) \frac{\partial L^{-1}(s_{\nu}, \alpha)}{\partial \ln \alpha_j} \Big|_{s_{\nu 0}, \alpha_0} \\ &= \text{Res}_{s_{\nu 0}}(G_0) \frac{\frac{\partial L^{-1}(s_{\nu}, \alpha)}{\partial \ln \alpha_j}}{-1} \Big|_{\alpha_0, s_{\nu 0}} \\ &= \text{Res}_{s_{\nu 0}}(G_0) \frac{\frac{\partial L^{-1}(s_{\nu}, \alpha)}{\partial \ln \alpha_j}}{L^{-1}(s_{\nu 0}, \alpha_0)} \Big|_{\alpha_0, s_{\nu 0}} \\ &= \text{Res}_{s_{\nu 0}}(G_0) \frac{\partial \ln L^{-1}(s_{\nu}, \alpha)}{\partial \ln \alpha_j} \Big|_{\alpha_0, s_{\nu 0}} \end{aligned} \quad (7-43)$$

显然, 如用式(7-43)计算  $\tilde{S}_{\alpha_j}^{\alpha_j}$ ,  $L^{-1}(s_{\nu 0}, \alpha_0) = (P_0 R_0)^{-1}$  及  $G_0$  必须预先确定。

**例 7-5** 设有例 4-21 所示系统,  $H(s) = 1$ , 试求可变参数向量为  $\alpha = [K \ T_1 \ T_2]^T$  时闭环传递函数的半相对根灵敏度。

**解** 由例 4-21 可知, 该系统的开环传递函数为

$$L(s, \alpha) = R(s)P(s, \alpha) = \frac{10(1+0.5s)(1+s)}{(1+0.1s)(1+10s)} \cdot \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

参数向量  $\alpha$  的额定值为

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= [K \ T_1 \ T_2]^T \Big|_0 = [K_0 \ T_{10} \ T_{20}]^T \\ &= [10 \ 0.5 \ 1] \end{aligned}$$

额定闭环传递函数为

$$\begin{aligned}
 G(s, \alpha_0) &= \frac{L(s, \alpha_0)}{1 + L(s, \alpha_0)} \\
 &= \frac{100}{(1 + 0.1s)(1 + 10s)} \\
 &= \frac{100}{1 + \frac{100}{(1 + 0.1s)(1 + 10s)}} \\
 &= \frac{100}{s^2 + 10.1s + 101} \\
 &= \frac{100}{(s - s_{10})(s - s_{20})}
 \end{aligned}$$

其中

$$s_{10} = -5.05 + j8.68$$

$$s_{20} = -5.05 - j8.68$$

现先求放大系数  $K$  变异对根的影响, 即先求  $\tilde{S}_K^*$ 。

由公式 (7-43)

$$\tilde{S}_K^* = [(s - s_{10})G(s, \alpha_0)]_{s_{10}} \frac{\partial \ln L^{-1}(s_1, \alpha)}{\partial \ln K} \Big|_{\alpha_0, s_{10}}$$

其中

$$R_{\infty_1}(G_0) = [(s - s_{10})G(s, \alpha_0)]_{s_{10}}$$

$$= (s - s_{10}) \frac{100}{(s - s_{10})(s - s_{20})} \Big|_{s_{10}}$$

$$= \frac{100}{s_{10} - s_{20}} = \frac{100}{j 17.36}$$

$$= -j 5.75$$

$$L(s_1, \alpha) = \frac{10(1 + 0.5s)(1 + s)}{(1 + 0.1s)(1 + 10s)} \frac{K}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)} \Big|_{s_1}$$

$$L^{-1}(s_1, \alpha) = \frac{(1 + 0.1s)(1 + 10s)(1 + T_1s)(1 + T_2s)}{10K(1 + 0.5s)(1 + s)} \Big|_{s_1}$$

$$\frac{\partial \ln L^{-1}(s_1, \alpha)}{\partial \ln K} \Big|_{s_1, \alpha_0} = - \frac{\partial L^{-1}(s_1, \alpha)}{\partial \ln K} \Big|_{s_{10}, \alpha_0}$$

$$= - \frac{\partial L^{-1}(s_1, \alpha)}{\partial K} K \Big|_{s_{10}, \alpha_0}$$

$$= -1$$

故

$$\tilde{S}_K^* = -j 5.75(-1) = j 5.75 = 5.75 \angle 90^\circ。$$

接着求  $S_{\frac{1}{K}}^*$ 。由上述可知

$$R_{\infty_1}(G_0) = -j 5.75$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \ln L^{-1}(s_1, \alpha)}{\partial \ln T_1} \right|_{s_{10}, \alpha_0} &= \left[ \frac{\partial L^{-1}(s_1, \alpha)}{\partial T_1} \cdot \frac{T_1}{L^{-1}} \right]_{s_{10}, \alpha_0} \\ &= \left[ \frac{T_{10} s}{1 + T_{10} s} \right]_{s_{10}} \\ &= \frac{0.5(-5.05 + j 8.68)}{1 + 0.5(-5.05 + j 8.68)} \\ &= 1.07 + j 0.205 \end{aligned}$$

故可求得

$$\tilde{S}_{T_1}^{s_1} = -j 5.75(1.07 + j 0.205) = 1.18 - j 6.15 = 6.26 \angle -79.2^\circ$$

进而求  $\tilde{S}_{T_2}^{s_1}$ 。由于

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \ln L^{-1}(s_1, \alpha)}{\partial \ln T_2} \right]_{\alpha_0, s_{10}} &= \frac{T_{20} s_{10}}{1 + T_{20} s_{10}} \\ &= 1.044 + j 0.095 \end{aligned}$$

而  $R_{s_1}(G_0) = -j 5.75$  依旧不变，故可求得

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{T_2}^{s_1} &= -5.75(1.044 + j 0.095) \\ &= 0.55 - j 6 = 6.02 \angle -84.8^\circ \end{aligned}$$

同理，可求得  $\tilde{S}_{K}^{s_2}$ ,  $\tilde{S}_{T_1}^{s_2}$ , 及  $\tilde{S}_{T_2}^{s_2}$ 。

由于  $s_1, s_2$  是共轭根，故不难推知，计算结果应对称于  $s$  平面中的实轴。

由本题计算结果可见，诸极点对所有参数  $K, T_1, T_2$  的变化是差不多敏感的。

(四) 一种求  $\tilde{S}_{\alpha_j}^{s_j}$  的简便方法

1. 基本关系式 以下研究一种求  $\tilde{S}_{\alpha_j}^{s_j}$  的简便方法。我们仍从图 7-5 所示的闭环结构出发进行研究。

设图 7-5 中  $P(s, \alpha), R(s), H(s)$  的极点分别以  $s = s_i, s = s_k, s = s_e$  表示，则该系统的开环传递函数

$$M(s, \alpha) = P(s, \alpha) R(s) H(s) \quad (7-44)$$

可表达为

$$M(s, \alpha) = \frac{K N_M(s)}{\prod_{i=1}^{n_P} (s - s_i) \prod_{k=1}^{n_R} (s - s_k) \prod_{e=1}^{n_H} (s - s_e)} \quad (7-45)$$

式中  $N_M(s)$ ——某多项式。

于是，闭环传递函数  $G(s)$  及比较灵敏度函数分别为

$$G(s) = \frac{P(s, \alpha) R(s)}{1 + M(s, \alpha)} = \frac{K N_G(s)}{\prod_{v=1}^{n_G} (s - s_v)} \quad (7-46)$$

$$\begin{aligned} S_p(s) &= \frac{1}{1 + M(s, \alpha)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n_P} (s - s_i) \prod_{k=1}^{n_R} (s - s_k) \prod_{e=1}^{n_H} (s - s_e)}{\prod_{v=1}^{n_G} (s - s_v)} \end{aligned} \quad (7-47)$$

式中  $s_v$ ——闭环极点;

$n_G$ ——闭环极点数,  $n_G = n_P + n_R + n_H$ 。

分别对式(7-47)中第二个等式的两边取对数, 然后, 在额定参数处对  $\ln \alpha_j, j = 1, 2, \dots, r$  求导, 并考虑比较灵敏度与伯德灵敏度函数间的关系, 可得

$$-S_P^G(s) \left( \frac{\partial M(s, \alpha_0)}{\partial \ln \alpha_j} \right)_{\alpha_0} = - \sum_{i=1}^{n_P} \left( \frac{\tilde{S}_{\alpha_j}^{s_i}}{s-s_i} \right)_{\alpha_0} - \sum_{k=1}^{n_R} \left( \frac{\tilde{S}_{\alpha_j}^{s_k}}{s-s_k} \right)_{\alpha_0} - \sum_{v=1}^{n_H} \left( \frac{\tilde{S}_{\alpha_j}^{s_v}}{s-s_v} \right)_{\alpha_0} + \sum_{v=1}^{n_G} \left( \frac{\tilde{S}_{\alpha_j}^{s_v}}{s-s_v} \right)_{\alpha_0} \quad (7-48)$$

这就是说, 对某个  $\tilde{S}_{\alpha_j}^{s_v}$ , 有

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\alpha_j}^{s_v} &= -(s-s_v) S_P^G(s) \left. \frac{\partial M(s, \alpha)}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\alpha_0, s_v} \\ &= -(s-s_v) S_P^G(s) \left. \frac{\partial M(s, \alpha)}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\alpha_0, s_v} \\ &= -\text{Res}[S_P^G(s)]_{s=s_v} \left. \frac{\partial M(s, \alpha)}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{s_v, \alpha_0} \end{aligned} \quad (7-49)$$

考虑到式(7-47), 即  $\frac{1}{1+M(s, \alpha)} = \frac{\Pi(s-s_i) \Pi(s-s_k) \Pi(s-s_e)}{\Pi(s-s_v)}$ , 故

$$\begin{aligned} \Pi(s-s_v) &= (1+M) \Pi(s-s_i) \Pi(s-s_k) \Pi(s-s_e) \\ &= \Pi(s-s_i) \Pi(s-s_k) \Pi(s-s_e) \\ &\quad + M \Pi(s-s_i) \Pi(s-s_k) \Pi(s-s_e) \end{aligned}$$

若于上式中取  $s=s_v$ , 则得

$$M(s_v, \alpha_0) = -1 \quad (7-50)$$

因此, 由式(7-44), 有

$$P(s_v, \alpha_0) R(s_v) H(s_v) = -1$$

也即

$$R(s_v) H(s_v) = -\frac{1}{P(s_v, \alpha_0)} \quad (7-51)$$

这样,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial M(s, \alpha)}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{s_v, \alpha_0} &= \left[ \frac{\partial P(s, \alpha) R(s) H(s)}{\partial \alpha_j} \right]_{\alpha_0, s_v} \\ &= -\left. \frac{\partial P(s, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \frac{1}{P(s_v, \alpha_0)} \\ &\triangleq -S_{\alpha_j}^P(s_v) \end{aligned}$$

最后, 式(7-49)成为

$$\tilde{S}_{\alpha_j}^{s_v} = \text{Res}[S_P^G(s)]_{s_v} S_{\alpha_j}^P(s_v) \quad (7-52)$$

2. 用图解法求留数 基于上述, 可用图解法求留数  $\text{Res}[S_P^G(s)]_{s_v}$ 。由公式(7-47), 取  $\alpha = \alpha_0$ , 便得伯德灵敏度  $S_P^G(s)$ , 即

$$S_P^G(s) = S_P(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n_P} (s-s_i) \prod_{k=1}^{n_R} (s-s_k) \prod_{e=1}^{n_H} (s-s_e)}{\prod_{v=1}^{n_G} (s-s_v)} \Big|_{\alpha_0} \quad (7-53)$$

为求它的留数  $\text{Res}[S_P^G(s)]_{s_p}$ , 只要在上式两边乘以  $(s - s_p)$  并取  $s \rightarrow s_p$  即可, 即

$$\text{Res}[S_P^G(s)]_{s_p} = (s - s_p) \frac{\prod_{i=1}^{*P} (s - s_i) \prod_{k=1}^{*R} (s - s_k) \prod_{l=1}^{*H} (s - s_l)}{\prod_{v=1}^{*G} (s - s_v)} \Big|_{s_p} \quad (7-54)$$

用图解法在  $s$  平面上实现上式时, 相应于以下两式

$$|\text{Res}[S_P^G(s)]_{s_p}| = \frac{P, R, H \text{ 的每一个极点到点 } s_p \text{ 的所有距离的积}}{\text{所有其它闭环极点到 } s_p \text{ 的距离的积}} \quad (7-55)$$

$$\text{Arg}\{\text{Res}[S_P^G(s)]_{s_p}\} = (\text{由 } P, R, H \text{ 的每一极点到点 } s_p \text{ 的所有向量的角度和}) \\ - (\text{所有其它闭环极点到 } s_p \text{ 的向量的角度和}) \quad (7-56)$$

**例 7-6** 设在图 7-5 所示的反馈系统结构中,  $R(s) = A$ ,  $H(s) = 1 + B(s)$ ,  $P(s, K) = \frac{K}{s(s+a)}$ , 其中,  $K$  为可变参数, 它的额定值为  $K_0 = 10$ ; 其它固定参数的值为  $a_0 = 5$ ,  $A_0 = 10$ ,  $B_0 = 0.05$ 。试求  $K$  变化 10% 时, 闭环传递函数根的变化。

**解** 该系统的开环传递函数为

$$M(s, \alpha) = \frac{KA}{s(s+a)}(1 + Bs)$$

闭环传递函数为

$$G = \frac{RP(s, K)}{1 + RPH} = \frac{\frac{AK}{s(s+a)}}{1 + \frac{AK}{s(s+a)}(1 + Bs)}$$

$$= \frac{KA}{s^2 + (a + AKB)s + AK}$$

$S_P^G(s)$  可求之如下:

$$S_P^G(s) \triangleq \frac{1}{1 + M(s, \alpha_0)} = \frac{s(s+a_0)}{s^2 + (a_0 + K_0 A_0 B_0)s + K_0 A_0}$$

因  $\alpha_1 = K$ , 故  $S_{\alpha_1}^P = S_K^P$  为

$$S_K^P \triangleq \frac{\partial P}{\partial K} \Big|_{K, P} \Big|_{s_p} = \frac{1}{s(s+a)} \frac{K}{K/s(s+a)} = 1$$

闭环传递函数  $G(s)$  的额定极点也不难求得:

$$s^2 + (a_0 + A_0 K_0 B_0)s + A_0 K_0 = s^2 + 10s + 100 = 0$$

故

$$s_{10} = -5 + j5\sqrt{3}$$

$$s_{20} = -5 - j5\sqrt{3}$$

为在根平面上图解求  $\text{Res}[S_P^G(s)]_{s_p}$ , 需求  $R, H, P$  的极点。显然,  $R, H$  无分母, 故

无极点, 而  $P(s, \alpha) = \frac{K}{s(s+a)}$  在额定参数时的极点为

$$s_{1P} = 0, \quad s_{2P} = -5$$



最后, 需求  $\tilde{s}_K^*$  及  $\tilde{s}_K^{**}$ 。先求  $\tilde{s}_K^*$ 。由公式(7-52)可知

$$\tilde{s}_K^* = \text{Res}[S_K^0(s)]_{s_1} S_K^P(s_1)$$

在根平面上画出各部件的极点及闭环极点, 可求得

$$|\text{Res}[S_K^0(s)]_{s_1}| = \frac{(\sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2})(5\sqrt{3})}{2(5\sqrt{3})} = 5$$

$$\text{ArgRes}[S_K^0(s)]_{s_1} = 113.33^\circ$$

$$\text{Res}[S_K^0(s)]_{s_1} = 5 \angle 113.33^\circ$$

$$\tilde{s}_K^* = \text{Res}[S_K^0(s)]_{s_1} S_K^P(s_1) = 5 \angle 113.33^\circ$$

在参数  $K$  变异 10% 的影响下

$$\begin{aligned} \Delta s_1 &= \tilde{s}_K^* \frac{\partial K}{K} = 5 \angle 113.33^\circ \times \frac{10}{100} \\ &= 0.5 \angle 113.33^\circ \end{aligned}$$

## 二、开环放大系数变化时的闭环极点灵敏度

如果闭环系统的开环放大系数发生了变化, 闭环根的相应灵敏度也可方便地求得。

参看图 7-5, 设开环传递函数为

$$M(s, k) = kB(s) = k \frac{N(s)}{D(s)} \quad (7-57)$$

式中  $k$  —— 可变参数, 即  $a = k$ ;

$N(s)$  —— 开环分子多项式;

$D(s)$  —— 开环分母多项式。

闭环传递函数为

$$\begin{aligned} G(s, k) &= \frac{kB(s)H^{-1}(s)}{1+kB(s)} \\ &= \frac{k \frac{N(s)}{D(s)} H^{-1}(s)}{1+k \frac{N(s)}{D(s)}} \\ &= \frac{kN(s)H^{-1}(s)}{D(s)+kN(s)} \end{aligned} \quad (7-58)$$

当然, 上式还可表达为

$$G(s, k) = K(k) \frac{\prod_p (s - s_p)}{\prod_p [s - s_p(k)]} \quad (7-59)$$

由此可见,  $k$  仅影响闭环放大系数  $K$  及极点  $s_p$ , 而与  $s_p$  无关。

如果闭环诸极点皆非重根, 则先对式(7-59)取对数, 然后对  $\ln k$  求导后, 可得

$$\frac{\partial(\ln G)}{\partial(\ln k)} = \frac{\partial}{\partial \ln k} \left[ \ln K(k) + \sum_p \ln(s - s_p) - \sum_p \ln(s - s_p) \right]$$

如果在额定参数  $k_0$  处取值, 便得伯德灵敏度  $S_K^G$ 。

$$\begin{aligned}
 S_k^q &= S_k^r + 0 - \sum_p \frac{1}{s-s_{p0}} \left( -\frac{\partial s_p}{\partial k} \right)_{k_0} k_0 \\
 &= S_k^r + \sum_p \frac{1}{s-s_{p0}} \tilde{S}_{k^p}^q
 \end{aligned} \tag{7-60}$$

若着眼于某个  $s_p$ , 则有

$$(s-s_{p0})S_k^q = (s-s_{p0})S_k^r + (s-s_{p0}) \sum_p \frac{1}{s-s_{p0}} \tilde{S}_{k^p}^q$$

取极限  $s \rightarrow s_{p0}$ , 便得

$$\tilde{S}_{k^p}^q = \text{Res}[S_k^q(s)]_{s_{p0}} \tag{7-61}$$

以上是  $\tilde{S}_{k^p}^q$  的一种表达式。

$\tilde{S}_{k^p}^q$  还可以有另一种表达式。若定义特征方程为

$$F(s, k) \triangleq D(s) + kN(s) = 0 \tag{7-62}$$

则

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial k} + \frac{\partial F}{\partial k} = 0$$

将上式两边再乘  $k$ , 便有

$$\frac{\partial F}{\partial \ln k} = \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \ln k} + \frac{\partial F}{\partial \ln k} = 0$$

由于我们研究根灵敏度  $\tilde{S}_{k^p}^q$ , 故上式中,  $s = s_p$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_{k^p}^q &\triangleq \left( \frac{\partial s_p}{\partial \ln k} \right)_{k_0} \\
 &= \left( \frac{\frac{\partial F}{\partial \ln k}}{\frac{\partial F}{\partial s}} \right)_{k_0} = \left( -\frac{\frac{\partial F}{\partial k} k}{\frac{\partial F}{\partial s}} \right)_{k_0} \\
 &= \left( -k \frac{\frac{\partial F}{\partial k}}{\frac{\partial F}{\partial s}} \right)_{s_p, k_0} \\
 &= -k \frac{N(s)}{\frac{\partial [D(s) + kN(s)]}{\partial s}} \Big|_{s_p, k_0}
 \end{aligned}$$

由于特征方程为  $D(s) + kN(s) = 0$ , 故

$$N(s) = -k^{-1}D(s)$$

代入前式, 得

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_{k^p}^q &= -k \frac{-k^{-1}D(s)}{\frac{\partial [D(s) + kN(s)]}{\partial s}} \Big|_{s_p, k_0} \\
 &= \frac{D(s)}{D'(s) + kN'(s)} \Big|_{s_p, k_0}
 \end{aligned} \tag{7-63}$$

还可用留数来表达上式。由于式(7-62), 故有

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{k_0}^{*v} &= \left. \frac{D(s)}{F'(s)} \right|_{s_v, k_0} \\ &= \text{Res} \left[ \frac{D(s)}{F(s)} \right]_{s_v, k_0}\end{aligned}\quad (7-64)$$

这是  $\tilde{S}_{k_0}^{*v}$  的第二种表达式。

还可推导  $\tilde{S}_{k_0}^{*v}$  的第三种表达式如下。

由式(7-58)

$$G(s, k) = \frac{kN(s)H^{-1}(s)}{D(s) + kN(s)}$$

考虑到特征多项式  $D(s) + kN(s) = 0$ , 故前式成为

$$G(s, k) = -\frac{D(s)H^{-1}(s)}{D(s) + kN(s)}$$

于是, 由式(7-63)得

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{k_0}^{*v} &= \left. \frac{D(s)}{D'(s) + kN'(s)} \right|_{s_v, k_0} \\ &= \left\{ -H(s) \left[ -\frac{D(s)H^{-1}(s)}{D'(s) + kN'(s)} \right] \right\}_{s_v, k_0} \\ &\triangleq \{ -H(s) \text{Res}[G(s, k_0)] \}_{s_v, k_0}\end{aligned}\quad (7-65)$$

至此,  $\tilde{S}_{k_0}^{*v}$  的表达式共有三种, 即

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{k_0}^{*v} &= -H(s_{v0}) \text{Res}[G(s, k_0)]_{s_{v0}} \\ &= \text{Res}[s_{v0}^G(s_{v0})] \\ &= \text{Res} \left[ \frac{D(s)}{F(s)} \right]_{s_v, k_0}\end{aligned}$$

**例 7-7** 试用上面推得的公式求例 7-6 的  $\tilde{S}_{k_0}^{*v}$ 。

**解** 由例 7-6 可知, 本题情况下, 开环传递函数为

$$M = \frac{kA(1+Bs)}{s(s+a)} = k \frac{N(s)}{D(s)}$$

其中

$$N(s) = A(1+Bs)$$

$$D(s) = s(s+a)$$

$$F(s) = D(s) + kN(s) = A(1+Bs) + ks(s+a)$$

在额定参数时

$$N(s)|_{k_0} = 10(1+0.05s)$$

$$D(s)|_{k_0} = s(s+5)$$

$$F(s)|_{k_0} = s^2 + 10s + 100$$

$$s_{10} = -5 + j5\sqrt{3}$$

$$s_{20} = -5 - j5\sqrt{3}$$

故由公式(7-64)有

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_{k_0}^{\pm 1} &= \text{Res} \left[ \frac{D(s)}{F(s)} \right]_{s_{10}, k_0} = \text{Res} \left[ \frac{s(s+5)}{s^2+10s+100} \right]_{s_{10}} \\
 &= \frac{s(s+5)}{F'(s)} \Big|_{s_{10}} \\
 &= \frac{s(s+5)}{2s+10} \Big|_{s_{10}} \\
 &= 5 \angle 113.33^\circ
 \end{aligned}$$

这个结果与例 7-6 所求得者相同。

闭环诸极点有重根的情况不拟讨论了，文献[6]中，还讨论了另外两种情况，即开环传递函数中参数变化时的闭环根灵敏度和开环零、极点变化时，闭环系统根灵敏度的求法，有兴趣者，可参阅之。

### 习 题

7-1 传递函数  $G(s) = (s + a_1) / [s^2 + a_2s + a_3]$ ，额定值为  $a_{10} = 1$ ， $a_{20} = 5$ ， $a_{30} = 6$ ，求对  $a_1$  的半相对根灵敏度。

7-2 已知  $G(s) = a_1(s + a_3) / [s^3 + (a_2 + a_4)s^2 + (a_1 + a_2a_4)s + a_1a_3]$  额定的参数值  $a_{10} = 10$ ， $a_{20} = 0.5$ ， $a_{30} = 1$ ， $a_{40} = 5$ ，求对  $a_1$  的相对极点灵敏度。

7-3 已知额定的参数值  $a_{00} = 7.2$ ， $a_{10} = 10.2$ ， $a_{20} = 5.3$ ， $a_{30} = 1.2$ ， $a_{40} = 0.1$ ， $b_{00} = 1$ ， $b_{10} = 2$ ，传递函数  $G(s) = (b_1s + b_0) / (a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)$ ，求对系数  $a_2$  的半相对根灵敏度。

7-4 有传递函数  $G(s) = (s^5 + a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)^{-1}$ ，额定的参数值为  $a_{00} = 676$ ， $a_{10} = 585$ ， $a_{20} = 272$ ， $a_{30} = 74$ ， $a_{40} = 12$ ，求对  $a_3$  的半相对根灵敏度。

7-5 单位反馈系统前向通路传递函数  $M(s, K) = K(s + a) / [(s + b)(s + c)]$ ，额定的参数值为  $K_0 = 2$ ， $a_0 = 5$ ， $b_0 = 2$ ， $c_0 = 1$ 。求对增益  $K$  的闭环极点半相对灵敏度。

7-6 图 7-6 所示的伺服系统中，额定参数值为  $K_{10} = 9.2$ ， $K_{20} = 10$ ， $K_{30} = 100$ ， $a_0 = 10$ ， $B_0 = 100$ 。求对  $K_2$  和  $a$  的闭环半相对极点灵敏度。

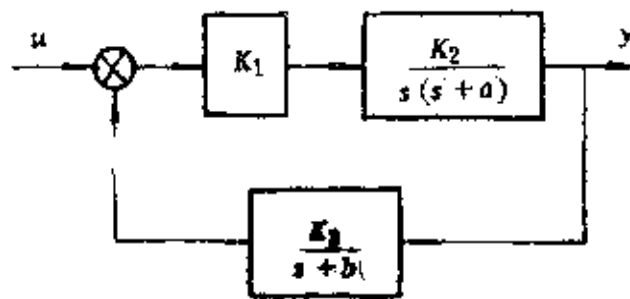


图 7-6

7-7 给出开环传递函数  $M(s, a) = K / [(s + a)(s + b)(s^2 + cs + d)]$ ， $H(s) = 1$ ，额定的参数值  $s_0 = 1$ ， $b_0 = 3$ ， $c_0 = 4$ ， $d_0 = 5$ ，求对开环极点  $a = -1$  的半相对灵敏度函数。

## 第八章 开环与闭环系统的灵敏度比较

本章拟从参数灵敏度的角度来比较开环系统与相应的闭环反馈系统的优劣。讨论的目的是使我们更全面与深入地掌握反馈控制系统的正确设计原则。

众所周知，反馈控制有一系列突出的优点，这些优点主要是：增强系统的稳定性，减弱外干扰对系统性能的影响，使非线性元件的非线性特性变得不很突出，以及减小系统对被控对象参数摄动的灵敏度，即增强系统对参数摄动的稳健性<sup>[20]</sup>。应当强调，反馈控制的上述优点仅在设计得当时才能体现，而一个随意设计的反馈系统往往比相应的开环系统的性能要差。为此，本章拟从参数灵敏度的观点对以上问题进行专门的讨论。

### 第一节 频域中的灵敏度比较

#### 一、开环系统的参数灵敏度分析

设有一个单变量的被控对象，由于它的参数可能有所摄动，故它的传递函数为  $P(s, \alpha)$ 。如果我们设计一个由  $R_1(s), \dots, R_n(s)$  构成的开环控制器对它进行控制，试问当被控对象的参数  $\alpha$  发生摄动时，该开环系统的输出量会发生多大的变化？我们讨论单参数情况。

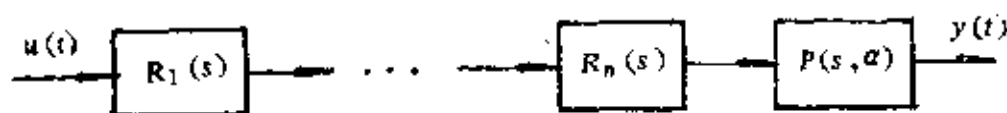


图 8-1

由于 
$$\frac{\Delta Y}{Y_0} = S_{\alpha}^g \frac{\Delta \alpha}{\alpha_0} \quad (8-1)$$

为解决这个问题，只要设法求得该系统的伯德灵敏度函数  $S_{\alpha}^g$  即可。鉴于

$$S_{\alpha}^g = S_P^g S_{\alpha}^P \quad (8-2)$$

而  $S_{\alpha}^P$  是被控对象的固有特性，所以问题归结为求  $S_P^g$ 。显然，在当前的情况下，按定义，有

$$S_P^g = S_{P^1 \cdots R_n P}^g = \left. \frac{\partial (R_1 \cdots R_n P)}{\partial P} \right|_{\alpha_0} \frac{P_0}{R_1 \cdots R_n P_0} = 1 \quad (8-3)$$

于是 
$$\begin{aligned} \frac{\Delta Y}{Y_0} &= S_{\alpha}^g \frac{\Delta \alpha}{\alpha_0} \\ &= S_P^g S_{\alpha}^P \frac{\Delta \alpha}{\alpha_0} \\ &= S_{\alpha}^P \frac{\Delta \alpha}{\alpha_0} \end{aligned} \quad (8-4)$$

这个结果告诉我们，在开环系统情况下，由于  $S_P^G = 1$ ，我们根本不可能采取任何改变系统结构的措施来改善系统的参数灵敏度。在开环情况下，系统的参数灵敏度完全由被控对象本身的参数灵敏度性能所决定。

## 二、输出反馈系统的参数灵敏度比较

### (一) 输出反馈控制的两种方案

如果对上述被控对象实行输出反馈控制，情况就不同了。为了把问题说清楚，以下分两种控制方案进行讨论。

1. 第一种方案：用单位反馈系统进行控制 用单位反馈系统对被控对象进行控制的情况如图 8-2 所示。

这时，系统的闭环传递函数

$$\text{为 } G(s) = \frac{PR}{1+PR} \quad (8-5)$$

按定义，此时的伯德灵敏度函数  $S_P^G$  可求之为

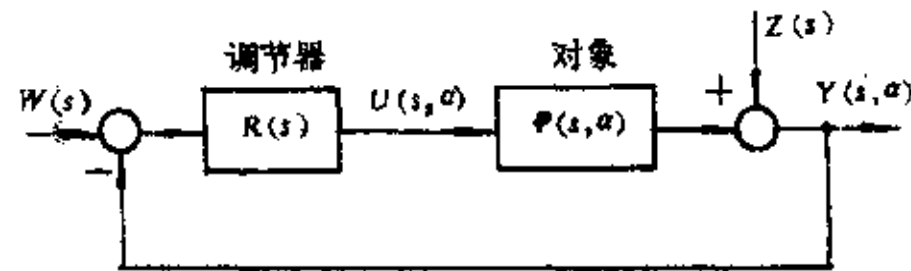


图 8-2

$$S_P^G = \frac{\partial G}{\partial P} \Big|_{\alpha_0} \frac{P_0}{G_0} = \frac{1}{1+P_0R} \quad (8-6)$$

如果用  $L$  表示开环传递函数，即

$$L = PR \quad (8-7)$$

则式 (8-6) 成为

$$S_P^G = \frac{1}{1+P_0R} = \frac{1}{1+L_0} \quad (8-8)$$

显然，这时的伯德灵敏度  $|S_P^G| < 1$ 。如果按  $|L_0| \gg 1$  原则来设计系统，则从减小灵敏度的观点看，这种反馈系统要比相应的开环系统稳健得多。

尽管这种反馈系统可设计得比开环系统稳健得多，然而，一旦这种系统按对系统的常规品质要求（如超调量，调节时间，上升时间等）设计完毕后，它的伯德灵敏度  $S_P^G$  也就确定了，设计者再也没有可能按所提出的灵敏度要求进一步设计这种系统。这是因为，系统的常规设计是依据额定参数时的开环传递函数  $L_0$  进行的，由式 (8-5) 可知， $L_0$  确定后，额定的闭环传递函数  $G_0$  就定下来了。而由式 (8-8) 得知， $L_0$  确定后，伯德灵敏度  $S_P^G$  也随之定下而不能改变了。这样，从灵敏度的观点看，设计这种单位反馈系统的“自由度”实在太少了，因此，通常称这种单位反馈系统为具有一个自由度的反馈系统。

对这种只具一个自由度的反馈系统，我们可以看到这样一种有趣的现象，即：系统的外作用合成信号  $W-Z$  对误差信号  $E(s)$  的影响与被控对象的传递函数变化对系统输出量的影响是完全一样的，只要求出  $W-Z$  对  $E$  的传递函数，就不难理解这件事了。事实上

$$\begin{aligned} E = W - Y_0 &= W - \frac{P_0R}{1+P_0R}W - \frac{1}{1+P_0R}Z \\ &= \frac{1}{1+P_0R}(W - Z) \end{aligned}$$

因此

$$\frac{E}{W-Z} = \frac{1}{1+P_0R} \quad (8-9)$$

这样，我们有以下关系式

$$\frac{E}{W-Z} = \frac{\Delta Y/Y_0}{\Delta P/P_0} = S_P^q = \frac{1}{1+P_0R} = \frac{1}{1+L_0} \quad (8-10)$$

这个公式告诉我们，被控对象传递函数的相对摄动  $\Delta P/P_0$  对输出量的相对变化  $\frac{\Delta Y}{Y_0}$  的影响与系统合成外作用  $W-Z$  对误差信号  $E$  的影响相同。这样，对这种单自由度的单位反馈系统而言，如果在系统中采用引入积分环节来减小对外干扰作用的稳态误差使之为零，则这种措施也将导致在灵敏度方面的相应结果：此积分环节将使系统的输出量对被控对象传递函数摄动的稳态诱发误差也等于零。

2. 第二种方案：用非单位反馈系统进行控制 为了改善对系统参数稳健性的独立控制能力，通常采用图 8-3 所示的非单位反馈系统来实现控制。

这时，系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{PR}{1+PRH} \quad (8-11)$$

与此相应的开环传递函数  $L$  是

$$L = PRH \quad (8-12)$$

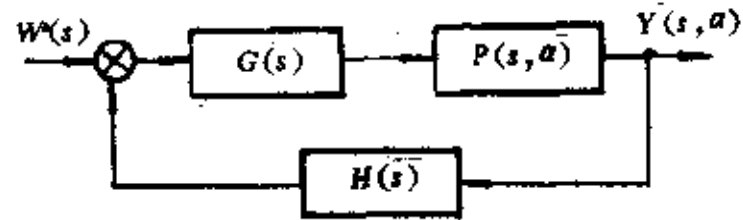


图 8-3

式 (8-11) 所示的闭环传递函数结构使我们能够用分别设计的方法，同时保证对系统的常规品质及对参数灵敏度的不同要求。为此，首先，我们可以基于对系统的灵敏度要求，按公式

$$S_P^q = \frac{1}{1+P_0RH} = \frac{1}{1+L_0} \quad (8-13)$$

求得开环传递函数  $L_0 = P_0RH$ ，然后，来考虑满足体现对系统常规品质要求的额定闭环传递函数  $G_0(s)$ 。由于

$$G_0(s) = \frac{P_0R}{1+P_0RH} = \frac{P_0R}{1+L_0} \quad (8-14)$$

故这一步工作体现于对系统校正环节  $R(s)$  的确定。因为上式中  $G_0(s)$ 、 $L_0$ 、 $P_0$  皆已知，故  $R(s)$  可方便地求得。

在求得  $R$  后，可由前述预定的开环传递函数  $L_0$  求得反馈环节的传递函数  $H(s)$ ，即

$$H(s) = \frac{L_0}{P_0R} \quad (8-15)$$

这样，我们的预期目的便达到了。

(二) 由系统的开环频率特性比较开、闭环系统的灵敏度

现在我们用系统的开环频率特性来进一步探讨闭环系统和与之额定等效的开环系统的灵敏度比较问题。现以图 8-2 所示的单位反馈系统为例来进行研究。由式 (8-8) 知，单位反馈系统的伯德灵敏度函数  $S_P^q$  为

$$S_P^G(s) = \frac{1}{1 + P_0(s, \alpha_0)R(s)} = \frac{1}{1 + L_0(s, \alpha_0)}$$

相应的频率特性为

$$S_P^G(j\omega) = \frac{1}{1 + P_0(j\omega, \alpha_0)R(j\omega)} = \frac{1}{1 + L_0(j\omega, \alpha_0)} \quad (8-16)$$

由于  $L_0(j\omega, \alpha_0) = P_0(j\omega, \alpha_0)R(j\omega)$  是开环频率特性，所以，基于经典的控制理论，我们可以画出开环幅相频率特性图（即所谓的乃奎斯特图），并用图解法求得不同频率时与开环幅相特性相应的系统回差向量  $1 + L_0(j\omega, \alpha_0)$ 。如果在某些频率上呈现  $|1 + L_0(j\omega, \alpha_0)| > 1$ ，则在这些频率上，闭环系统比与之额定等效的开环系统更稳健；反之，如果在另一些频率上有  $|1 + L_0(j\omega, \alpha_0)| \leq 1$ ，则在这些频率上，闭环系统的稳健性就比开环系统差了。图 8-4 画出了一个开环传递函数的分母阶次比分子阶次高出 3 阶的系统开环幅相频率特性图，其中虚线表示了回差向量的求法。

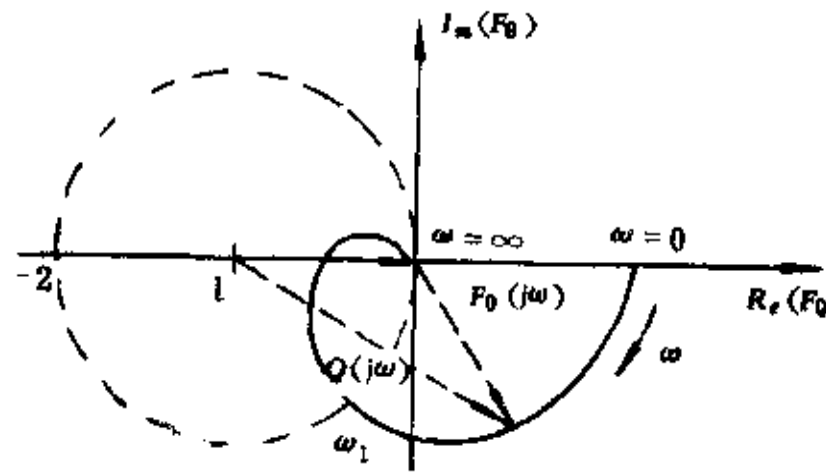


图 8-4

由图 8-4 可见，在频率为  $\omega = 0$  至  $\omega < \omega_1$  的低频段中，闭环系统比与之额定等效的开环系统更加稳健，而在  $\omega = \omega_1$  至  $\omega \rightarrow \infty$  的高频段中，情况正好相反。这时，闭环系统在稳健性方面比等

效的开环系统要差。值得注意的是，对闭环系统来讲，总存在一个在稳健性方面比等效开环系统要差的频段。

基于上述不难推知，对任意一个开环极点数比开环零点数多两个以上的系统来讲，总存在一个临界频率  $\omega_1$ ，这个频率的特点是，在所有比它更高的频段中，闭环系统的参数稳健性比与之等效的开环系统的要差，也即，在这个频段中，有

$$|S_P^G(j\omega)| > 1, \quad \forall \omega > \omega_1 \quad (8-17)$$

著名科学家伯德 (Bode) 对上述现象进行了深入的研究，总结出了以下相应的定理。

**定理 8-1 伯特绝对值积分定理** 如果在右半  $s$  平面中，闭环系统的开环传递函数  $L_0(s)$  没有极点，闭环回差  $1 + L_0(s)$  没有零点，则即使在虚轴上有  $L_0(s)$  的极点及  $1 + L_0(s)$  的零点存在，当  $L_0(s)$  的极点数比它的零点数多两个以上时，以下等式成立

$$\int_0^{\infty} \ln |1 + L_0(j\omega)| d\omega = - \int_0^{\infty} \ln |S_P^G(j\omega)| d\omega = 0 \quad (8-18)$$

这个定理的证明可参看文献 [21]。

上述伯特绝对值积分定理告诉我们，对任何一个具有开环极点至少比零点多两个以上的稳定控制系统而言，在  $\omega = 0$  至  $\omega = \infty$  的频段中，灵敏度函数幅值的对数的平均值为零，即在 0 分贝线上线下的  $|S_P^G| < 1$  和  $|S_P^G| > 1$  部分的面积相等。至于  $|S_P^G| = 1$  的频率  $\omega_1$  则可通过选择控制器的  $R(s)$  来确定。选取  $\omega_1$  的原则为：保证在输入信号的主要频段内，闭环系统优于等效的开环系统，也即  $|S_P^G| < 1$ 。



在实际的输出反馈系统中，伯德定理提到的关于开环传递函数的极点比零点多两个以上的条件几乎总是满足的。因此，伯德绝对值积分定理指出现象几乎到处可见。不难想象，对任何一个具有二阶以上低通滤波性能的被控对象的控制系统而言，由于调节器不可能是纯微分的，所以这个系统的开环传递函数 $L_0$ 的极点数必比零点数多两个以上，这时，伯德定理指出的情况就出现了。

**例 8-1** 设有一个被控对象，它的传递函数为  $P(s, K) = \frac{K}{(s+1)(s+3)}$ 。为了对它进行控制，设想了两个控制系统方案。

第一个方案是图8-5(a)所示的开环控制；第二个方案是图8-5(b)的闭环控制。若已知在可变参数的额定值  $K = 2$  时，这两个系统是额定等效的，试从参数稳健性的观点比较这两个方案的优劣。

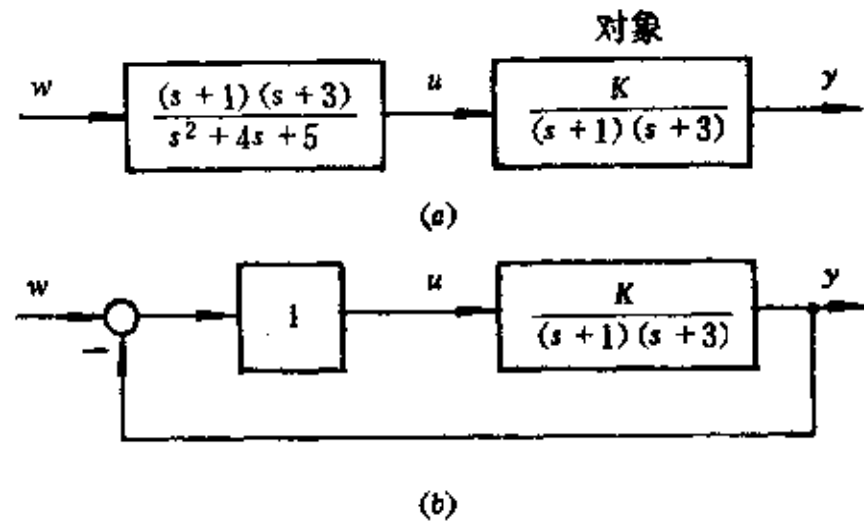


图 8-5

**解** 先求这两个系统的传递函数。开环系统的传递函数为

$$G_a = \frac{(s+1)(s+3)}{s^2+4s+5} \cdot \frac{K}{(s+1)(s+3)} = \frac{K}{s^2+4s+5}$$

闭环系统的传递函数为

$$G_b = \frac{K/(s+1)(s+3)}{1+K/(s+1)(s+3)} = \frac{K}{s^2+4s+3+K}$$

因在额定参数  $K = 2$  时，两者额定等效，故有

$$G_{a_0} = G_{b_0} = \frac{2}{s^2+4s+5}$$

其次，求开环控制系统的比较灵敏度函数  $S_{P,a}$ 。由于伯德灵敏度函数  $S_K^G$  是比较灵敏度函数  $S_P$  的特例，所以在参数  $K$  有摄动时，有

$$S_{P,a}(s) = S_K^G(s)$$

于是，问题归结为求  $S_K^G(s)$ 。

由于开环系统的传递函数为  $G(s, K) = \frac{K}{s^2+4s+5}$ ，设  $G_1 = 0$ ， $G_2 = 1$ ， $G_3 = s^2+4s+5$ ， $G_4 = 0$ ，及  $K_0 = 2$ ，可由公式(4-67)求得伯德灵敏度函数

$$\begin{aligned} S_K^G &= -\frac{K_0(G_2G_3 - G_1G_4)}{(G_1 + K_0G_2)(G_3 + K_0G_4)} \\ &= \frac{K_0(s^2+4s+5)}{(s^2+4s+5)K} = 1 \end{aligned}$$

这个式子告诉我们，对开环系统 (a) 而言，不论什么  $K$  与频率  $\omega$  值，比较灵敏度  $S_{P,0}$  都等于 1。

接着，求闭环控制系统 (b) 的比较灵敏度函数  $S_{P,0}$ 。同前述考虑，有

$$S_{P,0} = S_{K^a}^b$$

同样，利用公式(4-67)，并令  $G_1 = 0$ ， $G_2 = 1$ ， $G_3 = s^2 + 4s + 3$ ， $G_4 = 1$ ， $\alpha = K_0 = 2$ ，可求得

$$S_{K^a}^b = \frac{K_0(s^2 + 4s + 3)}{(s^2 + 4s + 3 + K_0)K_0} = \frac{1}{1 + \frac{2}{s^2 + 4s + 3}}$$

最后，求开、闭环系统同样稳健的频率  $\omega_1$ 。令

$$|S_{K^a}^b(j\omega)| = \left| \frac{s^2 + 4s + 3}{s^2 + 4s + 5} \right|_{s=j\omega} \stackrel{!}{=} 1$$

即

$$\left| \frac{(j\omega_1)^2 + 4j\omega_1 + 3}{(j\omega_1)^2 + 4j\omega_1 + 5} \right| = 1$$

于是，可求得

$$\omega_1 = 2$$

也即， $\infty > \omega > \omega_1 = 2$  时，开环系统比闭环系统更稳健，而当  $\omega < \omega_1 = 2$  时，闭环系统在参数稳健性方面显出了优越性。

应当指出，对每个系统来讲，取决于额定参数值的不同，表征开、闭环系统同样稳健的频率  $\omega_1$  也常是不同的。在本题情况下， $\omega_1$  随参数  $K$  值的变化规律可由下式求得

$$|S_{K^a}^b(j\omega)| = \left| \frac{s^2 + 4s + 3}{s^2 + 4s + 3 + K} \right|_{s=j\omega_1} = 1$$

故

$$\omega_1 = \sqrt{3 + \frac{1}{2}K}$$

### 三、状态反馈系统的参数灵敏度比较

为了对被控对象进行控制，除应用输出反馈外，还可应用状态反馈技术。非常有趣的是，对状态反馈控制而言，伯德绝对值积分定理中所要求的关于开环传递函数中极点数比零点要多两个以上的条件不会存在。因此，从参数灵敏度的观点来看，状态反馈控制总是比与之额定等效的开环系统要稳健。以下来论证这个结论。

状态反馈控制系统的方案示于图 8-6。为讨论方便起见，图中被控对象被分解成许多子系统，每个子系统的传递函数为

$$P_\nu(s, a) = \frac{a_\nu(\alpha) + b_\nu(\alpha)s}{c_\nu(\alpha) + d_\nu(\alpha)s}, \quad d_\nu \neq 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (8-19)$$

进行这样分解的原因是每个子系统的输出量皆为状态变量。

用结构图变换的方法，很容易把图 8-6 所示的状态反馈结构变换为图 8-7 所示的输出反馈结构。

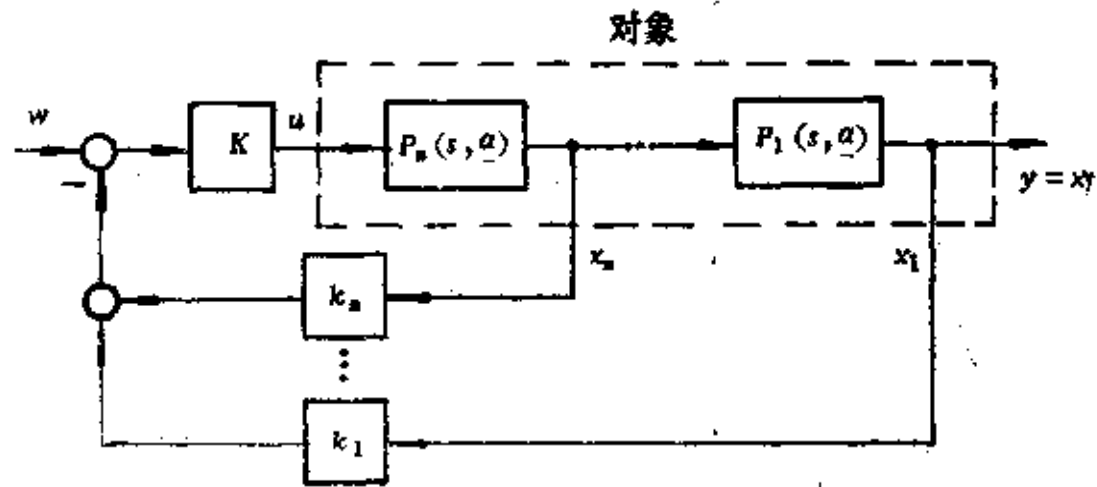


图 8-6

进一步变换之，可得该反馈环节的传递函数  $H(s, \alpha)$  为

$$H(s, \alpha) = k_1 + k_2 P_1^{-1}(s, \alpha) + \dots + k_n \prod_{v=1}^{n-1} P_v^{-1}(s, \alpha) \quad (8-20)$$

于是，得图 8-7 所示的等效系统结构。

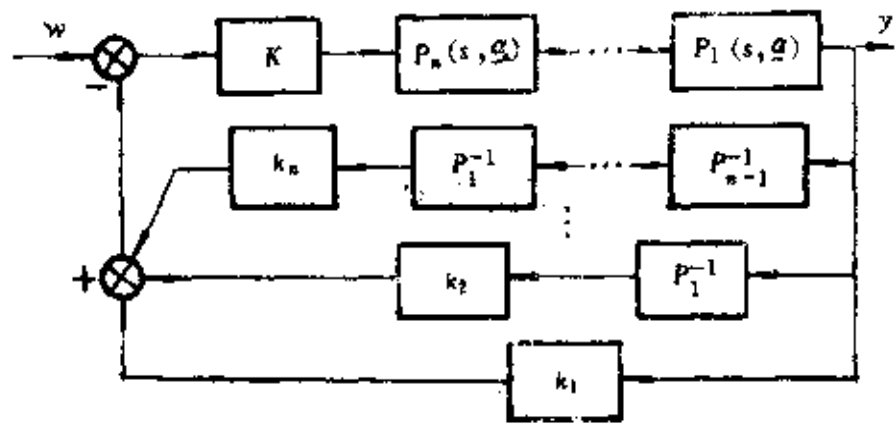


图 8-7

图 8-8 所示系统的闭环传递函数为

$$G = G[P(s, \alpha), H(s, \alpha)] \quad (8-21)$$

将  $G$  对  $\alpha$  求导之

$$\frac{dG}{d\alpha} = \frac{\partial G}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \frac{\partial G}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \alpha}$$

将此式两边通乘  $\alpha/G$ ，并以下标

“0”表示在额定参数处取值，有

$$\left( \frac{dG}{d\alpha} \frac{\alpha}{G} \right)_0 = \left( \frac{\partial G}{\partial P} \frac{P}{G} \right)_0 \left( \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{\alpha}{P} \right)_0 + \left( \frac{\partial G}{\partial H} \frac{H}{G} \right)_0 \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{\alpha}{H} \right)_0$$

显然，这就是下述伯德灵敏度的表达式

$$S_\alpha^G = S_P^G S_\alpha^P + S_H^G S_\alpha^H \quad (8-22)$$

其中

$$S_P^G = \left( \frac{\partial G}{\partial P} \frac{P}{G} \right)_0 = \frac{1}{1 + kH_0 P_0}$$

$$S_H^G = \left( \frac{\partial G}{\partial H} \frac{H}{G} \right)_0 = -\frac{kP_0 H_0}{1 + kH_0 P_0}$$

$$\begin{aligned}
 KH_0P_0 &= K \left[ k_1 + k_2 P_1^{-1}(s, \alpha) \cdots + k_n \prod_{\nu=1}^{n-1} P_\nu^{-1}(s, \alpha) \right] (P_1 P_2 \cdots P_n) \\
 &= K \left[ k_1 \prod_{\nu=1}^n P_\nu(s, \alpha) + \cdots + k_n \prod_{\nu=n}^n P_\nu(s, \alpha) \right] \quad (8-23)
 \end{aligned}$$

将公式(8-19)代入式(8-23)中,可见对开环传递函数 $KH_0P_0$ 而言,极点比零点不可能更多于1。正因此,对上述这种完全的状态反馈系统来讲,在全频道上都比与之额定等效的开环系统更具参数稳健性。

**例 8-2** 设有图 8-9 所示的完全状态反馈系统。试求它的伯德灵敏度函数。

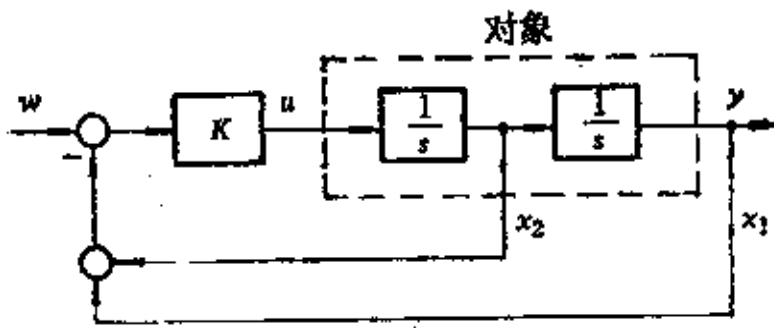


图 8-9

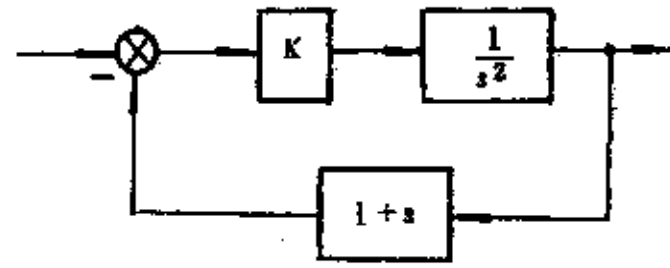


图 8-10

**解** 这个系统可变换为图 8-10 所示的等效输出反馈结构,它的开环传递函数 $L_0$ 为

$$L_0(s) = \frac{K(1+s)}{s^2}$$

因此,伯德灵敏度 $S_P^G$ 可求得为

$$S_P^G(s) = \frac{1}{1+L_0(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K(1+s)}{s^2}} = \frac{s^2}{s^2 + Ks + K}$$

相应的幅频特性为

$$|S_P^G(j\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{(K - \omega^2)^2 + K^2\omega^2}}$$

为求 $|S_P^G(j\omega)| \leq 1$ 的 $K$ 值,可由下式计算之

$$\frac{\omega^2}{\sqrt{(K - \omega^2)^2 + K^2\omega^2}} \leq 1$$

于是,有

$$K^2 - 2K\omega^2 + K^2\omega^2 \geq 0$$

$$K \geq \frac{2\omega^2}{1 + \omega^2} \approx 2 \quad \forall \omega$$

这个结论告诉我们,当 $K=2$ 时,这个状态反馈系统在全频道上比与之等效的开环系统更具参数稳健性。

#### 四、线性多变量系统的参数灵敏度比较

##### (一)单变量系统分析结果的推广

在研究了单变量反馈控制系统的灵敏度比较后，我们非常希望能把这些结论直接推广到复杂得多的多变量系统中去。然而，把单变量系统的有关结论推广到多变量系统中去的问题不是一件容易的事，不少人已经为此奋斗了几十年，问题还在不断发展与完善<sup>[22]</sup>。在灵敏度理论方面，由于单变量系统中的比较灵敏度函数概念已经推广于多变量系统，所以，有关开、闭环系统灵敏度比较的结果也在多变量理论中得到了应用。

我们最感兴趣的问题是希望了解在多变量情况下，进行灵敏度比较的判据是什么？伯德绝对值积分定理是否在多变量系统的情况下仍真？

为了回答第一个问题，我们从多变量系统的比较灵敏度  $S_p$  的定义式(4-83)出发进行研究。为了便于讨论，我们仍假定对类似图 8-2 所示的多变量单位反馈系统进行探讨。

由多变量系统的比较灵敏度定义式(4-83)，我们有

$$\Delta Y_R(s, \alpha) = S_p(s, \alpha) \Delta Y_S(s, \alpha) \quad (8-24)$$

式中，下标  $R$  表示闭环系统，下标  $S$  则表示与上述闭环系统额定等效的开环系统。

我们很希望用纯量来进行开环与闭环的灵敏度比较。为了保证闭环系统比等效的开环系统的参数稳健性好，显然，下式应该成立

$$(\Delta Y_R)^T \Delta Y_R \leq (\Delta Y_S)^T \Delta Y_S \quad (8-25)$$

将式(8-24)代入式(8-25)，有

$$[S_p(s, \alpha) \Delta Y_S(s, \alpha)]^T [S_p(s, \alpha) \Delta Y_S(s, R)] \leq \Delta Y_S^T \Delta Y_S = \Delta Y_S^T I \Delta Y_S$$

于是，可得

$$\Delta Y_S^T(s, \alpha) S_p^T(s, \alpha) S_p(s, \alpha) \Delta Y_S(s, \alpha) \leq \Delta Y_S^T I \Delta Y_S$$

这也就是说，在我们感兴趣的频段里，闭环系统比与之额定等效的开环系统更具参数稳健性的必要条件是以下矩阵不等式

$$S_p^T(-j\omega) S_p(j\omega) \leq I \quad (8-26)$$

在以上关系式的基础上，我们就能回答前面提出的第二个问题了。既然在多变量系统情况下，进行开、闭环系统的灵敏度比较也有一个表达必要条件的不等式存在，那么，不难推知，一个类似单变量系统中伯德绝对值积分定理那样的推广的伯德绝对值积分定理也存在于多变量系统理论中。

## (二)多变量状态反馈系统的比较灵敏度表达式

为了后面讨论的需要，现在我们来讨论多变量状态反馈系统的比较灵敏度表达式。应当注意，由于对状态反馈系统而言，感兴趣的首先是状态向量，因此，这里的比较灵敏度当然指的是轨迹比较灵敏度函数。

### 1. 被控对象的数学模型 被控对象的实际方程设为

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(\alpha)x(t, \alpha) + B(\alpha)u(t, \alpha) \quad x(0) = x^0 \quad (8-27)$$

式中  $\alpha$ ——定常的微扰动参数；

$u(t, \alpha)$ ——被控对象的控制作用。

2. 开环控制系统的情况 开环控制系统由开环调节器与被控对象组成。额定参数  $\alpha_0$  时，被控对象的状态方程为

$$\dot{x}_{s0} = A_0 x_{s0} + B_0 u_{s0} \quad x_{s0}(0) = x^0 \quad (8-28)$$

式中，下标“S”表示开环系统，下标“0”表示额定状态。

上述状态方程经拉氏变换后成为

$$(sI - A_0)X_{s0} = B_0 U_{s0} \quad (8-29)$$

当参数  $a$  发生扰动  $\Delta a$  后，系统的实际方程为

$$(\dot{x}_s) = Ax_s + Bu_s \quad (8-30)$$

式中  $A$ ——实际的系统阵， $A = A_0 + \Delta A$ ；

$B$ ——实际的控制阵， $B = B_0 + \Delta B$ ；

$X_s$ ——实际的状态向量， $x_s = x_{s0} + \Delta X_s$ ；

$u_s$ ——实际的控制作用， $u_s = u_{s0}$ 。

上式经拉氏变换后，整理之，可得

$$(sI - A)X_s = BU_{s0} \quad (8-31)$$

上式实为

$$(sI - A)(X_{s0} + \Delta X_s) = (B_0 + \Delta B)U_{s0}$$

将上式展开，并与(8-29)式相减，再考虑反回差阵  $(sI - A)^{-1}$  存在，便得

$$\Delta X_s = (sI - A)^{-1}[\Delta AX_{s0} - \Delta BU_{s0}] \quad (8-32)$$

3. 闭环控制系统的情况 闭环控制系统的情况如图 8-11 所示。

由图可见，额定参数时，系统的状态方程为

$$\dot{x}_{R0} = A_0 x_{R0} + B_0 u_{R0} \quad (8-33)$$

$$\text{而 } u_{R0} = -K x_{R0} + w \quad (8-34)$$

以式(8-34)代入式(8-33)，且经拉氏变换后，可得

$$(sI - A_0)x_{R0} = -B_0 K x_{R0} + B_0 W \quad (8-35)$$

实际参数时，系统的状态方程为

$$\dot{x}_R = Ax_R + Bu_R \quad (8-36)$$

而

$$u_R = -K x_R + w \quad (8-37)$$

以(8-37)式代入(8-36)式，且拉氏变换之，有

$$(sI - A)X_R = B(-K X_R + W)$$

整理之，得

$$(sI - A + BK)X_R = BW$$

考虑到

$$X_R = X_{R0} + \Delta X_R$$

前式成为

$$(sI - A + BK)(X_{R0} + \Delta X_R) = (B_0 + \Delta B)W$$

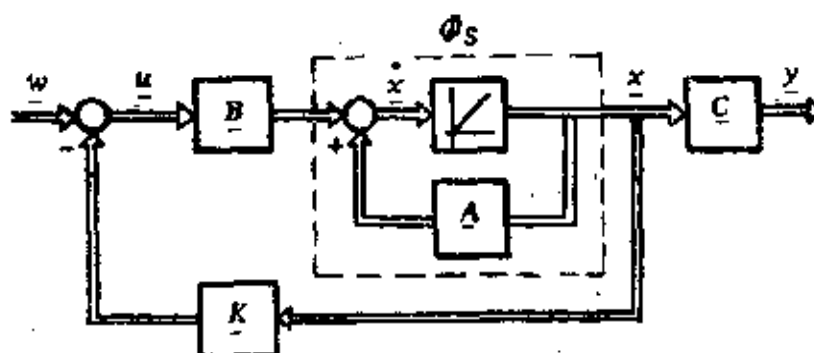


图 8-11

将此式展开，与式(8-35)相减，并考虑关系式(8-34)，可得

$$(sI - A + BK)\Delta X_R = \Delta A X_{R0} + \Delta B U_{R0}$$

假定  $(sI - A + BK)^{-1}$  存在，则得

$$\Delta X_R = (sI - A + BK)^{-1}(\Delta A X_{R0} + \Delta B U_{R0}) \quad (8-38)$$

最后，来考虑式(8-32)与式(8-38)两者的关系。

基于开、闭环的额定等效概念，有

$$U_{R0} = U_{S0} \quad \text{及} \quad X_{R0} = X_{S0} \quad (8-39)$$

此外，再考虑关系式(8-32)，即

$$(sI - A)\Delta X_S = \Delta A X_{S0} + \Delta B U_{S0}$$

于是，式(8-38)成为

$$\Delta X_R = (sI - A + BK)^{-1}(sI - A)\Delta X_S \quad (8-40)$$

基此，上式中联系开、闭环系统状态向量变化量  $\Delta X_R$  及  $\Delta X_S$  的量可定义为比较灵敏度函数，也即，状态反馈系统情况下，开、闭环系统的轨迹比较灵敏度函数  $\tilde{S}_p$  定义为

$$\tilde{S}_p = (sI - A + BK)^{-1}(sI - A) \quad (8-41)$$

状态反馈系统的轨迹比较灵敏度函数还有好几种表达方式。用得较多的一种是

$$\tilde{S}_p(s) = [I + \Phi_s(s)BK]^{-1} \quad (8-42)$$

这个公式是不难由式(8-41)推得的。事实上，由式(8-41)，有

$$\begin{aligned} \tilde{S}_p &= (sI - A + BK)^{-1}(sI - A) \\ &= \{(sI - A)[I + (sI - A)^{-1}BK]\}^{-1}(sI - A) \end{aligned} \quad (8-43)$$

不难看出，上式中， $(sI - A)^{-1}$  是被控对象的实际状态转移阵，在开环系统情况下，它也就是开环系统的状态转移阵，故有

$$\Phi_s = (sI - A)^{-1} \quad (8-44)$$

于是式(8-43)可进一步表达为

$$\begin{aligned} \tilde{S}_p &= \{(sI - A)[I + \Phi_s BK]\}^{-1} \Phi_s^{-1} \\ &= [\Phi_s(sI - A)(I + \Phi_s BK)]^{-1} \\ &= (I + \Phi_s BK)^{-1} \end{aligned} \quad (8-45)$$

值得特别指出的是式(8-45)右端括号中的量  $(I + \Phi_s BK)$  的物理意义。由线性系统中的频域理论知<sup>[29]</sup>，它实际上是在图8-11所示系统中的  $x$  与反馈环节  $K$  间切断时的系统回差阵。

由式(8-45)可见，为使状态反馈系统的状态向量比与之等效的开环系统的状态向量具有更大的参数稳健性，要求满足以下不等式

$$|I + \Phi_s(j\omega)BK| \geq 1 \quad (8-46)$$

最后还要强调指出一点：我们这里谈的是状态反馈系统的轨迹比较灵敏度函数，而不是状态反馈系统的输出比较灵敏度函数。由于通常对系统的输出量更感兴趣，所以这种轨迹比较灵敏度的实际用处受到了限制。

## 第二节 时域中的灵敏度比较

由于控制理论除了频域理论外，更经常进行时域分析，所以我们来讨论时域中的开、闭环系统灵敏度比较法。

### 一、时域中的灵敏度比较判据

在时域中进行两种系统的灵敏度比较应该用什么方法较好？因为比较两种系统的参数灵敏度需要考虑参数摄动的综合效应，因此，只用输出灵敏度或轨迹灵敏度概念本身作为比较的判据显然是不合适的。而应用第四章第一节中提到的 $L_2$ 范数作相应的比较判据则显得十分适宜。因此，时域中常用的灵敏度比较判据定义如下。

**定义 8-1** 时域中的灵敏度比较判据 在系统有界的指令信号 $w(t)$ 作用下，即

$$\int_0^{t_1} w^T(t) Z w(t) dt < \infty \quad (8-47)$$

如果下面以正半定阵 $Z$ 加权的 $L_2$ 范数不等式成立

$$\int_0^{t_1} e_R^T(t) Z e_R(t) dt \leq \int_0^{t_1} e_S^T(t) Z e_S(t) dt \quad (8-48)$$

则说闭环系统 $R$ 比与之额定等效的开环系统 $S$ 更具参数稳健性。

注意，上述定义中，下标“ $R$ ”表示闭环系统，“ $S$ ”表示开环系统；式中相应的 $e(t)$ 的选用原则为：研究定常参数的影响时，取 $e(t)$ 为各种输出灵敏度或轨迹灵敏度；在研究时域或大范围变化的参数影响时，取参数诱发的系统输出误差 $\Delta y$ 或状态向量误差 $\Delta x$ 作为 $e(t)$ 。

### 二、时域与频域灵敏度比较判据的关系

(一)单变量系统情况下，时、频域灵敏度比较判据间的关系  
前已述及，在单变量系统情况下，频域中的灵敏度比较判据为

$$|S_P^G(j\omega)| \leq 1 \quad (8-49)$$

试问：这个频域判据在时域中意味着什么？

为了回答这个问题，我们从加权 $L_2$ 范数

$$I_M = \int_0^{t_1} e^T(t) Z e(t) dt \quad (8-50)$$

出发来进行探讨。在纯量参数单变量闭环系统情况下，式(8-50)为

$$I_M = \int_0^{t_1} e_R^2(t) dt \quad (8-51)$$

为研究之便，进一步取 $t_1 = \infty$ ，于是我们的出发点是

$$I_M = \int_0^{\infty} e_R^2(t) dt \quad (8-52)$$

考虑到任意函数 $f(t)$ 的拉氏变换对



$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (8-53)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (8-54)$$

在取  $s = j\omega$  后，便变成了以下福氏变换对

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (8-55)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (8-56)$$

故式(8-52)可藉此向频域表达式转换

$$\begin{aligned} I_M &= \int_0^{\infty} e_R^2(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e_R(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_R(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_R(j\omega) \left[ \int_0^{\infty} e_R(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_R(j\omega) E_R(-j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E_R(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (8-57)$$

这个式子叫做巴塞伐尔 (Parseval) 公式。它的重要作用是沟通时域量与频域量间的相互关系。

由于参数摄动极小时， $S_P = S_P^g$ ，且注意到以下  $S_P$  的定义

$$E_R(s) \triangleq S_P E_S(s) \quad (8-58)$$

于是式(8-57)可进一步演化如下

$$\begin{aligned} I_M &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E_R(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_P^g(j\omega) E_S(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_P^g(j\omega)|^2 |E_S(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (8-59)$$

考虑关系式(8-49)，由上式可推知

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E_R(j\omega)|^2 d\omega \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E_S(j\omega)|^2 d\omega \quad (8-60)$$

再一次应用巴塞伐尔公式(8-57)，把频域量变为时域量，便得

$$\int_0^{\infty} e_R^2(t) dt \leq \int_0^{\infty} e_S^2(t) dt \quad (8-61)$$

这个式子就是对前面所提问题的答案，这个答案告诉我们：单变量系统中，频域比较判据与我们所定义的时域比较判据是等价的。

## (二)多变量输出反馈系统时、频域灵敏度比较判据间的关系

现在,我们从时域中的灵敏度比较判据式(8-48)出发来探讨它的等价频域判据。为了把问题看得更清楚些,我们假设式(8-48)中的 $t_1 = \infty$ ,于是,我们的出发点是以下不等式

$$\int_0^{\infty} \mathbf{e}_R^T(t) Z \mathbf{e}_R(t) dt \leq \int_0^{\infty} \mathbf{e}_S^T(t) Z \mathbf{e}_S(t) dt \quad (8-62)$$

应用前述的巴塞伐尔公式(8-57),上式成为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_R^T(-j\omega) Z \mathbf{E}_R(j\omega) d\omega \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_S^T(-j\omega) Z \mathbf{E}_S(j\omega) d\omega \quad (8-63)$$

考虑多变量系统比较灵敏度函数的定义

$$\mathbf{E}_R(s) = S_P(s) \mathbf{E}_S(s) \quad (8-64)$$

由式(8-63)可推得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathbf{E}_S^T(-j\omega) [S_P^T(-j\omega) Z S_P(j\omega) - Z] \mathbf{E}_S(j\omega) \} d\omega \leq 0 \quad (8-65)$$

这是个负半定的二次型,因此,作为它的代表,时域灵敏度比较判据式(8-62)的等价频域判据是以下的矩阵不等式

$$S_P^T(-j\omega) Z S_P(j\omega) - Z \leq 0, \quad \forall \omega \quad (8-66)$$

应当指出,以上条件是个充分条件。此外,如果我们直接从式(8-48)出发进行讨论,则对这种 $t \neq \infty$ 的情况,同样也可推得公式(8-66)。

综上所述,我们得到的结果是:从加权 $L_2$ 范数的意义上来说,保证闭环系统比与之额定等效的开环系统对参数变异更加稳健的充分条件是矩阵不等式

$$S_P^T(-j\omega) Z S_P(j\omega) \leq Z, \quad \forall \omega \quad (8-67)$$

### 三、若干推论

在以上探讨的基础上,可进一步推论如下。

#### (一)关于状态反馈系统情况下的频域状态灵敏度比较判据

在状态反馈系统情况下,仿前可推知,进行状态反馈系统的状态灵敏度比较的频域充分条件是

$$\tilde{S}_P^T(-j\omega) Z \tilde{S}_P(j\omega) \leq Z, \quad \forall \omega \quad (8-68)$$

#### (二)关于状态反馈系统情况下的输出灵敏度比较判据

在状态反馈系统的情况下,如果研究输出灵敏度比较问题,则从时域来看,准则应是

$$\int_0^{t_1} \mathbf{e}_R^T(t) \tilde{Z} \mathbf{e}_R(t) dt \leq \int_0^{t_1} \mathbf{e}_S^T(t) \tilde{Z} \mathbf{e}_S(t) dt \quad (8-69)$$

式中, $\mathbf{e}(t)$ 是 $\Delta \mathbf{y}$ 或 $\sigma$ 。

考虑到系统的输出 $\mathbf{y}$ 与状态向量 $\mathbf{x}$ 间的关系是

$$\mathbf{y} = C \mathbf{x} \quad (8-70)$$

故有关系式

$$\Delta \mathbf{y} = C \Delta \mathbf{x} \quad (8-71)$$

于是,式(8-68)成为

$$\int_0^{t_1} \Delta x_R^T C^T Z C \Delta x_R dt \leq \int_0^{t_1} \Delta x_S^T C^T Z C \Delta x_S dt \quad (8-72)$$

由巴塞伐尔公式，可求得相应的频域充分条件为

$$S_P^T(-j\omega) C^T Z C S_P(j\omega) \leq C^T Z C \quad (8-73)$$

注意，这里，加权阵成了十分特殊的  $C^T Z C$  阵。

(三)关于输出反馈系统频域灵敏度比较判据的改进

应当指出，以上所得的输出反馈系统频域灵敏度比较判据式(8-66)在实用上是价值不大的，原因是：一，它是矩阵方程，求解不易；二，要求这个判据在全频道上都满足显然是不现实的，因为对输出反馈系统而言，存在着伯德绝对值积分定理所描述的基本现象。到20世纪70年代末为止，为使用上述判据，采取的措施是限制设计的频段，以保证在系统指令信号的主要谐波频段内满足判据式(8-66)的要求，也即，比较实用的灵敏度比较判据为

$$S_P^T(-j\omega) Z S_P(j\omega) \leq Z, \quad \forall \omega_r < \infty \quad (8-74)$$

式中  $\omega_r$ ——系统指令信号中主要谐波通过的频率。

一般

$$\omega_r < \omega_c \quad (8-75)$$

式中  $\omega_c$ ——截止频率。

采取上述措施后的最大好处是使得这个灵敏度比较判据也能用于输出反馈系统的灵敏度设计。至于对状态反馈系统而言，由于以前讲过的原因，公式(8-74)中的矩阵不等式是在全频道内都能应用的。

### 第三节 用矩阵奇异值进行灵敏度比较

#### 一、问题的提出

上节已经谈到，直到本世纪70年代末为止，设计输出反馈系统的频域灵敏度比较准则一直是公式(8-74)中的矩阵不等式。经验表明，用它作为系统设计的手段过于复杂。因此，不少系统理论工作者作了很多探索，力图改变这种不利情况。与此同时，随着多变量系统使用的日益广泛及参数不确定性对系统稳定性的严重影响，相当多的科学家一直在致力于推广的经典控制理论中的有关概念于多变量系统领域，以有效地解决这种系统的分析、设计与调整问题。在这些富有成效的工作推动下，鉴于不论系统灵敏度的分析或系统稳定性的稳健性分析都是为了在呈现各种不确定性的情况下，使系统的固有性能保持不变的相同哲理，所以，灵敏度理论工作者吸取稳健稳定性分析中的各种先进方法来解决系统灵敏度理论中的有关问题<sup>[23]</sup>。这里，最有成效的工作是应用矩阵论中的奇异值理论于灵敏度理论的研究。

本节拟讨论应用矩阵奇异值理论于系统灵敏度分析的基本思想。为了讨论的需要，首先介绍一些有关矩阵奇异值的数学知识。

## 二、矩阵奇异值的有关数学知识 [24, 25, 26]

### (一) 有关的预备知识

矩阵奇异值理论是数学中的上层建筑，在直接讨论它之前，我们先介绍一些更为基础的预备知识，以便对矩阵奇异值的本质有较好的了解。

1. 伴随变换 参看图 8-12。设有矩阵  $A$ ，它定义了一个线性变换函数  $A: X_1 \rightarrow X_2$ ，其中， $X_1$  及  $X_2$  分别表示具有内积关系  $(\cdot, \cdot)_1$  及  $(\cdot, \cdot)_2$  的内积空间。于是，对每一个向量  $x \in X_1$ ，必有向量  $Ax = y \in X_2$ 。现在如有  $X_2$  中的一个任意向量  $z$ ，则因  $X_2$  是内积空间，故必有内积  $(z, y) = (z, Ax)$  存在。所谓  $A$  的伴随变换  $A^H: X_2 \rightarrow X_1$  系由关系式

$$(z, Ax)_2 = (A^H z, x)_1 \quad (8-76)$$

所定义。式中， $A^H \triangleq \bar{A}^T$ ，即  $A^H$  是  $A$  阵的共轭转置阵。注意共轭转置阵也常用  $A^*$  表示。

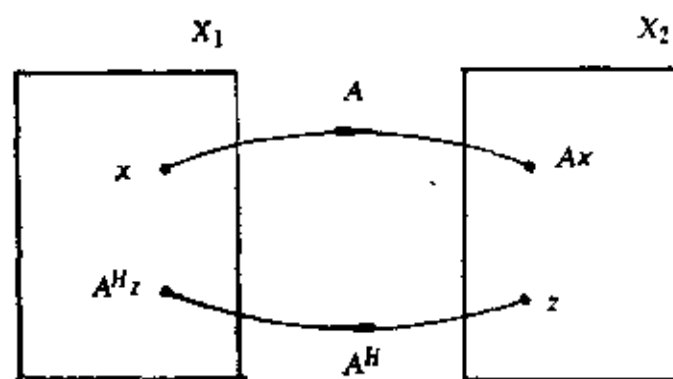


图 8-12

根据内积的坐标表达式

$$(u, v) = \bar{u}^T v = v^T \bar{u} \quad (8-77)$$

式(8-76)也可由内积  $(z, Ax)$  推导得到，即

$$(z, Ax) = z^T (Ax) = (\bar{A}^T z)^T x = (\bar{A}^T z, x) = (A^H z, x)$$

请注意求内积时的向量先后次序，这在复向量情况下是不能随意变动的。

2. 埃米特矩阵 凡满足关系式

$$A = \bar{A}^T = A^H \quad (8-78)$$

的矩阵称为埃米特矩阵。常用  $H$  表示埃米特阵。

例如，以下两个矩阵都是埃米特矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2+j \\ 2-j & -3 \end{bmatrix}$$

由埃米特矩阵  $H$  的定义，可见有以下关系式

$$(Hx, y) = (x, H^H y) = (x, Hy), \quad \forall x, y \in C^n \quad (8-79)$$

3. 埃米特型必是实数 设有埃米特阵  $H$ ，则称纯量  $x^H H x$  为埃米特型，其中，上标  $H$  表示共轭且转置。于是

$$x^H H x = x^H H^H x = (x^H H x)^H \triangleq \overline{(x^H H x)^T}$$

由于  $x^H H x$  是纯量，它的转置还是它本身，故上式成为

$$x^H H x = \overline{(x^H H x)}$$

这就是说

$$x^H H x \in R \quad (8-80)$$

4. 埃米特阵的特征值是实数 设有埃米特阵  $H$ ，按特征值的定义，有

$$Hx \triangleq \lambda x \quad (8-81)$$

式中  $\lambda$  ——  $H$  阵的特征值;

$x$  ——  $H$  阵的特征向量。

现求内积  $(x, Hx)$ 。由关系式(8-81), 有

$$(x, Hx) = (x, \lambda x) = \lambda (x, x)$$

因为  $(x, Hx) = x^H H x$  是埃米特型, 它是实数, 而内积  $(x, x)$  是正数, 故知

$$\lambda = \frac{(x, Hx)}{(x, x)} \in R \quad (8-82)$$

5. 与埃米特阵各相异特征值对应的特征向量必相互垂直 设有埃米特阵  $H$ , 其特征方程为

$$Hx = \lambda x$$

现取  $H$  的两个互不相等的特征值  $\lambda$ 、 $\mu$  来看, 它们与相应的特征向量  $x$  及  $y$  的关系式分别为

$$\begin{cases} Hx = \lambda x \\ Hy = \mu y \end{cases}$$

求内积  $(Hx, y)$

$$(Hx, y) = (\lambda x, y) = \bar{\lambda} (x, y)$$

再求内积  $(x, Hy)$

$$(x, Hy) = (x, \mu y) = \mu (x, y)$$

由于

$$(Hx, y) = (x, H^H y) = (x, Hy)$$

故知

$$\bar{\lambda} (x, y) = \mu (x, y)$$

也即

$$(\bar{\lambda} - \mu)(x, y) = 0$$

因已设  $\lambda \neq \mu$ , 故  $\bar{\lambda} = \lambda \neq \mu$ , 也即  $(\bar{\lambda} - \mu) \neq 0$ , 于是

$$(x, y) = 0 \quad (8-83)$$

故

$$x \perp y$$

6. 特征值各异的埃米特阵必可对角化 实际上, 只要我们应用与各互异特征值对应的各特征向量来构成相似变换阵, 就不难得到上述结论了。值得指出的是, 由于这些特征向量相互正交, 所以, 只要用这些特征向量的单位向量来构成上述相似变换阵, 则这些变换阵就成为酉阵了。

7. 对埃米特阵而言, 即使各特征值并不互异, 也必可对角化 这个结论也是不难理解的。事实上, 如果设想这时的埃米特阵为另一个具有相异特征值的埃米特阵的极限, 就不难想象这个结论的正确性了。

8. 由任意阵  $A$  构成的埃米特阵  $A^H A$  (或  $AA^H$ ) 是非负定阵 如果给定一个任意阵  $A$ , 并由它构成埃米特阵  $A^H A$  (或  $AA^H$ ), 现在证明该阵必为非负定阵。

事实上, 由下式可见

$$\begin{aligned} x^H (A^H A) x &= (x, A^H A x) = ((A^H)^H x, Ax) \\ &= (Ax, Ax) \geq 0, \quad \forall x \in C^n \end{aligned} \quad (8-84)$$

这就证明了以上的论断。

如果上述任意阵  $A$  非奇异, 即  $A^{-1}$  存在, 则若  $x = 0$ , 必有  $Ax = 0$ , 这就是说

$$(Ax, Ax) = 0, \quad \forall x = 0$$

另一方面, 由式(8-84), 有

$$(Ax, Ax) > 0, \quad \forall x \neq 0$$

故由关系式

$$(Ax, Ax) = (x, A^H Ax) = x^H A^H Ax$$

可知, 在这种情况下, 埃米特型  $x^H A^H Ax$  是正定的。因此,  $A^H A$  是正定阵。

至于对由  $A$  阵构成的埃米特  $AA^H$  而言, 也可用类同上述的推断, 证得完全相同的结论。

9. 任意正定的几阶埃米特阵  $H$  的各特征值  $\lambda_i(H)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , 必皆大于零 事实上, 研究埃氏型  $x^H H x$ , 并考虑前面第 6 点与第 7 点中关于变换阵可以是酉阵的论述, 有

$$\begin{aligned} Q = x^H H x &= x^H (P^H T P) x \\ &= (Px)^H T (Px) \end{aligned}$$

式中  $P$ ——酉阵, 为相似变换阵;

$T$ —— $H$  阵的对角化阵  $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , 其中, 诸  $\lambda_i$  可以相等。

如果在上式中令  $y = Px$ , 于是有

$$x^H H x = y^H T y$$

$$\begin{aligned} &= [y_1, y_2, \dots, y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 |y_1|^2 + \lambda_2 |y_2|^2 + \dots + \lambda_n |y_n|^2 \end{aligned}$$

因此, 不难推得结论

$$Q = x^H H x > 0 \iff \lambda_i(H) > 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (8-85)$$

10. 若埃米特阵  $H \geq 0$ , 则必有结论

$$H \geq 0 \iff \lambda_i(H) \geq 0 \quad (8-86)$$

11. 对由任意给定的  $n$  阶矩阵  $A$  构成的非负定埃米特阵  $A^H A$  而言, 其特征值

$$\lambda_i(A^H A) \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (8-87)$$

同理, 对埃米特阵  $AA^H$  也有类似的结果。

(二) 矩阵奇异值

1. 任给阵  $A$  的奇异值 重新考虑式 (8-87)

$$\lambda_i(A^H A) \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

对此式作以下定义

$$\sigma_i(A) \triangleq \sqrt{\lambda_i(A^H A)} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (8-88)$$

称  $\sigma_i(A)$  为  $A$  阵的各奇异值。

由于可按各特征值的大小对式 (8-87) 进行排队

$$\lambda_1(A^H A) \geq \lambda_2(A^H A) \geq \dots \geq \lambda_n(A^H A) \geq 0 \quad (8-89)$$

故相应地有

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A) \geq 0 \quad (8-90)$$

其中,  $\sigma_1(A)$  为  $A$  的最大奇异值,  $\sigma_n(A)$  为  $A$  的最小奇异值, 常用  $\sigma(A)$  表示  $\sigma_1(A)$ ,  $\sigma_n(A)$  表示  $\sigma_n(A)$ 。

2. 任给阵  $A$  的最大奇异值  $\sigma_1(A) = \|A\|_2$  这个结论可证明如下。

先看一般情况。若  $H$  为埃米特阵， $\lambda$  为其特征值， $x$  为与  $\lambda$  相应的特征向量。则有内积式

$$(x, \lambda x) = (x, Hx)$$

也即

$$\lambda(x, x) = x^H H x$$

于是得

$$\lambda = \frac{x^H H x}{(x, x)} = \frac{x^H H x}{x^H x} \quad (8-91)$$

常称  $\lambda$  为瑞利商 (Rayleigh quotient)。

现在看由任给阵  $A \in C^{n \times n}$  构成的埃米特阵  $A^H A$  (或  $AA^H$ )，并考虑它的最大特征值  $\lambda_1(A^H A)$ 。由式(8-91)，有

$$\begin{aligned} \lambda_1(A^H A) &\triangleq \max_{0 \neq x \in C^n} \frac{x^H A^H A x}{x^H x} \\ &= \max_{0 \neq x \in C^n} \frac{(Ax)^H Ax}{x^H x} \\ &= \max_{0 \neq x \in C^n} \frac{(Ax, Ax)}{(x, x)} \\ &= \max_{0 \neq x \in C^n} \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \end{aligned} \quad (8-92)$$

对上式开方，由矩阵奇异值的定义式(8-88)并考虑式(8-92)及矩阵二次范数的定义，可得  $A$  的最大奇异值的表达式如下

$$\begin{aligned} \sigma_1(A) &\triangleq \sigma(A) \triangleq \sqrt{\lambda_1(A^H A)} \\ &= \sqrt{\max_{0 \neq x \in C^n} \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2}} \\ &= \max_{0 \neq x \in C^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \\ &\triangleq \|A\|_2 \end{aligned} \quad (8-93)$$

注意，数学中，常用  $Lub_2(A)$  表示  $\sigma_1(A)$ 。

3.  $A$  阵的最小奇异值 由表达式(8-91)，埃米特阵  $A^H A$  的最小特征值  $\lambda_n(A^H A)$  可表达为

$$\begin{aligned} \lambda_n(A^H A) &= \min_{0 \neq x \in C^n} \frac{x^H A^H A x}{x^H x} \\ &= \min_{0 \neq x \in C^n} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \end{aligned} \quad (8-94)$$

因此， $A$  的最小奇异值  $\sigma_n(A)$  可表达为

$$\begin{aligned} \sigma_n(A) &\triangleq \sqrt{\lambda_n(A^H A)} \\ &= \sqrt{\min_{0 \neq x \in C^n} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2}} \\ &= \min_{0 \neq x \in C^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \end{aligned} \quad (8-95)$$

控制理论文献中, 常用  $\underline{\sigma}(A)$  表示  $\sigma_n(A)$ 。

(三) 矩阵奇异值的性质

1. 性质 1 若  $A \in C^{n \times n}$ , 且非奇异, 则有

$$\underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\overline{\sigma}(A^{-1})} \quad (8-96)$$

证明 若  $A \in C^{n \times n}$ , 且非奇异, 则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_n(A)} &= \frac{1}{\min_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}} \\ &= \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|A\mathbf{x}\|_2} \end{aligned}$$

若于上式中令

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

则得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_n(A)} &= \max_{\mathbf{y} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A^{-1}\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} \triangleq \|A^{-1}\|_2 \\ &= \overline{\sigma}(A^{-1}) \end{aligned}$$

2. 性质 2  $A$  阵的最大奇异值为

$$\overline{\sigma}(A) = \|A\|_2$$

3. 性质 3 若有  $A \in C^{m \times n}$ ,  $B \in C^{n \times p}$ , 则有

$$\overline{\sigma}(AB) \leq \overline{\sigma}(A)\overline{\sigma}(B) \quad (8-97)$$

证明 由矩阵范数的关系式

$$\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$$

上式就得证了。

4. 性质 4 若有  $A$ 、 $B$  阵, 则

$$\underline{\sigma}(AB) \geq \underline{\sigma}(A)\underline{\sigma}(B) \quad (8-98)$$

证明 请读者完成之。

5. 性质 5  $A$  阵的条件数为

$$\text{Cond}(A) = \overline{\sigma}(A) / \underline{\sigma}(A) \quad (8-99)$$

证明 读者完成之。

6. 性质 6 若有  $A$ ,  $\Delta A \in C^{m \times n}$ , 则

$$|\underline{\sigma}(A + \Delta A) - \underline{\sigma}(A)| \leq \overline{\sigma}(\Delta A) \quad (8-100)$$

特别是

$$\underline{\sigma}(A + \Delta A) \geq \underline{\sigma}(A) - \overline{\sigma}(\Delta A) \quad (8-101)$$

证明 请读者自行完成之。

7. 性质 7 设有任意阵  $A_{n \times n}$ ,  $E_{n \times n}$ , 且设

$$\{\sigma(A)\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$



- 则 (1)若  $A+E$  为奇异阵, 必有  $\|E\|_2 \geq \sigma_n$ ,  
 (2)必有一个阵  $E$ , 它的特点是  $\|E\|_2 = \sigma_n$ , 且使得  $A+E$  为奇异阵。

证明 参看文献[24]。

8. 性质 8 任意阵  $A$  皆可进行奇异值分解, 即若有任意阵  $A \in C^{m \times n}$ , 则

(1)必存在一个酉阵  $U \in C^{m \times m}$  及另一酉阵  $V \in C^{n \times n}$ , 使得  $U^H A V = \Sigma \in C^{m \times n}$  是一个以下型式的对角阵

$$\Sigma = \left[ \begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \sigma_r & \\ \hline & & & & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array} \right]$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \quad (8-102)$$

也即

$$D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$$

且

$$\text{rank } A = r$$

(2)  $A^H$  的非零奇异值也是  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$

常称

$$A = U \Sigma V^H \quad (8-103)$$

为  $A$  阵的奇异值分解。

证明 见文献[24]。

(四)矩阵奇异值的计算软件

当前, 矩阵奇异值理论已相当广泛地应用于控制领域, 因此, 有关的计算软件已很丰富。使用时, 可从美国的 EISPACK, LINPACK 及 IMSL 软件包中检索使用。

### 三、开、闭环灵敏度比较的矩阵奇异值判据

(一)灵敏度比较的矩阵奇异值判据

现在我们来讨论用矩阵奇异值进行开、闭环灵敏度比较的问题。由第二节所述可知, 在频域理论中, 灵敏度比较的判据是式(8-74)), 也即

$$S_P^T(-j\omega) Z S_P(j\omega) \leq Z, \quad \forall \omega_r < \infty$$

既然比较灵敏度  $S_P(j\omega)$  是上式的关键量, 所以, 我们从这个关键量出发, 结合矩阵奇异值理论进行新的灵敏度比较判据的探讨。

前已述及, 多变量输出反馈系统的比较灵敏度  $S_P$  是由公式(4-83)定义的, 也即

$$\Delta Y_R(s, \alpha) = S_P(s, \alpha) \Delta Y_S(s, \alpha)$$

式中  $\Delta Y_R$ ——闭环系统的输出量;

$\Delta Y_S$ ——等效开环系统的输出量。

它的频率特性为

$$\Delta Y_R(j\omega, \alpha) = S_P(j\omega, \alpha) \Delta Y_S(j\omega, \alpha) \quad (8-104)$$

为把问题转入矩阵奇异值的讨论, 对上式两边取范数  $\|\cdot\|_2$

$$\|\Delta Y_R(j\omega, \alpha)\|_2 = \|S_P(j\omega, \alpha) \Delta Y_S(j\omega, \alpha)\|_2 \quad (8-105)$$

由范数理论, 可知下式成立

$$\|\Delta Y_R(j\omega, \alpha)\|_2 \leq \|S_P(j\omega, \alpha)\|_2 \|\Delta Y_S(j\omega, \alpha)\|_2 \quad (8-106)$$

考虑公式(8-93)的结果

$$\|A\|_2 = \sigma(A)$$

因此, 式(8-106)成为

$$\|\Delta Y_R(j\omega, \alpha)\|_2 \leq \sigma[S_p(j\omega, \alpha)] \|\Delta Y_S(j\omega, \alpha)\|_2 \quad (8-107)$$

对图 8-3 所示的经典输出反馈方案而言, 由式(4-84)可知

$$S_p(s, \alpha) = (I + PGH)^{-1}$$

故式(8-107)成为

$$\|\Delta Y_R(j\omega, \alpha)\|_2 \leq \sigma[(I + PGH)^{-1}] \|\Delta Y_S(j\omega, \alpha)\|_2 \quad (8-108)$$

这个式子说明, 由于使用了比较灵敏度  $S_p$ , 在考虑参数有小的扰动或大的变异情况下, 从矩阵奇异值的观点看, 为要闭环系统比与之额定等效的开环系统更具参数稳健性, 要求满足关系式

$$\sigma[S_p(j\omega, \alpha)] = \sigma[(I + PGH)^{-1}] \ll 1, \quad \forall \omega_r < \infty \quad (8-109)$$

通常, 为了使设计计算所用的奇异值频率特性与单变量系统的频率特性在形状上更加相似, 常用最小奇异值  $\underline{\sigma}(\cdot)$  进行系统的设计计算。于是, 基于公式(8-96), 为使闭环系统比额定等效的开环系统更稳健, 必须保证条件

$$\underline{\sigma}[S_p^{-1}(j\omega, \alpha)] = \frac{1}{\underline{\sigma}[S(j\omega, \alpha)]} \gg 1, \quad \forall \omega_1 < \infty \quad (8-110)$$

也即

$$\underline{\sigma}(I + PGH) \gg 1$$

(二) 矩阵奇异值判据与其它有关判据的关系

为了了解矩阵奇异值判据与其它有关判据的关系, 回头去看关系式(8-107)。在保证不等式(8-109)或式(8-110)的条件下, 该式即为

$$\|\Delta Y_R(s\omega, \alpha)\|_2 \ll \|\Delta Y_S(j\omega, \alpha)\|_2 \quad (8-111)$$

由  $\|\cdot\|_2$  的求法知, 上式实为式(8-25)

$$(\Delta Y_R)^T \Delta Y_R \leq (\Delta Y_S)^T \Delta Y_S$$

用矩阵不等式来表达, 上式等效于判据式(8-26)

$$S_p^T(-j\omega) S_p(j\omega) \leq I$$

由式(8-74)可见, 上式实为取加权阵  $Z$  为单位阵时的灵敏度比较判据

$$S_p^T(-j\omega) S_p(j\omega) \leq I, \quad \forall \omega_r < \infty \quad (8-112)$$

基于上述可见, 灵敏度比较的等效时域判据为

$$\int_0^t e_R^T(t) e_R(t) dt \leq \int_0^t e_S^T(t) e_S(t) dt$$

文献[20]列举了应用奇异值判据设计系统的例子。

最后应该强调, 由于矩阵奇异值理论已广泛应用于控制领域, 现在已有丰富的有关计算奇异值的软件<sup>[27, 28]</sup>, 因此, 相对于其它许多灵敏度比较判据而言, 矩阵奇异值判据就显出不少优点来了。

关于用矩阵奇异值理论统筹考虑参数灵敏度的系统设计法, 可参看文献[29]。

## 习 题

8-1 图 8-13 所示控制系统中,  $K_2$  很大 ( $KK_2 \gg 1$ ), 求伯德灵敏度函数  $S_{K_1}^y$ ,  $S_{K_2}^y$ ,  $S_K^y$ , 以及相应的参数诱发的输出量相对变化值  $\Delta y/y_0$ 。

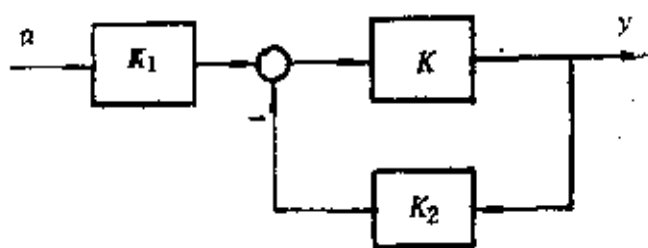


图 8-13

8-2 在由方程  $\dot{y} + (a+b)y = bu$  描述的控制系统中:

(1) 求对  $b$  的伯德灵敏度函数, 用传递函数  $G_a = Y(s, b')/U(s)$  表示其结果;

(2) 当  $\dot{y} + (a+b)y = u$  时, 求对  $b$  的伯德灵敏度函数, 并问用  $G_b = Y(s, b_0)/U(s)$  表示的结果会与 (1) 所求得的形式一样吗?

8-3 给定单位反馈系统的输入-输出微分方程  $a\dot{y} + (b+1)y = bu$ , 求对  $a$  和  $b$  的伯德灵敏度函数。对哪些  $a$  和  $b$  的值, 反馈系统在全频道范围内比与之等效的开环系统更稳健?

8-4 图 8-14 为某个晶体管放大器的两个实现。图 (a) 是电压增益  $K = -10$  的单级开环放大器, 图 (b) 是三级放大器, 每级皆与图 (a) 一样, 且增益相同,  $K = -10$ , 整个系统反馈系数为  $R$ 。

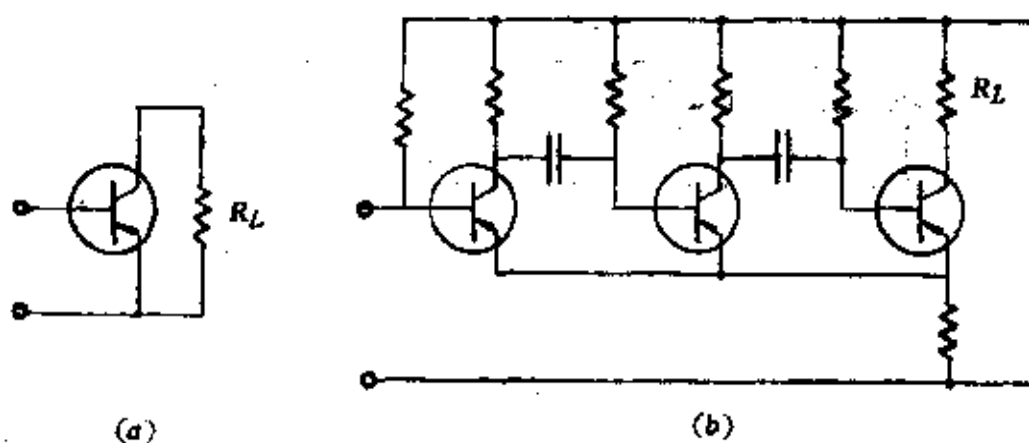


图 8-14

(1) 求  $R$ , 使两个结构额定等效, 即 (b) 图总的增益  $K_{tot} = -10$ 。

(2) 用比较灵敏度来比较两种结构的灵敏度。

(3) 设级增益每年减少 10%, 多长时间后, 三级放大器减少的增益与单级放大器一年后的增益减少相同? 试给出精确解。

8-5 铝厂的某转子由直流电动机电枢控制, 其传递函数  $P(s) = 0.5/(1+s)$ 。图 8-15 是生产标准铝锭的传递函数皆为  $G(s) = (1+5s)^{-1}$  的四个控制系统。实际上, 各块铝锭大小不一, 因此参数  $P(s)$  也各不相同。

(1) 求图 (b), (c), (d) 的比较灵敏度函数  $S_P$ 。

(2) 比较图 (b), (c), (d) 中的  $|S_P|$ 。

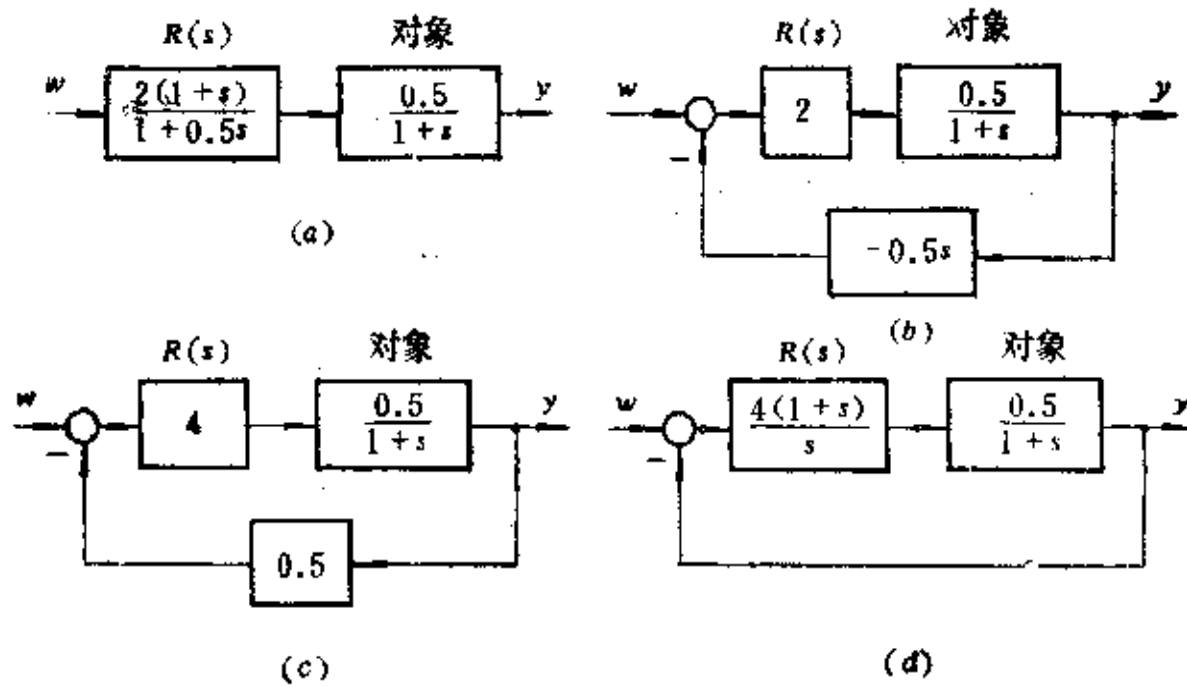


图 8-16

8-6 给定状态反馈如图 8-16, 被控对象的额定的参数为  $A=10$ ,  $K_1=1$ ,  $K_2=5$ ,  $K_3=2$ ,  $s_2=-5$ ,  $s_3=-1$ , 反馈参数  $k_1=1$ ,  $k_2=-3$ ,  $k_3=5$ 。若考虑对象参数的微小变化。

- (1) 求图(b)和(c)的额定等效结构, 以及额定的等效开环结构。
- (2) 怎样用伯德灵敏度函数计算图(a)中状态反馈的比较灵敏度函数?
- (3) 求所有的比较灵敏度函数并比较之。
- (4) 求灵敏度不如开环高时, 各结构的上限频率。

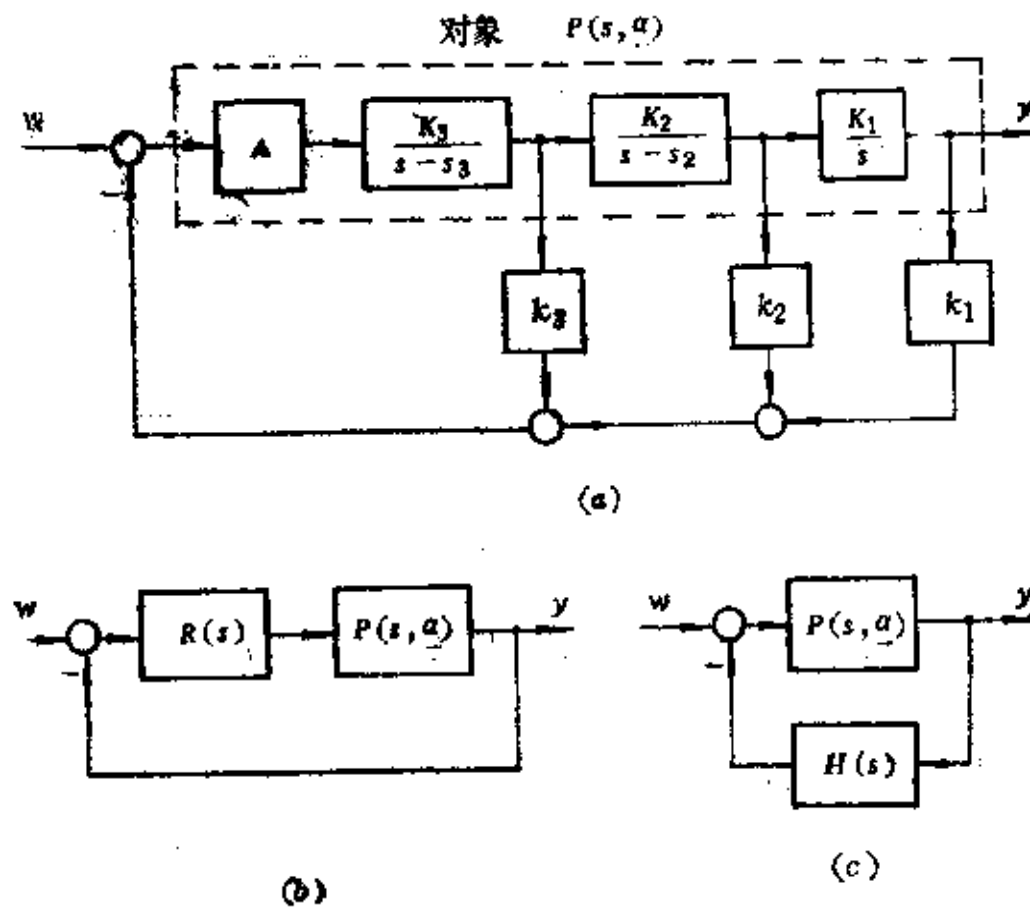


图 8-18

## 第九章 最优系统灵敏度分析浅论

本章简要讨论最优系统的灵敏度分析问题。灵敏度问题是最优系统分析与综合的相当基本的一个方面，这是由于最优控制函数是相对于额定参数而使系统最优化的。正因此，最优系统的性能对于参数在额定值附近的变化特别敏感。

与最优系统有关的灵敏度问题的几个最重要方面是：

- (1) 用灵敏度理论的观点，把按给定参数容差设计所得的最优解与非最优解相比较，以判定最优解的实用性，
- (2) 进行开环与闭环最优系统的灵敏度比较，
- (3) 考虑参数的可能变异，设计低参数灵敏度的稳健最优系统。

本章仅拟对最优系统的灵敏度问题作简要的讨论，希望进一步了解本章内容的读者可参看文献[6]，[30]，[31]，[32]和[33]。

### 第一节 最优系统的灵敏度比较

通常，最优控制系统是按开环结构设计而用闭环实现的，因而闭环和与之额定等效的开环系统之间的灵敏度比较问题就成为一个非常重要的问题了。

在最优系统的灵敏度比较中，关键在于选择一个恰当的度量灵敏度的方法。由于最优系统是按某种性能指标来设计的，所以采用性能指标灵敏度作为灵敏度的度量似乎十分合乎逻辑。然而，在1963年提出这个术语后不久，对它的有效性便开始了热烈的讨论。潘古瑞克(Pagurek)和维生豪申(Witsenhausen)于1965年证明，对自由终端的最优系统而言，开环与闭环结构的性能指标灵敏度恰好一样大，因而，用这种灵敏度来进行灵敏度的比较是无能为力的。现在，称这种现象为潘古瑞克-维生豪申奇题。此外，在诸如时间最优或最少燃料控制问题等情况下，由于此时在性能指标的表达式中不包含系统的输出量或状态变量，所以性能指标的变化 $\delta J$ 在开环系统时总等于零，而它的灵敏度仅取决于终值，所以性能指标灵敏度不能用作灵敏度比较的度量。

正是由于上述缘故，一般常用轨迹灵敏度函数作为灵敏度比较的度量。在参数变异较大时，按理，用性能指标的改变量 $\delta J$ 能更有效地用于灵敏度比较的度量，这是因为，一般情况下，性能指标的改变量对开环与闭环系统是不一样的。因此可以用它来指明这两种最优系统的最优程度。然而，由于这时方程式不再是线性的，因此，数学处理困难多了，灵敏度理论宜于处理线性方程的优点也无形中丧失了！

以下简要讨论用性能指标灵敏度函数及轨迹灵敏度函数进行开、闭环最优系统灵敏度比较的有关问题。

### 一、用性能指标灵敏度进行灵敏度比较

设要进行最优化的系统数学模型为以下状态方程

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), \alpha, t] \quad x(t_0) = x^0 \quad (9-1)$$

作为最优化判据的性能指标为

$$J = G[x(t_0), t_0] + \int_{t_0}^{t^*} L[x(t), u(t), t] dt \quad (9-2)$$

系统的最优化体现于按上述性能指标来选取控制信号  $u(t)$ , 使得在最优控制信号  $u^*(t, \alpha_0)$  时, 性能指标  $J$  的值为最小。

假定参数  $\alpha$  是时变的, 变化量极小, 且在  $J$  的表达式中, 参数  $\alpha$  仅隐含于其中。在开环系统时, 控制信号  $u^*(t)$  由开环结构独立产生; 而在闭环系统时,  $u^*(t)$  由以下反馈律产生:

$$u^*(t) = -k[x(t), \alpha_0, t] \quad (9-3)$$

即最优控制取决于状态  $x(t)$ , 因而也取决于参数的摄动  $\Delta\alpha(t) = \varepsilon\delta\alpha(t)$ 。

在上述情况下, 以下定理正确。

**定理 9-1** 在自由终端的最优系统情况下, 参数的一阶变量  $\delta\alpha$  诱发性能指标的一阶变量  $\delta J$ 。对闭环及与之额定等效的开环最优系统而言, 参数所诱发的  $\delta J$  的对两者是相同的, 也即

$$\delta J_R = \delta J_S \quad (9-4)$$

在定常参数变异的情况下, 则有以下关系式

$$\left. \frac{\delta J_R}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{\partial J_S}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0}, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (9-5)$$

因此, 相应的范数关系为

$$\|\delta J_R\| = \|\delta J_S\| \quad (9-6)$$

$$\left\| \left. \frac{\partial J_R}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \right\| = \left\| \left. \frac{\partial J_S}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \right\| \quad (9-7)$$

我们先直观地解释一下这个定理, 然后再证明。

由第六章第二节的讨论知, 在时变参数情况下,  $\Delta\alpha(t) = \varepsilon\delta\alpha(t)$ , 灵敏度方程为

$$\delta\dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\alpha_0} \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \delta \alpha + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\alpha_0} \delta u \quad (9-8)$$

初始条件是

$$\delta x(t_0) = \delta x^0 = 0$$

此外, 对  $\delta x$  及  $\delta u$  的性能指标一阶偏差为

$$\delta J = \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{\alpha_0} \delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t^*} \left[ \left. \frac{\partial L}{\partial x} \right|_{\alpha_0} \delta x + \left. \frac{\partial L}{\partial u} \right|_{\alpha_0} \delta u \right] dt \quad (9-9)$$

上式中, 梯度  $\partial G/\partial x$ ,  $\partial L/\partial x$  及  $\partial L/\partial u$  皆定义为行向量。

在开环系统情况下, 由于  $u$  与  $\alpha$  无关, 故  $\delta u = 0$ , 因此

$$\delta J_S = \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{\alpha_0} \delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t^*} \left[ \left. \frac{\partial L}{\partial x} \right|_{\alpha_0} \delta x \right] dt$$

而在闭环系统情况下, 尽管由式(9-3)可知,  $\delta u \neq 0$ , 然而, 由最优化的定义知, 不管  $u^*$  怎么

产生,  $u^*$  总是使  $J$  为最小。因此, 在式(9-9)中,  $\frac{\partial L}{\partial u}$  应等于零。这样, 便有

$$\delta J_R = \delta J_S$$

定理 9-1 的证明 以下用极大值原理证明。设汉密顿函数为

$$H = L + pf \quad (9-10)$$

式中,  $p$  由协状态方程

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} - p \frac{\partial f}{\partial x} \quad (9-11)$$

确定,  $p$  为行向量。

将上式等号两边右乘  $\delta x$

$$p \delta \dot{x} = \left( -\frac{\partial L}{\partial x} - p \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x \quad (9-12)$$

而将方程式(9-8)左乘  $p$ , 有

$$p \delta \dot{x} = p \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + p \frac{\partial f}{\partial \alpha} \delta \alpha + p \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \quad (9-13)$$

把式(9-12)与(9-13)相加, 且令  $\alpha = \alpha_0$ , 有

$$\begin{aligned} p \delta \dot{x} + p \delta \dot{x} &= p \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + p \frac{\partial f}{\partial \alpha} \delta \alpha + p \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \\ &\quad + \left( -\frac{\partial L}{\partial x} - p \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x \\ &= -\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + p \frac{\partial f}{\partial \alpha} \delta \alpha + p \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \end{aligned}$$

在上式等号右边加、减  $\frac{\partial L}{\partial u} \delta u$ , 并考虑到由于  $\alpha$  隐含于  $J$  中的假设,  $\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$ , 故式中第二项为

$$p \frac{\partial f}{\partial \alpha} \delta \alpha = \frac{\partial H}{\partial \alpha} \delta \alpha \quad (9-14)$$

于是可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (p \delta x) &= - \left[ \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u \right] \\ &\quad + \frac{\partial H}{\partial \alpha} \delta \alpha + p \frac{\partial f}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u \end{aligned} \quad (9-15)$$

注意, 上式方括号中的量恰恰就是式(9-9)中积分号下的被积分式, 而在  $\alpha = \alpha_0$  时, 考虑极大值原理, 上式中的最后两项

$$p \frac{\partial f}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u = \frac{\partial H}{\partial u} \delta u = 0 \quad (9-16)$$

于是, 式(9-15)成为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{\alpha_0} \delta x + \frac{\partial L}{\partial u} \Big|_{\alpha_0} \delta u \\ &= -\frac{d}{dt} (p \delta x) + \frac{\partial H}{\partial \alpha} \delta \alpha \end{aligned} \quad (9-17)$$

将这个结果代入  $\delta J$  的表达式(9-9)中, 有

$$\begin{aligned}
 \delta J &= \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{x}(t_e) + \int_{t_0}^{t_e} \left( \left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{u} \right) dt \\
 &= \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{x}(t_e) + \int_{t_0}^{t_e} \left[ -\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \delta \mathbf{x}) + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} \right] dt \\
 &= \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{x}(t_e) - \int_{t_0}^{t_e} d(\mathbf{p} \delta \mathbf{x}) + \int_{t_0}^{t_e} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} dt \\
 &= \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{x}(t_e) - \left[ (\mathbf{p} \delta \mathbf{x}) \right]_{t_e} + (\mathbf{p} \delta \mathbf{x}) \Big|_{t_0} + \int_{t_0}^{t_e} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} dt \\
 &= \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{x}(t_e) - (\mathbf{p} \delta \mathbf{x}) \Big|_{t_e} + \int_{t_0}^{t_e} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} dt \\
 &= \left[ \left( \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{a}_0} - \mathbf{p} \right) \delta \mathbf{x} \right]_{t_e} + \int_{t_0}^{t_e} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} dt \tag{9-18}
 \end{aligned}$$

上述方程对开、闭环系统皆真:

$$\delta J_s = \left\{ \left[ \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{a}_0} - \mathbf{p} \right] \delta \mathbf{x}_s \right\}_{t_e} + \int_{t_0}^{t_e} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} dt \tag{9-19}$$

$$\delta J_R = \left\{ \left[ \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{a}_0} - \mathbf{p} \right] \delta \mathbf{x}_R \right\}_{t_e} + \int_{t_0}^{t_e} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} dt \tag{9-20}$$

因此, 两式相减后得

$$\delta J_s - \delta J_R = \left[ \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{a}_0} - \mathbf{p} \right] [\delta \mathbf{x}_s - \delta \mathbf{x}_R]_{t_e} \tag{9-21}$$

由于假设终端是自由的, 所以要考虑横截条件, 这个横截条件是

$$\mathbf{p}(t_e) = \left( \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{a}_0} \tag{9-22}$$

将此式代入式(9-21), 得重要关系式

$$\delta J_s - \delta J_R = 0 \tag{9-23}$$

且

$$\delta J_R = \delta J_s = \int_{t_0}^{t_e} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} dt \tag{9-24}$$

定理证毕。

上述定理的基本假设为自由终端及参数变异极小, 对参数变异为有限值及开环不稳而闭环稳定的系统而言, 情形就不同了。

鉴于上述, 为了灵敏度的比较, 一般采用的补救办法是应用轨迹灵敏度函数进行比较, 或者, 定义另一种有别于上述  $J$  的其它的性能指标来完成上述比较任务。

## 二、用轨迹灵敏度函数进行灵敏度比较

由第八章所述可知, 对状态反馈情况而言, 开、闭环系统的参数诱发状态变化  $\Delta \mathbf{x}(t)$  间的关系式为

$$\Delta \mathbf{x}_R(s) = \tilde{S}_p(s) \Delta \mathbf{x}_B(s) \tag{9-25}$$

式中  $\tilde{S}_p(s)$ ——状态反馈轨迹比较灵敏度, 它等于

$$\tilde{S}_p(s) = [I + \Phi_s(s)BK]^{-1} \tag{9-26}$$



另外，第八章还论述了闭环系统比等效开环系统参数更稳健的时域判据，为

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta x_R^T(t) Z \Delta x_R(t) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \Delta x_S^T(t) Z \Delta x_S(t) dt \quad \forall t_0 < t_1 \leq t_e \quad (9-27)$$

与上式相应的频域判据为

$$\bar{S}_P^T(-j\omega) Z \bar{S}_P(j\omega) \leq Z, \quad \forall \omega \quad (9-28)$$

如把式(9-26)代入上式，使得

$$[I + \Phi_S(-j\omega)BK]^T Z [I + \Phi_S(j\omega)BK] \geq Z, \quad \forall \omega \quad (9-29)$$

由于在推导这些公式时并未谈及对最佳性的任何限制，所以，它们当然可以用于分析开、闭环最优系统的灵敏度比较问题。

现在的问题是最佳系统是否可能、而且怎样才能满足诸如式(9-29)这样一些式子所提出的条件。著名学者卡尔曼(Kalman)和安德森(Anderson)分别对单变量系统和多变量系统的情况进行了研究，得出的结论是，对二次型指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (9-30)$$

的最优化情况而言，为了使公式(9-28)适用于灵敏度比较，要把该式中的  $\bar{S}_P(j\omega)$  改为  $[I + MK\Phi_S(j\omega)BM^{-1}]$  才行，式中，矩阵  $M$  是式(9-30)中正定加权阵  $R$  的方根，即  $R = M^T M$ 。讲得更确切些，对二次型指标的最优系统情况，开、闭环灵敏度比较的判据是

$$[I + MK\Phi_S(-j\omega)BM^{-1}]^T [I + MK\Phi_S(j\omega)BM^{-1}] \geq I \quad \forall \omega \quad (9-31)$$

在这个判据的基础上，克莱因德勒(Kreindler)探讨了另一种判据，它的特点是保持式(9-28)中的  $\bar{S}_P$  不变，而仅改变该式中的加权阵  $Z$ ，以使式(9-28)的外观不变，克莱因德勒的结果以定理的形式引用如下。

**定理 9-2** 对状态方程为

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), \alpha, t], \quad x(t_0) = x^0$$

反馈控制律为

$$u^*(t) = -k[x(t), \alpha_0, t]$$

的最优系统，如果最优化的性能指标为

$$J = G[x(t_e), t_e] + \int_{t_0}^{t_e} L[x(t), u(t), t] dt$$

且雅可比阵  $\partial f/\partial x$  及  $\partial f/\partial u$  完全可控， $\partial k/\partial x$  的各行线性独立，则若在式(9-28)中取加权阵  $Z$  为

$$Z = \left( \frac{\partial k}{\partial x} \right)^T M \frac{\partial k}{\partial x} \quad (9-32)$$

式中， $M = M(t)$  表示一个给定且可微的正半定阵，便会在公式(9-27)的意义下保证闭环系统比额定等效的开环系统对参数更为稳健。

具体讲，上述定理是说，在保证定理所提假设条件的前提下，下式成立

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta x_R^T \left( \frac{\partial k}{\partial x} \right)^T M \frac{\partial k}{\partial x} \Delta x_R dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \Delta x_S^T \left( \frac{\partial k}{\partial x} \right)^T M \frac{\partial k}{\partial x} \Delta x_S dt, \quad \forall t_0 < t_1 \leq t_e \quad (9-33)$$

在最优线性状态反馈的情况下，克莱因德勒判据应作相应的改变，具体情况如下所述。设被控对象的数学模型为状态方程

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(t_0) = x^0 \quad (9-34)$$

式中， $A = A(t, \alpha)$ ， $B = B(t, \alpha)$ ，最优化的性能指标为

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_e) G x(t_e) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_e} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (9-35)$$

其中， $Q(t)$ 与 $R(t)$ 分别对 $t$ 和 $\alpha$ 连续可微，这两个加权阵的情况为： $R(t)$ 是正定阵； $G$ 和 $Q(t)$ 是正半定对称阵，此外，假设 $t_e$ 为固定的终止时间， $x(t_e)$ 为自由终端， $u$ 为逐段连续且无界的函数，则在些这条件下，最优控制律为

$$u(t) = -K(t)x(t) \quad (9-36)$$

式中

$$K = R^{-1} B^T P \quad (9-37)$$

且 $P$ 阵满足黎卡第矩阵方程

$$-\dot{P} = PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q \quad (9-38)$$

其中， $P(t_e) = G$ 。

在这种情况下，前述定理 9-2 中的 $M$ 阵为 $M = R$ ，故

$$Z = K^T R K \quad (9-39)$$

于是，定理 9-2 在这种线性系统的情况下，应改为下述定理。

**定理 9-3** 在 $K \Delta x \neq 0$ ， $\forall t_0 \leq t \leq t_1$  情况下，由公式(9-34)至(9-38)所定义的最优线性状态反馈系统，将在下式的意义上比额定等效的开环系统更具参数稳健性

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta x_R^T K^T R K \Delta x_R dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \Delta x_S^T K^T R K \Delta x_S dt, \quad \forall t_0 < t_1 \leq t_e \quad (9-40)$$

在这种情况下，相应的频域判据为

$$[I + \Phi_s(-j\omega)BK]^T K^T R K [I + \Phi_s(j\omega)BK] \geq K^T R K, \quad \forall \omega \quad (9-41)$$

由这个定理可见，用于状态灵敏度比较的 $L_2$ 范数中的加权阵 $Z$ 由最优问题的性能指标所确定。此时，不再可能在 $Z = I$ 时再推演得什么灵敏度比较的判据了。

由于时域判据式(9-40)结构的对称性，加上反馈信号 $u = Kx$ ，我们可以对它作这样的解释：对线性最优状态反馈系统来讲，在性能指标按式(9-32)选定后，对反馈信号 $u = -Kx$ 来讲，存在着一个用 $L_2$ 范数 $I_u$ 作为灵敏度比较的判据。然而，此时若用 $Z = R$ 作加权阵，则设计所得的闭环系统并不保证状态向量 $x$ 本身灵敏度的减小。还有一点值得注意的是：对输出来讲，为保证闭环系统比等效开环系统更具参数稳健性， $L_2$ 表达式似应为

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta u_R^T Z \Delta u_R dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \Delta u_S^T Z \Delta u_S dt$$

式中  $Z$ ——任选的加权阵。

由于  $y = Cx$ , 故上式成为

$$\int_{t_0}^{t_1} (C\Delta x_R)^T Z (C\Delta x_R) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} (C\Delta x_S)^T Z (C\Delta x_S) dt$$

也即 
$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta x_R^T C^T Z C \Delta x_R dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \Delta x_S^T C^T Z C \Delta x_S dt \quad (9-42)$$

因为 
$$Z = C^T Z C \triangleq K^T R K \quad (9-43)$$

故不可能证明此时输出变量  $y = Cx$  的灵敏度也减小了。正因此, 用这种  $L_2$  范数作为设计的判据并不能保证闭环系统的输出量比等效开环系统的输出量更加具有参数稳健性。从这个意义上讲, 推广定理 9-2 所用的设计方法受到了严重的限制。

**例 9-1** 试用定理 9-3 解释例 8-2 中在全频道内, 放大系数  $K = 2$  时有结果  $|S_P^g(j\omega)| \leq 1$ 。

**解** 该题情况下, 如用性能指标

$$J = \int_0^\infty \left( x_1^2 + \frac{1}{4} u^2 \right) dt$$

作为设计依据, 则  $K = 2$  时该系统为最优, 这意味着  $R = 1/4$ , 状态反馈阵  $K = [22]$ 。此外, 本题中,  $\tilde{S}_P = S_P^g$ , 于是, 由定理 9-3, 有

$$[S_P^g(-j\omega)] K^T R K S_P^g(j\omega) \leq K^T R K, \quad \forall \omega$$

因为  $K^T R K \neq 0$ , 故

$$|S_P^g(j\omega)|^2 \leq 1, \quad \forall \omega$$

因此  $|S_P^g(j\omega)| \leq 1$

关于最优控制系统灵敏度比较的进一步知识, 可参看文献[6]及[31]。

## 第二节 性能指标灵敏度的确定法

### 一、性能指标灵敏度的性质

性能指标灵敏度的概念是于 1963 年由达拉托 (Darato) 首次引入的, 后来被不少人用于研究最优开、闭环系统的比较。这些研究主要是针对被控对象的参数有极小扰动的情况进行的。随后, 性能指标灵敏度的概念逐渐被推广于参数有限变异及大偏差的情况, 并直接用于最优系统的设计。本节研究被控对象的参数有极小的扰动时, 闭环系统性能指标灵敏度的确定法。

我们先介绍性能指标灵敏度的一个基本性质。引起最优系统性能指标变化的原因有两个, 一个是被控对象数学模型的参数  $\alpha_P$  改变, 另一个则是控制规律发生变化, 这等效于反馈系统控制器的参数  $\alpha_C$  有变。在最优工作情况下, 由于性能指标  $J$  为极小值, 故有  $J_{\alpha_C} \triangleq$

$\frac{\partial J}{\partial \alpha_C} \Big|_{\alpha_C^*} = 0$ , 而此时,  $J_{\alpha_P} \triangleq \frac{\partial J}{\partial \alpha_P} \Big|_{\alpha_P^*} \neq 0$ 。因此, 在研究控制器参数  $\alpha_C$  变化对性能指标的影响时, 一阶灵敏度函数无能为力了, 此时必须应用高阶灵敏度函数或有限变异的方法才行。

在了解了性能指标灵敏度上述性质的基础上, 以下进行有关问题的具体讨论。

## 二、对对象参数变异的性能指标灵敏度的确定法

设被控对象的数学模型为

$$\dot{x}(t) = f[x(t), \alpha, t, u(t)], \quad x(t_0) = x^0 \quad (9-44)$$

式中,  $x$  为  $n$  维状态向量,  $u$  为  $p$  维控制向量,  $\alpha$  为  $r$  维参数向量。

于是, 最优问题在于求出一个控制向量  $u(t)$ , 以将系统从其初始状态  $x(t_0)$  引至终了状态  $x(t_f)$ , 并在此过程中导致形如

$$J = G[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(x, t, \alpha, u) dt \quad (9-45)$$

的性能指标为极小值。式中,  $G$  和  $L$  都是非负函数。注意, 对象参数向量  $\alpha$  显含在上述判据中。通常  $\alpha$  等于额定值  $\alpha_0$ , 但此处并不要求这一点。

令在最优化的时间区间  $t_0 \leq t \leq t_f$  中, 变量  $u(t)$ ,  $x(t_0)$  及  $x(t_f)$  受限于以下关系中

$$u(t) \in \Omega, \quad x(t_0) \in \Omega_1, \quad x(t_f) \in \Omega_2$$

其中,  $\Omega$  为  $p$  维的欧几里德子空间,  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  是  $n$  维欧几里德空间的子空间。我们将把讨论限制在  $\Omega_1$  为单点, 而  $\Omega_2$  是全空间 (即自由终端) 的情形。

集  $\Omega$  表示控制向量的一个幅值限制。例如, 若直流马达的激磁电流  $I$  最大不许超过  $I_{\max}$ , 则  $\Omega$  就是区间  $-|I_{\max}| \leq I \leq |I_{\max}|$ 。通过假设上述形式的性能指标, 可以考虑大量具有重要实际意义的最优化问题。例如, 最小能量控制时, 有

$$G = 0, \quad L = \frac{1}{2} u^T R u$$

而线性调节器问题时, 为

$$G = \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f), \quad L = \frac{1}{2} (u^T R u + x^T Q x)$$

以上各式中, 加权阵  $S$ 、 $Q$  为对称的正半定阵, 而  $R$  为对称正定阵。 $Q$ 、 $R$  和  $S$  也可以是时间  $t$  和参数向量  $\alpha$  的函数。

我们将不考虑时间最优控制问题, 因为此时  $G = 0$ ,  $L = 1$ , 所以, 在此情况下灵敏度的定义没有意义。

现在假定在额定参数值时, 最优控制  $u^*(t)$  已由诸如极大值原理或动态规划等常用方法求得。在开环的情形下, 此函数形如

$$u_0^*(t) = \theta(\alpha_0, t, x^0, t_0) \quad (9-46)$$

而在闭环控制情况下, 为

$$u_0^*(t) = k[x(t), \alpha_0, t] \quad (9-47)$$

如果现在对象的参数  $\alpha$  偏离了额定参数  $\alpha_0$ , 其差值为  $\Delta\alpha$ , 而控制律仍为式(9-46)及式(9-47), 则开环控制系统的向量微分方程为

$$\dot{x} = f[x, \alpha, t, \theta(\alpha_0, t, x^0, t_0)], \quad x(t_0) = x^0 \quad (9-48)$$

而闭环系统的向量微分方程则成为

$$\dot{x} = f[x, \alpha, t, k(x, \alpha_0, t)], \quad x(t_0) = x^0 \quad (9-49)$$

轨迹及控制函数可通过求解这些状态方程计算出来。把计算结果代入式(9-45), 就可获得性能指标的实际值。我们将这一性能指标实际值记为  $J(x^0, t_0, \alpha, \alpha_0)$ , 而把它的额定值记

为  $J(x^0, t_0, \alpha, \alpha_0)$ , 后者对应于  $\alpha = \alpha_0$ 。由此, 由对象参数变化引起的性能指标偏离其额定值的偏差可表达为

$$\Delta J = J(x^0, t_0, \alpha, \alpha_0) - J(x^0, t_0, \alpha_0, \alpha_0) \quad (9-50)$$

注意, 在此情况下,  $\Delta J$  的符号不必是正的, 由于对象参数的变化,  $J$  的实际值可以比额定参数值  $\alpha_0$  时的相应值  $J$  还要小。然而, 对于控制函数或控制律中参数的变化, 则由最优性的定义,  $J$  的值总是增大的。

对无限小的参数增量  $\Delta \alpha = d\alpha$ , 性能指标偏差可表示为

$$\Delta J = \sum_{j=1}^r \left. \frac{\partial J}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \Delta \alpha_j = \left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \Delta \alpha = J_{\alpha} \Delta \alpha \quad (9-51)$$

式中 
$$J_{\alpha} \triangleq [J_{\alpha_1} \ J_{\alpha_2} \ \dots \ J_{\alpha_r}] \Big|_{\alpha_0} = \left[ \left. \frac{\partial J}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_0} \ \left. \frac{\partial J}{\partial \alpha_2} \right|_{\alpha_0} \ \dots \ \left. \frac{\partial J}{\partial \alpha_r} \right|_{\alpha_0} \right] \quad (9-52)$$

就是第4章第3节中定义的性能指标灵敏度向量。于是, 按式(9-45)确定出性能指标  $J(x^0, t_0, \alpha, \alpha_0)$  的实际值后, 再求出在  $\alpha = \alpha_0$  处的偏导数值  $\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}$ , 就可以求出  $J_{\alpha}$  了。

达拉托曾提出了另一种确定  $J_{\alpha}$  的算法。把式(9-45)中的  $G$  及  $L$  用  $x$  表达之, 且在  $\alpha = \alpha_0$  处对  $\alpha$  求偏导数, 有

$$J_{\alpha} = \left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{\partial G}{\partial x(t_f)} \right|_{\alpha_0} \left. \frac{\partial x(t_f)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} + \int_{t_0}^{t_f} \left( \left. \frac{\partial L}{\partial x} \right|_{\alpha_0} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \left. \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \right) dt \quad (9-53)$$

式中,  $\partial G/\partial x$ ,  $\partial L/\partial x$  及  $\partial L/\partial \alpha$  定义为元素是  $\partial G/\partial x_i$ ,  $\partial L/\partial x_i$  及  $\partial L/\partial \alpha_i$  的行向量, 它们都在  $\alpha = \alpha_0$  处取值,  $(\partial x/\partial \alpha)_{\alpha_0}$  项是轨迹灵敏度阵  $A(t, \alpha_0)$ , 而  $\left. \frac{\partial x(t_f)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}$  是  $A(t, \alpha_0)$  在  $t = t_f$  处的值。从而, 式(9-53)可改写成

$$J_{\alpha} = \left. \frac{\partial G}{\partial x(t_f)} \right|_{\alpha_0} A(t_f, \alpha_0) + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left. \frac{\partial L}{\partial x} \right|_{\alpha_0} A(t, \alpha_0) + \left. \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \right] dt \quad (9-54)$$

$A$  可从轨迹灵敏度方程

$$\dot{A} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\alpha_0} A + \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}, \quad A(t_0, \alpha_0) = 0 \quad (9-55)$$

由第六章中讲述的各种方法求得。求得的解为

$$A(t, \alpha_0) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \left. \frac{\partial f[x^*(\tau), \alpha, \tau, u^*(\cdot)]}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} d\tau \quad (9-56)$$

此处,  $x^*$  是由式(9-48)或(9-49)确定的实际开环或闭环系统的轨迹,  $u^*$  为由式(9-46)或(9-47)确定的实际控制变量, 它由  $\alpha = \alpha_0$  时的最优控制律求得, 求时, 应用实际轨迹值  $x^*$ , 至于  $\Phi(t, \tau)$  则为满足

$$\Phi(\tau, \tau) = I \quad (9-57)$$

及 
$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = \left. \frac{\partial f[x^*, \alpha, t, u^*]}{\partial x^*} \right|_{\alpha_0} \Phi(t, \tau) \quad (9-58)$$

的状态转移阵。

通常，求解这些方程必须使用电子计算机。这种方法的原理将以下述简单例子来说明。

**例 9-2** 设系统可用纯量微分方程表达为

$$\dot{x}(t) = -a_0 x(t) + u(t) \quad x(0) = x^0 \quad (9-59)$$

式中， $a_0$  为对象的额定参数， $x$  是输出变量。我们的最优控制任务是按性能指标

$$J = \int_0^{\infty} [x^2(t) + u^2(t)] dt \quad (9-60)$$

确定  $u$ ，使得状态向量转移到状态空间的原点时  $J = J_{\min}$ 。

**解** 这个问题可由变分知识求得。额定参数时，最优控制函数可求得为

$$u_0^*(t) = x^0 (a_0 - \sqrt{1+a_0^2}) \exp(-\sqrt{1+a_0^2} t) \quad (9-61)$$

最优轨迹则为

$$x_0^*(t) = x^0 \exp(-\sqrt{1+a_0^2} t) \quad (9-62)$$

在闭环控制时，为产生最优控制变量，最优控制律为

$$u_0^*(t) = k_0 x(t), \quad k_0 = a_0 - \sqrt{1+a_0^2} \quad (9-63)$$

现若对象参数变为实际值  $a = a_0 + \Delta a$ ，于是状态方程成为

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t), \quad x(0) = x^0 \quad (9-64)$$

然而，假设控制变量及控制律仍保持不变。

开环控制时，控制函数由前述求  $u_0^*(t)$  的公式 (9-61) 求得。相应的状态轨迹可以由公式 (9-64) 求得。这时， $x(t)$  看成为该系统对上述  $u_0^*(t)$  的响应。由式 (9-64) 求得的结果为

$$x^*(t) = x^0 \exp(-at) - x^0 \frac{a_0 - \sqrt{1+a_0^2}}{a - \sqrt{1+a_0^2}} [\exp(-at) - \exp(-\sqrt{1+a_0^2} t)] \quad (9-65)$$

闭环系统时，状态轨迹可由实际对象方程式 (9-64) 求得，控制律为式 (9-63)，可求得

$$x_0^*(t) = x^0 \exp(a_0 - a - \sqrt{1+a_0^2} t) \quad (9-66)$$

由此式，并考虑式 (9-63)，可求得控制函数为

$$u_0^*(t) = (a_0 - \sqrt{1+a_0^2}) x_0^*(t) \quad (9-67)$$

将  $x_0^*$  及  $u_0^*(t)$  的表达式代入闭环系统的性能指标公式 (9-60)，可得

$$J = \frac{1+a_0^2 - a_0 \sqrt{1+a_0^2}}{a - a_0 + \sqrt{1+a_0^2}} x^2(0) \quad (9-68)$$

于是，性能指标灵敏度成为

$$J_a = \left. \frac{\partial J}{\partial a} \right|_{a_0} = \left( \frac{a_0}{\sqrt{1+a_0^2}} - 1 \right) x^2(0) \quad (9-69)$$

这个结果与赛其 (Sage) 对同一问题讨论的结果不一样。在文献 [32] 之第 12.2-5 节的方程 (12) 中，计算了相对于控制参数  $a$  的性能指标灵敏度，而不是计算对被控对象参数  $a$  的性能指标灵敏度。显然，基于前述关于性能指标灵敏度性质的叙述可知，当取  $a$  计算时，性能指标的灵敏度必为零。

以上所述方法的特点是先计算性能指标，然后求对参数的偏导数，另一种求法为首先在

$a = a_0$  处在积分号下求偏导数，然后再求积分。用这种方法可求得

$$\begin{aligned}
 J_a &= \frac{\partial}{\partial a} \left[ \int_0^{\infty} (1+k_0)^2 x_y^{*2}(t) dt \right]_{a_0} \\
 &= 2(1+k_0^2) \int_0^{\infty} x_y^*|_{a_0} \lambda dt
 \end{aligned} \tag{9-70}$$

式中， $\lambda = (\partial x_y^* / \partial a)_{a_0}$ ，它可由灵敏度方程求得。最后，可以算得

$$x_y^*|_{a_0} = x^0 \exp(-\sqrt{1+a_0^2} t) \tag{9-71}$$

及

$$\lambda = \left. \frac{\partial x_y^*}{\partial a} \right|_{a_0} = -x^0 t \exp(-\sqrt{1+a^2} t) \tag{9-72}$$

将这些表达式代入式(9-70)中，然后求积分，可求得与式(9-69)相同的结果。

由公式(9-69)可见，若  $a_0 > 0$ ，则  $J_a < 0$ ，且  $J_a$  的绝对值随着  $a_0$  的增加而减少。当进行定量探讨时，建议把性能指标相对于它的额定值进行规格化以利于研究。

在结束本章时，还拟说明几点，第一点，在文献[6]中，有关于用汉密顿-雅可比方程确定性能指标灵敏度的叙述及用性能指标灵敏度定量估计最优系统的描述，有兴趣的读者可参阅之。第二点是，德国学者雅可布(H. G. Jacob)在其论著<sup>[33]</sup>中提出了一种处理复杂最优系统的灵敏度的方法，这种方法的实质是对各种参数变化情况进行实际的计算。由于他采用的分析方法计算简便、实用且准确，故颇有实用价值。

### 参 考 文 献

- [1] Stewart, G.W., Introduction to Matrix Computation, Academic Press, 1973.
- [2] Johnston, R.L., Numerical Methods—A Software Approach, John Wiley & Sons, Inc., 1982.
- [3] Assem Deif, Sensitivity Analysis in Linear Systems, Springer-Verlag, 1986.
- [4] Mahmoud, M.S., Singh, M.G., Large Scale Systems Modelling, Pergamon Press, 1981.
- [5] Воронов, А.А., Введение в Динамику Сложных Управляемых Систем, Москва «НАУКА», 1985.
- [6] Frank, P.M., Introduction to System Sensitivity Theory, Academic Press, 1978.
- [7] Розенwasser, Е.Н., Юсупов, Р.М., Чувствительность Систем Управления, Москва «НАУКА», 1981.
- [8] Lathi, B.P., Signals, Systems, and Controls, Intext Educational Publishers, 1974.
- [9] Ackermann, J., Kwakernaak, H., et al, Uncertainty and Control, Springer-Verlag, 1985.
- [10] Frank, P.M., Entwurf parameterunempfindlicher und robuster Regelkreise im Zeitbereich-Definitionen, Verfahren und ein Vergleich, Automatisierungstechnik, (früher: Regelungstechnik-rt), 33 Jahrgang, pp.233~240, August 1985.
- [11] Robert Kalaba, Karl Springarn, Control, Identification, and Input Optimization, Plenum Press, 1982.
- [12] Apostol, T.M., Calculus, Vol. I, John Wiley & Sons., 1969.
- [13] Иванов, В.А., Медведев, В.С., Чмоладанов, Б.К., Ющенко, А.С., Математические Основы Теории Автоматического Регулирования, Том I, Москва «ВЫСШАЯ ШКОЛА», 1977.
- [14] Boyce, W. E., DiPrima, R.C., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley & Sons., Inc., 1969.
- [15] Miller, K.S., and Murray, F.J., The Mathematical Basis for the Error Analysis of Differential Analyzers, J. Math Phys (Cambridge, Mass.), 1953.
- [16] Miller, K.S., and Murray, F.J., Error Analysis for Differential Analyzers, WADC TR54-252, 1954.
- [17] Тихонов, А.Н., Васильева, А.Б., Свешников, А.Г., Дифференциальные Уравнения, Москва «НАУКА», 1985.
- [18] Cruz, Jr, J.B., Feedback Systems, McGraw-Hill Book Company, 1972.
- [19] Lee, C. K., Chen C.T., Sensitivity Comparisons of Various Analogue Computer Simulations, Int. J. Contr. 10, 227-233, 1969.
- [20] 罗键, 《奇异值和反馈》, 《西北工业大学科技资料》KZH 8526, 1985年.
- [21] Ashworth, M.J., Feedback Design of Systems with Significant Uncertainty, Research Studies Press, A Division of John Wiley & Sons Ltd, 1982.
- [22] Layton, J.M., Multivariable control theory, PETER PEREGRINUS LTD., 1976.
- [23] Cruz, J.B., Freudenberg, J.S., Looze, D.P., A Relationship Between Sensitivity and Stability of Multivariable Feedback Systems, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.66-74, February 1981.



- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.



- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.



- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.



- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.

- [24] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [25] 黄琳, 《系统与控制理论中的线性代数》, 科学出版社, 1984年.
- [26] Brogan, W.L., Modern Control Theory, PRENTICE HALL, INC., 1985.
- [27] Garbow et al., Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] Dongarra, J.J. et al, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [29] Doyle, J.C., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-26, pp.4-17, February, 1981.
- [30] Andrzej Wierzbicki, Models and Sensitivity of Control Systems, ELSEVIER, 1984.
- [31] Verde, C., and Frank, P.M., Sensitivity Reduction of the Linear Quadratic Optimal Regulator, Chapter 16 of the book of "Multivariable Control: New Concepts and Tools," Edited by Spyros G. Tzafestas, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [32] Sage, A.P. Optimum Systems, Prentice-Hall, 1968.
- [33] Heinrich G. Jacob, Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme, Springer-Verlag, 1982.
- [34] Hendrickson, R.G., A Survey of Sensitivity Analysis Methodology, U.S. Department of Commerce, Malcolm Baldrige, Secretary National Bureau of Standards, Ernest Ambler, Director, 1984.
- [35] Paul P. Wang and Masaki Togai. Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(I), 《模糊数学》, 第2期, 1982年9月.
- [36] Paul P. Wang and Masaki Togai, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems via Fuzzy Set Theory(II), 《模糊数学》, 第3期, 1982年9月.