

# 目 录

<b>第一章 概论</b> .....	( 1 )
§ 1-1 引言 .....	( 1 )
§ 1-2 地图投影中的主要矛盾 .....	( 2 )
§ 1-3 地图投影的变形 .....	( 3 )
§ 1-4 变形椭圆 .....	( 5 )
§ 1-5 地图投影中投影面的选择 .....	( 7 )
§ 1-6 地形图、地图对地图投影的要求 .....	( 8 )
<b>第二章 地球椭球体的要素和公式</b> .....	( 11 )
§ 2-1 地球的形状、大小及点位关系 .....	( 11 )
§ 2-2 子午圈曲率半径和卯酉圈曲率半径 .....	( 12 )
§ 2-3 地球的球体半径 .....	( 14 )
§ 2-4 子午线弧长和纬线弧长 .....	( 14 )
§ 2-5 地球椭球体表面上的梯形面积 .....	( 16 )
<b>第三章 地图投影的基本理论</b> .....	( 22 )
§ 3-1 地图投影的主要公式 .....	( 22 )
§ 3-2 等角条件、等积条件和等距离条件 .....	( 26 )
§ 3-3 以极坐标为依据的投影变形公式 .....	( 28 )
§ 3-4 球面坐标系和坐标变换的常用公式 .....	( 30 )
<b>第四章 方位投影</b> .....	( 35 )
§ 4-1 方位投影的概念 .....	( 35 )
§ 4-2 透视方位投影 .....	( 35 )
§ 4-3 非透视方位投影 .....	( 41 )
§ 4-4 双重方位投影 .....	( 45 )
§ 4-5 方位投影的变形分析及其应用 .....	( 48 )
<b>第五章 圆柱投影</b> .....	( 62 )
§ 5-1 正轴圆柱投影的基本公式 .....	( 62 )
§ 5-2 等角圆柱投影 .....	( 63 )
§ 5-3 等面积圆柱投影和等距离圆柱投影 .....	( 66 )
§ 5-4 斜轴与横轴圆柱投影 .....	( 67 )
§ 5-5 圆柱投影变形分析及其应用 .....	( 70 )
<b>第六章 高斯-克吕格投影</b> .....	( 78 )
§ 6-1 投影条件和公式 .....	( 78 )
§ 6-2 长度比公式 .....	( 82 )
§ 6-3 子午线收敛角公式 .....	( 84 )

§ 6-4	双标准经线等角横轴圆柱投影	( 86 )
<b>第七章</b>	<b>圆锥投影</b>	( 92 )
§ 7-1	圆锥投影的概念	( 92 )
§ 7-2	圆锥投影的一般公式	( 93 )
§ 7-3	等角圆锥投影	( 95 )
§ 7-4	等面积圆锥投影	( 100 )
§ 7-5	等距离圆锥投影	( 103 )
§ 7-6	斜轴和横轴圆锥投影	( 106 )
§ 7-7	圆锥投影的变形分析及其应用	( 107 )
<b>第八章</b>	<b>伪方位、伪圆柱和伪圆锥投影</b>	( 119 )
§ 8-1	伪投影的特点	( 119 )
§ 8-2	伪方位投影	( 119 )
§ 8-3	伪圆柱投影	( 123 )
§ 8-4	伪圆锥投影	( 132 )
<b>第九章</b>	<b>多圆锥投影</b>	( 135 )
§ 9-1	多圆锥投影的概念及其主要公式	( 135 )
§ 9-2	普通多圆锥投影	( 136 )
§ 9-3	改良多圆锥投影	( 139 )
§ 9-4	差分纬线多圆锥投影	( 142 )
<b>第十章</b>	<b>地图投影的变换</b>	( 150 )
§ 10-1	投影变换问题的提出	( 150 )
§ 10-2	投影变换的基本公式	( 150 )
§ 10-3	两种投影方法为已知的投影变换	( 151 )
§ 10-4	应用解析计算的迭代法进行投影变换	( 153 )
§ 10-5	计算机辅助制图情况下的投影变换	( 154 )
<b>第十一章</b>	<b>新投影的探求</b>	( 158 )
§ 11-1	地图投影的条件	( 158 )
§ 11-2	地图投影按内涵的变形特征分类	( 159 )
§ 11-3	投影中的经纬线形状	( 160 )
§ 11-4	新投影探求数例	( 161 )
<b>第十二章</b>	<b>地图投影的判别和选择</b>	( 168 )
§ 12-1	地图投影的判别	( 168 )
§ 12-2	确定地图投影系统	( 168 )
§ 12-3	确定投影变形性质	( 169 )
§ 12-4	确定投影形式	( 171 )
§ 12-5	地图投影的选择	( 172 )
§ 12-6	中外地图集投影选择的简介	( 174 )
<b>第十三章</b>	<b>投影计算自动化</b>	( 177 )
§ 13-1	投影计算改革的必要性	( 177 )
§ 13-2	地图投影常用符号及计算公式综合	( 178 )

§ 13-3 地图投影编程设计.....	( 183 )
§ 13-4 投影计算选题数例.....	( 184 )
附录.....	( 199 )
主要参考资料.....	( 206 )

# 第一章 概论

## §1-1 引言

地图是地球表面的自然与社会现象缩小的概括和表象,它在人类生活中的用途极为广泛,因而受到人们的普遍重视和关注。地图的种类繁多,但它的特性是显而易见的,即地图是地球表面上各种有效载体的叠加,其上展示的众多地理信息和内容是无声的语言,通过我们的识别,判读予以理解和贯通,它是传递和交换各种信息的理想工具,足以向人们揭示各种现象的本质、分布及其相关关系。地图具有广泛的社会性和实践性,其功能是综合的、多样化的,在当今科学高度发达的年代,地图本身所起的作用是难以估价的。更确切地说,现代地图是自然要素,社会、政治、经济要素以及数学要素的全面综合,用以解决涉及面极为广阔的全类专业的不同需求问题。

地学工作者研究的对象是地球,当然对地图是十分感兴趣的,因为地图的功能是传递地球表面上的三维信息,即平面位置和高程三个数值。这样既可以满足精确地直观定位的要求,也能了解各点位之间的相关联系。大部分读者已经熟悉的是大比例尺地形图,它采用地形测量或摄影测量的方法把地球表面的地形、地物按一定比例缩小后再用统一的图示符号表示在图纸平面上,这种地形测量成图的方法采用的是平行投影,也称铅垂投影。在测量学中还学习过高斯-克吕格投影,这是一种利用数学投影的方法借以建立地球表面和投影平面之间的点位对应函数关系。从这类投影的地图中,可以看出经线和纬线在全图幅中起着“基础”和“骨架”的作用,由于有了经纬线的正确位置才能求解图上的点位问题。

我们可以进一步了解所谓地图投影就是依据一定的数学法则,将不可展开的地表曲面运用特定的数学方法展示到平面上,最终在地表面点和平面点之间建立一一对应的关系。在实践中是采用平面直角坐标或极坐标表示的平面上的点位和用经度、纬度表示的地球表面上的点位,通过一定的数学关系式建立起对应的联系。

如用数学表达式概略地表示这种关系,即为:

$$\begin{aligned}x &= f_1(B, L) \\y &= f_2(B, L)\end{aligned}\tag{1-1}$$

这样的函数关系绝大多数都是采用数学式来表达的,比如最初是用几何映射的方法建立地图的数学基础,随着数学理论的发展和充实,所探索的新的领域又不断地注入其中,从而逐步发展和推动了地图投影的学科水平。综上所述,地图投影既是一种数学制图的过程,又是一种透视或非透视的转换,所以数学推演和图解解析均为地图投影或称数学制图的主要内容。

地图投影是地图制图过程中的一个重要组成部分,它和制图综合、图形设计、地图制作

和应用等关系十分密切，应看作一个严密的整体来考虑。特别是地图制图学从早期的定性处理逐步地过渡到用数学分析的方法进行定量处理的这一发展过程中，以数学制图方法为基础的地图投影学起了主要的推动作用。由此可见，以两个基本因素组成的转换过程，即地图投影和制图综合为地图制作共同提供了完整的结构和内容。

## § 1-2 地图投影中的主要矛盾

当研究并着手处理地球表面和地图平面上点位的一一对应关系时，首先面临的问题即球面和平面两者之间在质和量方面的不一致性和不协调性，它反映出的一个实质性问题就是地球椭球体面或地球球体表面是一种不能展开成平面的曲面，如何将此不可展曲面上的形象投影表象于平面之上，并需符合一定的精度及其它特殊的要求，这就是地图投影所必须首先解决的主要矛盾。

对于制作小范围、小面积的各类地图来说，这个矛盾并不突出，我们可以通过不同的途径来论证它的限值，例如以后可以通过变形值的计算予以解决。如果制图区域较大，甚至涉及到一个国家、一个洲、半球或全球时，这个矛盾愈发突出，我们就必须考虑在地球椭球体表面和投影平面即图纸平面之间如何过渡即转换的问题。要使一张平面的地图和一个立体的球面完全地或者说强制地统一起来是不可能的，主要的理由也就是由于地球表面是一个不可展的曲面。如不顾及这个因素，将地球表面上某一区域的地理位置描绘于图纸平面上就必然会产生各种各样的裂口、褶皱和移位，致使图面支离破碎面目全非，毫无使用价值。一幅理想、完善的地图应使制图区域不破裂，并保持图形轮廓的完整一致，对其边界邻区也应是延续的、对接无误的。地图投影所赋予的任务就是提出和解决球面如何过渡、转化到平面，并满足不同制图要求的问题和方法。

在地球表面上，我们是以规定间距的经差和纬差划分成许多经纬线网格，如是地球上每一部分都临界于一定的经纬网格之内，有它各自的地理位置。当在平面上建立了经纬网的表象后，即可将地球表面经纬网格内的各地理要素一一用图示符号转绘到平面上相应的坐标网格内，这样就在数学上制作了地图。为了使球面上的经纬线网格转绘于图纸平面上并能达到不破裂，无缺口，图形完整的要求，就必须按不同情况将此破裂的地方予以均匀的拉伸或在重叠的地方进行均匀的压缩，这仅仅是从直观上来理解如何处理球面过渡到平面之间的矛盾。理论上则以数学的手段对该地区的经纬线进行拉伸或压缩，以期获得一幅完整的符合实际要求的地图。实践中是将地球表面上的一组曲线坐标系运用数学解析的方法表现为平面上的曲线坐标系，常规的方法就是建立球面经纬网的平面表象。

即便经过理论上的数学解析处理，地球表面上每两条相邻的纬线间其经差相同的网格投影到地图平面上未必都具有相同的形状和大小，有时会产生这种或那种变化、甚至表现出明显的差异，这就是说在投影过程中图形发生了某种变形，最突出的是表现在形状和面积两个方面。为此，地图投影学的主要任务除了研究和解决球面如何过渡、转化到平面的问题，还需更进一步地分析、探索如何克服并解决问题中出现的新矛盾，即地图投影设计制作过程中始终存在的变形问题。变形是存在于每一个具体的投影中，就其主要的三种变形即角度、面积和长度变形来说，其性质与大小是多种多样的，在实际应用中需要加以分类，一般可分成

等角投影、任意投影和等面积投影，有关这些投影的变形特征将在下节中予以介绍。

### § 1-3 地图投影的变形

众所周知，矛盾始终存在并贯穿于事物发展的一切过程之中，旧的矛盾解决了，新的矛盾又会产生，直到事物发展的整个过程结束为止。在地图投影中，虽可利用投影的方法解决球面与平面之间的矛盾，但又出现了新的矛盾，即投影变形。通过分析研究，可以找出变形值的大小及其分布规律，以便诱导其向制图需要的有利方向发展。有一种常用的显示变形图形的图解方法是在地图投影的格网上绘制一种规则图形（如圆或等腰三角形、甚至人的头像）的变了形的表象，这种图形的变形易于显示出投影作为一个整体的变形性质，此法具有较为直观的效果，但为了取得实际的变形值需要逐点计算长度变形，并将计算结果用图表或表格予以表示，详见附图。

参阅图 1-1，我们选用的是我国1984年编制的世界地图的缩图为例，实地上属于同样大小的经纬线网格在投影平面上变成了形状和大小各不相同的图形。在实践中，由于各种投影的方法均具有其独自的特殊性，所以它们的变形是迥异的。为此，我们可以用一系列的几何图

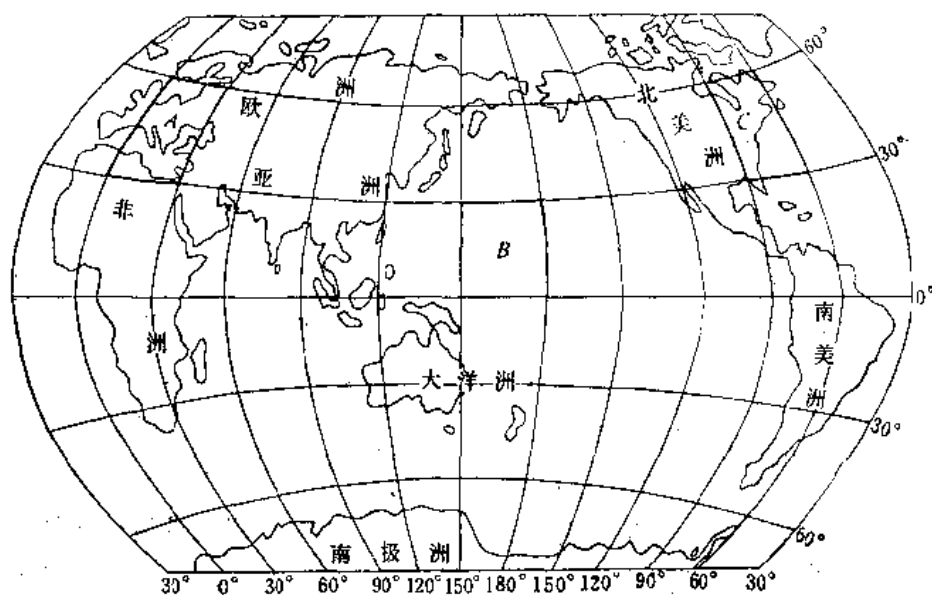


图1-1

形来直观地概括变形特征。

如果在地球仪上绘有一个微小的圆形，称谓微分圆，它在投影中的表象会是什么呢？由于不同的投影条件，这个微分圆的表象不一定仍保持为圆形，很可能是一个椭圆，我们称它为变形椭圆，实质上它是变形的产物。可以证明，变形椭圆的形状和大小能确切地反映出投影变形在质和量上的差别，同时还具有直观的明晰性等优点（证明见后）。

从图1-2中可以看出，在不同类型的投影中，其变形椭圆是不同的，但只要知道椭圆的长、短半径，椭圆的形状和大小即告确定，其投影性质也接着就能决定了。图1-2(1)为实地上半径为 $r$ 的微分圆，图1-2(2)、(3)仍显示为圆，其形状无变化、但 $r'$ 不等于 $r$ ，于是圆的大

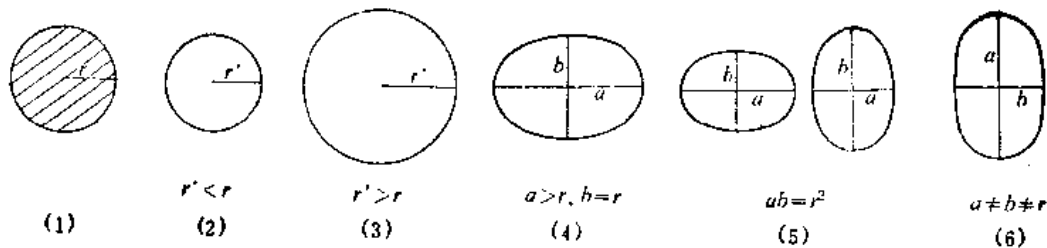


图1-2

小发生了变化,具有这类性质的投影称为正形投影或等角投影;图1-2(4)、(5)、(6)的形状均发生了变化,其中图1-2(4)中的长、短半径有一个与 $r$ 相等,此时应为等距离投影,但由于图1-2(5)符合于 $ab = r^2$ 的条件,即投影后的面积大小并无变化,故可称为等面积投影,而图1-2(6)的椭圆长短半径均不为 $r$ ,按其性质既不属于等角又不属于等积,故和图1-2(4)一样,也可称为任意投影。总之,变形椭圆能够直观地表达变形特征,对地图投影的分析和研究十分有用。

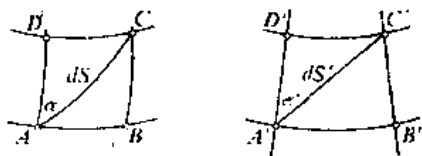


图1-3

综上所述表明地球表面上的长度、面积和角度经过投影后一般均会发生质的和量的变化,这些变化是在解决具体投影的问题时必须研究的,为此我们对变形的大小和分布规律需作进一步的阐述和说明。

### 1. 长度比和长度变形

长度比就是投影面上微分线段 $dS'$ 和椭球面上相应长度 $dS$ 之比值,见图1-3。以 $u$ 表示 $A$ 点沿 $\alpha$ 方向至 $C$ 点的长度比,即

$$u = \frac{dS'}{dS} \quad (1-2)$$

一般说来,长度比是随点的位置而变化,也和方向有关,但并非一定值。

长度变形就是 $(dS' - dS)$ 和 $dS$ 之比,用 $v$ 来表示,有

$$v = \frac{dS' - dS}{dS} = \frac{dS'}{dS} - 1 = u - 1 \quad (1-3)$$

由上式可得,长度变形就是长度比与1之差,如已知某点附近沿某一方向上的长度比,则其长度变形即可算出。从公式中得知长度比只有小于1或大于1的数,特殊情况即属于正常条件下等于1。长度变形有正、负值之分,变形为正时表明长度增长,变形为负则表明长度缩短。变形值有时也用百分比或千分比的比率来表示。

### 2. 面积比和面积变形

面积比就是投影面上一微分面积 $dF'$ 和椭球面上相应面积 $dF$ 之比值,以 $P$ 表示面积比,即

$$P = \frac{dF'}{dF} \quad (1-4)$$

面积比也就是随点位的不同而变化的。

面积变形就是 $(dF' - dF)$ 与 $dF$ 之比,用 $v_p$ 表示,有

$$v_F = \frac{dF' - dF}{dF} = \frac{dF'}{dF} - 1 = P - 1 \quad (1-5)$$

从式中可知，面积变形是面积比与1之差。若已知某点附近的面积比，也就知道该点附近的面积变形。上式表明面积比也无负数，只有小于1或大于1的数。面积变形则有正有负，变形为正表示面积增大，变形为负表明面积减小。

即使在同一投影中，位于不同点上的长度比和面积比的数值一般均非定值，它反映了投影中的长度和面积是在不断地变化。

长度变形和面积变形均属相对变形，仅表示数量上的相对变化。当达到某一程度时，量变可导致质变，从而引起形状上的变异，故对 $v_L$ 和 $v_F$ 赋以变形的名称。

### 3. 角度变形

投影面上任意两方向所夹之角 $\beta'$ 与椭球面上相应的两方向夹角 $\beta$ 之差称为角度变形，即 $\beta' - \beta$ 。在需要描述一点上的角度变形时，也可采用极值的含义，指出某点上可能会出现的最大角度变形。通常取投影前后两个对应角度之间最大变形值的半数即 $\frac{\omega}{2}$ 来表示， $\omega$ 称为最大角度变形。具体计算方法详见以后各章节。

## §1-4 变形椭圆

讨论变形椭圆的目的在于更好地说明地图投影的变形特性。变形椭圆意即在地球表面上过某点作一称为微分圆的无穷小圆，也称单位圆，投影后一般成为一个微分椭圆，在特殊情况下其形状仍为一个圆。利用这个微分椭圆能较恰当地、直观地显示变形的特征。

先证明微分圆投影后一般地成为微分椭圆的原因，详见图1-4(1)，在椭球面上设有半径为 $r$ 的微分圆，为便于研究，令此圆的两直径分别为通过圆心 $O$ 点的经纬线的微分线段，如忽略其曲面的影响，便可当作一个平面看待，所以在图1-4(2)中， $OX$ 和 $OY$ 表示通过圆心 $O$ 的

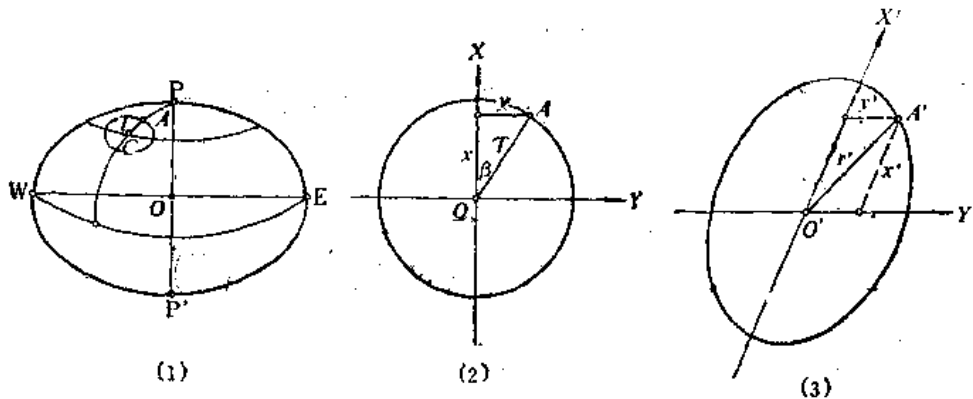


图1-4

一对成正交的直径， $A$ 为圆上一点。

另见图1-4(3)，微分圆上各元素投影到平面上相应坐标为 $O'$ 、 $O'X'$ 、 $O'Y'$ 和 $A'$ ，一般情况下 $O'X'$ 和 $O'Y'$ 并不呈正交，其交角设为 $\theta$ ，现设定 $O'X'$ 和 $O'Y'$ 为斜坐标轴系，按长度比的定义可写出：



$$x' = mx, \quad y' = ny \quad (1-6)$$

式中分别设 $m$ 和 $n$ 为沿经线和沿纬线上的长度比。对于微分圆的方程有，

$$x^2 + y^2 = r^2$$

若以 $x = \frac{x'}{m}$ 和 $y = \frac{y'}{n}$ 代入上式得，

$$\left(\frac{x'}{m}\right)^2 + \left(\frac{y'}{n}\right)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{x'}{mr}\right)^2 + \left(\frac{y'}{nr}\right)^2 = 1 \quad (1-7)$$

可见(1-7)式即为椭圆方程式，而 $mr$ 和 $nr$ 则为椭圆的两个半径，这就证明了微分圆投影到平面上一般地成为一个微分椭圆的原因。

斜坐标轴系在实用中较为不便，为此我们可以在椭球面上选取一对互相呈正交的直径作为微分圆的坐标轴，并将它视为主方向。由于主方向投影后既保持正交且为极值的特点，这样在对应的投影平面内便成为椭圆的长短半轴，令以 $u_1$ 和 $u_2$ 表示沿主方向上的长度比，(1-7)式的椭圆方程便可改写为，

$$\left(\frac{x'}{u_1 r}\right)^2 + \left(\frac{y'}{u_2 r}\right)^2 = 1 \quad (1-8)$$

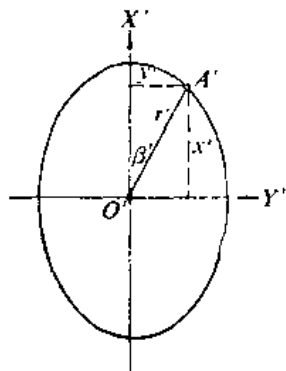


图1-5

如以 $a$ 、 $b$ 表示椭圆的共轭半径，则上式中 $a = u_1 r$ ， $b = u_2 r$ 。通常令微分圆的半径为1，即 $r = 1$ ，所以在椭圆中即有 $a = u_1$ 和 $b = u_2$ 。由此可得出如下结论：微分椭圆上长、短半轴等于 $O$ 点上主方向的长度比。也可认为一点上主方向的长度比(也称极值长度比)为定值时，微分圆的形状及大小即告确定。

现利用变形椭圆的性质来阐述一些投影中的变形问题。

先求微分圆上半径为 $OA$ 的长度比，它和主方向的夹角以 $\beta$ 表示，见图1-5。按变形公式有，

$$u_\beta = \frac{O'A'}{OA} = \frac{r'}{r}$$

$r'$ 为半径 $r$ 在平面上的投影， $r'$ 与 $O'X'$ 组成的方位角 $\beta'$ 为 $\beta$ 的投影，故

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

因为  $x' = ax, y' = by$

$$\therefore u_\beta = \frac{r'}{r} = \frac{\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}}{r} = \sqrt{a^2 \left(\frac{x}{r}\right)^2 + b^2 \left(\frac{y}{r}\right)^2}$$

又因  $\cos\beta = \frac{x}{r}$ ， $\sin\beta = \frac{y}{r}$

$$\therefore u_\beta = \sqrt{a^2 \cos^2 \beta + b^2 \sin^2 \beta} \quad (1-9)$$

此式即为微分圆上任一方向的长度比和变形椭圆两半轴(极值长度比)的关系式，显然 $u_\beta$ 是随 $\beta$ 而变化的，当 $\beta = 0^\circ$ ， $u_\beta = a$ ；又 $\beta = 90^\circ$ 时，则 $u_\beta = b$ ，由此证明它是长度比中的极大值和极小值。

有一特例，当投影中 $a = b$ ，也即 $u_\beta = a = b$ 时，表明一点上的长度比不随方向而变化，

此时椭圆表示为圆，圆内任何一对相互呈正交的直径都可视为主方向。通常我们是在投影的经纬线交点上绘出一定数值的变形椭圆以直观地显示投影变形的特征。当投影后经纬线不呈正交时，变形椭圆的长、短半轴并不一定与经纬线一致，因而要确定变形椭圆上某一点的位置还需考虑其中的方位角因素。

通常变形椭圆内的方位角 $\alpha'_0$ 为其长半轴和某一经线间的夹角，见图1-6，有椭圆方程

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

在直角三角形 $A'O'A'_0$ 中

$$x' = O'A'_0 = m \cos \alpha'_0$$

$$y' = A'O'A'_0 = m \sin \alpha'_0$$

将上列关系式代入椭圆方程有：

$$\frac{m^2 \cos^2 \alpha'_0}{a^2} + \frac{m^2 \sin^2 \alpha'_0}{b^2} = 1$$

$$\therefore \cos^2 \alpha'_0 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'_0} \quad \sin^2 \alpha'_0 = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha'_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'_0}$$

$$\therefore \operatorname{tg} \alpha'_0 = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - m^2}{m^2 - b^2}} \quad (1-10)$$

只要已知变形椭圆的长、短半轴以及方位角，便能描绘出过某点的变形椭圆。如前所述，若投影后经纬线呈正交，经纬线的方向就是主方向，此时 $a=m$ ，或 $b=m$ 。于是方位角 $\alpha'_0=0^\circ$ 或 $\alpha'_0=90^\circ$ ，意即变形椭圆的两半轴与经纬线重合。

如从理论上探索，我们可以采用法国数学家底索(Tissot)提出的指示量度方法也即变形椭圆来测定投影的面积变形和角度变形。底索指出的变形规律即投影后每一变形椭圆至少能保留一对互成正交的直径，可取为坐标轴。为简便计，这两个轴可设定为单位值。由于变形的存在，变形椭圆的形状及大小均会有所改变，当取变形椭圆上的 $a, b, \alpha$ 值和球面上相对应的值进行比较时，出现的差异即能表示出变形的类型和变形值，其中也体现了面积和角度变形的大小。总之，变形的方式和变形值在一个投影上是会到处改变的，最小的变形范围通常是在投影中心或沿标准线、圈附近的地方（指地球与投影面接触之处），重要的是必须周密地考虑投影中心和标准纬线的位置以及所选择投影的状态。

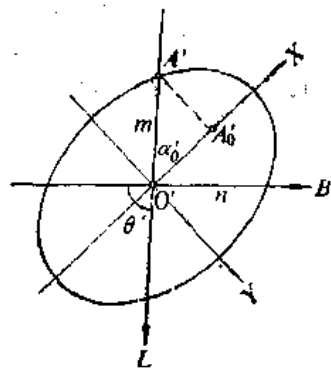


图1-6

## § 1-5 地图投影中投影面的选择

将地球投影到图纸平面上首先遇到的是地球尺寸的缩小，这样将会导致三维空间的破坏，通常采取两个过渡阶段，即首先将地球椭球体缩小到参考椭球体的大小，然后再将它投影到平面或地图上。

为了解决由曲面到平面的转化，同时顾及地球椭球面上的点、线、面投影到地图平面上必须是无撕裂和无重叠现象的平面，就要考虑采用什么样的投影面是合适的。

地图平面即投影面，它必须是平面或为可展的曲面所形成的平面。在地图投影中，一般

选用平面、圆柱面和圆锥面作为投影面。圆锥和圆柱表面虽然不是平面，但却是可展曲面，只要沿某一条母线展开即能形成扇形和矩形平面。如图1-7(1),(2)所示，其上可以显示地球表面一部分的投影图象。

采用圆锥面作为地图平面投影面的投影称为圆锥投影，从图1-7(1)上可以看出，经线投影后成为辐射直线，纬线投影后则为同心圆弧。实践中是根据一定的数学条件将经纬线表示到圆锥面上的，我们常见的中国全图（南海诸岛作插图）就是采用这种投影。

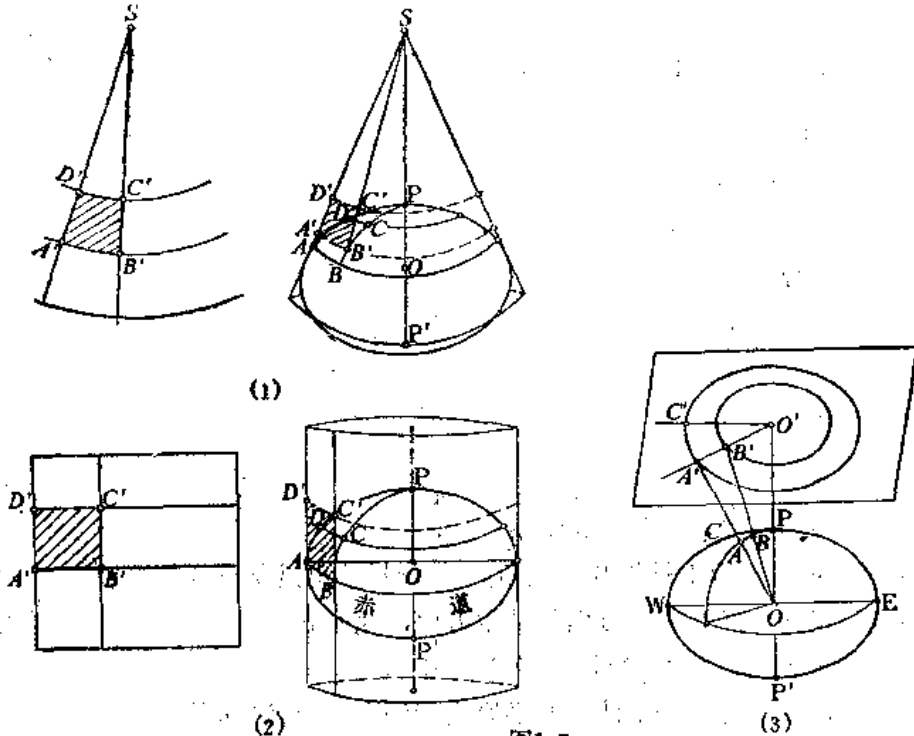


图1-7

所谓圆柱投影就是采用圆柱面作为地图平面的投影面。其实从几何观点来看，圆柱投影是圆锥投影的一种特例，当图1-7(1)中的圆锥顶点延伸到无穷远时，圆锥就形成了圆柱。在圆柱投影中，经线和纬线均投影成平行直线，且互相正交，见图1-7(2)。当圆锥面的顶角向两侧扩大至 $180^\circ$ 时，就成了平面，这种从地球表面过渡到平面的投影方式称为方位投影。我们在世界地图中常见的南北极区地图和东西半球地图就是此类投影。从图1-7(3)上可见正轴方位投影的纬线投影表象为同心圆，经线投影后成为交于一点的直线束。可理解为同心圆的半径。

根据以上情况的简单介绍，归纳起来可将地图投影的设计和制作过程分为：选择和确定投影类型，以便决定相应的投影常数；继而通过各种特定的数学关系式即投影公式计算事先设定的地面各点的投影直角坐标和变形值，最后绘制经纬线格网和各种变形的变化曲线图，以供分析和评价。

## §1-6 地形图、地图对地图投影的要求

在制图实践中经常接触到的图件有地形图和区域地图两类。前者是国家基本地图，后者

是指某一地区性（如国家、省市等）有关政治、经济及其它领域的地图。地形图有1:1万，1:2.5万直至1:100万等多种比例尺；区域地图则从几十万分之一至几千万分之一各种不同的比例尺。

地形图的精度不同于一般的地图，它对地图投影的要求是严格的，首先，应确保方向上的正确性，投影后应无角度变形，即形状保持相似；于是能满足图上内容与实地相应地物之间的相似关系。其次，各类地理要素和地物彼此间的相关位置应该基本正确，例如对距离来说，即便有误差也应控制在规范所制订的容许范围之内。如上所述，只有等角投影始能满足地形图的基本要求，因为等角投影无角度变形，图上方向是正确的，变形椭圆表现为圆，这充分说明在较小范围内图上的形状是与实地保持相似关系的。若投影区域的面积较大时，就难确保长度变形不超过容许的界限。当今世界上有些国家和我国均采用分带投影的方法进行分带分区投影，由于这种类型的投影范围预先受到了对限制长度变形的约束，所以其变形值是严格控制在限差之内的，从而保证了点与点之间的距离与投影后的数值之差不会超过容许界限。我国地形图采用的是等角投影，具体的说投影面为一横置的圆柱面，它与地球椭球体的某一经线相切，故称为等角横切圆柱投影，详细内容将在第六章中介绍。

多数国家选择了等角投影作为编制大、中比例尺地形图的数学基础，因为这类地图上长度比的变化甚微，且大圆几乎成为直线，其特点是方向、角度保持不变，所以在此类投影的地图上可进行精确的量算。特别是在方向和角度均为主要条件的专题地图制图中，等角投影是十分有效的，如运用显示方向符号的图件——气象图和表示航线方向的交通图等。

从投影性质方面来说，地图对地图投影的要求是不同的。如森林植被、土壤或矿产分布图等均要求具有等积性质的投影；至于军事、交通等地图要求具备等角投影的性质，以保持图上方向的正确性。又如球面投影具有一般的等角特性，即地球球体上任何圆投影后仍为圆，选择此类投影的地图可用来标绘雷达测距及其它类似的应用。其它如教学用图及区域地图等对投影性质并无特殊要求的情况下可采用（如等距离投影）这一类的任意投影。上述投影对变形大小的要求均达不到地形图那样高的精度，但在设计地图投影时应使变形尽量减小且分布均匀。一般制图区域中心范围内的变形均较小，边缘地区变形值增大，但要求其变形分布应是均匀一致的。

本书将在以下各章中分别介绍方位、圆柱和圆锥三大类投影。参阅图1-7(1)、(2)、(3)，方位投影的特点是投影中心处无变形、偏离中心愈远则变形愈大，以中心点为圆心在任一圆周界线上的变形均等同，故宜于编制圆形地区的地图。圆柱投影的特点是在一条与地球椭球体相切的切线或两条相割的割线上无变形，离此线愈远，变形愈大，此投影运用于沿赤道附近或南北方向地区延伸的地图。圆锥投影也有一条切线或两条割线，其上无变形，偏离此线愈远，其变形的绝对值愈大，等变形线平行于无变形线，故宜编制中纬度沿东西方向延伸或任意斜向地区的地图。

根据制作地图的具体任务和要求来选择地图投影的类型，一般是没有现成的方案、标准或规范可以遵循的，通常可以依据下列几个因素来考虑决定：

1. 制图区域的范围、形状和大小；
2. 制图区域所占的具体地理位置；
3. 所设计的地图对各类变形的特殊要求；
4. 地图的用途及其使用效果；
5. 地图所含的具体内容等。

从投影变形的多样性可以看到，对于一定内容和用途的地图，应该尽量考虑如何科学地使用它，这样始能正确发挥地图的作用。

## 思 考 题

1. 名词解释：主方向、长度比、面积比。
2. 为什么变形椭圆能直观地显示变形的特征？
3. 试证明微分圆投影后一般地成为微分椭圆的原因。
4. 地图投影的变形表现在哪几方面？
5. 地图平面的投影面有哪几种？投影后其经纬线表象有何区别？

## 第二章 地球椭球体的要素和公式

### § 2-1 地球的形状、大小及点位关系

地图投影是研究如何建立地图的数学基础，以便科学地将地球表面上的一些要素表示在地图平面上。我们可以根据一定的数学法则，在地图平面上建立与地球表面上的地理坐标系相对应的直角坐标或极坐标系，直观地说，也就是经纬线网络的转换问题。为此，对地球椭球体基本要素的了解是十分必要的，由于本节在测量学中多有叙述，故重复处不另赘述。

地球椭球体的形状和大小常用下列符号表示。参阅图2-1，长半径即赤道半径为 $a$ ，短半径即极轴半径为 $b$ ，扁率 $\alpha$ ，第一偏心率和第二偏心率分别为 $e$ 和 $e'$ ，这些数据归纳起来统称为地球椭球体的基本元素，它的数学表达式为：

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{a-b}{a} \\ e^2 &= \frac{a^2-b^2}{a^2} \\ e'^2 &= \frac{a^2-b^2}{b^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

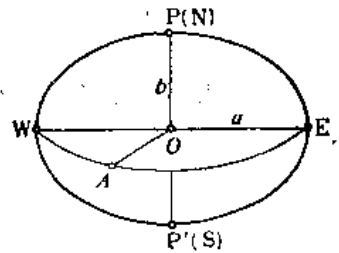


图2-1

从上式可知，欲确定地球椭球体的大小，只需知道其中两个元素就够了，但其中必须有一个是长度元素，即 $a$ 或 $b$ 。

第一和第二偏心率之间还存在着下列关系：

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= \frac{e'^2}{1+e'^2} \\ e'^2 &= \frac{e^2}{1-e^2} \\ e^2 &\approx 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

读者可自行证明。

扁率和偏心率都足以反映地球椭球体的扁平程度也即形状，在推导部份地图投影公式的过程中是经常引用这些元素的。

旋转椭球体的表面与大地水准面虽然不尽重合，但其差异甚微，近百年来，世界上不少大地测量学者提出的地球形状的参数多达20余组。我国从1953年起采用苏联克拉索夫斯基椭球体，其参数为：

$$a = 6\,378\,245\text{m}$$

$$b = 6\,356\,863\text{m}$$

$$\alpha = \frac{1}{298.3}$$

在推算椭球体参数的过程中，由于所采用成果的数量和质量的不同、分布地区的不同以及计算处理的方法不同等导致其结果相异，精度也不尽相同。一般地说，推算的年代愈近，精度愈高。下面是国际大地测量和地球物理联合会(I.U.G.G)\*在最近几届年会上推荐的椭球体元素：

第14届 1967  $a = 6\,378\,160\text{m}$ 、 $\alpha = 1:298.247$

第16届 1975  $a = 6\,378\,140\text{m}$ 、 $\alpha = 1:298.257$

第17届 1979  $a = 6\,378\,137\text{m}$ 、 $\alpha = 1:298.257$

第18届 1983  $a = 6\,378\,136\text{m}$ 、 $\alpha = 1:298.257$

以上的参数值均引用了近代人造卫星大地测量的数据计算出来的，考虑到我国幅员辽阔，地势复杂，需有适应于本国情况的参考椭球体。目前我国采用的是由I.U.G.G推荐的1975年公布的椭球体参数。

地球椭球面上任一点的位置，可由该点的经度和纬度表示，用天文经度 $\lambda$ 和天文纬度 $\varphi$ 表示地面某点位置的坐标称为天文地理坐标。另一种是以大地地理坐标来表示点位的，和天文坐标相仿，它是用大地经度 $L$ 和大地纬度 $B$ 来表示的。这两种地理坐标系的差别仅在于前者是以地球的垂线为依据，而后者是以参考椭球体的法线为准则的。我们在地图投影中所用的经纬度常为大地经度和纬度，如果视地球椭球体为球体时，也可采用天文经度和纬度表示之。

地表面相邻两点经度之差称为经差，某两点纬度之差称为纬差。若两点位于同一经线上，其经差为 $0^\circ$ ，又如同在一纬线上，其纬差为 $0^\circ$ 。

## §2-2 子午圈曲率半径和卯酉圈曲率半径

在图2-2中，通过椭球体表面上某点 $A$ 作法线 $AL$ ，过法线的平面所作的截面称为法截面

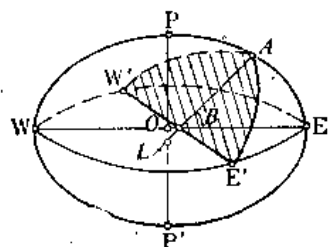


图2-2

面，法截面和地面的交线形成的弧段称为法截弧。实际上通过法线 $AL$ 可以作出无穷多个法截面，为说明椭球体上某点的曲率大小，一般仅研究两个相互垂直的法截面上某段法截弧的曲率，我们将互为正交的法截面称为主法截面。

对椭球体来说，含有极值意义的两个主法截面是过子午圈和卯酉圈的法截面，它是无穷多个法截面中的两个特例。在图中，一个通过 $A$ 点的法线 $AL$ 且又同时通过椭球体极轴 $PP'$ 的法截面( $AEP'WP$ )称为子午圈法截面。子午圈曲率半径 $M$ 是 $A$ 点上所有截弧的曲率半径中的最小值。在大地测量学中，经导出的子午圈曲率半径 $M$ 的公式为：

• International Union of Geodesy and Geophysics.

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{\frac{3}{2}}} \quad (2-3)$$

只要选定地球椭球体的参数，则 $a$ 和 $e$ 均为定值，因此 $M$ 仅随 $B$ 而变化。

第二个过 $A$ 点的主法截面是垂直于子午圈的截面，称为卯酉圈法截面。如图所示，过 $A$ 点的法线 $AL$ 且垂直于子午圈截面的法截面 $W'AE'$ 即为卯酉圈截面。因为它位于正东正西方向上，天文学中也将它称为东西圈。卯酉圈曲率半径以 $N$ 表示，其公式为：

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 B)^{\frac{1}{2}}} \quad (2-4)$$

同样可见 $N$ 也随纬度 $B$ 而变化，只要分析(2-4)式，可知它的曲率半径是 $A$ 点上所有截弧的曲率半径中的最大值。参阅(2-3)和(2-4)两式

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } B=0^\circ \text{ 时,} \\ M_0 = a(1-e^2) \\ N_0 = a \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } B=90^\circ \text{ 时,} \\ M_{90} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \\ N_{90} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

由此可见，子午圈曲率半径与卯酉圈曲率半径除在两极处相等外，在同纬度某点上的 $N$ 均大于 $M$ ， $M$ 和 $N$ 随纬度 $B$ 变化的情况见表2-1。

表 2-1

纬度 ( $B$ )	子午圈曲率半径 $M$ (m)	卯酉圈曲率半径 $N$ (m)
0°	6 335 553	6 378 245
30°	6 351 488	6 383 588
40°	6 383 561	6 394 315
90°	6 399 699	6 399 699

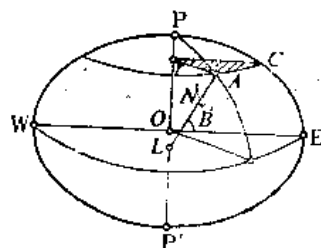


图2-3

从表中可知 $M$ 和 $N$ 的值在赤道上为最小，它们随着纬度 $B$ 的增高而逐渐增大，到达极点处为最大，在两极处其值相等。

我们也可取两个主法截面中的 $M$ 和 $N$ 的几何中数为平均曲率半径，以 $R$ 表示，其值为：

$$R = \sqrt{MN} = \frac{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{1-e^2\sin^2 B} \quad (2-7)$$

应用平均曲率半径的特点是它能使球面与椭球面在制图区域中心点附近的曲率更为接近。

在图2-3中，已知纬圈 $AC$ 的纬度为 $B$ ，纬圈中只有赤道圈为大圆，其余均为小圆，设其半径为 $r$ ，可按下列式计算：

$$r = AL\cos B = N\cos B = \frac{a \cos B}{(1-e^2\sin^2 B)^{\frac{1}{2}}} \quad (2-8)$$

显见，纬圈半径 $r$ 也是纬度 $B$ 的函数，仅随纬度 $B$ 而变化，在赤道上，因为 $B=0^\circ$ ，所以 $r=N=a$ ，随着 $B$ 的增高， $r$ 逐渐减小，当 $B=90^\circ$ 时， $r=0$ 。

上面 $M$ 、 $N$ 、 $R$ 和 $r$ 值均可在《制图用表》中查阅，使用时可按纬度为引数查取，纬差值为 $30'$ 。



本书中对以上各公式均编有 BASIC 程序，并将它作为子程序编入总体程序之中，使用时可随时调出打印显示。

## § 2-3 地球的球体半径

在实际的地图编制工作中，为了适应某种投影方法的特殊要求，可将地球椭球体视作球体，从而使许多投影公式的推演简化，计算过程缩减，如第四章中介绍的方位投影即为一例。

由于用圆球体替代了地球椭球体，地球半径的数值便起了变化，通常采用下列三种不同的球体半径：

### 1. 平均球体半径 $R_A$

我们采用地球椭球三轴半径的算术平均值作为球体半径，即

$$R_A = \frac{a+b+c}{3} \quad (2-9)$$

若将克拉索夫斯基椭球体元素代入，便可算得  $R_A = 6\,371\,118\text{m}$ 。

### 2. 等面积球体半径 $R_f$

以保持球体表面面积等同于地球椭球体面积为前提的方法来确定球体半径。

已知球面面积为  $4\pi R_f^2$ ；当取  $l_2 - l_1 = 180^\circ$ ， $B_1 = 0$ ， $B_2 = \frac{\pi}{2}$  时，为半球面的区间，再乘以

2 即得椭球体的面积： $2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e} \ln \frac{1+e}{1-e}$ 。按题设：

$$\begin{aligned} 4\pi R_f^2 &= 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e} \ln \frac{1+e}{1-e} \\ \therefore R_f &= \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4e} \ln \frac{1+e}{1-e}} \end{aligned} \quad (2-10)$$

现采用克氏元素计算，得出  $R_f = 6\,371\,116\text{m}$ 。

### 3. 等体积球体半径 $R_v$

以保持球体的体积等同于地球椭球体的体积为前提。已知球体体积为  $\frac{4}{3}\pi R_v^3$ ，旋转椭球体的体积为  $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ ，故有：

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi R_v^3 &= \frac{4}{3}\pi a^2 b \\ \therefore R_v &= \sqrt[3]{a^2 b} \end{aligned} \quad (2-11)$$

用克氏元素代入，得出  $R_v = 6\,371\,110\text{m}$ 。

## § 2-4 子午线弧长和纬线弧长

参阅图 2-4，在子午线上取点  $A$ ，其纬度为  $B$ 。再取与  $A$  点无限接近的一点  $A'$ ，其纬度

为  $B + dB$ ,  $AA'$  弧的曲率半径以  $M$  表示之, 因为  $AA'$  为子午线上的微分弧段, 可近似地把它看作以  $M$  为半径的圆弧, 所以这段子午线弧长  $AA' = dS_M$  的公式为:

$$dS_M = MdB = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}} dB \quad (2-12)$$

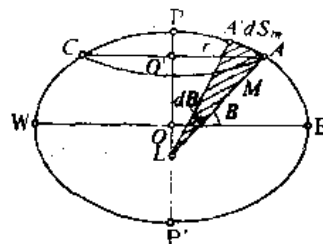


图2-4

欲求  $A, K$  两点之间的子午线弧长  $S_M$  时, 需求  $B_A$  和  $B_K$  区间的积分, 即

$$S_M = \int_{B_A}^{B_K} MdB = \int_{B_A}^{B_K} \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}} dB \quad (2-13)$$

为便于积分, 将被积函数按二项式级数展开, 得:

$$(1-e^2\sin^2 B)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2 B + \frac{15}{8}e^4\sin^4 B + \frac{105}{48}e^6\sin^6 B + \dots$$

上式仍不易积分, 可将  $\sin B$  的指数化成倍角函数, 即:

$$\sin^2 B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2B$$

$$\sin^4 B = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2B + \frac{1}{8}\cos 4B$$

$$\sin^6 B = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2B + \frac{3}{16}\cos 4B - \frac{1}{32}\cos 6B$$

将此关系式代入上式并进行整理可写成:

$$(1-e^2\sin^2 B)^{-3/2} = A^* - B^*\cos 2B + C^*\cos 4B - D^*\cos 6B$$

$$S_M = \int_{B_A}^{B_K} MdB = a(1-e^2) \int_{B_A}^{B_K} (A^* - B^*\cos 2B + C^*\cos 4B - D^*\cos 6B) dB$$

经积分后可得出求子午线弧长的一般公式:

$$S_M = a(1-e^2) \left\{ \frac{A^*}{\rho^{\circ}} (B_K - B_A) - \frac{1}{2} B^* (\sin 2B_K - \sin 2B_A) + \frac{1}{4} C^* (\sin 4B_K - \sin 4B_A) - \frac{1}{6} D^* (\sin 6B_K - \sin 6B_A) \right\} \quad (2-14)$$

上式中,  $\rho^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi}$ ,  $A^*, B^*, C^*$  和  $D^*$  均为乘系数, 其值为:  $A^* = 1.005\ 051\ 773\ 9$ ;

$B^* = 0.005\ 062\ 377\ 6$ ;  $C^* = 0.000\ 010\ 624\ 5$ ;  $D^* = 0.000\ 000\ 020\ 8$

由于  $D^*$  值较小, 在实际计算中可略去。当  $B_A = 0^{\circ}$ ,  $B_K = B$  时, 则可算得由赤道至纬度  $B$  之间的子午线弧长公式为:

$$S_M = a(1-e^2) \left\{ \frac{A^*}{\rho^{\circ}} B - \frac{B^*}{2} \sin 2B + \frac{C^*}{4} \sin 4B - \dots \right\} \quad (2-15)$$

该式在地图投影计算中是广为应用的。现若采用克拉索夫斯基椭球体元素, 便可得出如下计算子午线弧长的实用公式:

$$S_M = 6\ 367\ 558.496B - 16\ 036.480\sin 2B + 16.828\sin 4B - \dots \quad (2-16)$$

上式只取前三项, 对规定的计算精度为  $0.1m$  时已足够了。《投影计算用表》中的子午线弧长即按上式计算编制而成。

纬线弧长也称平行圈弧长可应用求圆周弧长的公式解出, 见图2-5(1)和(2)。

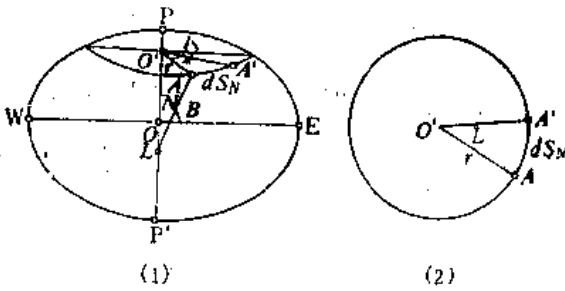


图2-5

$$\begin{aligned} AA' = S_N = rl = N \cos B \cdot l \\ = \frac{N \cos B \cdot l^2}{\rho''} \end{aligned} \quad (2-17)$$

式中  $l$  为经差。

在《制图用表》中分别载有经纬差为  $30'$  的纬线弧长和子午线弧长, 以供查取。

从上两式中经分析可得出如下结论: 即同纬差的子午线弧长由赤道向两极逐渐增加, 例如纬差  $1^\circ$  的子午线弧长在赤道处为  $110\,576\text{m}$ , 而在两极为  $111\,695\text{m}$ 。至于同经差的纬线弧长则由赤道向两极缩短, 例如经差  $1^\circ$  的纬线弧长为  $111\,321\text{m}$ , 在纬度  $45^\circ$  处缩短为  $78\,848\text{m}$ , 至两极时则为零。

## § 2-5 地球椭球体表面上的梯形面积

在地球椭球体上以两条相邻子午线和纬圈为界的表面构成了梯形的面积。如图2-6所示, 在椭球体表面上设有两条无穷接近的子午圈  $PDAP'$  和  $PCBP'$ , 其经差为  $dl$ ; 此外还有两条无穷接近的纬圈  $D'DCC'$  和  $A'ABB'$ , 其纬差为  $dB$ ; 从而构成了一个微形梯形  $ABCD$ 。梯形的四周边长实为子午圈和纬圈的弧长, 故

$$\left. \begin{aligned} AD = BC = M \cdot dB \\ AB \cong CD = rd l = N \cos B dl \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

这个微分梯形面积  $ABCD$  便可写成:

$$dF = MN \cos B dB dl \quad (2-19)$$

$$F = \int_{L_1}^{L_2} \int_{B_1}^{B_2} MN \cos B dB dl$$

$$= a^2(1-e^2) \int_{L_1}^{L_2} \int_B^B \frac{\cos B dB}{(1-e^2 \sin^2 B)^2} dl$$

取积分并归并整理后得

$$\begin{aligned} F = K_0 \left( K_1 \sin \frac{\Delta B}{2} \cos B_M - K_2 \sin \frac{3\Delta B}{2} \cos 3B_M \right. \\ \left. + K_3 \sin \frac{5\Delta B}{2} \cos 5B_M - \dots \right) \end{aligned} \quad (2-20)$$

式中:  $\Delta B = B_2 - B_1$ ,  $B_M = \frac{B_1 + B_2}{2}$

各乘系数为:  $K_0 = 2a^2(1-e^2) \frac{(L_2 - L_1)^\circ}{\rho^\circ}$

$$K_1 = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \dots$$

$$K_2 = \frac{1}{6}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \dots$$

$$K_3 = \frac{3}{80}e^4 + \dots$$

在地图投影的计算中常用到经差为一个弧度，纬差自赤道到纬度为 $B$ 的纬线之间所构成的椭球体表面上的梯形面积，此时， $\frac{(L_2 - L_1)^\circ}{\rho^\circ} = 1$ 弧度； $B_1 = 0, B_2 = B$ 。

《地图投影计算用表》中的梯形面积即按此式计算。该表还载有纬差 $20'$ 和经差 $30'$ 的 $1:100000$ 图幅的实地面积和纬差 $4^\circ$ ，经差 $6^\circ$ 的百万分之一地形图图幅的实地面积。本章对梯形面积的公式也编制了计算程序。于此同时，为了手算的需要，在本书附录中编有查阅 $M$ 、 $N$ 、 $r$ 、 $\lg r$ 、 $S_M$ 、 $S_N$ 、 $\lg U$ 和 $F$ 等参数的计算用表，供读者使用。

## 思 考 题

### 1. 名词解释：

第一偏心率和第二偏心率，法截面，主法截面和法截弧，子午圈曲率半径和卯酉圈曲率半径，平行圈。

2. 子午圈曲率半径和卯酉圈曲率半径随着纬度的不同有何变化？

3. 有几种地球的球体半径？其区别何在？

4. 试绘图说明解算子午线弧长和纬线弧长的必要数值是什么？

5. 如何求得地球椭球体表面上的梯形面积？

## 计 算 题 (一)

利用制图用表以纬度为引数查出下列数值：

一、查出子午圈曲率半径 $M$ ，卯酉圈曲率半径 $N$ 和平行圈曲率半径 $r$

纬度 ( $B$ )	M (m)	N (m)	r (m)
0°			
30°			
45°			
60°			
90°			
23°40'			

二、查表并计算自赤道到纬线为 $B$ 间的子午线弧长 $S_M$ 和平行圈（纬线）弧长 $S_N$

纬度 (B)	$S_M(m)$	经差30'的纬线弧长 $S_N(m)$	经差间隔( $\Delta l$ )	所求纬线弧长 $S_N(m)$
0°			2°	
30°			2°	
45°			2°	
60°			4°	
23°40'			6°30'	

### 三、查表并计算下列球面梯形面积

1.

纬 差	经 差	梯形面积 (km) <sup>2</sup>
0°~4°	6°	
40°~44°	6°	
84°~88°	6°	
32°~34°	3°	

2. 纬差20'和经差30'的梯形图幅面积

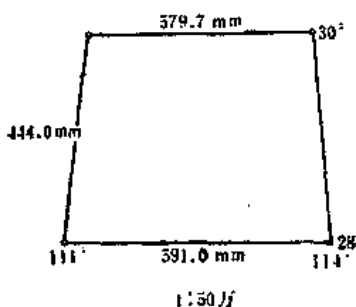
纬 度 (B)	梯形面积 (km) <sup>2</sup>
36°00'~36°20'	
44°40'~45°00'	
77°00'~77°20'	

## 计 算 题 (二)

题目：在地图上量算长度比和面积比

目的：了解投影后各种变形的大小和分布

方法：在地图上直接量算的长度比是沿经、纬线的长度比  $m$  和  $n$ ，理论上是微分弧长的投影长度  $dS'$  和实长  $dS$  之比；实际上可量取图廓四角点沿经、纬线上的长度和该线段的实地长度（查表可得）之比求得。在地图上量算面积比是用量测工具量取在地图上选定的几块经纬网的面积与实地面积（查表可得）之比。



计算数据：

1. 图幅名：长沙市

2. 比例尺：1:50万

3. 经纬度间隔： $\Delta B = 2^\circ$ ； $\Delta L = 3^\circ$

4. 略图(如上图)；

5. 计算表格：

	子午线弧长 (km)	纬线弧长 (km)		图幅范围	$B: 28^\circ - 30^\circ \Delta L = 3^\circ$ (km) <sup>2</sup>
	$B: 28^\circ - 30^\circ$	$B = 28^\circ, \Delta L = 3^\circ$	$B = 30^\circ, \Delta L = 3^\circ$		
$dS'$				$dF'$	
$dS$				$dF$	
$u = \frac{dS'}{dS}$				$P = \frac{dF'}{dF}$	
$v_s = u - 1$				$v_p = P - 1$	

## 6. 变形分析:

根据所算得的 $m$ 、 $n$ 和 $P$ , 初步判断此图属于何种性质的投影, 并说明理由。

## 编程示例

### 一、源程序

```

10:REM "M,N,R,r,S
    m,Sn,T"
11:X$="ALL":GOTO18
12:"A"REM"M,N,R,r"
13:X$="M":GOTO 18
14:"B"REM"Sm,Sn"
15:X$="Sm":GOTO 18
16:"C"REM"T"
17:X$="T"
18:M$="#####":
    EE=0.5:GOSUB 5
    0:IF X$="T"
        GOTO "T"
20:INPUT "B=", B:
    LPRINT: LPRINT
    USING, "B=", B:
    B=DEG B
22:"M" F= $\sqrt{(1-E \cdot \sin B \wedge 2)}$ :M=A*(1-E)/
    F $\wedge$ 3:N=A/F:R= $\sqrt{(M \cdot N)}$ :RB=A * COS
    B/F
24:IF Y$<>" "
    RETURN
25:IF X$="Sm" GOTO28
26:LPRINT USING M
    $, " M=", M+EE:
    LPRINT " N=",
    N+EE:LPRINT "R=",
    R+EE:
    LPRINT " r=",
    RB+EE:IF X$="M"
    GOTO 20
28:"Sm" GOSUB 54:
    LPRINT USING,
    "L1=", LW:
    LPRINT "L2=", L
    E:GOSUB 58
30:AC=1.005051773
    9:BC=0.0050623
    7764:CC=0.0000
    10624:DC=0.000
    00062081
32:SM=A*(1-E)*(AC
    *B/PD-BC/2 * SIN
    (2*B)+CC/4 * SIN
    (4*B)-DC/6 * SIN
    (6*B):SN=N *
    COS B * DL/PD
34:IF Y$<>" "
    RETURN
35:LPRINT USING M
    $, " Sm=", SM+E
    E:LPRINT " Sn
    =", SN+EE:IF X$
    ="Sm" GOTO 20
36:"T" GOSUB 52:
    LPRINT USING ,
    "B1=", BS, TAB 8,
    "L1=", LW:
    LPRINT "B2=", B
    N, TAB 8, "L2=",
    LE:GOSUB 56
38:BM=(BN+BS)/2:A
    D=1+E/2+3 * E $\wedge$ 2/
    8+5 * E $\wedge$ 3/16:BD=
    E/6+3 * E $\wedge$ 2/16+3
    * E $\wedge$ 3/16
40:CD=3 * E $\wedge$ 2/80+E $\wedge$ 
    3/16:DD=E $\wedge$ 3/11

```

```

2:K=2*A^2*(1-E)
*DL/PD
42:T1=AD*SIN(DB/
2)*COS(BM-BD)*
SIN(3/2*DB)*
COS(3*BM)+CD*
SIN(5/2*DB)*
COS(5*BM)
44:T2=DD*SIN(7/2
*DB)*COS(7*BM):
T=K*(T1-T2)
45:IF Y$<>"
RETURN
46:LPRINT USING
"#####.##";
"T="; T/1E6+0.005:
IF X$="T"
LPRINT: GOTO "T"

```

```

" T "
47:GOTO 20
48:END
50:A=6378245:D=63
56863:E=(A^2-D
^2)/A^2:PD=180/pi
51:RETURN
52:INPUT"Bs="; BS,"Bn="; BN
54:INPUT"Lw="; LW,
"Le="; LE
55:RETURN
56:BS=DEG BS;BN=
DEG BN;DB=BN-BS
58:LW=DEG LW;LE=
DEG LE;DL=LE-LW
59:RETURN
STATUS 1

```

1190

## 二、程序功能

1. 计算: M、N、r、R 起动方法 DEF A;
2. 计算: S<sub>M</sub>、S<sub>N</sub> 起动方法 DEF B;
3. 计算: F 起动方法 DEF T;
4. 同时计算: M、N、r、R、S<sub>M</sub>、S<sub>N</sub>、F 起动方法 RUN

## 三、主要标识符

存储器名	X\$				A	D	E	PD	B	M	N	R	RB	B <sub>1</sub> (BS)	B <sub>2</sub> (BN)	
变量名	"ALL"、"M"、"Sm"、"T"				a	b	e <sup>2</sup>	p	纬度	M	N	R	r	南纬	北纬	
存储器名	DB	BM	T	AD	BD	CD	DD	L <sub>1</sub> (LW)	L <sub>2</sub> (LE)	SM	SN	DL	AC	BC	CC	DC
变量名	纬差	平均纬度	F	乘系数 K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	西经	东经	S <sub>M</sub>	S <sub>N</sub>	经差	乘系数 A*	B*	C*	D*

## 四、实例

1. 起动: DEF A      显示: B =      输入: B

输出: B、M、N、r、R

2. 起动: DEF B      显示 { B =

L<sub>w</sub> =

输入: B、L<sub>w</sub>、L<sub>E</sub>

L<sub>E</sub> =

输出: B、L<sub>1</sub>、L<sub>2</sub>、S<sub>M</sub>、S<sub>N</sub>

B<sub>S</sub> =

3. 起动: DEF T      显示 { B =

L<sub>w</sub> =

输入: B<sub>S</sub>、L<sub>w</sub>、L<sub>E</sub>

L<sub>E</sub> =

输出: B<sub>1</sub>、B<sub>2</sub>、L<sub>1</sub>、L<sub>2</sub>、T(F)

4. 启动: RUN

显示: B =

输入: B

输出: B, M, N, R, r

L<sub>w</sub> =

输入: L<sub>w</sub>, L<sub>E</sub>

L<sub>E</sub> =

输出: L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, S<sub>M</sub>, S<sub>N</sub>

B<sub>S</sub> =

B<sub>N</sub> =

L<sub>w</sub> =

L<sub>E</sub> =

输入: B<sub>S</sub>, B<sub>N</sub>, L<sub>w</sub>, L<sub>E</sub>

输出: B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, T(F)

B = 0

M = 6335553

N = 6378245

R = 6356863

r = 6378245

B = 40

L<sub>1</sub> = 86

L<sub>2</sub> = 87

S<sub>m</sub> = 4429607

S<sub>n</sub> = 85395

B = 30

M = 6351488

N = 6383588

R = 6367518

r = 5528350

B<sub>1</sub> = 12 L<sub>1</sub> = 110

B<sub>2</sub> = 16 L<sub>2</sub> = 116

T = 286820.21

B = 60

M = 6383561

N = 6394315

R = 6388936

r = 3197158

B<sub>1</sub> = 41.2 L<sub>1</sub> = 117

B<sub>2</sub> = 41.4 L<sub>2</sub> = 117.3

T = 1545.61

B = 90

M = 6399699

N = 6398699

R = 6399699

r = 0

B = 30

M = 6351488

N = 6383588

R = 6367518

r = 5528350

L<sub>1</sub> = 110.3

L<sub>2</sub> = 111

S<sub>m</sub> = 3320172

S<sub>n</sub> = 48244

B = 30

L<sub>1</sub> = 110.3

L<sub>2</sub> = 111

S<sub>m</sub> = 3320172

S<sub>n</sub> = 48244

B<sub>1</sub> = 12 L<sub>1</sub> = 110

B<sub>2</sub> = 16 L<sub>2</sub> = 116

T = 286820.21



## 第三章 地图投影的基本理论

### § 3-1 地图投影的主要公式

在大地测量中，所谓地图投影就是将椭球面上的元素按照一定的数学规则归算到平面上。

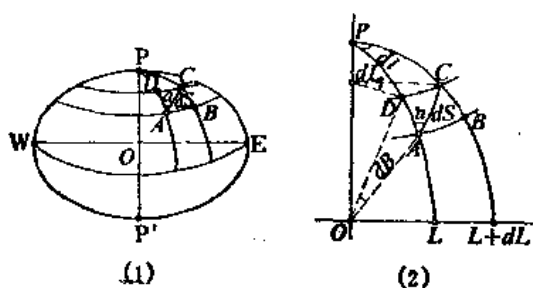


图3-1

椭球面元素包括地面点的大地坐标，大地线的方向和长度以及大地方位角，其中点的坐标是至关重要的，因为点的坐标一经确定，两点间大地线的方向和距离即告确定。本章将探讨椭球面上点的大地坐标 $(B, L)$ 和投影平面上点的直角坐标 $(x, y)$ 间的对应关系。

地图投影基本公式的推导其目的在于建立由曲面到平面的投影表象，为此首先要建立地球椭球面上各元素诸如长度、面积、角度和它们在投影平面上的对应关系式。

参阅图3-1(1)和3-1(2)，在地球椭球体面上， $ABCD$ 为由相邻两条经纬线微分线段组成的微分梯形。其间的经差为 $dl$ ，纬差为 $dB$ 。图中 $AC$ 为微分梯形的对角线，以 $dS$ 表示；由 $AP$ 起始顺时针方向转至 $AC$ 的角度称为方位角 $\alpha$ 。由第二章可知，沿经线上的微分线段 $AD = M \cdot dB$ ，沿纬线的微分线段 $AB = r \cdot dl = N \cos B \cdot dl$ 。对角线 $AC$ 可由下式表示，

$$dS^2 = M^2 dB^2 + r^2 dl^2 \tag{3-1}$$

在投影平面上， $dS$ 的投影为 $dS'$ ，按平面曲线定理，可知

$$dS'^2 = dx^2 + dy^2 \tag{3-2}$$

为求 $dx$ 和 $dy$ ，可参考地图投影的函数表达式为： $x = f_1(B, l)$ ， $y = f_2(B, l)$

如对上式进行全微分，得

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial l} dl \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial B} dB + \frac{\partial y}{\partial l} dl \end{aligned} \right\} \tag{3-3}$$

将(3-3)式平方后代入(3-2)，有

$$\begin{aligned} dS'^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial l} dl \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial B} dB + \frac{\partial y}{\partial l} dl \right)^2 \\ &= \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial B} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial B} \right)^2 \right] dB^2 + 2 \left( \frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} \right) dB \cdot dl \end{aligned}$$

$$+ \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial l} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial l} \right)^2 \right] dl^2 \quad (3-4)$$

为使公式简化, 可将上式中各偏导数的组合代以如下记号:

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial B} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial B} \right)^2 \quad (3-5)$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} \quad (3-6)$$

$$G = \left( \frac{\partial x}{\partial l} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial l} \right)^2 \quad (3-7)$$

我们称 $E$ 、 $F$ 、 $G$ 为一阶基本量, 或称高斯系数。将上述关系式代入(3-4)式, 便有

$$dS'^2 = EdB^2 + 2FdBdl + Gdl^2 \quad (3-8)$$

若先后取 $d\lambda = 0^\circ$ 和 $d\varphi = 0^\circ$ , 便可获得投影平面上经、纬线微分线段的表达式为:

$$\left. \begin{aligned} A'D' = dS'_N &= \sqrt{E}dB \\ A'B' = dS'_E &= \sqrt{G}dl \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

利用(3-1)和(3-8)式, 可以写出长度比的公式, 已知 $u = \frac{dS'}{dS}$ , 所以

$$u^2 = \left( \frac{dS'}{dS} \right)^2 = \frac{EdB^2 + 2FdBdl + Gdl^2}{M^2dB^2 + r^2dl^2}$$

若分子分母同乘以 $dB^2$ , 得

$$u^2 = \frac{E + 2F \frac{dl}{dB} + G \left( \frac{dl}{dB} \right)^2}{M^2 \left[ 1 + \frac{r^2}{M^2} \left( \frac{dl}{dB} \right)^2 \right]} \quad (3-10)$$

如图(3-2)所示, 对角线 $A'C'$ 的方位角为 $\alpha$ , 则有

$$\operatorname{tga} = \frac{D'C'}{A'D'} = \frac{r}{M} \cdot \frac{dl}{dB}$$

$$\therefore \frac{dl}{dB} = \frac{M}{r} \operatorname{tga}$$

将上式代入(3-10)后得出:

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{E + 2F \left( \frac{M}{r} \right) \operatorname{tga} + G \left( \frac{M}{r} \operatorname{tga} \right)^2}{M^2 \left( 1 + \frac{r^2}{M^2} \cdot \frac{M^2}{r^2} \operatorname{tg}^2 \alpha \right)} \\ &= \frac{\frac{E}{M^2} + \frac{2F}{Mr} \operatorname{tga} + \frac{G}{r^2} \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ &= \frac{E}{M^2} \cos^2 \alpha + \frac{F}{Mr} \sin 2\alpha + \frac{G}{r^2} \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (3-11)$$

上式为求一点附近任意方向上长度比的公式。但在实际计算中一般只求经纬线方向(即主方向)上的长度比, 有下述两种情况, 当 $\alpha = 0^\circ$ 时, 可视为经线方向上的长度比为:

$$u^2 = m^2 = \frac{E}{M^2}, \quad \therefore m = \frac{\sqrt{E}}{M} \quad (3-12)$$

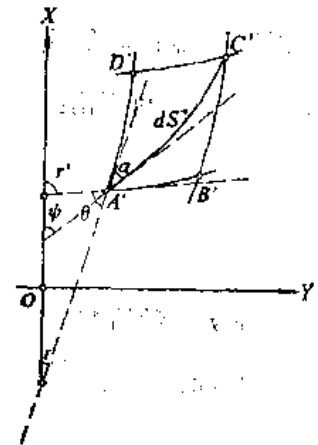


图3-2

如令  $\alpha = 90^\circ$ ，即为纬线方向上的长度比，此时

$$u^2 = n^2 = \frac{G}{r^2}, \therefore n = \frac{\sqrt{G}}{r} \quad (3-13)$$

下面再研究面积比的公式，已知  $P = \frac{dF'}{dF}$ ，如设椭球体表面上微分圆的面积为  $\pi \cdot 1^2$ （即为单位圆），而在投影平面上相应的变形椭圆面积为  $\pi ab$ ，由此面积比的公式可写为：

$$P = \frac{\pi ab}{\pi \cdot 1^2} = ab \quad (3-14)$$

根据解析几何中阿波隆尼尔定理，有

$$P = ab = mn \sin \theta \quad (3-15)$$

式中  $\theta$  为经、纬线投影后的夹角。该式即为计算任一投影的面积比公式。

在计算角度变形公式时，考虑到其间的角度是各不相同的，一般只需研究其中具有代表性的两种情况，即经纬线交角投影后的变形和过一点的某两个方向线间所产生的最大角度变形，现分别叙述如下：

仍参阅图3-2， $\angle D' A' B'$  为经纬线交角在平面上的投影，其角值为  $\theta$ ，经纬线交角应为  $90^\circ$ ，投影后的变形值可以用  $e = \theta - 90^\circ$  表示之。过  $A'$  分别作经线和纬线的切线，延长后和  $X$  轴的夹角分别以  $\gamma$  和  $\gamma'$  表示，此时  $\theta = \gamma' - \gamma$ 。如欲求出经纬线交角的变形值  $e$ ，需依次求解  $\gamma'$ ， $\gamma$  和  $\theta$  值。

再过  $A'$  点作对角线  $A' C'$  的切线，它与  $X$  轴的夹角设为  $\psi$ ，由数学分析可知  $\text{tg} \psi = \frac{dy}{dx}$ ，根据(3-3)式，可得出：

$$\text{tg} \psi = \frac{\frac{\partial y}{\partial B} dB + \frac{\partial y}{\partial l} dl}{\frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial l} dl} \quad (3-16)$$

有下列两种情况，当  $dl = 0^\circ$  时，过  $A'$  点的  $A' C'$  切线和  $A' D'$  的切线重合， $\psi$  角即变为  $\gamma$  角，所以  $\text{tg} \psi = \text{tg} \gamma = \frac{\partial y}{\partial B} / \frac{\partial x}{\partial B}$ 。又当  $dB = 0^\circ$  时，过  $A'$  点的  $A' C'$  切线就和  $A' B'$  的切线重合， $\psi$  角便变为  $\gamma'$  角，故有  $\text{tg} \psi = \frac{\partial y}{\partial l} / \frac{\partial x}{\partial l}$ 。由于  $\theta = \gamma' - \gamma$ ，所以  $\text{tg}(\gamma' - \gamma) = \frac{\text{tg} \gamma' - \text{tg} \gamma}{1 + \text{tg} \gamma \text{tg} \gamma'}$ ，分别将前述关系式代入上式，得：

$$\begin{aligned} \text{tg} \theta = \text{tg}(\gamma' - \gamma) &= \frac{\frac{\partial y}{\partial l} / \frac{\partial x}{\partial l} - \frac{\partial y}{\partial B} / \frac{\partial x}{\partial B}}{1 + \frac{\partial y}{\partial l} / \frac{\partial x}{\partial l} \cdot \frac{\partial y}{\partial B} / \frac{\partial x}{\partial B}} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial l} / \frac{\partial x}{\partial l} - \frac{\partial y}{\partial B} / \frac{\partial x}{\partial B}\right) \cdot \left(1 - \frac{\partial y}{\partial l} / \frac{\partial x}{\partial l} \cdot \frac{\partial y}{\partial B} / \frac{\partial x}{\partial B}\right)}{\left(1 + \frac{\partial y}{\partial l} / \frac{\partial x}{\partial l} \cdot \frac{\partial y}{\partial B} / \frac{\partial x}{\partial B}\right) \cdot \left(1 - \frac{\partial y}{\partial l} / \frac{\partial x}{\partial l} \cdot \frac{\partial y}{\partial B} / \frac{\partial x}{\partial B}\right)} \\ &= \frac{\frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial y}{\partial B} \cdot \frac{\partial x}{\partial l}}{\frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial l}} \quad (3-17) \end{aligned}$$

为使上式简化, 现补充另一个一阶基本量  $H$ , 令

$$H = \frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial y}{\partial B} \cdot \frac{\partial x}{\partial l} \quad (3-18)$$

将此关系式代入(3-17)式后便得:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{H}{F} \quad (3-19)$$

已知  $\varepsilon = \theta - 90^\circ$ , 则  $\operatorname{tge} = \operatorname{tg}(\theta - 90^\circ) = -\operatorname{ctg} \theta$

$$\therefore \operatorname{tge} = -\frac{F}{H} \quad (3-20)$$

上式即为经纬线交角投影后的角度变形公式, 从(3-20)式中可知, 如需保持经纬线投影后呈正交, 应使  $\varepsilon = 0^\circ$ , 所以  $F = 0$  的条件必须成立。

最后参阅 3-3(1)和(2)图, 利用变形椭圆的理论来分析投影后的最大角度变形公式。如

图所示, 在此圆上任一方向线  $OA$  与主方向的夹角设为  $\alpha$ , 而在变形椭圆上对应方向线  $O'A'$  与投影平面上主方向线的夹角为  $\beta$ , 设  $A$  点和  $A'$  点的坐标分别为  $(\xi, \eta)$  和  $(x, y)$ , 由图形可写出:

$$\operatorname{tga} = \frac{\eta}{\xi}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x}$$

根据长度比的定义可知  $a = \frac{x}{\xi}, \quad b = \frac{y}{\eta}$

$$\text{即} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \cdot \frac{\eta}{\xi} \quad (3-21)$$

现欲求  $\alpha - \beta$  之差, 可由下列步骤算出:

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - \frac{b}{a} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a-b}{a} \operatorname{tg} \alpha$$

$$\therefore \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{a-b}{a} \operatorname{tg} \alpha \quad (3-22)$$

同理可得出  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha + \frac{b}{a} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a+b}{a} \operatorname{tg} \alpha$

$$\therefore \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{a+b}{a} \operatorname{tg} \alpha \quad (3-23)$$

将(3-22)式和(3-23)式相除得:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \sin(\alpha + \beta) \quad (3-24)$$

在上式中, 只有当  $\alpha + \beta = 90^\circ$  时,  $(\alpha - \beta)$  为最大值, 即

$$\sin(\alpha - \beta)_{\max} = \frac{a-b}{a+b} \quad (3-25)$$

以上讨论的是某角度的一个方向  $OA$  与主方向间所发生的方向上的变化, 现设该角的另一方向为  $OB$ , 其投影后与主方向间所发生的方向变化也可以用(3-24)式的形式表示。

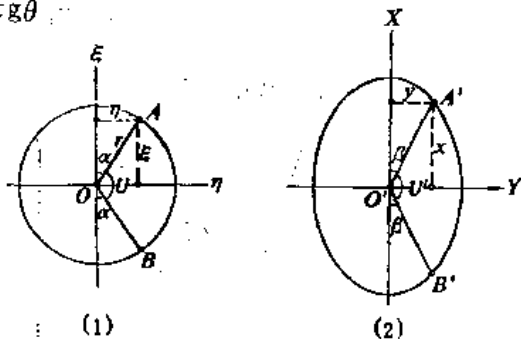


图3-3

现设  $\angle AOB = U, \angle A'O'B' = U'$ , 如图可知

$$\Delta U = U' - U = (180^\circ - 2\beta) - (180^\circ - 2\alpha) = 2(\alpha - \beta)$$

因前述  $OA, OB$  在此系最大方向变形, 故上式移项后得

$$(\alpha - \beta)_{\max} = \frac{\Delta U}{2}$$

现令  $\Delta U = \omega$ , 所以  $(\alpha - \beta)_{\max} = \frac{\omega}{2}$ 。将此式代入 (3-25) 式后, 即可得出在投影平面上

具有最大角度变形的一般公式为:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\omega}{2} &= \frac{a-b}{a+b} \\ \text{也可写成: } \cos \frac{\omega}{2} &= \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \\ \text{或} \quad \text{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{a-b}{2\sqrt{ab}} \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

由于微分椭圆上长、短半轴分别等于  $O$  点上主方向的长度比, 所以  $\sin \frac{\omega}{2} = \frac{m-n}{m+n}$ , 此式在今后各类投影的最大角度变形的计算中广为应用。

### § 3-2 等角条件、等积条件和等距离条件

在实践中欲使某种投影保持角度无变形, 面积无变形或在某特定方向上 (如主方向) 长度无变形, 可给予特定的条件加以制约, 具体的运用是通过数学公式来表达的。

#### 1. 等角条件

为了投影后保持等角, 必须使角度变形为零, 即  $\omega = 0$ , 由  $\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}$  式得知

$$a = b \quad (3-27)$$

此即构成等角投影的必要条件。

在等角投影中, 变形椭圆不为椭圆而是一个圆, 但此圆的大小与地面上原来圆的大小不一定相等, 只要投影前后相对应的微分面积保持图形相似即可; 所以有时也称它为 正形投影。

由前所述, 应考虑等角投影时的  $\theta = 90^\circ$ , 即经纬线投影后呈正交, 此时经纬线的方向就是主方向,  $a, b$  相当于  $m, n$ , 所以 (3-27) 式可写成  $m = n$ 。

现将等角条件用偏导数来表示, 由 (3-12), (3-13) 及 (3-19) 式代入上述条件可得出:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sqrt{E}}{M}, \quad n = \frac{\sqrt{G}}{r} \\ \therefore \frac{\sqrt{E}}{M} &= \frac{\sqrt{G}}{r} \end{aligned} \quad (3-28)$$

$$\text{又因 } \operatorname{tg} \theta = \frac{H}{F}, \therefore F = \frac{H}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{H}{\operatorname{tg} 90^\circ} = 0 \quad (3-29)$$

再将(3-5), (3-6)及(3-7)式代入上两式中便得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{M^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial B} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial B} \right)^2 \right] &= \frac{1}{r^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial l} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial l} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-30)$$

(3-30)式中共含有四个偏导数, 即  $\frac{\partial x}{\partial B}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial B}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial l}$  和  $\frac{\partial y}{\partial l}$ , 在实用中是将偏导数中的两个与另外两个偏导数建立一定的关系, 便可构成等角条件, 现从(3-30)式中的第二式求出  $\frac{\partial y}{\partial l}$  并代入第一式经演算化简后得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial l} &= -\frac{r}{M} \cdot \frac{\partial y}{\partial B} \\ \frac{\partial y}{\partial l} &= +\frac{r}{M} \cdot \frac{\partial x}{\partial B} \end{aligned} \right\} \quad (3-31)$$

此式在高等数学中称为保角变换条件, 通称柯西-黎曼条件。式中的正负号是由于(3-30)式中的偏导数开方后出现正、负两值, 此外由于  $H$  的几何意义实为面积元素, 应恒为正, 故由  $H = \frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l} \cdot \frac{\partial y}{\partial B}$  从而可知,  $\frac{\partial x}{\partial l}$  和  $\frac{\partial y}{\partial l}$  必须取相反的符号。

## 2. 等积条件

等积投影的条件就是要使面积比  $P=1$ 。已知  $P = ab = 1$

也可写成

$$P = mn \sin \theta = mn \cos \theta = 1 \quad (3-32)$$

此为等积条件的一种形式。在投影后经纬线呈正交的投影中, 等积条件的特殊形式是

$$mn = 1 \quad (3-33)$$

若仿等角条件之方式写成  $x, y$  和  $B, l$  之表达式, 可根据  $P = \frac{dF'}{dF}$  的关系式来求证。已知椭球面上微分梯形的面积  $dF = Mr dB dl$ , 投影平面上相应的微分梯形面积  $dF' = dS_M' \cdot dS_N' \cdot \sin \theta$ , 式中  $dS_M'$  和  $dS_N'$  已从(3-9)式中解得, 现求  $\sin \theta$  的函数值。

参阅图3-4, 便可写出:

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi_m &= \frac{dy}{dS_M'} = \frac{\frac{\partial y}{\partial B} \cdot dB}{\sqrt{E} dB} = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial y}{\partial B} \\ \cos \psi_m &= \frac{dx}{dS_M'} = \frac{\frac{\partial x}{\partial B} \cdot dB}{\sqrt{E} dB} = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial x}{\partial B} \end{aligned} \right\} \quad (3-34)$$

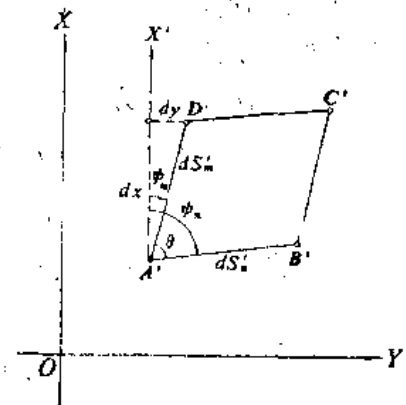


图3-4

$$\left. \begin{aligned} \sin\psi_n &= \frac{dy}{ds_n} = \frac{\frac{\partial y}{\partial l} \cdot dl}{\sqrt{G} dl} = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} \\ \cos\psi_n &= \frac{dx}{ds_n} = \frac{\frac{\partial x}{\partial l} \cdot dl}{\sqrt{G} dl} = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial x}{\partial l} \end{aligned} \right\}$$

式中的 $\psi_n$ 和 $\psi_s$ 分别为经纬线投影后的方向角。由图可知 $\theta' = \psi_s - \psi_n$ ，从而导出：

$$\left. \begin{aligned} \sin\theta &= \sin(\psi_s - \psi_n) = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l} \cdot \frac{\partial y}{\partial B} \right) = \frac{H}{\sqrt{EG}} \\ \cos\theta &= \cos(\psi_s - \psi_n) = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} \right) = \frac{F}{\sqrt{EG}} \end{aligned} \right\} \quad (3-35)$$

根据面积比应为1的等面积投影条件，最后可得出

$$\begin{aligned} P &= \frac{dF'}{dF} = \frac{\sqrt{EG} dB dl \cdot \frac{H}{\sqrt{EG}}}{Mr dB dl} = \frac{H}{Mr} = 1 \\ \therefore H &= Mr \\ \frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l} \cdot \frac{\partial y}{\partial B} &= Mr \end{aligned} \quad (3-36)$$

此为等面积条件的另一表达式。

### 3. 等距离条件

等距离条件是使主方向之一上的长度比等于1，即 $a=1$ 或 $b=1$

在经纬线为正交的投影中，常使 $m=1$ ，即

$$m = \frac{\sqrt{E}}{M} = 1 \quad (3-37)$$

作为等距离条件。上式也可写成

$$E = M^2$$

$$\text{即} \quad \left( \frac{\partial x}{\partial B} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial B} \right)^2 = M^2 \quad (3-38)$$

必须注意以上三种投影条件是不可能同时应用于一种地图投影中去的。

## § 3-3 以极坐标为依据的投影变形公式

上述各种地图投影的变形公式都是以平面直角坐标为依据的，但在不少投影中，其方程是用极坐标表示的，故有必要进一步探求以极坐标为依据的投影变形公式。

如图3-5，设 $P$ 为极坐标的原点， $A$ 点的极坐标定为 $\rho$ ， $\delta$ ，它在地球椭球面上对应的地理坐标为 $B$ ， $L$ 。由此，它们之间的函数关系可表达为

$$\rho = f_3(B, L), \quad \delta = f_4(B, L) \quad (3-39)$$

我们可以觉察到在以极坐标表示的一些投影中，纬线多属不同心圆的同轴圆弧，但在特

殊情况下为同心圆。欲建立极坐标和平面直角坐标之间的关系时，应首先表示出这两种坐标系原点之间的间距，图上以  $q$  示之。当纬线投影后为不同心圆弧时， $q$  应是纬度  $B$  的函数。故有

$$q = f_5(B) \quad (3-40)$$

此处  $q = OP$ ，该值已知后可以确定极点  $P$  在极轴上的位置。如各纬线投影后均为同心圆弧， $q$  则为一常数。如图所示， $A$  点的平面直角坐标和极坐标之间的关系式为：

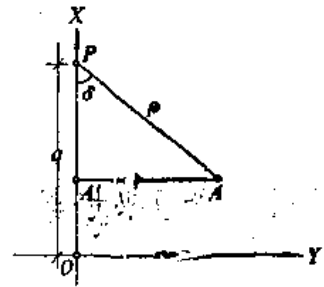


图3-5

$$\left. \begin{aligned} x &= q - \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (3-41)$$

为了探求以极坐标为依据的投影变形公式，必须首先推算前已述及的一阶基本量  $E, F, G$  和  $H$  在极坐标系中的表达式，为此对(3-41)式取偏导数，即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= q' - \rho' \cos \delta + \rho \sin \delta \frac{\partial \delta}{\partial B} \\ \frac{\partial x}{\partial l} &= \rho \sin \delta \frac{\partial \delta}{\partial l} \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= \rho' \sin \delta + \rho \cos \delta \frac{\partial \delta}{\partial B} \\ \frac{\partial y}{\partial l} &= \rho \cos \delta \frac{\partial \delta}{\partial l} \end{aligned} \right\} \quad (3-42)$$

上式中：  $\rho' = \frac{df_5(B, L)}{dB}$  ;  $q' = \frac{df_5(B)}{dB}$

参阅(3-5), (3-6), (3-7)及(3-18)式，可得出：

$$\left. \begin{aligned} E &= \left( \frac{\partial x}{\partial B} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial B} \right)^2 = (q' \cos \delta - \rho')^2 + (q' \sin \delta + \rho \frac{\partial \delta}{\partial B})^2 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} = \rho \frac{\partial \delta}{\partial l} (q' \sin \delta + \rho \frac{\partial \delta}{\partial B}) \\ G &= \left( \frac{\partial x}{\partial l} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial l} \right)^2 = \rho^2 \left( \frac{\partial \delta}{\partial l} \right)^2 \\ H &= \frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l} \cdot \frac{\partial y}{\partial B} = \rho \frac{\partial \delta}{\partial l} (q' \cos \delta - \rho') \end{aligned} \right\} \quad (3-43)$$

再根据前列各公式，即可求得以极坐标为依据的投影变形公式为：

$$\left. \begin{aligned} \text{tge} &= -\frac{F}{H} = \frac{\rho \frac{\partial \delta}{\partial B} + q' \sin \delta}{\rho' - q' \cos \delta} \\ m &= \frac{\sqrt{E}}{M} = q' \frac{\cos \delta - \rho'}{M} \sec \epsilon \\ \lambda &= \frac{\sqrt{G}}{r} = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial l} \\ P &= m \cos \epsilon = \rho \frac{\partial \delta}{\partial l} \cdot \frac{q' \cos \delta - \rho'}{Mr} \end{aligned} \right\} \quad (3-44)$$



如果先求 $n$ 和以 $P = \frac{H}{M_T}$ , 然后再从 $m = \frac{P}{ncos\epsilon}$ 式中计算出 $m$ , 得出与上式相同的结果。

### § 3-4 球面坐标系和坐标变换的常用公式

在地图制图工作的具体实践中, 经常采用的有如下几种坐标系, 即大地坐标系( $B, L$ )、

地理坐标系( $\varphi, \lambda$ )、球面坐标系( $a, z$ )、平面直角坐标系( $x, y$ )和平面极坐标系( $\rho, \delta$ )等。如果将地球当作球体来看待(下章讨论的方位投影即属此种情况), 在投影计算中可以采用地理坐标作为球面上点位的参数, 进一步找出它和球面坐标之间的关系, 计算出投影平面极坐标 $\rho$ 和 $\delta$ 后最终解算出各点的直角坐标, 从而构成获得地图网格的一套完整的数学公式。

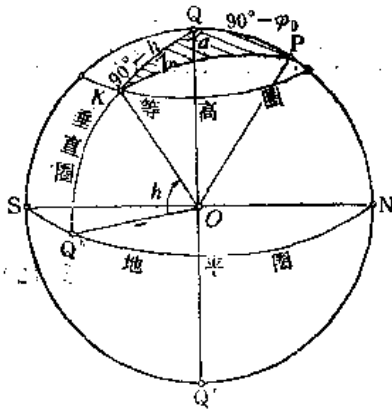


图3-6

首先我们从研究地理坐标和球面坐标的关系着手, 参阅图3-6, P为北极, Q称为新极, 位于球面的中央, 在天文学中又称天顶, 实用中按具体要求可设置于地球表面上的任一点。过地心O并与QQ'垂直的大圆称为地平圈、垂直圈是过QQ'轴并与地平圈垂直的大圆。为了表示某垂直圈上K点的位置, 可由两个参数方位角 $\alpha$ 和天顶距Z来定位, 如图所示, 天顶距 $Z = 90^\circ - h$ ,  $h$ 称为高度角。通常我们将由P、Q和K构成的球面三角形命名为定位三角形, 只需求出 $\alpha$ 和Z, K在球面上的位置即告确定。过K点作平行于地平圈的小圆称为等高圈, 其上诸点的高度角均相一致。

设定位三角形中Q点的地理坐标为 $\varphi_0, \lambda_0$ , 某点k的地理坐标为 $\varphi, \lambda$ , 只要利用球面三角学中解算定位三角形PQK的公式便可找出它们与 $\alpha, Z$ 之间的关系:

$$\left. \begin{aligned} \cos Z &= \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) \\ \text{ctg}\alpha &= \text{tg}\varphi \cos\varphi_0 \text{csc}(\lambda - \lambda_0) - \sin\varphi_0 \text{ctg}(\lambda - \lambda_0) \end{aligned} \right\} \quad (3-45)$$

上式为地理坐标变换为球面坐标的计算公式, 显见只要新极Q的地理坐标已定, 即可按(3-45)式解出地面任一点位的球面坐标, 这个坐标系是以垂直圈和等高圈为坐标轴线的。图中可知Z值恒小于 $90^\circ$ , 但 $\alpha$ 角值介于 $0^\circ$ 至 $360^\circ$ , 所以在由余切公式反解 $\alpha$ 角时要注意其所在象限才不致有误。《地图投影计算用表》中载有球面坐标 $a$ 和Z值, 可以 $\varphi$ 和 $\lambda$ 为引数直接从表中查出。

下面介绍由地理坐标 $\varphi, \lambda$ 换算为球面极坐标 $a, Z$ 的具体步骤:

首先确定制图区域的地理位置以及新极Q的坐标 $\varphi_0$ 和 $\lambda_0$ , 根据设计中网格密度的要求, 绘制出经纬线交点图, 如图3-7所示, 经纬线间隔 $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 10^\circ$ , Q点的地理坐标 $\varphi_0 = 40^\circ_N, \lambda_0 = 115^\circ_E$ 。按点号的顺序排列, 可知各交点的经纬度值, 其后将查表值列于下表即完成全部换算工作。

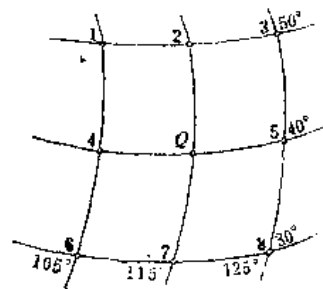


图3-7

点号	$\varphi_i$	$\lambda_i$	$\Delta\lambda_i = \lambda_i - \lambda_0$	$a$			$Z$		
				$l$	$n$	$r$	$l$	$r$	$r$
1	50°	105°	-10°	328	11	10	12	13	26
2	50°	115°	0°	0	00	00	10	00	00
3	50°	125°	10°	31	48	50	12	13	26
4	40°	105°	-10°	273	13	08	7	39	23
5	40°	125°	10°	86	40	52	7	39	23
6	30°	105°	-10°	222	18	48	12	54	30
7	30°	115°	0°	180	00	00	10	00	00
8	30°	125°	10°	157	41	12	12	54	30

有一特例，即新极Q恰位于赤道上时， $\varphi_0 = 0^\circ$ 、 $\lambda = \lambda_i - \lambda_0$ ，参考公式(3-45)，某点K的球面极坐标可以进一步简化为：

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} a &= \operatorname{ctg} \varphi \sin \lambda \\ \cos Z &= \cos \varphi \cos \lambda \end{aligned} \right\} \quad (3-46)$$

### 思考题

1. 如何从一点附近任意方向上长度比的公式中推求出主方向上的长度比 $m$ 和 $n$ ?
2. 阐述经纬线交角变形公式推导的思路。
3. 等角、等面积和等距离投影的条件是什么?
4. 在球面坐标系的图上绘出地理坐标和球面极坐标系中的各参数，并解释之。
5. 由地理坐标 $\varphi$ 、 $\lambda$ 换算为球面极坐标 $a$ 、 $Z$ 的步骤是什么?
6. 用图绘出正轴、横轴和斜轴投影时定位三角形PQK的示意位置。

### 计算题

题目：球面极坐标的计算与查表

1. 制图区域： $B: 15^\circ - 30^\circ$   
 $L: 95^\circ - 115^\circ$
2. 投影中心： $B_0 = 30^\circ$ ， $L_0 = 105^\circ$
3. 经纬线间隔： $\Delta B = \Delta L = 5^\circ$
4. 计算公式：

$$\begin{aligned} \cos Z &= \sin B \sin B_0 + \cos B \cos B_0 \cos(L - L_0) \\ \operatorname{ctg} a &= \operatorname{tg} B \cos B_0 \operatorname{csc}(L - L_0) - \sin B_0 \operatorname{ctg}(L - L_0) \end{aligned}$$

5. 计算精度：

$z, a$  以秒为单位；  
所有函数值均算至小数点后七位。

首先绘出经纬线网格交点草图，并按顺序编号。

[方法一] 用三角函数表或计算器计算 $a$ 和 $Z$ 。

$L_0=105^\circ$		$B_0=30^\circ$		
$B$	$L$	$105^\circ$	$110^\circ$	$115^\circ$
	$\Delta L=L-L_0$	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$
15°	(1) $\sin B_0$ (2) $\cos B_0$ (3) $\sin B$ (4) $\cos B$ (5) $\text{tg} B$	(9) $\cos \Delta L$ (10) $\csc \Delta L$ (11) $=(1) \times (9) \times (10)$ $\sin B_0 \text{ctg} \Delta L$		
	(6) $=(3 \times 1)$ $\sin B \sin B_0$ (7) $=(4) \times (2)$ $\cos B \cos B_0$ (8) $=(5) \times (2)$ $\text{tg} B \cos B_0$	(12) $=(8) \times (10)$ $\text{tg} B \cos B_0 \csc \Delta L$ $\text{ctg} a$ $a$ (13) $=(7) \times (9)$ $\cos B \cos B_0 \cos \Delta L$ $\cos Z$ $Z$		
20°	(1) (2) (3) (4) (5)	(9) (10) (11)		
	(6) (7) (8)	(12) $\text{ctg} a$ $a$ (13) $\cos Z$ $Z$		
25°	(1) (2) (3) (4) (5)	(9) (10) (11)		
	(6) (7) (8)	(12) $\text{ctg} a$ $a$ (13) $\cos Z$ $Z$		
30°	(1) (2) (3) (4) (5)	(9) (10) (11)		
	(6) (7) (8)	(12) $\text{ctg} a$ $a$ (13) $\cos Z$ $Z$		

[方法二] 利用《投影计算用表》查取球面坐标

$B_0=0^\circ$   $L_0=70^\circ$  (Q点位于赤道上)

L		70°	65° 75°	60° 80°	55° 85°	50° 90°	45° 95°	40° 100°
		$\Delta L$	0°	5°	10°	15°	20°	25°
B	$\alpha, Z$							
0°	$\alpha$ Z							
5°	$\alpha$ Z							
10°	$\alpha$ Z							
15°	$\alpha$ Z							
20°	$\alpha$ Z							

## 编程示例

### 一、源程序

```

52:INPUT "Bo=", B0
53:INPUT "Lo=", L0
54:INPUT "Bs=", BS,
    "Bn=", BN, "Lw=",
    LW, "Le=", LE:
    RETURN
55:B0=DEG B0
56:L0=DEG L0
57:BS=DEG BS:BN=
    DEG BN:DB=BN-BS
58:LW=DEG LW:LE=
    DEG LE:DL=LE-LW
59:RETURN
80:CZ=SIN B * SIN B0 +
    COS B * COS B0 *
    COS DL:Z=DMS
    ACS CZ
82:SC=SIN B * COS B0 -
    COS B * SIN B0
    * COS DL
84:SS=COS B * SIN DL
85:IF SC=0LET AR=
    0:RETURN
86:TR=SS/SC:AR=
    ABS ATN TR
94:IF B<B0AND L>=
    L0LET AR=180-A
    R:GOTO 100
96:IF B<B0AND L<L
    0LET AR=180+AR:
    GOTO 100
98:IF B>=B0AND L<
    L0LET AR=360-AR
100:AR=DMS AR:
    RETURN
130:"Z":REM "Bo, L0
    - - Ar, Z"
152:X$="Z":GOSUB 152:
    INPUT "ds=", DS
154:LPRINT USING,
    "Bs=", BS, TAB 9,
    "Bo=", B0:

```

```

LPRINT "Bn="; BN;
TAB 9; "Lo="; L0
156:LPRINT "Lw="; LW;
LPRINT "Le=";
LE; TAB 9; "ds=";
DS:LPRINT
". . . . . ."
157:GOSUB 58:DS=
DEG DS:LPRINT:N=0
158:B=BS
160:L=LW
162:DL=L-L0:GOSUB
80
164:USING:N=N+1;
LPRINT N; "B=";

```

```

DMS B:LPRINT
"L="; DMS L
166:USING "####.##
###":LPRINT
TAB 4; "Ar="; AR+
5E-6:LPRINT
TAB 4; "Z="; Z+
5E-6:LPRINT
168:L=L+DS:IF L<=
LEGOTO 162
170:B=B+DS:IF B<=
BNGOTO 160
172:END
STATUS 1

```

757

## 二、程序功能

计算: a, Z 起功方法DEF Z

## 三、主要标识符

存储器名	X\$	BO	LO	BS	BN	LW	LE	B	L	DS	DL	A	Z
变量名	"Z"	B <sub>0</sub>	L <sub>0</sub>	南纬	北纬	东经	西经	纬度	经度	经纬度步长距	L-L	a	Z

## 四、实例

起功: DEF Z

显示: B<sub>0</sub>L<sub>0</sub>B<sub>N</sub>L<sub>N</sub>L<sub>w</sub>L<sub>e</sub>ds

输出: 已知数据表B<sub>0</sub>, B<sub>N</sub>, L<sub>w</sub>, L<sub>e</sub>, B<sub>0</sub>, L<sub>0</sub>, ds成果表。顺序号B, L, Ar, Z

B <sub>0</sub> = 30	B <sub>N</sub> = 40	5	B = 0
B <sub>N</sub> = 50	L <sub>0</sub> = 115		L = 115
L <sub>w</sub> = 105			Ar = 0.00000
Le = 125	ds = 10		Z = 0.00000
. . . . .			
1	B = 30	5	B = 40
	L = 105		L = 125
	Ar = 222.18488		Ar = 86.46526
	Z = 12.54297		Z = 7.39231
2	B = 30	7	B = 50
	L = 115		L = 105
	Ar = 180.00000		Ar = 328.11099
	Z = 10.00000		Z = 12.13267
3	B = 30	8	B = 50
	L = 125		L = 115
	Ar = 137.41112		Ar = 0.00000
	Z = 12.54297		Z = 10.00000
4	B = 40	9	B = 50
	L = 105		L = 125
	Ar = 273.13074		Ar = 31.48501
	Z = 7.39231		Z = 12.13267

## 第四章 方位投影

### § 4-1 方位投影的概念

经历史考证，公元前一些方位投影的基本设想已被古代人所应用，当时一般都采用近似几何透视的方法绘制地图网格，例如公元前二世纪天文学家在星图上就用过属于方位投影的日晷投影。到了18至19世纪已改进为解析法，特别是方位投影在小比例尺地图的绘制中应用甚广。

方位投影采用平面作为投影面，所以一般也称平面投影。在大多数常见的投影方法中均设有投影中心，方位投影的投影中心是平面和球面相切的一点。和其它投影不同的是在方位投影中，一般均用圆球体来代替地球椭球体，此时子午圈曲率半径，卯酉圈曲率半径和地球平均曲率半径均为等值，地理坐标也常由 $B, L$ 换为用 $\phi$ 和 $\lambda$ 表示。

方位投影可以划分为透视投影和非透视投影两大类。前者可设想利用某一光点进行投影，随着这个透视点位的不同又可分为正射投影、外心投影、球面投影和球心投影。后者是依据一些特定条件如等角、等积或等距离条件并用数学的方法推证而得，此时根据投影平面和地球所处的不同位置可分成正轴、横轴和斜轴方位投影。

在正轴投影中，方位投影的投影表象是：纬线投影为一组同心圆，经线投影后成为交于投影中心的直线束，也即同心圆的半径，两经线间的夹角与实地经度差相等。在横轴或斜轴投影中，等高圈投影为同心圆，垂直圈的投影则为同心圆的半径，两垂直圈间的夹角和实地方位角相等。

### § 4-2 透视方位投影

透视方位投影除了具有方位投影的一般特征外，还在地面点和其相应的投影点之间建立一定的透视关系。这种投影设有固定的视点，其位置通常是处于和投影面成垂直的地轴或其延长线上，按视点所处的不同位置，可划分为四类透视方位投影，参阅图4-1。

正射投影——视点位于离球心无穷远处，即图4-1上的1

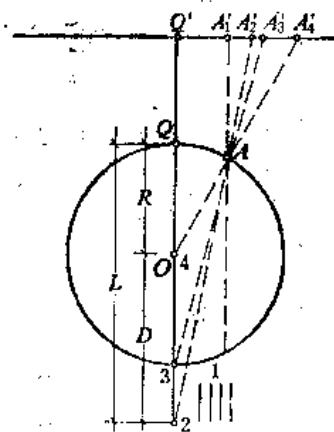


图4-1

点处, 此时  $D = \infty$ , 投影光线呈平行线状。

外心投影——视点位于离球心外有限距离即图上的 2 点处, 即  $R < D < \infty$ 。

球面投影——视点恰好位于球面上的 3 点处, 此时,  $D = R$ 。

球心投影——视点与球心  $O$  重合一致, 此时  $D = 0$ 。

在图 4-1 中,  $D$  为视点至球心  $O$  的间距,  $L$  为视点至投影中心  $Q$  的间距。

### 1. 透视方位投影一般公式的建立

现在来推导透视方位投影的一般公式, 我们可以从通用计算公式着手, 即先以外心投影为例求证, 然后再演算其它的投影公式。

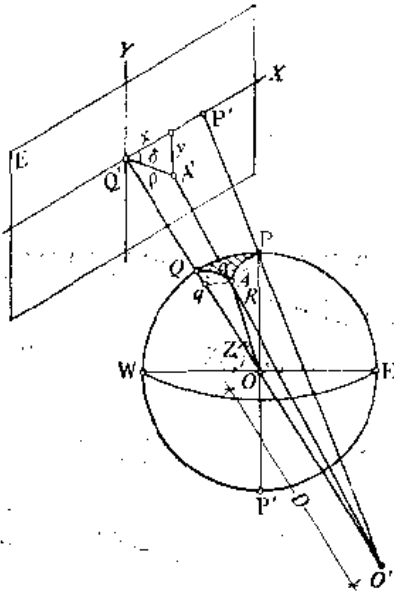


图 4-2

参阅图 4-2,  $Q$  为投影中心, 它和投影平面  $E$  上的  $Q'$  点应重合一致, 在作图时为了看图方便, 有意将  $Q$  与  $Q'$  分开。设视点  $O'$  离球心  $O$  的距离为  $D$ , 按题意应为外心投影。此时地面  $A$  点投影后为  $A'$  点, 过  $Q$  点的经线  $QP$  投影后为  $Q'P'$ , 以此选作投影平面上的  $X$  轴,  $Y$  轴则与  $X$  轴垂直, 此时坐标原点设在  $Q'$  点。大圆弧  $QA$  投影后为  $Q'A'$ , 以  $\rho$  表示, 为极距;  $QA$  的球面方位角  $\alpha$  投影后为  $\delta$ , 称为平面方位角, 由图可知,  $\delta = \alpha$ 。过  $A$  点作一与  $Q'A'$  的平行线, 它与地轴的交点为  $q$ 。在相似三角形  $\triangle Q'A'O'$  和  $\triangle qAO'$  中, 有

$$\frac{Q'A'}{qA} = \frac{Q'O'}{qO'}$$

因为  $Q'A' = \rho$ ,  $Q'O' = QO' = D + R = L$ ,

$$qA = R \sin Z, qO' = R \cos Z + D$$

$$\therefore Q'A' = \rho = \frac{LR \sin Z}{D + R \cos Z} \quad (4-1)$$

根据投影直角坐标的一般公式, 可得

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta = \frac{LR \sin Z \cos \alpha}{D + R \cos Z} \\ y &= \rho \sin \delta = \frac{LR \sin Z \sin \alpha}{D + R \cos Z} \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

已知方位投影中的  $\delta = \alpha$ 。

在实际计算中, 应将上式中的两个变量  $Z$  和  $\alpha$  换成以经纬度  $\lambda$  和  $\varphi$  表示的式子, 此时可利用前章介绍过的球面三角学的公式予以换算。参阅图 4-3 上的标号, 可以写出如下常用的计算公式:

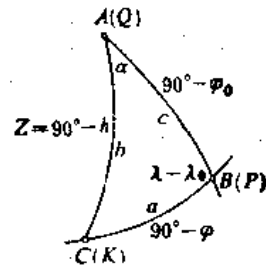


图 4-3

$$\cos b = \cos c \cos \alpha + \sin c \sin \alpha \cos B$$

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$$

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B$$

现在分别用相应的  $Z$ ,  $\alpha$  和  $\varphi$ ,  $\lambda$  代入上式得

$$\left. \begin{aligned} \cos Z &= \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0) \\ \sin Z \cos \alpha &= \cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0) \\ \sin Z \sin \alpha &= \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0) \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

若令Q点的经度 $\lambda_0 = 0^\circ$ ，上式可写成：

$$\left. \begin{aligned} \cos Z &= \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda \\ \sin Z \cos \alpha &= \cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda \\ \sin Z \sin \alpha &= \cos \varphi \sin \lambda \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

将(4-4)式代入(4-2)式中，便可得出计算直角坐标 $x, y$ 的常用公式。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{LR(\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda)}{D + R(\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda)} \\ y &= \frac{LR \cos \varphi \sin \lambda}{D + R(\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda)} \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

现进一步研究透视方位投影中长度比，面积比及角度变形的公式，根据透视关系及长度比定义先求出垂直圈长度比 $u_1$ 和等高圈长度比 $u_2$ ，参阅图4-4中的(1)和(2)得：

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{A'D'}{AD} = \frac{d\rho}{RdZ} \\ u_2 &= \frac{D'C'}{DC} = \frac{\rho d\delta}{R \sin Z da} \\ &= \frac{\rho}{R \sin Z} \end{aligned} \right\} \quad (4-6a)$$

( $\because d\delta = da$ )

继之，面积比 $P$ 的计算公式为：

$$P = u_1 \cdot u_2 = \frac{\rho d\rho}{R^2 \sin Z dZ} \quad (4-6b)$$

最大角度变形可由下式算出：

$$\sin \frac{\omega}{2} = \left| \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \right| \quad (4-6c)$$

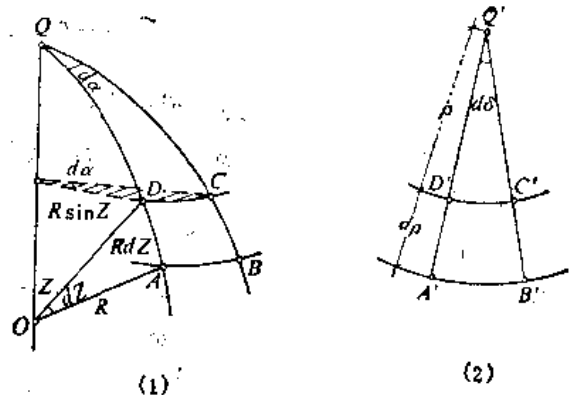


图4-4

只要将上述透视投影中求 $\rho$ 的公式代入(4-6a, b, c)，便可写出求各变形值的通用公式。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{d\rho}{RdZ} = \frac{L(D \cos Z + R)}{(D + R \cos Z)^2} \\ u_2 &= \frac{\rho}{R \sin Z} = \frac{L}{D + R \cos Z} \\ P &= u_1 \cdot u_2 = \frac{L^2(D \cos Z + R)}{(D + R \cos Z)^3} \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \left| \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \right| \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

## 2. 球心投影

根据定义，球心投影中的 $D = 0$ ， $L = R$ ，只要将此关系式代入以上有关各式，便可写出球心投影的计算公式。

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \alpha \\ \rho &= R \operatorname{tg} Z \\ x &= \rho \cos \delta = R \operatorname{tg} Z \cos \alpha \\ y &= \rho \sin \delta = R \operatorname{tg} Z \sin \alpha \\ u_1 &= \sec^2 Z \\ u_2 &= \sec Z \\ P &= u_1 \cdot u_2 = \sec^3 Z \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \operatorname{tg}^2 \frac{Z}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4-8)$$

$s = 6$



上式中的直角坐标公式可用 $\varphi$ 和 $\lambda$ 来表示,只需将(4-5)式改化即可。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R(\cos\varphi_0 \sin\varphi - \sin\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda)}{\sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda} \\ y &= \frac{R \cos\varphi \sin\lambda}{\sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

球心投影具有如下特点,即地球表面上的任何大圆在此投影中的表象均为直线,这是因为所有大圆都包含着球心即视点的缘故,大圆面经延伸与投影面相交后即呈直线状,只要在(4-9)式中分别消去 $\varphi$ 和 $\lambda$ ,从导出的经线和纬线方程式中可以得到证实。

其经线方程为:

$$\sin\varphi_0 x + \operatorname{ctg}\lambda y = R \cos\varphi_0 \quad (4-10)$$

式中 $\varphi_0$ 为投影中心的纬度,显见此式是交于一点的直线方程,其交点坐标为:  $y=0$ ,  $x = R \operatorname{ctg}\varphi_0$ 。当 $\varphi_0 = 90^\circ$ ,即位于正轴时,方程式更可简化为:

$$\frac{x}{y} = -\operatorname{ctg}\lambda \quad (4-11)$$

此式表示经线投影后为交于原点的一组辐射直线。又当 $\varphi_0 = 0^\circ$ 时,则为横轴投影,(4-10)式简化为 $y = R \operatorname{tg}\lambda$ ,可见该式表示经线的投影表象为一组平行直线,离中央经线愈远时,其经线间距也愈大。

当消去 $\lambda$ 后,便可得出纬线方程:

$$\begin{aligned} &(\sin^2\varphi_0 - \cos^2\varphi_0 \operatorname{ctg}^2\varphi)x^2 - (2R\sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \operatorname{csc}^2\varphi)x + y^2 \\ &= R^2(\sin^2\varphi_0 \operatorname{ctg}^2\varphi - \cos^2\varphi_0) \end{aligned} \quad (4-12)$$

此式为二次曲线方程,若使用判别二次曲线方程的解析求法便可得出如下的纬线投影表象,当

$\varphi_0 = 90^\circ$  即正轴投影时,纬线投影的表象为同心圆;

$\varphi > 90^\circ - \varphi_0$  时,纬线投影表现为椭圆;

$\varphi = 90^\circ - \varphi_0$  时,纬线投影为抛物线;

$\varphi < 90^\circ - \varphi_0$  时,纬线投影为双曲线;

$\varphi_0 = 0^\circ$  时,赤道投影则为直线。

正轴球心投影的经纬线形状如图 4-5 所示。

### 3. 球面投影

如前所述,在球面投影中, $D$ 和 $R$ 的相关式应为:

$$D = R, \quad L = 2R$$

将它代入(4-1),(4-2)及(4-7)各式可得如下球面投影的基本公式:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= a \\ u_1 &= \sec^2 \frac{Z}{2} \end{aligned} \right\}$$

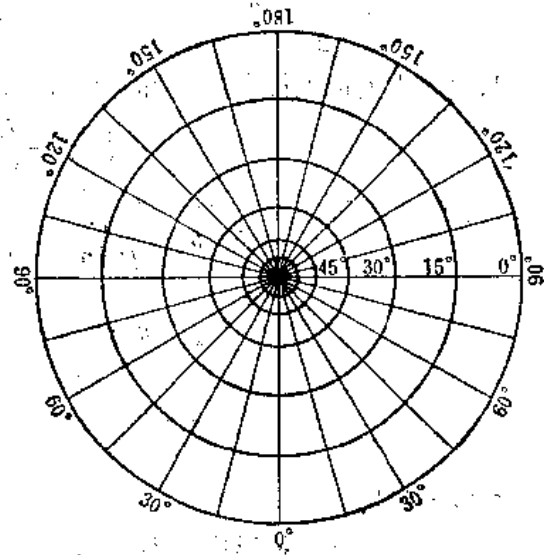


图4-5

$$\left. \begin{aligned}
 \rho &= 2R \operatorname{tg} \frac{Z}{2} & u_2 &= \sec^2 \frac{Z}{2} \\
 x &= \rho \cos \delta = 2R \operatorname{tg} \frac{Z}{2} \cos \alpha & P &= \sec^4 \frac{Z}{2} \\
 y &= \rho \sin \delta = 2R \operatorname{tg} \frac{Z}{2} \sin \alpha & \omega &= 0^\circ
 \end{aligned} \right\} \quad (4-13)$$

上式中的投影直角坐标公式也可用经、纬度来表示, 推求方法与前同。

$$\left. \begin{aligned}
 x &= \frac{2R(\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \lambda)}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda} \\
 y &= \frac{2R \cos \varphi \sin \lambda}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda}
 \end{aligned} \right\} \quad (4-14)$$

根据长度比的公式可知  $u_1 = u_2 = u = \sec^2 \frac{Z}{2}$ ,  $\omega = 0^\circ$ , 故证明球面投影实为等角性质的投影。

本投影的特点是无论地球表面上的大圆或小圆, 经投影后其表象恒为一圆, 可用下法证明之。

如图4-6,  $Q$  为投影中心,  $P_1$  为一定点,  $QP_2P_1$  为球面上的定位三角形。若取  $P_1$  为圆心, 大圆弧段  $P_1P_2$  为半径画一圆, 当可求证投影后以  $P_1'$  为中心的  $P_2'$  点的轨迹是一个圆。根据球面三角学的公式写出定位三角形的关系式为:

$$\cos Z_1 \cos Z_2 + \sin Z_1 \sin Z_2 \cos \Delta \alpha = \cos K$$

$$\text{若令: } \cos Z_1 = C_1, \sin Z_1 = C_2, \cos K = C_3,$$

则上式简写成:

$$C_1 \cos Z_2 + C_2 \sin Z_2 \cos \Delta \alpha = C_3$$

化算后改写为:

$$C_1 \left( \cos^2 \frac{Z_2}{2} - \sin^2 \frac{Z_2}{2} \right) + 2C_2 \sin \frac{Z_2}{2} \cos \frac{Z_2}{2} \cos \Delta \alpha = C_3$$

在投影面上, 已知  $Q'P_2' = \rho_2 = 2R \operatorname{tg} \frac{Z_2}{2}$ , 移项后  $\operatorname{tg} \frac{Z_2}{2} = \frac{\rho_2}{2R}$ , 将此关系式代入上式即可写出:

$$C_1 \left( 1 - \frac{\rho_2^2}{4R^2} \right) + C_2 \frac{\rho_2}{R} \cos \Delta \alpha = C_3 \left( 1 + \frac{\rho_2^2}{4R^2} \right)$$

经整理后便可写出以极坐标表示的圆的标准方程式:

$$\left( \frac{C_1 + C_3}{4R^2} \right) \rho_2^2 - \frac{C_2}{R} \rho_2 \cos \Delta \alpha - (C_1 - C_3) = 0 \quad (4-15)$$

从而证明了在此投影中球面上的任意圆即大圆或小圆经投影后均保持为圆。必须说明的是, 球面投影的经纬线表象为正交的圆弧, 只有在半径为无穷大时, 才呈直线状。

#### 4. 正射投影

在正射投影中, 按题意  $D = \infty$ , 也即  $L = \infty$ , 此时视点位于无穷远处, 表现为视线相互平行并和投影平面垂直。先写出求直角坐标的公式为:

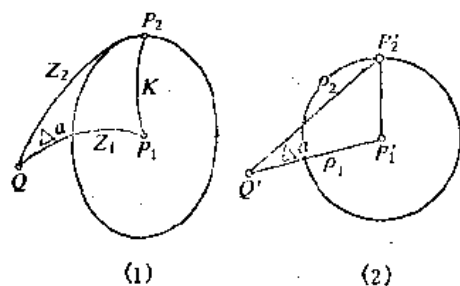


图4-6

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{LR\sin Z\cos\alpha}{D+R\cos Z} = \frac{\frac{L}{D} \cdot R\sin Z\cos\alpha}{\frac{D}{D} + \frac{R}{D}\cos Z} = R\sin Z\cos\alpha \\ y &= \frac{LR\sin Z\sin\alpha}{D+R\cos Z} = \frac{\frac{L}{D} \cdot R\sin Z\sin\alpha}{\frac{D}{D} + \frac{R}{D}\cos Z} = R\sin Z\sin\alpha \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

然后再写出正射投影的基本公式:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \alpha & u_1 &= \cos Z \\ \rho &= R\sin Z & u_2 &= 1 \\ x &= R\sin Z\cos\alpha & P &= u_1 \cdot u_2 = \cos Z \\ y &= R\sin Z\sin\alpha & \sin \frac{\omega}{2} &= \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} = \operatorname{tg}^2 \frac{Z}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4-17)$$

仍按球面三角学中定位三角形的关系, 求出以 $\varphi$ 和 $\lambda$ 表示的直角坐标公式:

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos\lambda) \\ y &= R\cos\varphi\sin\lambda \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

现在我们可以推导出本投影的经纬线方程式, 借以证明在正射投影中, 经纬线投影的表象一般为椭圆, 特定情况下则为圆或直线。只要先从(4-18)式中消去 $\varphi$ , 便得出经线方程式:

$$\begin{aligned} &(\sin^2\lambda)x^2 + (2\sin\varphi_0\sin\lambda\cos\lambda)xy \\ &+ (\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0\cos^2\lambda)y^2 - R^2\sin^2\lambda\cos^2\varphi_0 = 0 \end{aligned} \quad (4-19)$$

如仔细观察, 上式相当于二次曲线方程的表达式, 即 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + D = 0$ 。只需证明 $AC - B^2 > 0$ , (4-19)式即为椭圆方程, 由此证明经线投影为椭圆。同样, 消去 $\lambda$ 后便得出纬线方程:

$$\left( \frac{x - R\cos\varphi_0\sin\varphi}{R\sin\varphi_0\cos\varphi} \right)^2 + \left( \frac{y}{R\cos\varphi} \right)^2 = 1 \quad (4-20)$$

显见上式也是椭圆方程的表达式, 所以纬线投影也是椭圆。利用上两式即可推断正轴或横轴投影时的经纬线表象:

当 $\varphi_0 = 90^\circ$ 即正轴时

经线方程:  $\frac{x}{y} = -\operatorname{tg}\lambda$ , 表现为交于某一点的直线束;

纬线方程:  $x^2 + y^2 = (R\cos\varphi)^2$ , 此为一同心圆。

当 $\varphi_0 = 0^\circ$ 即横轴时,

经线方程:  $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R\sin\lambda}\right)^2 = 1$ , 可知经线表象为椭圆, 但在特例即 $\lambda = 90^\circ$ 时, 则视为圆。

纬线方程:  $x = R\sin\varphi$ , 它表示为一组平行直线。

### § 4-3 非透视方位投影

#### 1. 非透视方位投影的一般公式

非透视方位投影系根据数学法则建立球面和投影平面之间点位的一一对应函数关系，习惯上我们将非透视方位投影统称为方位投影。

参阅图4-7， $O$ 为地心， $Q$ 为投影中心，也即球面上的坐标原点。 $QP$ 和 $QA$ 为过地面 $P$ 、 $A$ 两点垂直圈上的两段圆弧，它在投影平面 $E$ 上的投影依次为 $Q'P'$ 和 $Q'A'$ ，所以 $A'$ 是 $A$ 点的投影表象。在投影面上，命 $Q'P'$ 为 $X$ 轴，过 $Q'$ 点并和 $Q'P'$ 垂直的直线定为 $Y$ 轴，设 $Q'A' = \rho$ ， $OA$ 与 $OP$ 的夹角为球面方位角 $\alpha$ ，投影后称为平面方位角 $\delta$ ，由此可写成如下关系式：

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \alpha \\ \rho &= f(Z) \end{aligned} \right\} \quad (4-21)$$

式中天顶距 $Z$ 和方位角 $\alpha$ 是以 $Q$ 为原点的球面极坐标，在投影计算中应以平面直角坐标 $x, y$ 来表示，前已介绍

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (4-22)$$

本投影的主要任务即为解求 $\rho$ 的函数形式，决定 $\rho = f(Z)$ 的方法众多，需按各种不同的指定条件分别推算。至于长度比、面积比和角度变形公式的推演同上面透视方位投影所分析的结果一样，必要时直接引用。

方位投影的计算步骤可归纳如下：

- (1) 按指定要求，确定球面极坐标原点即投影中心的经纬度 $\lambda_0$ 和 $\varphi_0$ ；
- (2) 根据球面三角公式将地面各点的地理坐标 $\lambda, \varphi$ 换算至球面极坐标 $\alpha$ 和 $Z$ ；
- (3) 按公式先后计算投影极坐标 $\delta$ 和 $\rho$ 及平面直角坐标 $x$ 和 $y$ ；
- (4) 最后计算长度比、面积比和角度变形。

特别指出，方位投影具有的一个共同特征是在投影面上由投影中心到任意一点的方位角均保持与实地相等。

#### 2. 等角方位投影

等角方位投影是一种必须符合等角条件以决定 $\rho = f(Z)$ 函数形式的投影，如前所述，它应保持微分面积的形状相似，即微分圆经投影后仍为一圆，此时任一点上的长度比与方位无关，无角度变形。等角条件可用下式表示：

$$u_1 = u_2 = u \quad \text{或} \quad \omega = 0^\circ$$

参阅本章第(4-6a)式：

$$\frac{d\rho}{RdZ} = \frac{\rho}{R\sin Z}$$

为解算 $\rho$ 值，可将上式移项后积分

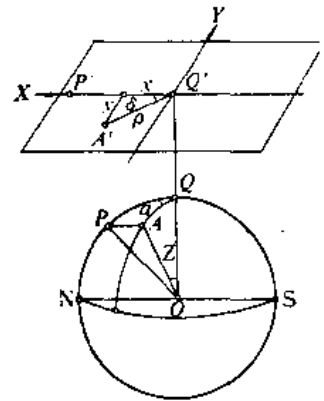


图4-7

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \int \frac{dZ}{\sin Z}$$

$$\ln \rho = \ln \operatorname{tg} \frac{Z}{2} + \ln K$$

$$\therefore \rho = k \operatorname{tg} \frac{Z}{2} \quad (4-23)$$

式中  $K$  为积分常数，欲求  $K$  值，可指定在某等高圈  $Z_K$  上的长度比  $u_{2(x)} = 1$ ，意即将投影面割于离投影中心为  $Z_K$  的小圆上，此时  $\rho$  仅与  $Z$  有关。将它代入(4-6a)式中的  $u_2$  后，便可求出  $K$  值。

$$u_{2(x)} = \frac{f_x}{R \sin Z_K} = 1$$

$$\rho_K = R \sin Z_K, \quad \therefore f_K = K \operatorname{tg} \frac{Z_K}{2} \quad [\text{参阅}(4-23)\text{式}]$$

$$\therefore K = 2R \cos^2 \frac{Z_K}{2} \quad (4-24)$$

现将斜轴等角方位投影的公式收集于下：

$$\left. \begin{aligned} \delta = \alpha \quad u_1 = u_2 = u = \cos^2 \frac{Z_K}{2} \sec^2 \frac{Z}{2} \\ \rho = 2R \cos^2 \frac{Z_K}{2} \operatorname{tg} \frac{Z}{2} \quad \rho = u^2 \\ x = 2R \cos^2 \frac{Z_K}{2} \operatorname{tg} \frac{Z}{2} \cos \alpha \quad \omega = 0 \\ y = 2R \cos^2 \frac{Z_K}{2} \operatorname{tg} \frac{Z}{2} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4-25)$$

分别讨论几个特例：

首先当  $Z_K = 0^\circ$  时，投影面恰切在投影中心  $Q$  处， $K = 2R \cos^2 \frac{Z_K}{2} = 2R$ ，所以

$$\left. \begin{aligned} \rho = 2R \operatorname{tg} \frac{Z}{2} \\ u_1 = u_2 = u = \sec^2 \frac{Z}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4-26)$$

如果是正轴方位投影，在(4-25)式中只要将  $\lambda$  代  $\alpha$ ， $(90^\circ - \varphi)$  代  $Z$ ，即可得出正轴方位投影的公式：

$$\left. \begin{aligned} \delta = \lambda \\ \rho = 2R \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi_K}{2} \right) \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \\ u = \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi_K}{2} \right) \sec^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-27)$$

当  $\varphi_K = 90^\circ$ ，此时投影面与极点相切，公式便可简化为：

$$\left. \begin{aligned} \rho = 2R \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \\ u = \sec^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-28)$$

从推证的公式中表明等角方位投影等同于透视投影中的球面投影。

斜轴等角方位投影在我国目前小比例制图中广为使用，如用此投影编绘的中国全图，设

投影中心位于  $\varphi_0 = +30^\circ; \lambda^0 = +105^\circ$ 。投影面割于离投影中心  $Z_K = 15^\circ$  的小圆上。投影中无角度变形，在离投影中心  $Z_K = 15^\circ$  的小圆上也没有任何变形。投影中心长度变形略小于  $-2\%$ ，广大地区的长度变形一般均在  $+2\%$  以内，局部边缘地区达  $+5\%$  左右，面积变形约比长度变形大一倍。

### 3. 等面积方位投影

本投影在决定  $\rho = f(Z)$  的函数形式时，需满足等面积条件，即  $P = 1$ 。

$$P = u_1 \cdot u_2 = \frac{d\rho}{RdZ} \cdot \frac{\rho}{R\sin Z} = 1$$

$$\rho d\rho = R^2 \sin Z dZ$$

$$\int \rho d\rho = R^2 \int \sin Z dZ$$

积分后得：
$$\frac{\rho^2}{2} = C - R^2 \cos Z$$

上式中  $C$  为积分常数，当  $Z = 0$ ，即投影面切于投影中心时， $\rho = 0$ ，于是  $C = R^2$ 。此时，

$$\rho^2 = 2(C - R^2 \cos Z) = 2R^2(1 - \cos Z)$$

由于  $\sin \frac{Z}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos Z}{2}}$ ，代入上式后得

$$\rho = 2R \sin \frac{Z}{2} \quad (4-29)$$

将  $\rho$  值代入  $u_1$  和  $u_2$  的计算公式中，得

$$u_1 = \frac{d\rho}{RdZ} = \frac{d\left(2R \sin \frac{Z}{2}\right)}{RdZ} = \cos \frac{Z}{2} \quad (4-30)$$

$$u_2 = \frac{\rho}{R\sin Z} = \frac{2R \sin \frac{Z}{2}}{R\sin Z} = \sec \frac{Z}{2}$$

$$P = u_1 \cdot u_2 = 1$$

在计算  $u_1$  和  $u_2$  时，因为  $\sec \frac{Z}{2} > \cos \frac{Z}{2}$ ，所以  $u_2 = \sec \frac{Z}{2} = a$ ， $u_1 = \cos \frac{Z}{2} = b$ 。

该投影的最大角度变形可用下式算出：

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{或} \quad \text{tg}\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sec \frac{Z}{2}$$

在正轴等面积方位投影中，若以  $\lambda$  代  $\delta$ ， $90^\circ - \varphi$  代  $Z$ ，则将以上各式改写成：

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \lambda \\ \rho &= 2R \sin \frac{Z}{2} = 2R \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \\ x &= \rho \cos \delta = 2R \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \cos \lambda \\ y &= \rho \sin \delta = 2R \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \sin \lambda \\ u_1 &= \cos \frac{Z}{2} = \cos \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \\ u_2 &= \sec \frac{Z}{2} = \sec \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4-31)$$

$$P = 1, \sin \frac{\omega}{2} = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}$$

$$\text{或 } \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sec \frac{Z}{2} = \sec\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

当前在小比例尺制图中常采用横轴和斜轴等面积方位投影。如编制东、西半球图多使用横轴投影,而水陆半球图、分洲或区域较大的地图则采用斜轴投影。在编制中国全图(政区图)时,曾采用过斜轴等面积方位投影的方案,其投影中心取 $\varphi_0 = 30^\circ \text{N}$ ,  $\lambda_0 = 105^\circ \text{E}$ , 投影面切于投影中心点上。本投影无面积变形,投影中心长度变形也为零,大部分地区长度变形为 $\pm 2\%$ ,局部边缘地区长度变形为 $\pm 3.5\%$ ,最大角度变形为 $2.5^\circ$ ,局部地区的最大角度变形达 $4^\circ$ 。

通常将本投影称为兰勃脱等面积方位投影。

#### 4. 等距离方位投影

等距离方位投影是指沿垂直圈长度比等于1的一种方位投影。只需投影函数 $\rho = f(Z)$ 满足 $u_1 = 1$ 的等距离条件,就能推导出该投影一系列的计算公式。按前述公式有:

$$u_1 = \frac{d\rho}{RdZ} = 1$$

$$d\rho = RdZ, \int d\rho = R \int dZ$$

等式两边取积分后得

$$\rho = RZ + C$$

式中 $C$ 为积分常数,当 $Z = 0$ 时,  $\rho = 0$ ,  $\therefore C = 0$ , 此时

$$\rho = RZ$$

下面写出等高圈长度比,面积比及最大角度变形的公式:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= \frac{\rho}{R \sin z} = \frac{RZ}{R \sin Z} = \frac{Z}{\sin Z} \\ P &= u_1 \cdot u_2 = \frac{Z}{\sin Z} \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \frac{a-b}{a+b} = \frac{Z - \sin Z}{Z + \sin Z} \end{aligned} \right\} \quad (4-33)$$

由于 $Z$ 恒大于 $\sin Z$ ,  $\therefore u_2 > u_1$ , 可知 $u_2 = a$ ,  $u_1 = b = 1$ 。

对于正轴等距离方位投影,只需将上式中的 $Z$ 换以 $90^\circ - \varphi$ ,  $\delta$ 换以 $\lambda$ , 便可写出:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \lambda \\ \rho &= RZ = R(90^\circ - \varphi) / \rho \\ x &= \rho \cos \delta = \frac{R}{\rho} (90^\circ - \varphi) \cos \lambda \\ y &= \rho \sin \delta = \frac{R}{\rho} (90^\circ - \varphi) \sin \lambda \\ u_1 &= 1, u_2 = \frac{Z}{\sin Z} = \frac{90^\circ - \varphi}{\cos \varphi} \\ P &= \frac{90^\circ - \varphi}{\cos \varphi} \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \frac{Z - \sin Z}{Z + \sin Z} = \frac{(90^\circ - \varphi) - \cos \varphi}{(90^\circ - \varphi) + \cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4-34)$$

当用此投影编制中国政区图、交通图以及各种数学用图时,投影中心宜选于:  $\varphi_0 = +30^\circ$ ,  $\lambda_0 = +105^\circ$ 。投影面切于投影中心点上,此时  $Z_K = 0^\circ$ 。本投影自投影中心向任一点的距离均保持正长,但在以投影中心为圆心的小圆即等高圈上具有最大的长度变形,并随着远离中心而逐渐增大。面积变形与长度变形等值,一般地区均为+2%,局部边缘地区为+3至+4.5%。绝大部分地区的最大角度变形为2°左右。

通常本投影也称波斯托投影。

## § 4-4 双重方位投影

由上节方位投影的基本公式中可知,等高圈的描写半径为  $\rho$ , 它和垂直圈长度比  $u_1$ 、等高圈长度比  $u_2$ 、面积比  $P$  和角度最大变形  $\omega$  一起均系天顶距  $Z$  的函数,但起着主导作用的是  $\rho$ 。显而易见的是各种方位投影的差别取决于等高圈描写半径  $\rho$  的形式,若依如下次序排列便可根据  $\rho$  的变化找出导致  $u_1$  值增大或缩小的关系。现将上面学过的几种透视和非透视方位投影集中在一起,然后进行分析。

投 影 名	描 写 半 径	$\rho$ 与 $u$ 的 关 系
1. 球心投影	$\rho = R \operatorname{tg} Z$	$\rho$ 逐渐增长, $u_1$ 值也增大。
2. 球面投影(或等角投影)	$\rho = 2R \operatorname{tg} \frac{Z}{2}$	↑ (介于1,3之间)
3. 等距离方位投影	$\rho = RZ$	垂直圈描写后为等长。
4. 等面积方位投影	$\rho = 2R \sin \frac{Z}{2}$	↓ (介于3,5之间)
5. 正射投影	$\rho = R \sin Z$	$\rho$ 逐渐缩短, $u_1$ 值也缩小。

已知介于球心投影和正射投影之间的通用透视公式为:

$$\rho = \frac{R(D+R)\sin Z}{D+R\cos Z}$$

这就表明如欲设计一种新的方位投影,就必须在上列几种方位投影的  $\rho$  之外另取一个新的  $\rho$  值作为投影半径,由此得出了一种新的设想方案,即采用所谓双重方位投影的方法便能推导出新的计算公式,显然  $\rho$  值是与前不同的。

双重方位投影是设想对制图区域进行两次描写,例如首先采用具有最长等高圈投影半径的球心投影,将地球表面上的某点描写于一个辅助曲面上,然后再采用具有最短等高圈投影半径的正射投影,将辅助曲面上的表象二次描写到投影平面上去,此时即可获得介于球心和正射投影之间的新的方位投影。至于辅助曲面可以任选,为了使第二次描写能适用于透视投影,所以仍可使用球面作为辅助面。在双重方位投影中,两次描写均可各选透视或非透视方位投影,更可交错使用,但辅助球面必须与地球表面的投影中心点上相切。

如图4-8,  $A$  点是以  $O$  为球心的地面点,其球面极坐标为  $Z, a$ 。所取之辅助球面的球心为  $O_1$ , 它与地球表面同切于投影中心  $P$ 。  $E$  为与地球相切的投影平面。先用球心投影的方法将表面上的  $A$  点描写到  $E$  平面上得  $A^1$  点,然后再用正射投影的方法将  $A$  点描写于  $E$  平面上得  $A^2$  点。至于  $A$  点在辅助球面上的投影点先后为  $A_1$  和  $A_2$ 。



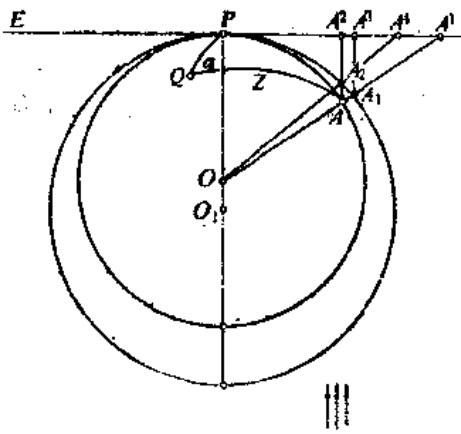


图4-8

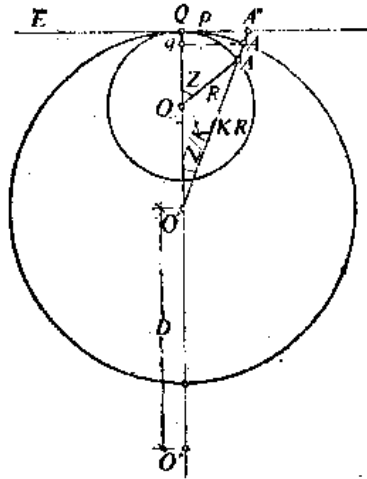


图4-9

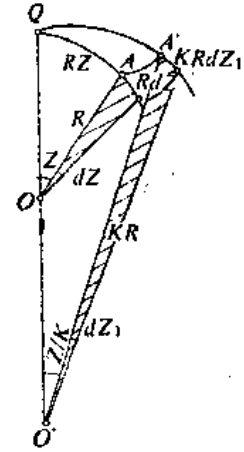


图4-10

双重方位投影之步骤为：将辅助球面上的 $A_1$ 点按正射投影法描写到平面上得 $A^3$ ，此点即为地面点 $A$ 在 $E$ 平面上的双重描写点，由于它是先球心后正射投影所构成，故称球心、正射双重方位投影。图中的 $A^3$ 位于 $A^1$ 和 $A^2$ 之间，可见此双重方位投影的性质介于球心和正射投影之间。若将双重描写的两种方法次序颠倒，所得结果是不同的，如在 $E$ 平面上的 $A^4$ ，即为辅助球面上 $A_2$ 点的球心投影的描写点，依其投影顺序应称为正射、球心双重方位投影。

现以双重方位投影中较有实际意义的等距离透视双重投影为例来说明该投影的特点。在图4-9中，地球的球体半径为 $R$ ，设辅助球体半径是地球半径的 $K$ 倍，故它为 $KR$ ，两球共切于投影平面上的 $Q$ 点， $A^1$ 即地面点 $A$ 以等距离投影法表示到辅助球体表面上的点位，结合图4-10，便可得出垂直圈长度比。

$$\frac{KRdZ_1}{RdZ} = 1$$

$$dZ_1 = \frac{1}{K} dZ$$

$$\int dZ_1 = \frac{1}{K} \int dZ$$

$$Z_1 = \frac{Z}{K} + C$$

当 $Z=0$ 时， $Z_1=0$ ， $C=0$

$$\therefore Z_1 = \frac{Z}{K}$$

由于透视方位投影的视点位于过投影中心并和投影面垂直的球体直径或其延长线上，如图上的 $O'$ ，和上节中设定的一样，从 $O'$ 到辅助球心的距离为 $D$ ，则由图4-9有

$$\frac{QA''}{QO'} = \frac{qA'}{qO'}$$

固  $QA'' = \rho$ ， $QO' = D + KR$ ， $qA' = KR \sin \frac{Z}{K}$ ， $qO' = D + KR \cos \frac{Z}{K}$

将有关各式代入上式得

$$\rho = \frac{KR(D+KR)\sin\frac{Z}{K}}{D+KR\cos\frac{Z}{K}} \quad (4-35)$$

同所有方位投影一样， $\delta = a$ 。至于长度比，面积比和最大角度变形的公式推求均与一般公式相同，其结果如下：

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{(KR+D)\left(KR+D\cos\frac{Z}{K}\right)}{\left(D+KR\cos\frac{Z}{K}\right)^2} \\ u_2 &= \frac{K(D+KR)\sin\frac{Z}{K}}{\left(D+KR\cos\frac{Z}{K}\right)\sin Z} \\ \sin\frac{\omega}{2} &= \left| \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \right| \end{aligned} \right\} \quad (4-36)$$

这种方位投影的特点是它含有两个变量 $K$ 和 $D$ ，当予以不同的值时，就能适当控制 $\rho$ 值的大小。例如当 $K=1$ ， $D=0$ 时，即为球心投影； $D=R$ 时，为球面投影，而 $D=\infty$ 时，则为正射投影。又如当 $R=\infty$ 时，不论 $D$ 为何值，均构成等距离方位投影。

见图4-11，先将半径为 $R$ ，球面极坐标为 $Z$ ， $a$ 的地面点 $A$ 用等距离方位投影的方法投影到半径为 $KR$ 的辅助球面上得出 $A_1$ 点， $K$ 应为正实数，两球相切在投影中心 $Q$ 点上。然后再用透视投影的方法，例如将 $A_1$ 点用球心投影方法在投影平面上描绘出 $A^1$ 点，此时视点位于辅助球体的球心 $O'$ 上。再用正射透视法，在投影平面上得到了 $A^2$ 点。

因第一次采用的是等距离投影，从图中可知 $QA = QA_1$ ，此时 $\angle QOA = Z$ 和 $\angle QOA' = \frac{Z}{K}$ 。第二次先采用球心投影，视点在 $O'$ 上，从 $\triangle QO'A^1$ 中得出：

$$\left. \begin{aligned} \rho &= QA^1 = KR \operatorname{tg} \frac{Z}{K} \\ \delta &= a \end{aligned} \right\} \quad (4-37)$$

若用 $D=0$ 代入(4-35)式，也能得出上式。

此即采用球心投影时得到的投影极坐标方程式，其平面直角坐标方程式为：

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta = KR \operatorname{tg} \frac{Z}{K} \cos a \\ y &= \rho \sin \delta = KR \operatorname{tg} \frac{Z}{K} \sin a \end{aligned} \right\} \quad (4-38)$$

当采用正射透视时，可看出 $A^1$ 点移到了 $A^2$ 点的位置，由于 $QA^2 = QA_1$

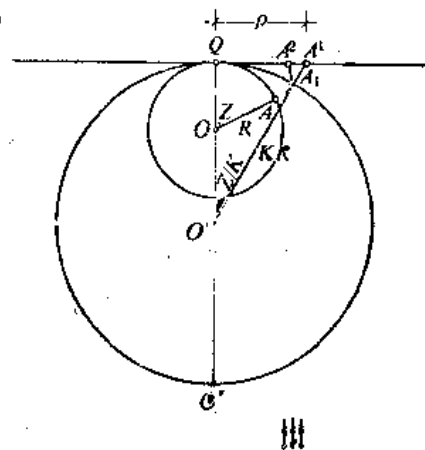


图4-11

$$\left. \begin{aligned} \therefore \rho &= QA^2 = KR \sin \frac{Z}{K} \\ x &= \rho \cos \delta = KR \sin \frac{Z}{K} \cos \alpha \\ y &= \rho \sin \delta = KR \sin \frac{Z}{K} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4-39)$$

上述两种投影方法的变形公式仍按同法计算，此处不再推演。

现在我们可以对这两种表达形式的双重方位投影的方程式进行分析。

1. 当  $K=1$  时，(4-37) 式的第一式变为  $\rho = R \operatorname{tg} Z$ ，为球心投影；
2. 当  $K=2$  时，(4-37) 式成为  $\rho = 2R \operatorname{tg} \frac{Z}{K}$ ，此即球面投影；
3. 当  $K=2$  时，(4-39) 式的第一式变为  $\rho = 2R \sin \frac{Z}{2}$ ，是等面积方位投影；
4. 当  $K=\infty$  时，则(4-39)式的第一式写成

$$\rho = KR \sin \frac{Z}{K} = KR \left( \frac{Z}{K} - \dots \right) = RZ, \text{ 显见此即等距离方位投影。}$$

由此可见，在双重方位投影中，当  $K$  赋以 1, 2 或  $\infty$  值时，出现了前所介绍的各类方位投影。当  $K$  赋予另外一些实数时，还可以得到许多其它临界于传统投影之间的新的方位投影。本章安排一些实际的算例可供参考。

## § 4-5 方位投影的变形分析及其应用

在透视和非透视方位投影的长度比公式中，当正轴时，沿经线和纬线的长度比均为纬度  $\varphi$  的函数，而在斜轴或横轴投影中，沿垂直圈或等高圈的长度比则是天顶距的函数，由此可以得出结论，方位投影的等变形线呈圆形即在正轴时与纬圈一致，斜轴和横轴时与等高圈一致。

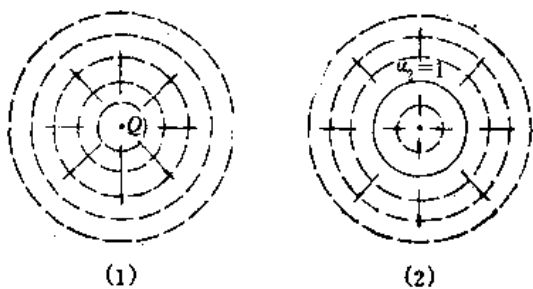


图4-12

参阅图4-12(1)和(2)，可以发现方位投影中变形增长的方向在切方位和割方位投影中是有所不同的，前者在切点Q上无变形，其变形随着远离Q点而增大，后者在所割小圆上的  $u_2 = 1$ ，其它变形均自所割小圆向内或向外递增。

由于方位投影适用于具有圆形轮廓的地区，只要结合实际地理位置便可知两极地区宜用正轴投影，赤道附近地区宜采用横轴投影，其它地理位置均可采用斜轴方位投影。

各种方位投影的特点各异，用途也不尽相同，例如等角方位投影具有等角性质以及地面圆投影后仍保持为圆的特性，虽然有较大的面积变形，但对于编制某些要求方向正确的自然地图（如气象图、洋流图、雷达测距图和航空路线图等）均为有效，所以在实用上有一定价值，我国及欧洲一些国家曾用它作为中、小比例尺的数学基础。美国当前采用的所谓通用极球面投影

(Universal Polar Stereographic Projection)实质上就是正轴等角割方位投影,它指定极点的长度比为0.994,用以编制两极地区的地图,我国编制的中华人民共和国全图曾采用斜轴等角割方位投影,比例尺为1:10 000 000。该图的投影中心选于 $\varphi_0 = 30^\circ\text{N}$ ,  $\lambda_0 = 105^\circ\text{E}$ ,投影面割于离投影中心 $Z_K = 15^\circ$ 的小圆上。

等面积方位投影在编制小比例尺东、西半球地图中应用较多。例如在各国编制的世界地图集中,经常采用横轴投影来表示东、西半球的地理区域;投影中心的位置大都选在 $\varphi_0 = 0^\circ$ 和 $\lambda_0$ 等于离零子午线 $\pm 70^\circ$ 之处即 $70^\circ\text{E}$ 或 $110^\circ\text{W}$ 。对于中国全图也曾提出采用斜轴等面积方位投影的方案,投影中心选择在 $\varphi_0 = 30^\circ\text{N}$ 和 $\lambda_0 = 105^\circ\text{E}$ 处,投影面切于中心点上。我国1969年编制的比例尺为1:1 200万的中华人民共和国分省新图中,主图采用此类投影。

不少世界地图集中编制的南北极图均采用正轴等距离方位投影,东、西半球图则采用横轴投影。为了满足特殊工作的需要,可以编制以特定点为中心的斜轴等距离方位投影,此时从中心点向任何点测定的距离和方位角都是正确的,所以不少交通图、航空图、气象和地震监测图都采用此投影,在编制中国政区图及各种教学用图中也有选用等距离方位投影的。此外,等距离投影专门用来表示纬线投影后呈等间隔状的一类投影,因为从投影中心或通过投影中心测得的大圆距离是合乎真比例尺的。

至于透视投影中的球心投影多用于编制航空图或航海图,因为它的特点是任一大圆投影后均为直线。在实际工作中,一般都采用图解法先定出航空线路上起终点的大圆航线位置,然后用直线连接便成为大圆弧的投影,至此,该直线和其它邻近经纬线的交点即为大圆航线应通过之点。球心投影的缺点在于不能同时表示出半球的位置,并且其变形随着远离投影中心而剧增,解决的办法是选用多个不同的投影中心即几套不同的横轴或斜轴投影的经纬线格网以供使用。外心投影则因近代航天技术的发展,人卫像片的获取及其在制图领域中的广泛应用,使该投影逐步成为空间透视投影的基础。由于正射投影的视点位于无穷远处,所以它很少用于编制地图,但人们常用以编制星球图,那是考虑到自地球观察宇宙空间天体的情况完全与正射投影的设想是一致的。

## 思 考 题

1. 透视方位投影的概念是什么?有几类透视方位投影,简述之。
2. 如何导出方位投影中求长度比 $u_1$ 和 $u_2$ 的公式?
3. 在透视方位投影求直角坐标 $x$ 和 $y$ 的公式中,各符号表示什么?实际工作中是如何运算的?
4. 等角投影中已知 $\rho = K \operatorname{tg} \frac{Z}{K}$ ,  $K$ 为积分常积,如何求出?当 $Z_K = 0^\circ$ 时, $\rho$ 与 $u$ 各为何值?
5. 试述双重方位投影的设想及其意义。
6. 试对切、割方位投影作变形分析。

## 方位投影计算实例

### 斜轴等角方位投影

1. 制图区域:  $B_S = 4^\circ$ 、 $B_N = 56^\circ$   
 $L_W = 70^\circ$ 、 $L_E = 140^\circ$
2. 投影中心:  $B_0 = 30^\circ$ 、 $L_0 = 105^\circ$
3. 经纬线间隔:  $\Delta B = \Delta L = 5^\circ$
4. 制图比例尺:  $\frac{1}{M_0} = 1 : 10\,000\,000$
5. 投影面割于离投影中心  $Z_K = 15^\circ$  的小圆上。

## 计算题

### 题目: 横轴等角方位投影的计算

1. 制图区域:  $\varphi: 0^\circ \text{---} 15^\circ$   
 $\lambda: 40^\circ \text{---} 100^\circ$
2. 投影中心:  $\varphi_0 = 0^\circ$ 、 $\lambda_0 = 70^\circ$
3. 经纬线间隔:  $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 5^\circ$
4. 计算公式:

$$\rho = 2R \operatorname{tg} \frac{Z}{2}, \quad \delta = \alpha,$$

$$x = \rho \cos \delta, \quad y = \rho \sin \delta,$$

$$u_1 = u_2 = u = \sec^2 \frac{Z}{2}, \quad \rho = u_1 \cdot u_2 = \sec^4 \frac{Z}{2}.$$

$$\text{比例尺: } \frac{1}{M_0} = 1 : 10\,000\,000$$

$$\text{球体半径: } R = 6\,371\,118 \text{ m}$$

$$\frac{2R}{M_0} \times 100 = 127.4224 \text{ cm}$$

$$\cos Z = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_0 \operatorname{csc}(\lambda - \lambda_0) - \sin \varphi_0 \operatorname{ctg}(\lambda - \lambda_0)$$

5. 计算精度:

$Z, \alpha$ 以秒为单位,  $\rho, x, y$ 以cm为单位,算至小数后三位;  $u, P$ 小数点后四位; 所有函数值均算至小数点后七位。

6. 计算  $x, y$  和  $u, P$ 。计算表格可采用上面计算实例的格式, 也可采用如下简易的表格记录格式。

7. 将经纬网略图和长度比、面积比的变化曲线绘于另纸上。

计算表一

$B \cdot$	$\sin B$	$\cos B$	$\operatorname{tg} B$	$L - l_0$	$\cos(L - L_0)$	$\frac{1}{\sin(L - L_0)}$	$\operatorname{ctg}(L - L_0)$
30	0.5000000	0.8660254	0.5773503	0	1.0000000	11.4737132	11.4300523
35	0.5735764	0.8191520	0.7002075	5	0.9961947	5.7687705	5.6712818
40	0.6427876	0.7660444	0.8390986	10	0.9848078	3.8637033	3.7320508
45	0.7071068	0.7071068	1.0000000	15	0.9659258	2.9238044	2.7474774
50	0.7660444	0.6427876	1.1917536	20	0.9398926	2.3882016	2.1445069
55	0.8191520	0.5735764	1.4281483	25	0.9083078	2.0000000	1.7320508
60	0.8660254	0.5000000	1.7320508	30	0.8660254	1.7434468	1.4281480

$\cos Z = \sin B \sin B_0 + \cos B \cos B_0 \cos(L - L_0)$   
 $\operatorname{ctg} a = \operatorname{tg} B \cos B_0 \operatorname{csc}(L - L_0) - \sin B_0 \operatorname{ctg}(L - L_0)$

$B_0 = 30^\circ$   
 $\sin B_0 = 0.5000000$   
 $\cos B_0 = 0.8660254$

$R = \sqrt{MN} = 6367518 \text{ m } (B_0 = 30^\circ \text{ 处})$

$Z_K = 15^\circ \quad \cos \frac{Z_K}{2} = 0.9914449 \quad K = 2R \cos^2 \frac{Z_K}{2} = 12518067.92 \text{ m}$

$\frac{Z_K}{2} = 7.5^\circ \quad \cos^2 \frac{Z_K}{2} = 0.9829629 \quad 1: M_0 = 1: 10000000$

计算表二

$B$	$L - L_0$	$Z$			$\sigma(\delta)$		$(K \operatorname{tg} \frac{Z}{2})$ $\rho$ (m)	$(\rho \cos \delta)$ (cm)	$(\rho \sin \delta)$ (cm)	$(\cos^2 \frac{Z_K}{2} \operatorname{sec}^2 \frac{Z}{2})$ $\mu_{1, \mu_2}$	$(\mu^2)$ $P$	$\alpha$
		$\frac{Z}{2}$	$\operatorname{tg} \frac{Z}{2}$	$\sec^2 \frac{Z}{2}$	$\cos \delta$	$\sin \delta$						
30	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0.9830	0.9663	0
	5	2°09'54"	0.0378030	1.0014281	0.0218246	0.9997618	473214.013	0.103	4.731	0.9844	0.9690	0
	10	4°19'44"	0.0755975	1.0057301	0.0437017	0.9990496	947386.446	0.414	9.467	0.9886	0.9773	0
	15	6°29'26"	0.1137686	1.0129433	0.0658842	0.9978405	1424163.002	0.935	14.211	0.9957	0.9914	0
	20	8°38'57"	0.1521136	1.0231989	0.0878229	0.9961361	1904168.378	1.672	18.968	1.0057	1.0114	0
	25	10°48'13"	0.1908255	1.0364144	0.1101726	0.9939125	2388766.570	2.632	23.742	1.0188	1.0379	0
	30	12°57'09"	0.2299951	1.0528978	0.1327882	0.9911444	2870094.283	3.823	28.536	1.0350	1.0711	0
	35	15°05'42"	0.2697271	1.0727527	0.1557262	0.9878003	3376462.157	5.258	33.353	1.0545	1.1119	0
35	0	2°20'00"	0.0436609	1.0009527	1	0	546550.667	5.466	0	0.9839	0.9681	0
		6°32'19"			88°44'58"							

续表二

B	$\Delta L$	Z			$\alpha(\delta)$		$(K \lg \frac{Z}{2})$ (m)	$(\rho \cos \delta)$ (cm)	$(\rho \sin \delta)$ (cm)	$(\cos^2 \frac{Z}{2} K \sec \frac{2Z}{2})$ $u_1, u_2$	$P$ ( $u^2$ )	$\omega$
		$\frac{Z}{2}$	$\lg \frac{Z}{2}$	$\sec^2 \frac{Z}{2}$	$\cos \delta$	$\sin \delta$						
5		3°16'10"	0.0571228 9°47'49"	1.0032830	0.0218246 87°29'43"	0.9997018	5.571	4.483	0.9862	0.9725	0	
10		4°53'55"	0.0857027 13°35'06"	1.0073449	0.0437017 86°14'02"	0.9993446	5.887	8.969	0.9902	0.9805	0	
15		6°47'33"	0.1191106 17°33'29"	1.0141873	0.0653842 84°57'42"	0.9978405	6.418	13.458	0.9969	0.9938	0	
20		8°46'45"	0.1544326 21°36'27"	1.0238494	0.0878229 83°40'28"	0.9961361	7.168	17.954	1.0068	1.0129	0	
25		10°48'14"	0.1908273 25°41'24"	1.0364150	0.1101726 82°22'09"	0.9939125	8.143	22.457	1.0188	1.0379	0	
30		12°50'42"	0.2280211 29°47'04"	1.0519836	0.1327882 81°02'28"	0.9911444	9.352	26.908	1.0341	1.0693	0	
35		14°53'32"	0.2659345 10°00'00"	1.0707211	0.1557262 0	0.9878003	10.805	31.488	1.0525	1.1077	0	
40		5°00'00"	0.0874887 10°48'04"	1.0076543	1 38°49'33"	0	10.952	0	0.9905	0.9811	0	
5		5°24'02"	0.0945386 12°54'30"	1.0089375	0.7790563 56°43'00"	0.6269540	11.068	4.216	0.9917	0.9836	0	
10		6°27'15"	0.1131247 15°48'12"	1.0127872	0.5487810 64°30'10"	0.8359661	11.377	8.432	0.9955	0.9910	0	
15		7°54'06"	0.1387905 19°07'34"	1.0192.28	0.4304664 68°14'08"	0.9026066	11.911	12.649	1.0019	1.0038	0	
20		9°33'47"	0.1684753 22°41'00"	1.0283839	0.3707893 70°04'09"	0.9287170	12.664	16.864	1.0109	1.0218	0	
25		11°20'30"	0.2005751 26°22'20"	1.0402304	0.3408868 70°52'50"	0.9401043	13.642	21.078	1.0225	1.0455	0	
30		13°11'10"	0.2342923 30°08'12"	1.0548929	0.3276310 71°03'38"	0.9448061	14.853	25.289	1.0369	1.0752	0	
35		15°04'06"	0.2692274 15°00'00"	1.0724834	0.3245703 0	0.9458616	16.306	29.495	1.0546	1.1122	0	
45		7°30'00"	0.1316525 15°30'27"	1.0173324	1 13°19'36"	0	16.480	0	1	1	0	
5		7°45'14"	0.1361605 16°56'15"	1.0185397	0.9730715 24°55'39"	0.2605037	16.586	3.929	1.0012	1.0024	0	
10		8°28'18"	0.1488946 19°04'50"	1.0221696	0.5068411 34°02'43"	0.4214728	16.902	7.856	1.0048	1.0095	0	
15		9°32'25"	0.1680658 21°43'17"	1.0282461	0.8285960 40°48'14"	0.5598471	17.432	11.778	1.0107	1.0216	0	

表二

B	eL	Z			a(δ)		P (m)	x (cm)	y (cm)	u, u <sub>2</sub>	P	ω
		Z/2	tgZ/2	sec <sup>2</sup> Z/2	cosδ	sinδ						
50	20	10°51'38"	0.1918572	1.0368092	0.7569501	0.6534726	2401681.660	18.180	15.694	1.0191	1.0387	0
	25	12°20'50"	0.2188355	1.0479152	0.6988102	0.7153072	2740148.964	19.148	19.600	1.0301	1.0610	0
	30	13°56'34"	0.2482676	1.0616368	0.6546537	0.7559289	3107830.410	20.346	23.493	1.0435	1.0890	0
	35	15°36'37"	0.2793972	1.0780628	0.5226866	0.7824712	3497512.969	21.779	27.367	1.0597	1.1230	0
55	0	10°00'00"	0.1763270	1.0310912	1	0	2207273.195	22.076	0	1.0135	1.0272	0
	5	10°10'34"	0.1794950	1.0322185	0.9869407	0.1510841	2246921.161	22.173	3.619	1.0146	1.0295	0
	10	10°41'09"	0.1886967	1.0356065	0.9519371	0.3062937	2362118.563	22.486	7.235	1.0180	1.0362	0
	15	11°29'02"	0.2031594	1.0412737	0.9045603	0.4263456	2543162.844	23.004	10.842	1.0235	1.0476	0
	20	12°30'45"	0.2219261	1.0492512	0.8543433	0.5197091	2778085.539	23.734	14.428	1.0314	1.0637	0
	25	13°43'03"	0.2440941	1.0595819	0.8076898	0.5896076	3035585.186	24.680	18.016	1.0415	1.0848	0
	30	15°03'08"	0.2689259	1.0723211	0.7677359	0.6407665	3366432.527	25.845	21.571	1.0541	1.1110	0
	35	16°28'54"	0.2958645	1.0875358	0.7354219	0.6776095	3703652.018	27.237	25.096	1.0690	1.1428	0
	0	12°30'00"	0.2216947	1.0491485	1	0	2775185.938	27.752	0	1.0313	1.0635	0
	5	12°37'39"	0.2240309	1.0501898	0.9931118	0.1171702	2804434.207	27.851	3.286	1.0223	1.0655	0
	10	13°00'08"	0.2309075	1.0533183	0.9738549	0.2271711	2890515.999	28.149	6.566	1.0354	1.0720	0
15	13°36'08"	0.2419652	1.0585472	0.9458087	0.3247244	3028935.734	28.648	9.836	1.0405	1.0827	0	
20	14°23'51"	0.2567071	1.0658985	0.9133042	0.4072780	3213477.133	29.349	13.088	1.0477	1.0978	0	
25	15°21'17"	0.2745961	1.0754030	0.8601670	0.4746642	3437412.739	30.255	16.316	1.0571	1.1174	0	
30	16°26'34"	0.2951259	1.0870903	0.8191239	0.5281937	3694405.092	31.370	19.514	1.0686	1.1419	0	
35	17°38'00"	0.3173580	1.1010337	0.8217855	0.5697970	3978967.582	32.699	22.672	1.0823	1.1713	0	



续表二

B	$\Delta L$	Z			$\alpha(\delta)$		$\rho$ (m)	x (cm)	y (cm)	$\mu_{1.42}$	$\bar{p}$	$\omega$
		Z/2	$\text{tg} Z/2$	$\text{sec}^2 Z/2$	$\cos \delta$	$\sin \delta$						
0		15°00'00"	0.2679492	1.0717968	1	0	3354206.302	33.542	0	1.0535	1.1099	0
5		15°05'39"	0.2697110	1.0727440	0.9962377	4°58'18"	3376260.829	33.636	2.926	1.0545	1.1119	0
10		15°22'22"	0.2749338	1.0755886	0.9854724	9°46'42"	3441640.703	33.916	5.845	1.0573	1.1173	0
15		15°59'30"	0.2834413	1.0803389	0.9691116	14°16'40"	3548136.987	34.385	8.751	1.0619	1.1257	0
20		16°26'05"	0.2949725	1.0870088	0.9490597	18°22'00"	3692486.987	35.044	11.835	1.0685	1.1417	0
25		17°10'58"	0.3092199	1.0956170	0.9272869	21°59'03"	3870836.227	35.894	14.490	1.0770	1.1598	0
30		18°02'55"	0.3268633	1.1061869	0.9055079	25°06'30"	4079179.608	36.937	17.309	1.0873	1.1823	0
35		19°00'50"	0.3445954	1.1187460	0.8860289	27°44'42"	4313668.354	38.177	20.082	1.0997	1.2093	0

$\varphi$	$\lambda$	70°	65° 75°	60° 80°	55° 85°	50° 90°	45° 95°	40° 100°
	$\Delta\lambda$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°
0°	$Z/2$ $\text{tg} Z/2$ $\frac{\rho}{\delta(\Delta\lambda)}$ $\cos\delta$ $\sin\delta$ $x$ $y$							
5°	$Z/2$ $\text{tg} Z/2$ $\frac{\rho}{\delta(\Delta\lambda)}$ $\cos\delta$ $\sin\delta$ $x$ $y$							
10°	$Z/2$ $\text{tg} Z/2$ $\frac{\rho}{\delta(\Delta\lambda)}$ $\cos\delta$ $\sin\delta$ $x$ $y$							
15°	$Z/2$ $\text{tg} Z/2$ $\frac{\rho}{\delta(\Delta\lambda)}$ $\cos\delta$ $\sin\delta$ $x$ $y$							
0°	$\sec Z/2$ $u$ $P$							
5°	$\sec Z/2$ $u$ $P$							
10°	$\sec Z/2$ $u$ $P$							
15°	$\sec Z/2$ $u$ $P$							

### 编程示例

#### 源程序

```

50:A=6378245:D=63
56863:E=(A^2-D
^2)/A^2:PD=180/π
51:F=√(1-E*SIN B^
2):M=A*(1-E)/F

```

```

^3:N=A/F:R=√(M
•N):RB=A•COS B
/F:RETURN
52:INPUT "Bo=";Bo
53:INPUT "Lo=";Lo

```

```

54:INPUT "Bs=", BS,
    "Bn=", BN, "Lw=",
    LM, "Le=", LE:
    RETURN
55:B0 = DEG B0
56:L0 = DEG L0
57:BS = DEG BS:BN =
    DEG BN:DB = BN - BS
58:LW = DEG LW:LE =
    DEG LE:DL = LE - LW
59:RETURN
69:GOSUB 52
70:INPUT "ds=", DS:
    DS = DEG DS
71:INPUT "Mo=", M0:
    B2 = BN: L2 = LE:
    RETURN
72:IF L0/DS = INT
    (L0/DS)LET L1 = L0
    :GOTO 74
73:L1 = INT (L0/DS)
    * DS
74:IF BS/DS = INT
    (BS/DS)LET B1 = BS:
    DL = L - L0: RETURN
75:B1 = INT(BS/DS)
    * DS:DL = L - L0:
    RETURN
80:CZ = SIN B * SIN B
    0 + COS B * COS B0
    * COS DL:Z = ACS
    CZ
82:SC = SIN B * COS B
    0 - COS B * SIN B0
    * COS DL
84:SS = COS B * SIN DL
85:IF SC = 0LET AR =
    0:RETURN
86:TR = SS/SC:AR =
    ABS ATN TR
94:IF B<B0AND L>=
    L0LET AR = 180 + AR:
    RETURN
96:IF B<B0AND L<L
    0LET AR = 180 + AR:
    RETURN
98:IF B>= B0AND L<
    L0LET AR = 360 - AR
100:RETURN
101:REM "SUB DUT
    PUT FORM"
102:GRAPH:ROTATE
    1:CSIZE 2:YY = 0:
    NN = 1:GOSUB 122
104:GLCURSOR(185,
    -125):LPRINT W
    $:GLCURSOR(165,
    -150):LPRINT
    "(, X$, " ",
    Y$, ")", Z$
106:GLCURSOR (90, -
    75):LPRINT
    USING , "Bs=", BS:
    GLCURSOR (70,
    -75):LPRINT
    Bn=", BN
107:GLCURSOR (50,
    -75):LPRINT "Lw=",
    LW:GLCURSOR
    (30, -75):
    LPRINT "Le=", LE
108:IF X$ = "GU"OR U
    S = "00"RETURN
109:GLCURSOR (110,
    -250):LPRINT
    "Bo=", B0
110:GLCURSOR (90,
    -250):LPRINT
    "Lo=", L0:IF X$ = "
    GU"RETURN
112:GLCURSOR (50,
    250):LPRINT
    "ds=", DMS DS
113:GLCURSOR (30, -
    250):LPRINT "m
    = 1:", M0
114:E4 = 5E - 4:E5 = 5E -
    5:A$ = "#####.##

```

```

#:"B$ = "####,##
##:"C$ = "####"
116:CSIZE 1:GOSUB
120:PP=1:GOSUB
124:RETURN
120:YY = YY - 450
122:LINE (150,YY)-
(50,YY),1:
RETURN
124:IF YY = -1800
GLCURSOR (0,-1
800):SORGN:YY
= 0
125:GLCURSOR (10,
YY - 225):LPRINT
USING , PP
126:GLCURSOR(200,
YY - 40):IFX$ =
"GU"RETURN
127:IF DS<>INT DS
LET C$ = "####.#
#:"LPRINT"
B L ", :GOTO
129
128:LPRINT " B
L",
129:LPRINT " Xcm
Ycm
U1 U2
P
W":RETURN
134:GLCURSOR(200-
NN*18,YY-30):
LPRINT USING C
$, DMS B, " ",
DMS L:IF X$ = "G
U"RETURN
136:LPRINT USING A
$, XC+EX, YC+EY,
USING B$, U1+E5,
U2+E5, P+E5, W+
E5
138:NN-NN+1:IF NN=
1:LET PP=PP+1:

```

```

GOSUB 120:
GOSUB 124:NN=1:
RETURN
140:RETURN
181:"SUB,"FA=SD+R*
COS Z:X=SL*R*
SIN Z* COS AR/F
A:Y=SL*R*SIN Z
*SIN AR/FA
183:U1=SL*(SD* COS
Z+R)/FA^2:U2=S
L/FA
185:P=U1*U2
187:W=DMS (ASN(ABS)
U1-U2)/(U1+U2))
*2):RETURN
189:X=P0* COS DR:Y=
P0* SIN DR:
GOSUB 185:
RETURN
190:IF B=B1AND L=L
1LET X0=X:Y0=Y
191:X=X-X0:Y=Y-Y0
192:XC=X/M0*100:YC
=Y/M0*100
194:EX=E4*SGN X:EY
=E4*SGN Y:
RETURN
200:"S"CLEAR:REM
"AZIMUTHAL PRO
J."
202:W$ = "AZIMUTHAL
PROJ. ":INPUT
"Y$ =", Y$:GOSUB
69
204:IF Y$ = "EAN"OR
Y$ = "EAR"OR Y$ =
"ED"LET X$ = "NP":
INPUT "Zk=",
K:Z$ = "Zk=" +
STR$ K:ZK=DEG
K:GOTO 212
206:IF Y$ = "EG"OR Y
$ = "EO"LET X$ =

```

```

*BA*:INPUT "K=";
K:Z$="k="+
STR$ K:GOTO 212
208:X$="PP":IF Y$="
"EX"INPUT "s=";
S:Z$="s="+
STR$ S
212:GOSUB 101:
GOSUB 55:B=B0:
GOSUB 50:GOSUB
72
213:B=B1
214:L=L1
215:DL=L-L0:GOSUB
80:GOTO X$
219:"PP"GOTO Y$
220:"EX"SD=S+R:SL=
S+2*R:GOTO 226
221:"GN"SD=0:SL=R:
GOTO 226
222:"ST"SD=R:SL=2*
R:GOTO 226
224:"OR"X=R*SIN Z*
COS AR:Y=R*SIN
Z*SIN AR:U1=
COS Z:U2=1:
GOSUB 185:GOTO
250
226:GOSUB 181:GOTO
250
230:"NP"DR=AR:GOTO
Y$
232:"EAN"PO=2*R*
COS (ZK/2)^2*
TAN (Z/2):U1=
COS (ZK/2)^2*1
/COS (Z/2)^2:U2
=U1:GOTO 238
234:"EAR"PO=2*R*
SIN(Z/2):U2=1
/COS(Z/2):U1=
1/U2:GOTO 238
236:"ED"PO=R*Z/PD:
U1=1:IF Z=0LET
U2=1:GOTO 238
237:U2=Z/(SIN Z*PD)
238:GOSUB 189:GOTO
250
240:"BA"DR=AR:GOTO
Y$
242:"EG"FO=K*R*TAN
(Z/K):U1=1/COS
(Z/K)^2:IF Z=0:
LET U2=1:GOTO
246
243:U2=(K*TAN (Z/K
))/SIN Z:GOTO
246
244:"EO"PO=K*R*SIN
(Z/K):U1=COS
(Z/K):IF Z=0LET
U2=1:GOTO 246
245:U2=(K*SIN (Z/K))/
SIN Z
246:GOSUB 185:
GOSUB 189
250:GOSUB 190:
GOSUB 134
252:L=L+DS:IF L<=L
2GOTO 215
254:B=B+DS:IF B<=B
2GOTO 214
256:END
STATUS 1

```

2730

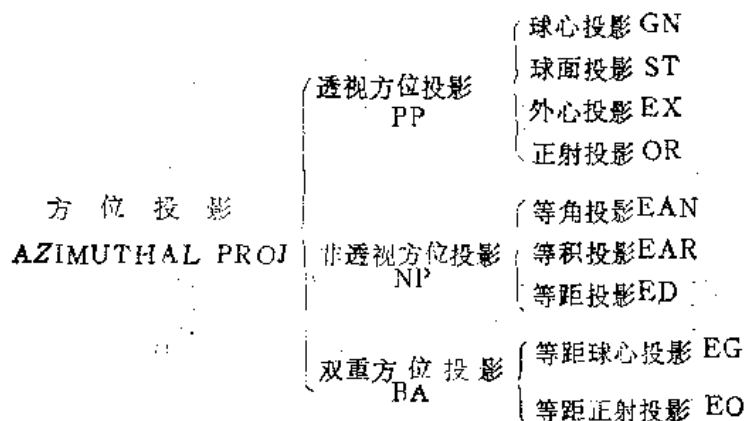
## 二、程序功能

本程序能解决方位投影这一个大类的投影计算，其中包含透视方位投影(PP)、非透视方位投影(NP)及双重方位投影(BA)三个中类，它涉及九个小类的投影计算问题。

## 三、各类投影命名原则

大类各赋以W\$，中类及小类均取其英文缩写字母为名赋入控制变量X\$及Y\$中，并

将其名作为标号，列入程序内作为多路分支的入口目标，此时各标号即可当作各类投影计算的入口目标。其分支详见下表：



#### 四、主要标识符

存储名	X\$, Y\$	B	L	BO	LO	(投影区域经纬度)BS, BN, LW, LE	DS	MO	AR						
变量名	控制变量	纬度	经度	P <sub>0</sub>	L <sub>0</sub>	(计算范围经纬度)B <sub>1</sub> , B <sub>2</sub> , L <sub>1</sub> , L <sub>2</sub>	经纬度差	比例尺分母	a						
Z	NN	PP	X	Y	XO	YO	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	P	W	ZK	S	K	DR	PO
Z	成果序号	负号	x	y	x <sub>0</sub>	y <sub>0</sub>	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	P	ω	Z <sub>K</sub>	S	k	δ	ρ

#### 五、实例

球面投影(PP ST)的计算实例

1. 起动: DEF S
2. 输入: Y\$, B<sub>0</sub>, L<sub>0</sub>, B<sub>S</sub>, B<sub>N</sub>, L<sub>W</sub>, L<sub>E</sub>, ds, m
3. 输出: 见下表

AZIMUTHAL PROJ. (PP ST)							
		$B_S = 4^{\circ}00'$		$L_0 = 30^{\circ}00'$			
		$B_N = 56^{\circ}00'$		$L_0 = 105^{\circ}00'$			
		$L_W = 70^{\circ}00'$		$d_s = 5$			
		$L_E = 140^{\circ}00'$		$m = 1:100\,000\,00$			
B	L	X (cm)	Y (cm)	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	p	ω
0	105	0.000	0.000	1.0718	1.0718	1.1487	0.0000
0	110	0.070	5.959	1.0737	1.0757	1.1528	0.0000
0	115	0.280	11.935	1.0794	1.0794	1.1651	0.0000
0	120	0.633	17.847	1.0890	1.0890	1.1860	0.0000
0	125	1.135	24.014	1.1027	1.1027	1.2159	0.0000
0	130	1.781	30.154	1.1205	1.1205	1.2556	0.0000
0	135	2.612	36.386	1.1429	1.1429	1.3061	0.0000
0	140	3.610	42.731	1.1700	1.1700	1.3689	0.0000
5	105	5.891	0.000	1.0491	1.0491	1.1007	0.0000
5	110	5.969	5.810	1.0510	1.0510	1.1045	0.0000
5	115	6.204	11.636	1.0564	1.0564	1.1160	0.0000
5	120	6.600	17.484	1.0656	1.0656	1.1354	0.0000
5	125	7.181	23.400	1.0786	1.0786	1.1633	0.0000
5	130	7.896	29.371	1.0956	1.0956	1.2003	0.0000
5	135	8.814	35.423	1.1169	1.1169	1.2473	0.0000
5	140	9.928	41.574	1.1427	1.1427	1.3056	0.0000

B	L	X (cm)	Y (cm)	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	p	ω
10	105	11.668	0.000	1.0311	1.0311	1.0631	0.0000
10	110	11.754	5.645	1.0328	1.0328	1.0687	0.0000
10	115	12.012	11.303	1.0380	1.0380	1.0774	0.0000
10	120	12.445	16.989	1.0468	1.0468	1.0957	0.0000
10	125	13.059	22.717	1.0592	1.0592	1.1218	0.0000
10	130	13.862	28.499	1.0754	1.0754	1.1564	0.0000
10	135	14.865	34.352	1.0956	1.0956	1.2004	0.0000
10	140	16.080	40.290	1.1202	1.1202	1.2547	0.0000
15	105	17.357	0.000	1.0173	1.0173	1.0349	0.0000
15	110	17.449	5.462	1.0190	1.0190	1.0383	0.0000
15	115	17.727	10.936	1.0240	1.0240	1.0484	0.0000
15	120	18.192	16.433	1.0323	1.0323	1.0656	0.0000
15	125	18.852	21.964	1.0441	1.0441	1.0901	0.0000
15	130	19.714	27.542	1.0598	1.0598	1.1226	0.0000
15	135	20.789	33.177	1.0788	1.0788	1.1638	0.0000
15	140	22.083	38.882	1.1021	1.1021	1.2147	0.0000
20	105	22.982	0.000	1.0077	1.0077	1.0153	0.0000
20	110	23.079	5.263	1.0092	1.0092	1.0185	0.0000
20	115	23.373	10.535	1.0140	1.0140	1.0281	0.0000
20	120	23.866	15.826	1.0219	1.0219	1.0443	0.0000
20	125	24.563	21.144	1.0332	1.0332	1.0675	0.0000
20	130	25.474	26.499	1.0479	1.0479	1.0981	0.0000
20	135	26.608	31.899	1.0662	1.0662	1.1368	0.0000
20	140	27.978	37.352	1.0884	1.0884	1.1845	0.0000
25	105	28.563	0.000	1.0019	1.0019	1.0038	0.0000
25	110	28.665	5.047	1.0034	1.0034	1.0068	0.0000
25	115	28.972	10.101	1.0079	1.0079	1.0159	0.0000
25	120	29.466	15.168	1.0155	1.0155	1.0312	0.0000
25	125	30.214	20.256	1.0262	1.0262	1.0531	0.0000
25	130	31.163	25.370	1.0402	1.0402	1.0820	0.0000
25	135	32.343	30.517	1.0576	1.0576	1.1185	0.0000
25	140	33.766	35.703	1.0786	1.0786	1.1633	0.0000
30	105	34.123	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
30	110	34.228	4.812	1.0014	1.0014	1.0028	0.0000
30	115	34.545	9.631	1.0057	1.0057	1.0114	0.0000
30	120	35.075	14.457	1.0129	1.0129	1.0260	0.0000
30	125	35.825	19.297	1.0231	1.0231	1.0468	0.0000
30	130	36.801	24.154	1.0364	1.0364	1.0741	0.0000
30	135	38.013	29.031	1.0529	1.0529	1.1085	0.0000
30	140	39.473	33.931	1.0728	1.0728	1.1507	0.0000
35	105	39.664	0.000	1.0019	1.0019	1.0038	0.0000
35	110	39.791	4.561	1.0033	1.0033	1.0065	0.0000
35	115	40.113	9.124	1.0073	1.0073	1.0147	0.0000
35	120	40.658	13.691	1.0142	1.0142	1.0285	0.0000
35	125	41.416	18.265	1.0238	1.0238	1.0482	0.0000
35	130	42.465	22.846	1.0364	1.0364	1.0741	0.0000
35	135	43.637	27.436	1.0520	1.0520	1.1066	0.0000
35	140	45.116	32.033	1.0707	1.0707	1.1464	0.0000
40	105	45.265	0.000	1.0077	1.0077	1.0153	0.0000
40	110	45.373	4.289	1.0089	1.0089	1.0179	0.0000
40	115	45.697	8.570	1.0128	1.0128	1.0257	0.0000
40	120	46.241	12.868	1.0193	1.0193	1.0388	0.0000
40	125	47.007	17.157	1.0284	1.0284	1.0575	0.0000
40	130	48.002	21.444	1.0402	1.0402	1.0820	0.0000
40	135	49.234	25.728	1.0549	1.0549	1.1127	0.0000
40	140	50.712	30.006	1.0725	1.0725	1.1502	0.0000
45	105	50.889	0.000	1.0173	1.0173	1.0349	0.0000
45	110	50.997	3.997	1.0185	1.0185	1.0374	0.0000
45	115	51.319	7.992	1.0222	1.0222	1.0448	0.0000
45	120	51.858	11.983	1.0285	1.0285	1.0572	0.0000
45	125	52.618	15.966	1.0368	1.0368	1.0749	0.0000
45	130	53.604	19.940	1.0479	1.0479	1.0981	0.0000
45	135	54.822	23.900	1.0616	1.0616	1.1270	0.0000
45	140	56.279	27.841	1.0781	1.0781	1.1622	0.0000
50	105	56.579	0.000	1.0311	1.0311	1.0631	0.0000
50	110	56.684	3.682	1.0322	1.0322	1.0654	0.0000
50	115	56.988	7.360	1.0356	1.0356	1.0724	0.0000
50	120	57.527	11.031	1.0413	1.0413	1.0842	0.0000

$B$	$L$	$X$ (cm)	$Y$ (cm)	$U_1$	$U_2$	$F$	$\omega$
50	125	58.269	14.688	1.0493	1.0493	1.1009	0.0000
50	130	59.231	18.328	1.0596	1.0596	1.1227	0.0000
50	135	60.417	21.945	1.0723	1.0723	1.1498	0.0000
50	140	61.833	25.531	1.0875	1.0875	1.1827	0.0000
55	105	62.856	0.000	1.0491	1.0491	1.1007	0.0000
55	110	62.457	3.343	1.0502	1.0502	1.1028	0.0000
55	115	62.761	6.680	1.0533	1.0533	1.1094	0.0000
55	120	63.268	10.006	1.0585	1.0585	1.1205	0.0000
55	125	63.981	13.315	1.0659	1.0659	1.1361	0.0000
55	130	64.803	16.608	1.0754	1.0754	1.1564	0.0000
55	135	66.037	19.852	1.0871	1.0871	1.1817	0.0000
55	140	67.388	23.065	1.1010	1.1010	1.2122	0.0000

注：数据输出采用1号打印字体，且原设计为可装订成册的打印格式，现因排版有困难，故在计算实例中均经转抄后使用直列表的形式排出。



## 第五章 圆柱投影

### § 5-1 正轴圆柱投影的基本公式

圆柱投影是以可展曲面之一的圆柱面作为投影面，根据特定的条件，设想将地球椭球面上的经纬线投影于圆柱面上，并沿圆柱母线切开后展成平面的一种投影。在圆柱投影中，投影中心通常位于与椭球体相切的标准纬线（正轴时为赤道）和中央经线的交点处，当然投影中心周围区域的变形是最小的。

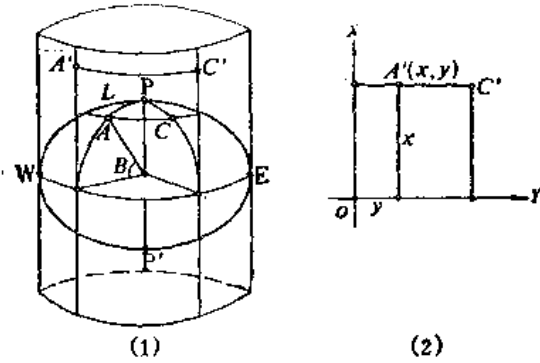


图5-1

若从几何意义上来察看，可认为圆柱投影为圆锥投影的一个特例，后者是以圆锥面作为投影面，我们可以设想将圆锥面的顶点延伸到无穷远处便形成了一个圆柱面。显然当圆柱面展开成平面以后，诸纬圈便形成了平行直线，此时由于相邻经线投影后其交角无限趋近并等于零，所以它也形成了一组平行直线。从图5-1(1)和(2)中可知，在正轴圆柱投影中，经纬

线表象均为平行直线，且互呈正交。在图中设过某点的经线在平面上的投影为X轴，赤道圈的投影为Y轴，两轴的交点即为平面直角坐标的原点。若椭球体上有一点A(B, L)，其在圆柱面上的投影相应地为A'(x, y)。由于纬线投影为平行于赤道的直线，故x坐标仅为纬度的函数，即： $x = f(B)$ ，经线投影为垂直于赤道的直线，并知相邻经线的间隔与相应的经度差成正比，所以y坐标和经度差也成正比，即 $y = al$ 。前式中的函数f取决于投影的性质，a为一常数，由后式可知，当圆柱面与地球赤道相切时 $y = al$ ，即 $\alpha = a$ ，此处a为地球椭球体的长半径。当采用割投影时，圆柱面相割于南北同名纬线上，此时常数a应小于a。

在上述正轴圆柱投影中，经纬线投影后呈正交状，故经纬线长度比即为极值长度比，此时 $m = a, n = b$ 或 $m = b, n = a$ 。

现参考前章中所述平面上微分线段表达式的一阶基本量的公式：

$$\left. \begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)^2 \\ F &= \left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (5-1)$$

因为

$$\left. \begin{aligned} x &= f(B) \\ y &= al \end{aligned} \right\} \quad (5-2)$$

所以

$$\frac{\partial y}{\partial B} = 0, \frac{\partial x}{\partial l} = 0$$

代入(5-1)式后便得

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)^2, G = a^2$$

由此关系式便可知沿经纬线长度比的公式为:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\sqrt{E}}{M} = \frac{dx}{MdB} \\ n &= \frac{\sqrt{G}}{r} = \frac{a}{r} \end{aligned} \right\} \quad (5-3)$$

继之,求面积比和最大角度变形的公式仍与前同,即 $P = mn = ab, \sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}$ 。将以上各式归纳在一起,便组成了解算圆柱投影的基本公式。若按变形的性质划分,圆柱投影可分为等角、等面积和等距离投影,其中以等角圆柱投影的应用为最广。

## § 5-2 等角圆柱投影

在等角圆柱投影中,其特点是微分圆的表象仍为圆形,此时某点上任一方向的长度比均相等,可认为无角度变形,按投影条件应满足

$$m = n$$

参考(5-3)式应有

$$\frac{dx}{MdB} = \frac{a}{r} \quad (5-4)$$

移项后并取积分

$$\begin{aligned} \int dx &= a \int \frac{MdB}{r} = a \int \frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2 B)} \cdot \frac{dB}{\cos B} \\ &= a \int \frac{(1-e^2 \sin B) - e^2 \cos^2 B}{(1-e^2 \sin^2 B) \cos B} dB \\ &= a \int \frac{dB}{\cos B} - a \int \frac{e^2 \cos B}{1-e^2 \sin^2 B} dB \end{aligned} \quad (5-5)$$

现令

$$\sin \psi = e \sin B$$

两边取微分

$$d \sin \psi = d(e \sin B)$$

$$\cos \psi d \psi = e \cos B dB$$

若以

$$1 - \sin^2 \psi = 1 - e^2 \sin^2 B = \cos^2 \psi$$

则(5-5)式中右边第二项可改写为:

$$a \int \frac{e^2 \cos B dB}{1 - e^2 \sin^2 B} = a \int \frac{e \cos \psi d \psi}{\cos^2 \psi} = a e \int \frac{d \psi}{\cos \psi}$$

再代回(5-5)式,得

$$\int dx = a \int \frac{dB}{\cos B} + a e \int \frac{d \psi}{\cos \psi}$$

积分后得

$$x = \alpha \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) - \alpha \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right) + C \quad (5-6)$$

上式中的C为积分常数，只有当 $B = 0^\circ$ （即位于赤道）时， $x = 0$ ， $\therefore C = 0$ 。

将(5-6)式归并后得

$$x = \alpha \ln \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right)} + C \quad (5-7)$$

令

$$U = \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right)} \quad (5-8)$$

最后可写出

$$x = \alpha \ln U + C \quad (5-9a)$$

在正轴切圆柱投影中，由于 $B = 0^\circ$ ，所以 $C = 0$ ，上式可化简为：

$$x = \alpha \ln U \quad (5-9b)$$

若化为以10为底的对数，上式可改变为：

$$x = \frac{\alpha}{\operatorname{Mod}} \lg U \quad (5-10)$$

式中  $\operatorname{Mod} = 0.4342945$

另一常数 $\alpha$ 可由下法确定，即设某纬度 $B_K$ 上的长度比 $n_K = 1$ ，则

$$n_K = \frac{\alpha}{r_K} = 1$$

$$\therefore \alpha = r_K \quad (5-11)$$

$r_K$ 可理解为所割纬线的半径，所以它就是割圆柱投影时的常数。如上述当 $B_K = 0^\circ$ 时， $\alpha = a$ 故可认为切圆柱投影常数 $\alpha$ 等于椭球体的赤道半径 $a$ 。位于切、割两种情况下等角圆柱投影的长度比公式可写成：

$$\left. \begin{array}{l} \text{切圆柱投影:} \\ \text{割圆柱投影:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} m = n = \frac{a}{r} \\ m = n = \frac{r_K}{r} \end{array} \quad (5-12)$$

现将等角圆柱投影的公式汇集于下：

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\alpha}{\operatorname{Mod}} \lg U, \quad y = \alpha l \\ m = n = \frac{\alpha}{r}, \quad P = m^2, \quad \omega = 0 \\ (\text{割投影 } \alpha = r_K, \text{ 切投影 } \alpha = a) \end{array} \right\} \quad (5-13)$$

根据(5-12)式，可计算得出切、割两种投影情况的变形表。

表5-1

B	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
切投影(m)	1.0000	1.0153	1.0638	1.1539	1.3036	1.5567	1.9950	2.9152	5.7400	$\infty$
割投影(m)	0.8668	0.8300	0.9220	1.0000	1.1279	1.3458	1.7291	2.5287	4.9752	$\infty$

从表中可见，在切圆柱投影中，赤道处无变形，长度变形随着纬度的增高而增大。在割

圆柱投影中，双标准纬线无长度变形（表中设割纬线的纬度  $B_x = \pm 30^\circ$ ），在标准纬线之间是负向变形，随着离开标准纬线愈远，变形也就愈大，在赤道上变形为最大。在标准纬线之外是正向变形，随着离开标准纬线愈远变形也愈大。

等角圆柱投影是16世纪荷兰地图学家墨卡托 (Mercator) 所创始，故又称墨卡托投影，该投影的特点是具有等角航线的性质，所以这类投影的地图在航空和航海方面广为应用。

等角航线是地面上两固定点之间的一条具有特殊性质的定位线，即在此两点间的与所有经线处处均构成相同方位角的一条曲线。当按等角航线航行时，可沿一固定方位由始点直至终点而不必变更方向，鉴于这种特征，其实用价值是显而易见的。我们可以通过求证该投影中的投影表象均为两点间的直线来表明等角航线的存在。

在图5-2(1)和(2)中， $ABC$ 所构成的三角形为一微分三角形，设等角航线的方位角为 $\alpha$ ，按正切公式可得

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{rdl}{MdB} = \frac{N \cos B dl}{MdB}$$

移项后

$$dl = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{dB}{\cos B}$$

两端取积分

$$\int_{L_1}^{L_2} dl = \operatorname{tg} \alpha \int_{B_1}^{B_2} \frac{M}{N} \cdot \frac{dB}{\cos B}$$

积分后得

$$L_2 - L_1 = \operatorname{tg} \alpha (\ln U_2 - \ln U_1) \quad (5-14)$$

此即椭球面上等角航线的方程式，式中

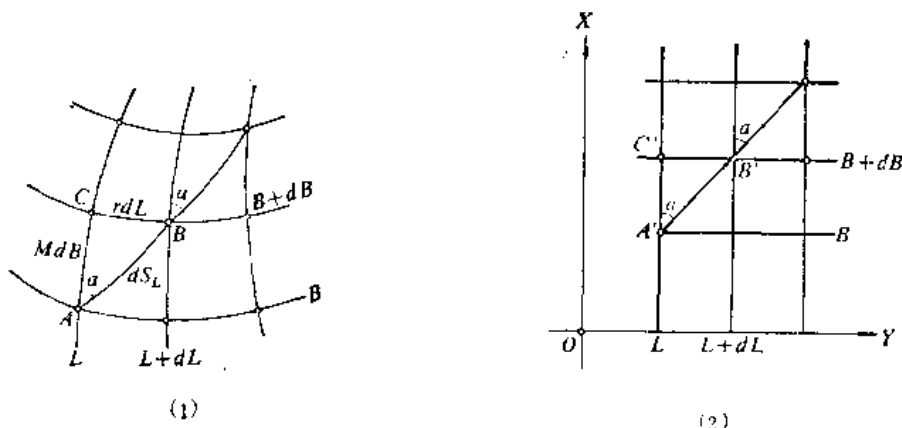


图5-2

$$U_1 = \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B_1}{2}\right)}{\operatorname{tg}^*\left(45^\circ + \frac{\psi_1}{2}\right)}; \quad U_2 = \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}^*\left(45^\circ + \frac{\psi_2}{2}\right)}$$

若将(5-14)式的两端各乘以 $\alpha$ 并移项后得

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\alpha L_2 - \alpha L_1}{\alpha \ln U_2 - \alpha \ln U_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (5-15)$$

( $\because x = \alpha \ln U; y = \alpha L$ )

上式显然是投影平面上的一个直线方程式，由此证明了两点间的等角航线在墨卡托投影中表现为与 $x$ 轴成等方位的直线。从图中也可知

$$dS_L = AB = \sqrt{M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B dl^2} = \sqrt{M^2 dB^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha M^2 dB^2} \\ = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot M dB = \operatorname{seca} \cdot M dB$$

两端积分后得

$$S_L = \operatorname{seca} \int_{B_1}^{B_2} M dB \quad (5-16)$$

式中的  $\int_{B_1}^{B_2} M dB$  即为两点纬度  $B_1$  和  $B_2$  之间的子午线弧长，可由《制图用表》中直接查得。此处  $\alpha$  为等角航线的方位角。

由此可知，在墨卡托投影的地图上，一旦确定了航线的起点和终点之后，只要连接两点的直线便能获得等角航线，也可以从图上量取等角航线和经线的夹角，只需保持此角度航行就能到达终点。

等角航线既然是两点间对所有经线均能保持等方位的特殊曲线，如从理论上分析，却并非是大圆航线，因此等角航线不可能是两点间的最短路线，经证明并得出结论，最短距离应是过两点大圆上的一段圆弧，由此可以看出沿等角航线航行既有其有利的一面，也有其不利的一面。为了扬长避短、在远洋航行时，一般是把大圆航线转绘到墨卡托投影的海图上，然后再将大圆航线分成若干小段，每一分段连成直线后即形成了等角航线。总之，船只大致是沿大圆航线航行，但就每一分段而言，走的是等角航线。

### § 5-3 等面积圆柱投影和等距离圆柱投影

等面积圆柱投影应满足的条件是

$$m = \frac{1}{n} \quad \text{或} \quad mn = 1$$

参阅前列(5-3)式可写成

$$mn = \frac{dx}{M dB} \cdot \frac{\alpha}{r} = 1$$

$$dx = \frac{1}{\alpha} M r dB$$

将上式积分得

$$\int dx = \frac{1}{\alpha} \int M r dB$$

$$x = \frac{1}{\alpha} F + C \quad (5-17a)$$

如前所述， $F = \int_0^B M \cdot r dB$  值是一弧度经差和纬差  $A = B$  (自赤道至纬度为  $B$  的纬线间的纬差) 组成的球面梯形面积，此值可在制图用表中查取。当  $B = 0^\circ$  时， $x = 0$ ， $\therefore C = 0$ ，因此

$$x = \frac{1}{\alpha} F \quad (5-17b)$$

加上公式

$$y = \alpha \cdot L$$

便获得等面积圆柱投影求直角坐标的基本公式，至于变形值和  $\alpha$  的求法和等角圆柱投影相同，

此处求证从略。

等距离圆柱投影应满足如下条件

$$m = \frac{dx}{MdB} = 1$$

移项后

$$dx = MdB$$

取积分得

$$\int dx = \int MdB$$

$$x = s + C \quad (5-18a)$$

式中 $s$ 为由赤道到纬度 $B$ 的子午线弧长， $C$ 为常数，当 $B = 0^\circ$ ，横坐标与赤道重合，此时 $x = 0$ ，故 $C = 0$ ，上式可写成

$$x = s \quad (5-18b)$$

坐标 $Y$ 和变形表达式的推导同角圆柱投影。在等距离切圆柱投影中，为了某种需要可将地球当作球体看待，求直角坐标的公式变成

$$x = R \cdot \varphi, \quad y = R \cdot \lambda \quad (5-19)$$

上式表明经纬线网的表象成为正方形的格网，所以该投影也称方格投影。

## § 5-4 斜轴与横轴圆柱投影

正轴圆柱投影适用于低纬度地区或沿纬线扩展的区域，假如投影区域是沿除赤道圈以外的某一大圆方向或沿经线方向伸展的地区则可考虑采用斜轴或横轴圆柱投影，以改善投影条件从而使变形减小。这类投影一般均将地球椭球体视为半径等于 $R$ 的圆球体，此时经纬度以 $\lambda$ 和 $\varphi$ 表示。在实践中需设立新的原点，在前章中称之为新极，其地理坐标为 $\varphi_0$ 和 $\lambda_0$ ，新极 $Q$ 是通过制图区域延伸方向大圆的天顶。如欲确定经纬线交点在球面上的位置，可以球面极坐标 $\alpha$ 和 $Z$ 来标定，参阅图5-3。

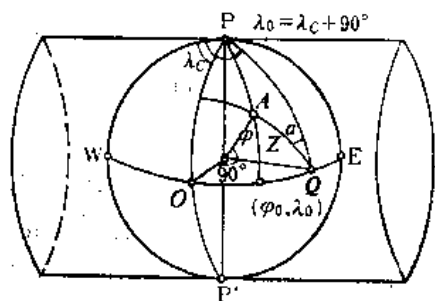


图5-3

斜轴或横轴投影时的垂直圈相当于正轴投影中的子午圈，其表象应为平行直线，间距与方位角 $\alpha$ 成正比；等高圈则相当于正轴投影中的纬圈，其表象也为平行直线，且与垂直圈的表象成正交。此时经纬线投影均呈曲线状，但只有一种特例即通过 $Q$ 点的经线其投影表象是直线，可视为此投影的对称轴，取作中央经线。如仿效正轴投影，斜轴或横轴中沿垂直圈和等高圈的方向就是主方向，所以其长度比 $u_1$ 和 $u_2$ 即为极值长度比。

在斜轴和横轴投影中，由于投影后的直角坐标 $x$ 随天顶距的大小而变化，故仅为 $Z$ 的函数； $y$ 坐标与方位角成正比，其一般公式可写为：

$$\left. \begin{aligned} x &= f(Z) \\ y &= a \cdot \alpha \end{aligned} \right\} \quad (5-20)$$

$x$ 轴应与通过新极 $Q$ 的经线相合，但在横轴投影时， $x$ 轴则与投影区域中的中央经线一致，同时取赤道或制图区域中最低纬线与 $x$ 轴的交点为坐标原点。如同正轴时的情况一样，

式中函数  $f$  的形式是依据不同的投影变形条件而决定的。

我们习惯于正轴投影的计算步骤，为熟悉斜轴或横轴投影的计算过程，现依次将计算步骤归纳于下：

1. 选定合适的球体半径  $R$ ；

2. 针对斜轴投影首先要确定新极  $Q$ ，其地理坐标为  $\varphi_0$  和  $\lambda_0$ ；当横轴投影时，要选定一条中央经线，以  $\lambda_c$  表示。

3. 采用已知地理坐标换算至球面极坐标的公式，将按要求规定的经纬网密度（即经差和纬差）计算出制图区域内各经纬线交点的  $\varphi$  和  $\lambda$  并换算为  $\alpha$  和  $Z$ ；

4. 按顺序计算投影坐标、长度比、面积比和最大角度变形。在计算时应注意斜轴投影也可采用正轴时的公式而毋需再推演，仅以  $\alpha$  换入， $(90^\circ - Z)$  代替  $\varphi$  即可。但在横轴切圆柱投影中，由于圆柱面和通过制图区域的中央经线  $\lambda_c$  相切，在此经线上的长度比  $u_c = 1$ ，新极  $Q$  恰位于赤道上，故纬度等于  $0^\circ$ ，如图示经度则为： $\lambda_0 = \lambda_c + 90^\circ$ 。

5. 在图5-3中， $POP_1$  为与横圆柱相切的中央经线，可视作投影后的  $X$  轴，赤道  $WOE$  定为  $Y$  轴，若令  $\lambda_c = 0^\circ$ ，可认为所有经度均自中央经线起算，方位角按定义应自  $PQ$  起算。已知  $\lambda_0 = \lambda_c + 90^\circ$ ，当  $\lambda_c = 0^\circ$  时， $\lambda_0 = 90^\circ$ ，此时所有经度都按  $\lambda + 90^\circ$  计算。

当  $\varphi_0 = 0^\circ$  时，可采用(3-46)式，即

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{ctg} \varphi \sin \lambda \\ \cos Z &= \cos \varphi \cos \lambda \end{aligned}$$

此时，上式中的  $\lambda$  应以  $\lambda + 90^\circ$  代入，可改为：

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha &= \operatorname{tg} \varphi \sec \lambda \\ \cos Z &= \cos \varphi \sin \lambda \end{aligned} \right\} \quad (5-21)$$

下面介绍几种常用的横轴和斜轴圆柱投影

### 1. 等角横轴切圆柱投影——横轴墨卡托投影

如上所述，该投影的圆柱面切在制图区域的中央经线上，因此长度比  $u_c = 1$ ，其它各点沿垂直圈和等高圈的长度比  $u_1 = u_2$ ，此时角度变形等于零。

横轴投影时的  $x, y$  坐标应与正轴投影的坐标互相易位，并需以  $\alpha$  换  $\lambda$ ， $90^\circ - Z$  代替  $\varphi$ ，同时顾及  $\alpha + \lambda = 90^\circ$  的关系。于是列出以下正、横轴投影的对比公式：

正轴投影公式

横轴投影公式

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\alpha}{\operatorname{Mod}} \lg U & x &= R(90^\circ - \alpha) \\ y &= \alpha \cdot \lambda & y &= \frac{R}{\operatorname{Mod}} \lg \operatorname{ctg} \frac{Z}{2} \\ m = n &= \frac{\alpha}{r} & u_1 = u_2 &= \frac{R}{N \cos \varphi} = \frac{R}{R \cos(90^\circ - Z)} = \operatorname{csc} Z \\ P &= mn = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 & P &= u_1 u_2 = \operatorname{csc}^2 Z \\ \omega &= 0^\circ & \omega &= 0^\circ \end{aligned} \right\} \quad (5-22)$$

由于横轴投影时将地球当作球体看待，所以  $\alpha = r_K = R$ ，在上面对比的公式均考虑此因素。

如将横轴投影公式中的  $\alpha$  和  $Z$  换以  $\varphi$  和  $\lambda$ ，则有：

$$\left. \begin{aligned}
 x &= R \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi \operatorname{sec} \lambda) \\
 y &= \frac{R}{\operatorname{Mod}} \cdot \frac{1}{2} \lg \left( \frac{1 + \cos \varphi \sin \lambda}{1 - \cos \varphi \sin \lambda} \right) \\
 u_1 = u_2 &= \frac{1}{\sin Z} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda}} \\
 P &= \frac{1}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda} \\
 \omega &= 0^\circ
 \end{aligned} \right\} (5-23)$$

### 2. 等距离横轴切圆柱投影

同样本投影的圆柱面切于制图区域的中央经线上，其上的长度比  $u_0 = 1$ 。现参考正轴投影公式，只需令  $x, y$  坐标互相易位即可，正、横轴的对比公式见下：

正轴投影公式	横轴投影公式	
$x = R\varphi$	$x = R(90^\circ - \alpha)$	} (5-24)
$y = R\lambda$	$y = R(90^\circ - Z)$	
$m = 1$	$u_1 = 1$	
$P = n$	$u_2 = \frac{a}{r} \operatorname{csc} Z$	
$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}$	$P = u_2$	
	$\sin \frac{\omega}{2} = \left  \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \right $	

在上列横轴投影公式中，如将  $\alpha, Z$  换以地理坐标  $\varphi$  及  $\lambda$ ，则得

$$\left. \begin{aligned}
 x &= R \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} \varphi \operatorname{sec} \lambda) \\
 y &= \operatorname{arc} \sin(\cos \varphi \sin \lambda) \\
 u_2 &= \operatorname{csc} Z = \frac{1}{\sin Z} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \cos \varphi \sin \lambda)^2}}
 \end{aligned} \right\} (5-25)$$

### 3. 等面积横轴切圆柱投影

根据横轴时的  $x, y$  要与正轴投影互相易位的原则，可将正轴时的  $x = \frac{1}{\alpha} F, y = \alpha L$  变更为：

$$\left. \begin{aligned}
 x &= R(90^\circ - \alpha) \\
 y &= R \cos Z
 \end{aligned} \right\} (5-26)$$

长度比公式：  $u_2 = \operatorname{csc} Z, u_1 = \frac{1}{u_2} = \sin Z$

面积比：  $P = u_1 u_2 = 1$

最大角度变形：  $\sin \frac{\omega}{2} = \left| \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \right|$

(5-24)式中之  $y$  值可参阅(2-20)式作如下求证：

$$y = \frac{1}{\alpha} F = \frac{1}{\alpha} \left[ 2a^2(1 - e^2) \left( K_1 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} - K_2 \sin \frac{3}{2} B \cos \frac{3}{2} B + \dots \right) \right]$$

由于横轴投影中可视地球椭球体为圆球体，所以式中的  $\alpha = a = R, e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0$ ，并顾及以  $90^\circ - Z$  代替  $B(\varphi)$ ，所以得出  $y = R \cos Z$



如将(5-26)式中的 $\alpha$ 、 $Z$ 换以地理坐标 $\varphi$ 及 $\lambda$ 则得,

$$\left. \begin{aligned} x &= R \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi \sec \lambda) \\ y &= R(\cos \varphi \cos \lambda) \\ m &= 1 & u_1 &= 1 \\ n &= \frac{R}{r} & u_2 &= \frac{R}{R \sin Z} = \csc Z \\ P &= mn = n & P &= u_1 u_2 = u_2 \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \left| \frac{m-n}{m+n} \right| & \sin \frac{\omega}{2} &= \left| \frac{u_1-u_2}{u_1+u_2} \right| \end{aligned} \right\} \quad (5-27)$$

#### 4. 等角斜轴切圆柱投影

此投影的特点是沿所斜切的大圆其长度保持不变, 参考前式可写出

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R}{\operatorname{Mod}} \operatorname{lg} \operatorname{ctg} \frac{Z}{2} = \frac{R}{\operatorname{Mod}} \operatorname{lg} \left( \frac{1 + \cos Z}{\sin Z} \right) \\ &= \frac{R}{\operatorname{Mod}} \left[ \operatorname{lg}(1 + \cos Z) - \frac{1}{2} \operatorname{lg}(1 - \cos^2 Z) \right] \\ y &= Ra \\ u_1 = u_2 &= \csc Z = \frac{1}{\sin Z} = \frac{1}{(1 - \cos^2 Z)^{\frac{1}{2}}} \\ P &= \csc^2 Z = \frac{1}{1 - \cos^2 Z} \\ \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-28)$$

在斜轴和横轴切圆柱投影中, 除所切大圆无长度变形外, 其它地区的变形随离所切大圆的距离增大而逐渐增加。如遇到较为宽阔的制图区域, 为减少变形也可采用割圆柱投影。此时圆柱割于离大圆相等的两个小圆上, 其上便无长度变形, 而中间大圆上的长度比 $u_0 < 1$ , 表现为负变形。等角斜切圆柱投影具有如下的特点, 即在宽为 $30^\circ$ 的带形区域内其轴线是大圆线, 故该带近似于大圆航线, 在此范围内各大圆圆弧投影后均为直线, 所以该投影多用于长途飞行的航线图。

### § 5-5 圆柱投影变形分析及其应用

参考前节正轴圆柱投影中长度比的公式:

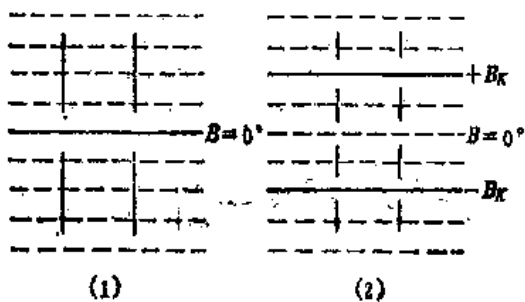


图5-4

$$m = \frac{dx}{M dB} \quad \text{和} \quad n = \frac{\alpha}{r}$$

可以看出圆柱投影的变形仅随纬度而变化, 在同名纬线上所有各点的变形值是相等的, 由此可知圆柱投影的等变形线与纬线相合, 形成相互平行的直线。

如图5-4(1)所示, 在切圆柱投影中, 赤道无变形, 自赤道向南北两侧的变形随着纬度的增高而增大。在割圆柱投影中, 两条割线或称

标准纬线上无变形，变形则从标准纬线始分别向赤道方向和向两极方向增加，见图5-4(2)。无论在切或割圆柱投影中，南北同名纬线上的变形值均相等。

在斜轴和横轴圆柱投影中，变形是沿着等高圈高度角的增大而递增，在所斜或横切的大圆上无变形。如果为横轴投影，切线位于中央经线上，对于向某一大圆方向延伸的地区，可以选择一斜圆柱切于该大圆上，此时变形的分布较均匀，其值也小。例如编制两点间长距离不着陆飞行用图时可设计一斜圆柱切在通过起终点的大圆上，一般称为斜轴墨卡托投影。此外由于墨卡托投影的经线表象为平行直线，有利于显示标准时区的划分，所以常用作编制世界时区图。目前宇航部门编制的人造地球卫星运行轨道宇航图也多采用墨卡托投影，还有一个特点是在这种地图上可以表示大于经度 $360^\circ$ 范围的航线图。总之，圆柱投影的最大特点是经线表象为平行直线，这和地球表面上低纬度处的经线近似平行是相一致的，所以该投影适用于近赤道低纬度沿纬线伸展的地区，至于沿经线伸展的地区就可采用横轴圆柱投影。

## 思 考 题

1. 正轴圆柱投影的基本公式是什么？
2. 为什么墨卡托投影具有等角航线的特色？
3. 为什么等距离圆柱投影也称方格投影？
4. 等面积圆柱投影中求变形值的公式以及常数 $\alpha$ 值如何确定？
5. 试比较正轴和斜轴圆柱投影的公式，并解释之。
6. 圆柱投影的变形分析。

## 圆柱投影计算实例

正轴等角圆柱投影（割）

1. 制图区域： $B_S = 0^\circ$ 、 $B_N = 25^\circ$   
 $L_W = 105^\circ$ 、 $L_E = 125^\circ$
2. 经纬线间隔： $\Delta B = \Delta L = 5^\circ$
3. 制图比例尺： $\frac{1}{M_0} = 1 : 1000000$
4. 标准纬线： $B_K = \pm 15^\circ$
5. 公式：

$$x = \frac{100}{M_0} \cdot \frac{\alpha}{\text{Mod}} \lg U (\text{cm}), \quad y = \frac{100}{M_0} \cdot \frac{\alpha l^\circ}{\rho^\circ} (\text{cm})$$

$$m = n = \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = r_K$$

$$P = m^2, \quad \omega = 0$$

$$\alpha = r_K = 6\,162\,293\text{m} \quad \text{Mod} = 0.434\,294\,48, \quad \rho^\circ = 57^\circ 295\,779\,5$$

$$\frac{100\alpha}{M_0 \cdot \text{Mod}} = 1\,418.920\text{cm}, \quad \frac{100\alpha}{M_0 \rho^\circ} = 10.755\,230\,2$$

$B$		$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$
$\lg U$		0	0.037 694 2	0.075 681 7	0.114 267 0	0.153 778 7	0.194 683 7

$B$	$L$	105	110	115	120	125
	$\Delta L$	0	5	10	15	20
0	$x$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	$y$	0.000	53.776	107.552	161.328	215.105
5	$x$	53.485	53.485	53.485	53.485	53.485
	$y$	0.000	53.776	107.552	161.328	215.105
10	$x$	107.386	107.386	107.386	107.386	107.386
	$y$	0.000	53.776	107.552	161.328	215.105
15	$x$	162.136	162.136	162.136	162.136	162.136
	$y$	0.000	53.776	107.552	161.328	215.105
20	$x$	218.200	218.200	218.200	218.200	218.200
	$y$	0.000	53.776	107.552	161.328	215.105
25	$x$	276.099	276.099	276.099	276.099	276.099
	$y$	0.000	53.776	107.552	161.328	215.105

注：正轴圆柱投影中同一纬线的 $X$ 坐标值相同、同一经线的 $Y$ 坐标值也固定不变。

$B$	$r$ (m)	$m, n$	$P$	$\omega$
0	6 378 245	0.966 1	0.933 4	0
5	6 354 135	0.969 8	0.940 5	0
10	6 281 979	0.980 9	0.962 3	0
15	6 162 293	1.000 0	1.000 0	0
20	5 995 938	1.027 7	1.056 3	0
25	5 784 112	1.065 4	1.135 0	0

## 计 算 题

题目：正轴等角割圆柱投影

1. 制图区域： $B: 0^\circ - 40^\circ, L: 110^\circ - 130^\circ$
2. 标准纬圈： $B_K = \pm 30^\circ$
3. 经纬网间隔： $\Delta B = \Delta L = 5^\circ$
4. 投影比例尺：1 : 10 000 000
5. 计算公式

$$x = \frac{100}{M_c} \cdot \frac{\alpha}{\text{Mod}} \cdot \lg U, \quad y = \frac{100 \alpha l^\circ}{M_0 \rho^\circ}$$

式中

$$\alpha = r_K = 5\,528\,349\text{m}; \quad \frac{100}{M_0} \cdot \alpha = 5\,528.349\text{cm}; \quad \text{Mod} = 0.434\,294\,5;$$

$$\rho^{\circ} = 57^{\circ}.2956; m = n = \frac{a}{r}; P = m^2.$$

6. 计算精度:

$\lg U$  算至小数后七位;  $x, y$  以  $\text{cm}$  为单位, 算至小数后三位;  $u, P$  小数点后四位。

本算例是为编制中国海域图而设计的, 在这类投影上两点间的等角航线表现为直线。本投影无角度变形, 面积变形各约为长度变形之一倍。

1.

$B$	$0^{\circ}$	$5^{\circ}$	$10^{\circ}$	$15^{\circ}$	$20^{\circ}$	$25^{\circ}$	$30^{\circ}$	$35^{\circ}$	$40^{\circ}$
$\lg U$									
$\lg U / \text{Mod}$									
$x = \frac{100a}{M_0} \cdot \frac{\lg U}{\text{Mod}}$									

2.

$L$	$110^{\circ}$	$115^{\circ}$	$120^{\circ}$	$125^{\circ}$	$130^{\circ}$
$l$	$0^{\circ}$	$5^{\circ}$	$10^{\circ}$	$15^{\circ}$	$20^{\circ}$
$l / \rho^{\circ}$					
$y = \frac{100a}{M_0} \cdot \frac{l^{\circ}}{\rho^{\circ}}$					

3.

$B$	$0^{\circ}$	$5^{\circ}$	$10^{\circ}$	$15^{\circ}$	$20^{\circ}$	$25^{\circ}$	$30^{\circ}$	$35^{\circ}$	$40^{\circ}$
$r$									
$m = a/r$									
$\rho = m^2$									

4. 图解比例尺的计算和绘制  $d = \frac{D \cdot 100\,000}{M_0}$  (cm)  $D$  实地公里数  
 $d$  图上距离

$B$	$\frac{d}{D}$ $m$	100 (km)	200 (km)	300 (km)	400 (km)	500 (km)	600 (km)
$0^{\circ}$							
$5^{\circ}$							
$10^{\circ}$							
$15^{\circ}$							
$20^{\circ}$							
$25^{\circ}$							
$30^{\circ}$							
$35^{\circ}$							
$40^{\circ}$							

读者也可采用计算实例中的表格计算。算完后另用坐标格网纸绘制长度比、面积比变化曲线和投影区域经纬网及等变形线略图。

## 编 程 示 例

### 一、源程序

```

30: AC = 1.005051773  9: BC = 0.0050623
    7764: CC = 0.000010624: DC = 0.000
    00002081
32: SM = A * (1 - E) * (AC * B/PD - BC/2
    * SIN (2 * B) + CC/4 * SIN (4 * B) -
    DC/6 * SIN (6 * B) ) : SN = N * COS
    B/PD
34: IF Y $ < > "
    RETURN
38: BM = (BN + BS)/2: AD = 1 + E/2 + 3 *
    E^2/8 + 5 * E^3/16: BD = E/6 + 3 *
    E^2/16 + 3 * E^3/16
40: CD = 3 * E^2/80 + E^3/16: DD = E^4
    3/112: K = 2 * A^2 * (1 - E) * DL/PD
42: T1 = AD * SIN(DB/2) * COS BM - BD
    * SIN (3/2 * DB) * COS(3 * BM) + CD
    * SIN(5/2 * DB) * COS(5 * BM)
44: T2 = DD * SIN (7/2 * DB) * COS (7 *
    BM): T = K * (T1 - T2)
45: IF Y $ < > "
    RETURN
    :
    :
300: REM "SUB. CYL."
302: U = TAN (45 + B/2) * ((1 - sqrt(E) * SIN
    B)/(1 + sqrt(E) * SIN B))^(sqrt(E)/2): RET
    URN
305: CR = TAN B * 1/COS DL: AR = ATN
    (1/CR) : AR = ABS AR : CZ = COS
    B * SIN DL: Z = ACS CZ: GOSUB 94:
    RETURN
307: Y = AR * L/PD: GOSUB 50: U2 = AR/
    RB: RETURN
309: X = R * (90 - AR) /PD: IF Z = 0 LET
    U2 = 1
310: U2 = 1/SIN Z: RETURN
320: GOSUB 53: INPUT " db = ", D1, " d1
    = ", D2, " Mo = ", M0, " G = ", G: Z $
    = G" = " + STR $ G: GOSUB 102: GO
    SUB 110: GOSUB 330
322: GOSUB 113: C $ = " ###. ##"
    D $ = " #####. ###" :
    GOSUB 56: B1 = BS: B2 = BN: L1 =
    LW: L2 =
    LE
324: GOSUB 334: IF G = 3 LET G $ = STR
    $(L0/3): RETURN
326: G $ = STR $( (L0 + 3)/6) : RETURN
330: GLCURSOR (70, -250): LPRINT "d
    b = ", D1: GLCURSOR (50, -250):
    LPRINT "d L = ", D2
331: D1 = DEG D1 : D2 = DEG D2: RETU
    RN
334: LPRINT"          B          L
    Xm/xcm          Ym/ycm
    r/U" :
    RETURN
336: GOSUB 134: LPRINT USING D $ ,
    " ", XM + E4, " " ;
    G $ , YM + E4, " ", USING B $ ,
    DMS GR + E5
338: NN = NN + 1: GLCURSOR (200 - NN
    * 18, YY - 150) : LPRINT USING A
    $ , XC + EX, " ", YC
    + EY, USING B $ , " ", GU
    + E5
339: GOSUB 138: IF N N = 1 GOSUB 334:
    RETURN
340: RETURN
400: "G" REM "CYLINDRICAL PROJ."
402: CLEAR: W $ = " GYLINDRICAL
    PROJ.": INPUT "Y $ = ", Y $ : MD =
    0.4342945
404: IF Y $ = "GK" OR Y $ = "UTM" LET

```

```

X$ = "GU" : GOSUB 320 : GOTO 41
405 : X$ = "CY" : IF Y$ = "CY1" OR Y$ 3
      "CY2" OR Y$ = "CY3" INPUT "BK = ",
      Z$ : B = DEG (UAL Z$) : GOSUB
      50 : AR = RB : GOTO 410
406 : U$ = "00" : R = 6371 118 : PD = 180 /  $\pi$ 
407 : IF Y$ = "CY7" INPUT "QB = ", QB,
      "QL = ", QL : Z$ = "QB = " + STR$
      QB + "QL = " + STR$ QL
408 : GOSUB 54 : GOSUB 70 : B1 = BS : L1 =
      LW : L0 = LW : GOSUB 101 : GOSUB
      112 : GOSUB 57 : GOTO 413
410 : GOSUB 69 : GOSUB 101 : GOSUB 55 :
      GOSUB 72
413 : B = B1
414 : L = L1
415 : DL = L - L0 : GOTO X$
420 : "CY" GOTO Y$
426 : "CY1" GOSUB 302 : X = AR / MD
      * LOG U : GOSUB 307 : U1 = U2 : P
      = U1 * U2 : W = 0 : GOTO 460
428 : "CY2" BS = 0 : BN = B : DB = BN : DL =
      PD : GOSUB 38 : X = T / AR : GOSUB
      307 : U1 = 1 / U2 : GOSUB 185 : GOTO
      460
430 : "CY3" GOSUB 30 : X = SM : GOSUB 307
      : U1 = 1 : GOSUB 185 : GOTO 460
432 : "CY4" GOSUB 305 : Y = R / MD * LOG
      (1 / (TAN(Z/2))) : GOSUB 309 : U1 = U
      2 : P = U1 * U2 : W = 0 : GOTO 460
434 : "CY5" GOSUB 305 : Y = R * (90 - Z) /
      PD : GOSUB 309 : U1 = 1 : GOSUB 185 :
      GOTO 460
436 : "CY6" GOSUB 305 : Y = R * COS Z :
      GOSUB 309 : U1 = 1 / U2 : GOSUB 185 :
      GOTO 460
438 : "CY7" B0 = DEG QB : L0 = DEG QL :
      DL = L - L0 : GOSUB 80 : X = R / MD *
      (LOG(1 + COS Z) - LOG(1 - COS Z
      ^2)) / 2
440 : Y = R * AR / PD : U1 = 1 /  $\sqrt{(1 - \text{COS } Z
      ^2)}$  : U2 = U1 : P = U1 * U2 : W = 0 : L0 =
      LW : GOTO 460
442 : "GU" GOSUB 50 : GOSUB 30 : N1 = E *
      COS B ^2
444 : X = SM + DL ^2 * N / (2 * PD ^2) * SIN
      B * COS B + DL ^4 * N / (24 * PD ^4)
      * SIN B * COS B ^3 * (5 - TAN B ^2
      + 9 * N1)
446 : YP = DL * N / PD * COS B + DL ^3 *
      N / (6 * PD ^3) * COS B ^3 * (1 - TAN
      B ^2 + N1)
448 : YQ = DL ^5 * N / (120 * PD ^5) * COS
      B ^5 * (5 - 18 * TAN B ^2) : Y = YP +
      YQ
450 : GU = 1 + DL ^2 / (2 * PD ^2) * COS B
      ^2 * (1 + N1) + DL ^4 / (24 * PD ^4) *
      COS B ^4 * (5 - 4 * TAN B ^2)
452 : GR = DL * SIN B + DL ^3 / (3 * PD ^2)
      * SIN B * COS B ^2 * (1 + 3 * N1) :
      UR = DMS GR
454 : IF Y$ = "UTM" LET Q = 0.9996 : X =
      Q * X : Y = Q * Y : GU = Q * GU
455 : Y = Y + 5E5 : YM = Y : X M = X : GOSUB
      B 190 : GOSUB 336
456 : L = L + D2 : IF L <= L 2 GOTO 415
457 : B = B + D1 : IF B <= B 2 GOTO 414
458 : GOTO 466
460 : GOSUB 190 : GOSUB 134 : L = L + DS :
      IF L <= L2 GOTO 415
464 : B = B + DS : IF B <= B 2 GOTO 414
466 : END
STATUS 1

```

2509

## 二、程序功能

本程序能解决圆柱投影这一大类的投影计算，其中包含正、横、斜轴圆柱投影(CY)和高斯、UTM投影(GU)两个中类所隶属的九个小类的投影计算问题。

## 三、各类投影命名原则

注：在圆柱投影的程序段中，已略去与方位投影中的相同部分，内含62—187行和190—194行。

圆柱投影  
CYLINDRICAL PROJ.

- 正轴圆柱投影 { 等角圆柱投影 CY1  
CY { 等面积圆柱投影CY2  
等距离圆柱投影CY3
- 横轴圆柱投影 { 等角圆柱投影 CY4  
CY { 等面积圆柱投影CY5  
等距离圆柱投影CY6
- 斜轴圆柱投影 — 等角圆柱投影 CY7  
CY
- 横轴椭圆柱投影 { 高斯-克吕格投影GK  
GU { UTM投影UTM

大类取其英文名赋入W\$, 中类和小类均以英文缩写字母为名赋入控制变量X\$和Y\$中, 并将其名作为标号列入程序, 当多路分支时, 各类标号即为各类投影计算的入口目标, 其分支详见下表:

四、主要标识符

存储器名	X\$, Y\$	MD	Z\$	U\$	GR	U	G	GU
变量名	控制变量	模	B <sub>k</sub> 割点纬度	°00'(CY4-CY7)标识符	r	等量纬度	带宽(3°或6°)	高斯、UTM投影变形值

五、实例

等距离圆柱投影的计算实例

1. 启动: DEF G
2. 输入: Y\$, B<sub>K</sub>, B<sub>0</sub>, L<sub>0</sub>, B<sub>S</sub>, B<sub>N</sub>, L<sub>W</sub>, L<sub>E</sub>, ds, m
3. 输出: 见下表

CYLINDRICAL PROJ (CY CY3) 0							
		B <sub>S</sub> =0°00'			B <sub>0</sub> =22°30'		
		L <sub>N</sub> =45°00'			L <sub>0</sub> =0°00'		
		L <sub>W</sub> =-30°00'			ds=7°30'		
		L <sub>B</sub> =30°00'			m=1:10000000		
B	L	X (cm)	Y (cm)	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	P	ω
0°00'	0°00'	0.000	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
0°00'	7°30'	0.000	8.349	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
0°00'	15°00'	0.000	16.698	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
0°00'	22°30'	0.000	25.047	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
0°00'	30°00'	0.000	33.396	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
7°30'	0°00'	8.294	0.000	1.0000	1.0086	1.0086	0.2920
7°30'	7°30'	8.294	8.349	1.0000	1.0086	1.0086	0.2920
7°30'	15°00'	8.294	16.698	1.0000	1.0086	1.0086	0.2920
7°30'	22°30'	8.294	25.047	1.0000	1.0086	1.0086	0.2920
7°30'	30°00'	8.294	33.396	1.0000	1.0086	1.0086	0.2920
15°00'	0°00'	16.590	0.000	1.0000	1.0350	1.0350	1.5824
15°00'	7°30'	16.590	8.349	1.0000	1.0350	1.0350	1.5824
15°00'	15°00'	16.590	16.698	1.0000	1.0350	1.0350	1.5824
15°00'	22°30'	16.590	25.047	1.0000	1.0350	1.0350	1.5824
15°00'	30°00'	16.590	33.396	1.0000	1.0350	1.0350	1.5824
22°30'	0°00'	24.892	0.000	1.0000	1.0819	1.0819	4.3025
22°30'	7°30'	24.892	8.349	1.0000	1.0819	1.0819	4.3025
22°30'	15°00'	24.892	16.698	1.0000	1.0819	1.0819	4.3025
22°30'	22°30'	24.892	25.047	1.0000	1.0819	1.0819	4.3025
22°30'	30°00'	24.892	33.396	1.0000	1.0819	1.0819	4.3025

续表

$R$	$L$	$X$ (cm)	$Y$ (cm)	$U_1$	$U_2$	$P$	$\omega$
30°00'	0°00'	33.202	0.000	1.0000	1.1537	1.1537	8.1112
30°00'	7°30'	33.202	8.349	1.0000	1.1537	1.1537	8.1112
30°00'	15°00'	33.202	16.698	1.0000	1.1537	1.1537	8.1112
30°00'	22°30'	33.202	25.047	1.0000	1.1537	1.1537	8.1112
30°00'	30°00'	33.202	33.396	1.0000	1.1537	1.1587	8.1112
37°30'	0°00'	41.521	0.000	1.0000	1.2589	1.2589	13.0947
37°30'	7°30'	41.521	8.349	1.0000	1.2589	1.2589	13.0947
37°30'	15°00'	41.521	16.698	1.0000	1.2589	1.2589	13.0947
37°30'	22°30'	41.521	25.047	1.0000	1.2589	1.2589	13.0947
37°30'	30°00'	41.521	33.396	1.0000	1.2589	1.2589	13.0947
45°00'	0°00'	49.850	0.000	1.0000	1.4118	1.4118	18.3950
45°00'	7°30'	49.850	8.349	1.0000	1.4118	1.4118	18.3950
45°00'	15°00'	49.850	16.698	1.0000	1.4118	1.4118	18.3950
45°00'	22°30'	49.850	25.047	1.0000	1.4118	1.4118	18.3950
45°00'	30°00'	49.850	33.396	1.0000	1.4118	1.4118	18.3950



# 第六章 高斯-克吕格投影

## §6-1 投影条件和公式

高斯-克吕格投影即等角横切圆柱投影，简称高斯投影。该投影的基本设想是采用一个椭圆柱面横置于地球椭球体的外侧并与之相切，见图6-1(1)，此时它必然会与椭球体上某一条子午线相切，这条子午线命名为中央子午线，即图上的 $PO'P'$ 。圆柱的中心轴通过地球椭球体的中心并位于赤道上。只要依据规定的等角条件，将位于中央子午线东、西两侧各一定经差范围内的经纬线交点投影到椭圆柱面上，然后再将此圆柱面展开成平面，如图6-1(2)所示，便构成高斯投影经纬线网图。

高斯投影的投影条件归纳起来有三点：

1. 中央子午线和赤道投影后成为相互垂直的直线，可视为该投影的对称轴。前者作为 $X$ 轴，后者为 $Y$ 轴，两轴的交点定为坐标原点；

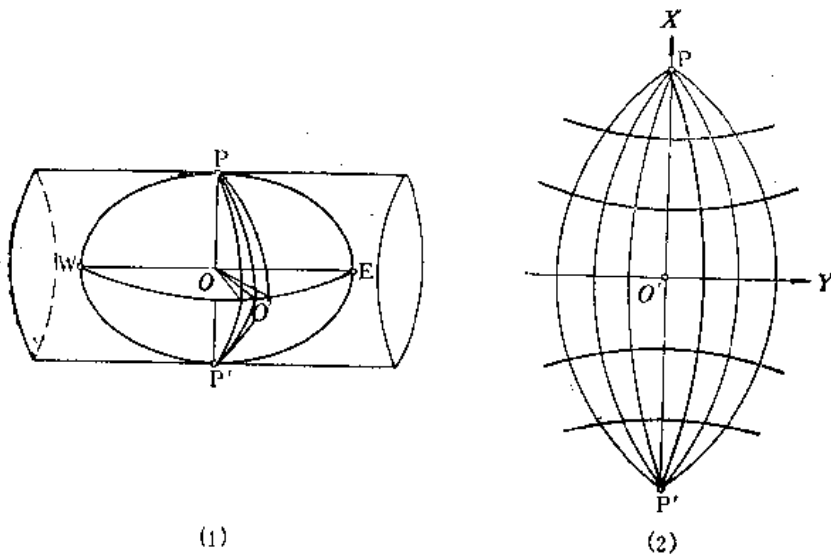


图6-1

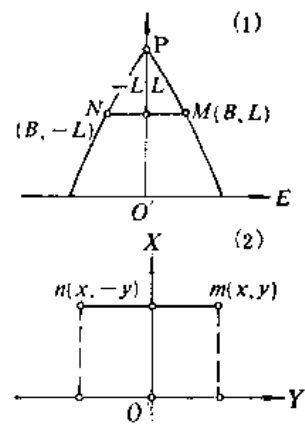


图 6-2

2. 以等角投影为条件，所以投影后无角度变形；

3. 中央子午线投影后无长度变形，保持正长条件。

针对提出的三点我们可以依次推导出如下的数学表达式：

第一条说明该投影具有“对称性”，在数学上称为函数的奇偶性。如图 6-2， $M(B,$

$L$ )和 $N(B, -L)$ 是椭球面上对称于中央子午线的两点,  $m$ 、 $n$ 分别是 $M$ 和 $N$ 在高斯投影平面上的投影点, 由条件1可知 $m$ 与 $n$ 也对称于 $X$ 轴, 它们的坐标是 $m(x, y)$ 和 $n(x, -y)$ 。已知地图投影的基本函数式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(B, L) \\ y &= f_2(B, L) \end{aligned} \right\} \quad (6-1)$$

根据此条件的含义有

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(B, L) = f_1(B, -L) \\ y &= f_2(B, L) = -f_2(B, -L) \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

针对这种对称性的函数, 数学上称 $f_1$ 为 $L$ 的偶函数,  $f_2$ 为 $L$ 的奇函数。当 $B$ 为定值时, 若以 $-L$ 代以 $L$ ,  $x$ 值仍相等且不变号, 但 $y$ 值虽等符号却为负。

如将(6-2)式展开成幂级数的形式, 其级数应是收敛的, 表现为:

$$\left. \begin{aligned} x &= K_0 + K_2 L^2 + K_4 L^4 + K_6 L^6 + \dots \\ y &= K_1 L + K_3 L^3 + K_5 L^5 + K_7 L^7 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6-3)$$

实际计算中的 $L$ 应理解为经度差, 它由所求点的经度 $L$ 减去中央子午线的经度 $L_0$ 而得。 $K_0, K_1, K_2, \dots$ 等为一系列的待定系数, 它是纬度 $B$ 的函数, 只要设法依次求解系数 $K_i$ , 高斯投影即告确定。

第二个条件表明该投影属等角性质, 所以如欲使(6-3)式满足等角投影的条件, 应有:

$$\frac{\partial x}{\partial L} = -\frac{r}{M} \cdot \frac{\partial y}{\partial B}$$

$$\frac{\partial y}{\partial L} = +\frac{r}{M} \cdot \frac{\partial x}{\partial B}$$

上式在(3-31)式中已推证。现在只要求出该式中的偏导数, 根据等角投影的条件, 即可依次推导出各 $K$ 值。

若对(6-3)式取偏导数, 便可写出:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= \frac{dK_0}{dB} + L^2 \frac{dK_2}{dB} + L^4 \frac{dK_4}{dB} + L^6 \frac{dK_6}{dB} + \dots \\ \frac{\partial x}{\partial L} &= 2K_2 L + 4K_4 L^3 + 6K_6 L^5 + \dots \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= L \frac{dK_1}{dB} + L^3 \frac{dK_3}{dB} + L^5 \frac{dK_5}{dB} + L^7 \frac{dK_7}{dB} + \dots \\ \frac{\partial y}{\partial L} &= K_1 + 3K_3 L^2 + 5K_5 L^4 + 7K_7 L^6 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6-4)$$

将上式中的各偏导数代入等角条件后, 便有:

$$\left. \begin{aligned} &2K_2 L + 4K_4 L^3 + 6K_6 L^5 + \dots \\ &= -\frac{r}{M} \left( L \frac{dK_1}{dB} + L^3 \frac{dK_3}{dB} + L^5 \frac{dK_5}{dB} + L^7 \frac{dK_7}{dB} + \dots \right) \\ &K_1 + 3K_3 L^2 + 5K_5 L^4 + 7K_7 L^6 + \dots \\ &= \frac{r}{M} \left( \frac{dK_0}{dB} + L^2 \frac{dK_2}{dB} + L^4 \frac{dK_4}{dB} + L^6 \frac{dK_6}{dB} + \dots \right) \end{aligned} \right\} \quad (6-5)$$

上列的等角条件在 $L$ 为任何值时都应得到满足, 所以只要比较每一方程内同次幂的系数后即可获得如下一组公式:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{r}{M} \cdot \frac{dK_0}{dB}; & K_2 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{M} \cdot \frac{dK_1}{dB} \\ K_3 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{r}{M} \cdot \frac{dK_2}{dB}; & K_4 &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{r}{M} \cdot \frac{dK_3}{dB} \\ K_5 &= \frac{1}{5} \cdot \frac{r}{M} \cdot \frac{dK_4}{dB}; & K_6 &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{r}{M} \cdot \frac{dK_5}{dB} \\ &\dots & &\dots \end{aligned} \right\} \quad (6-6)$$

经概括后可写成如下通用的形式:

$$K_{i+1} = (-1)^i \frac{1}{1+i} \cdot \frac{r}{M} \cdot \frac{dK_i}{dB} \quad (6-7)$$

式中  $i = 0, 1, 2, \dots$

为了最终导出本投影的计算公式, 还必须考虑第三个条件, 即中央子午线投影后长度保持不变。当经差  $\Delta L = 0^\circ$  时,  $x_0 = K_0$ , 所以

$$K_0 = x_0 = \int_0^B m_0 ds = \int_0^B m_0 \cdot M dB$$

上式中  $m_0$  为中央子午线上的长度比, 按此第三个条件,  $m_0$  应等于 1, 故

$$K_0 = \int_0^B M dB = s \quad (6-8)$$

式中  $s$  是由赤道到纬度  $B$  处的经线弧长。

当  $K_0$  为已知后, 可将 (6-8) 式代入 (6-6) 式用微分方法依次求得各系数  $K_i$ , 计算步骤为:

$$K_1 = \frac{r}{M} \cdot \frac{dK_0}{dB} = \frac{r}{M} \cdot \frac{ds}{dB} = \frac{r}{M} \cdot M = r \quad (6-9)$$

为求  $K_2$ , 可求导数  $\frac{dK_1}{dB}$ , 为此应先计算  $\frac{dr}{dB}$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dB} &= \frac{d(N \cos B)}{dB} = \frac{d}{dB} \left[ \frac{a \cos B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}} \right] \\ &= a \cdot \frac{\cos B (1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2} \cdot (e^2 \sin B \cos B) - (1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2} \cdot \sin B}{1 - e^2 \sin^2 B} \\ &= -\frac{a \sin B (1 - e^2 \sin^2 B - e^2 \cos^2 B)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} \\ &= -\frac{a(1 - e^2) \sin B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} = -M \sin B \\ \therefore K_2 &= -\frac{1}{2} \frac{r}{M} \cdot \frac{dK_1}{dB} = -\frac{1}{2} \frac{r}{M} \cdot \frac{dr}{dB} = \frac{1}{2} N \sin B \cos B \end{aligned} \quad (6-10)$$

接着, 只要对  $K_2$  进行微分, 便可得出  $K_3$ 。

$$\begin{aligned} K_3 &= \frac{1}{3} \frac{r}{M} \cdot \frac{dK_2}{dB} = \frac{1}{3} \frac{r}{M} \cdot \frac{d}{dB} \left( \frac{1}{2} r \sin B \right) \\ &= \frac{1}{6} \frac{r}{M} \left( \sin B \frac{dr}{dB} + r \cos B \right) = \frac{1}{6} \frac{r}{M} (r \cos B - M \sin^2 B) \\ &= \frac{1}{6} \frac{N \cos B}{M} (N \cos^2 B - M \sin^2 B) = \frac{1}{6} N \cos^3 B \left( \frac{N}{M} - \operatorname{tg}^2 B \right) \end{aligned} \quad (6-11)$$

因为  $\frac{N}{M} = \frac{1 - e^2 \sin^2 B}{1 - e^2} = \frac{1}{1 - e^2} - \frac{e^2}{1 - e^2} \sin^2 B$

考虑到在实际公式推算过程中引用第二偏心率 $e'$ 较为方便, 由于

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}, \quad 1+e'^2 = \frac{1}{1-e^2}$$

所以 
$$\frac{N}{M} = 1 + e'^2 - e'^2 \sin^2 B = 1 + e'^2 \cos^2 B$$

现今 
$$e'^2 \cos^2 B = \eta^2 \tag{6-12}$$

$$\therefore \frac{N}{M} = 1 + \eta^2$$

因此 $K_3$ 可写成:

$$K_3 = \frac{1}{6} N \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) \tag{6-13}$$

对 $K_3$ 求导数后便可算出 $K_4$ , 于是依次连续求导数即能逐一得到其它的系数值 $K_4$ 、 $K_5$ 等, 此处不再推导, 仅将结果列于下:

$$K_4 = \frac{N \sin B \cos^3 B}{24} (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4) \tag{6-14}$$

$$K_5 = \frac{N \cos^5 B}{120} (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) \tag{6-15}$$

只需将以上所得各系数 $K_0, K_1, \dots, K_5$ 回代至(6-3)式中, 经整理后即得高斯-克吕格投影的直角坐标公式:

$$\left. \begin{aligned} x &= s + \frac{L^2 N}{2} \sin B \cos B + \frac{L^4 N}{24} \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \dots \\ y &= L N \cos B + \frac{L^3 N}{6} \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) + \frac{L^5 N}{120} \cos^5 B (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) + \dots \end{aligned} \right\} \tag{6-16}$$

之所以略去六次方以上各项的原因是这些值不会超过0.005m, 完全可以满足计算精度的要求。在实际计算工作中, 将 $L$ 化为弧度, 并以秒为单位, 所以变(6-16)式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= s + \frac{L''}{2\rho''} N \sin B \cos B + \frac{L''^4}{24\rho''^4} N \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \dots \\ y &= \frac{L''}{\rho''} N \cos B + \frac{L''^3}{6\rho''^3} N \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) + \frac{L''^5}{120\rho''^5} N \cos^5 B (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) + \dots \end{aligned} \right\} \tag{6-17}$$

式中 
$$\rho'' = 206\,264.81$$

现在我们对(6-17)式进行如下分析:

1. 当 $B=0^\circ$ 时,  $x=0$ ,  $y$ 则随 $L$ 的变化而变化。意即赤道投影为一横线且为 $Y$ 轴; 当 $L=0^\circ$ 时, 则 $y=0$ ,  $x=s$ , 也即中央子午线投影后为一横线, 且为 $x$ 轴, 其长度与实地距离相等, 两轴的交点即为坐标原点。

2. 当 $L$ 为常数时, 若 $B$ 值增加,  $y$ 坐标值逐渐减少但 $x$ 值增大。由此可见经线是凹向中央经线的曲线, 最终收敛于两极。又因 $\cos(-B) = \cos B$ ,  $\operatorname{tg}^2(-B) = (-\operatorname{tg} B)^2 = \operatorname{tg}^2 B$ , 即使用 $-B$ 代替 $B$ 时 $y$ 值不变, 这说明赤道是该投影的对称轴。

3. 若令 $B$ 为常数, 当 $L$ 增大时,  $x$ 和 $y$ 值都随之增大。当以 $-L$ 代替 $L$ 时,  $x$ 值的符号均不变, 而 $y$ 值相等符号却相反, 这表明纬线是凸向赤道的曲线, 此时中央子午线即为本投影

的对称轴。

为了简化高斯-克吕格投影直角坐标的计算,我国测绘部门已按上式并考虑到地形图分幅的原则规定计算成表,该书《高斯-克吕格投影计算表》已公开出版,供制图工作者使用。

在实际计算时是以纬度 $B$ 为引数,从表中直接查取并算出所需数值。该表在制作时将公式(6-17)经过改化成如下简式:

$$\left. \begin{aligned} x &= s + l'(a_1 + a_2 l') + \delta_x \\ y &= l''(b_1 + b_2 l') + \delta_y \end{aligned} \right\} \quad (6-18)$$

式中 $X = s$ ,  $l$ 以秒为单位,  $l' = l'' \cdot 10^{-6}$ 。

其它系数分别为:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\frac{N}{2\rho''} \sin B \cos B \cdot 10^8 \\ a_2 &= \frac{N}{24\rho''^4} \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4) \cdot 10^{16} \\ \delta_x &= -\frac{N}{720\rho''^6} \sin B \cos^5 B (61 - 58\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) l''^6 \\ b_1 &= \frac{N}{\rho''} \cos B \\ b_2 &= \frac{N}{6\rho''^3} \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) \cdot 10^8 \\ \delta_y &= \frac{N}{120\rho''^5} \cos^5 B (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) \cdot l''^6 \end{aligned} \right\} \quad (6-19)$$

当地图比例尺小于1:200 000时,计算时可将微量改正项 $\delta_x$ 和 $\delta_y$ 忽略不计。在上式中我们分别乘以 $10^8$ 和 $10^{16}$ 是因为表列值 $a_1$ 、 $a_2$ 和 $b_2$ 均很微小,又因为 $l''$ 的数值较大,故乘以 $10^{-8}$ ,其目的在于方便列表和计算,它们对最后的计算成果并无影响。上列各值如 $x$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $\delta_x$ 、 $b_1$ 、 $b_2$ 和 $\delta_y$ 等均可从《高斯-克吕格投影计算表》中查取。但是即便采用查表的方法,计算过程仍嫌繁琐,目前采用电子计算机进行计算,效率倍增。在本书中我们列出应用PC-1500机计算高斯坐标的常用程序,供读者参考。

## §6-2 长度比公式

高斯-克吕格投影具有等角性质,在等角投影中,某点附近各方向上的长度变形是相等的,即长度比为一致。只需求出任一方向上的长度比就可代表其它各方向上的长度比。我们可按(3-13)式来推导高斯投影长度比的公式:

$$n = \frac{\sqrt{G}}{r} = \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial l} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial l} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6-20)$$

将(6-4)式代入上式,并略去五次项得

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial x}{\partial l} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial l} \right)^2 &= (K_1 + 3K_3 L^2 + 5K_5 L^4)^2 + (2K_2 L + 4K_4 L^3)^2 \\ &= K_1^2 + (6K_1 K_3 + 4K_3^2) L^2 + (9K_3^2 + 10K_1 K_5 + 16K_2 K_4) L^4 \end{aligned}$$

再将上面已推算出来的 $K_1, K_2, K_3 \dots$ 等代入上式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 &= N^2 \cos^2 B + (N^2 \cos^4 B + (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) \\ &+ N^2 \sin^2 B \cos^2 B) L^2 + \left[\frac{1}{4} N^2 \cos^6 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2)^2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{12} N^2 \cos^6 B (5 - 18 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) + \frac{1}{3} N^2 \sin^2 B \cos^4 B (5 - \operatorname{tg}^2 B)\right] L^4 \end{aligned}$$

若略去上式中的 $\eta^2$ ，并代入长度比公式即得：

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{G}{r^2} = \frac{1}{r^2} \left[ \left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2 \right] \\ &= 1 + (\cos^2 B - \sin^2 B + \eta^2 \cos^2 B + \sin^2 B) L^2 \\ &+ \frac{\cos^4 B}{12} (3 - 6 \operatorname{tg}^2 B + 3 \operatorname{tg}^4 B + 5 - 18 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 20 \operatorname{tg}^2 B - 4 \operatorname{tg}^4 B) L^4 \\ &= 1 + \cos^2 B (1 + \eta^2) L^2 + \frac{1}{3} \cos^4 B (2 - \operatorname{tg}^2 B) L^4 \end{aligned}$$

将上式两边开方并同时考虑

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

将前式展开后得

$$\begin{aligned} n &= 1 + \frac{1}{2} \cos^2 B (1 + \eta^2) L^2 + \frac{1}{6} \cos^4 B (2 - \operatorname{tg}^2 B) L^4 - \frac{1}{8} \cos^4 B L^4 \\ &= 1 + \frac{L^2}{2} \cos^2 B (1 + \eta^2) + \frac{L^4}{24} \cos^4 B (5 - 4 \operatorname{tg}^2 B) \end{aligned} \quad (6-21)$$

也可写成如下长度比的公式：

$$u = m = n = 1 + \frac{L^2}{2\rho^2} \cos^2 B (1 + \eta^2) + \frac{L^4}{24\rho^4} \cos^4 B (5 - 4 \operatorname{tg}^2 B) \quad (6-22)$$

下表列出在 $6^\circ$ 投影带范围内长度变形的数值：

表6-1

$\nu \backslash B$	$L$	$0^\circ$	$\pm 1'$	$\pm 2'$	$\pm 3'$
$90^\circ$		0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00
$60^\circ$		0.000 00	0.000 04	0.000 15	0.000 34
$30^\circ$		0.000 00	0.000 12	0.000 46	0.001 03
$0^\circ$		0.000 00	0.000 15	0.000 61	0.001 38

若对(6-22)式进行分析便可找出一般的变形规律：

1. 当 $L=0^\circ$ 时， $u=1$ ，即中央子午线上无任何长度变形；
2. 在同一纬线上，即 $B$ 为定值时，长度变形随着经差 $L$ 的增大而逐渐增大；
3. 在同一经线上，当 $L$ 为定值时，长度变形则随纬度 $B$ 的减少而增大，在赤道处为最大；
4. 由于 $L$ 和 $\cos B$ 均为偶次方，且各项均为正号，所以长度变形恒为正值。除中央子午线外，其它任何线段均伸长了；
5. 因为 $\cos B \leq 1$ ，其平方值的变化甚微，长度比 $u$ 主要决定于经差，且与其平方成正

比, 所以离中央子午线愈远, 变形增长愈快, 此即高斯 克吕格投影需要按一定经差分幅的主要原因。

### § 6-3 子午线收敛角公式

地形图上的公里格网线是在投影平面上按规定的距离如 1km 或 2km 绘出的并分别平行于中央子午线和赤道投影线的两组平行直线。格网纵线和图幅的经线在图内相交成一个角度, 称为过某点的平面子午线收敛角, 以  $\gamma$  表示。

参阅图 6-3, 设  $A'$  点为相应于椭球体上的  $A$  点在投影平面上的表象,  $PA'$  是通过  $A'$  点的经线在平面上的表象。  $AN'$  是平行于格网纵轴的直线,  $A'A''$  为过该点的纬线在平面上的表象,  $A'C$  则是平行于横轴的直线, 图上所示的  $\gamma$  角即为子午线收敛角。我们如在纬线上选定一无限接近  $A'$  的点  $A_1$ , 那么  $A'$  和  $A_1$  两点的坐标差便可用  $dx$  和  $dy$  来表示, 从微分三角形  $\triangle A'A_2A_1$  中可以找出如下关系:

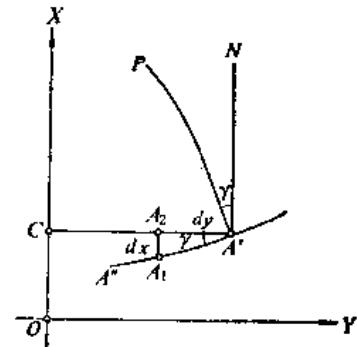


图 6-3

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-dx}{-dy} = \frac{dx}{dy} \quad (6-23)$$

为了微分方便, 可将上式写成如下形式

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{\partial x}{\partial l}}{\frac{\partial y}{\partial l}} \quad (6-24)$$

可以参阅(6-4)式, 将相应的偏导数的数值代入(6-24)式, 如仅顾及三次项便可得出

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{2K_2L + 4K_4L^3}{K_1 + 3K_3L^2} = \left( \frac{2K_2L + 4K_4L^3}{K_1} \right) \left( 1 + \frac{3K_3L^2}{K_1} \right)^{-1} \\ &= \frac{2K_2L + 4K_4L^3}{K_1} - \frac{6K_2K_3L^3}{K_1^2} + \dots \end{aligned}$$

各  $K$  值均为已知, 只要分别代入上式即得

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= L \sin B + \frac{L^3}{6} \sin B \cos^2 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4) \\ &\quad - \frac{L^3}{2} \sin B \cos^2 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) + \dots \end{aligned}$$

由于  $\gamma$  角甚小, 为便于计算, 可按反正切函数的级数展开

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \gamma) = \gamma = \operatorname{tg} \gamma - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \gamma + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \gamma$$

$$\therefore \gamma = L \sin B + \frac{L^3}{3} \sin B \cos^2 B (1 + \operatorname{tg}^2 B + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \dots \quad (6-25)$$

如略去  $\eta^4$  等以上诸项, 最后写出  $L$  以弧度表示的公式

图

图

⑥

$$\gamma = L'' \sin B + \frac{L''}{3\rho''^2} \sin B \cos^2 B (1 + 3\eta^2) + \dots \quad (6-26)$$

在制图作业中，收敛角一般只需算到分的精度，当  $L = 3^\circ$  时， $L^3$  项的最大值也仅  $4''$  左右，所以在实际计算时可忽略  $L^3$  项。子午线收敛角也可利用《高斯-克吕格投影计算表》查取，但公式已改换为：

$$\gamma = L''(c_1 + c_2 L')$$

式中  $L'$  仍为  $L'' \cdot 10^{-5}$ ，其它系数定为：

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \sin B \\ c_2 &= \frac{\sin B \cos^2 B}{3\rho''^2} (1 + \eta^2 + 2\eta^4) \cdot 10^8 \\ \eta^2 &= e' \cos^2 B \end{aligned} \right\} \quad (6-27)$$

现对(6-25)式进行分析，可知在中央子午线上，因  $L'' = 0, \gamma = 0$ ；经差愈大， $\gamma$  也愈大。在赤道上，因  $B = 0, \gamma = 0$ ； $\gamma$  值也随着纬度的增高而增大，在极点处为最大值。其次由于(6-25)式是一奇函数，故  $\gamma$  角有正负之分，其符号和经差相同，在中央子午线以东时  $\gamma$  为正，以西为负。下表中列出的是按子午线收敛角公式算出的整个投影带内的  $\gamma$  值。

表 6-2

$\begin{matrix} \gamma \\ B \end{matrix}$	$L$	$0^\circ$			$1^\circ$			$2^\circ$			$3^\circ$		
		°	'	''	°	'	''	°	'	''	°	'	''
$90^\circ$		0	00	00	1	00	00	2	00	00	3	00	00
$80^\circ$		0	00	00	0	59	05	1	58	11	2	57	16
$70^\circ$		0	00	00	0	56	23	1	52	46	2	49	49
$60^\circ$		0	00	00	0	51	58	1	43	56	2	35	54
$50^\circ$		0	00	00	0	45	58	1	31	56	2	17	54
$40^\circ$		0	00	00	0	68	34	1	17	39	1	55	46
$30^\circ$		0	00	00	0	30	00	1	00	01	1	30	04
$20^\circ$		0	00	00	0	20	31	0	41	03	1	01	37
$10^\circ$		0	00	00	0	10	25	0	20	50	0	31	16
$0^\circ$		0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00

高斯投影是以经差  $6^\circ$  分带的，如果分带投影的经差大于此规定时称为宽带高斯-克吕格投影。我们已知经差在  $6^\circ$  以内的经纬网交点的直角坐标可以纬度和经差为引数直接从《高斯-克吕格投影直角坐标表》中查取；经差在  $9^\circ$  以内的制图区域，当经差和纬差的间隔为  $30'$  时，可在《小比例尺地图投影表》中查取；但若制图区域的经差大于  $9^\circ$  或经纬线网需要加密时，可根据公式(6-17)编程序用计算机解决。在采用宽带高斯-克吕格投影编制地图时，考虑到计算的精度，只要比例尺小于  $1:100\,000$ ，计算公式可适当简化如下：

$$\left. \begin{aligned} x &= X + L'(a_1 + a_2 L') \\ y &= L''(b_1 + b_2 L') \\ \gamma &= L''(c_1 + c_2 L') \end{aligned} \right\} \quad (6-28)$$



## § 6-4 双标准经线等角横轴圆柱投影

本投影也称等角横轴割圆柱投影，从几何上可理解为是一种椭圆柱面割在对称于中央子午线的两条经线上的等角性质的投影。

本投影指定在经差为 $\pm L_1$ 的两条经线上无变形，位于标准经线以内的为负变形，以外地区则为正变形。因此中央子午线的长度不能保持不变，它不是一定值，应为纬度的函数，现以 $m_0$ 表示中央子午线上的长度比，有

$$m_0 = f(B) \quad (6-29)$$

上式可理解为增函数（即它随纬度的逐渐增高而增大）在极点处长度比为1。

双标准经线等角横圆柱投影与高斯投影相比较，其长度比应满足：

$$u_{\text{双}} = m_0 u_{\text{高}} = f(B) u_{\text{高}}$$

将(6-22)式代入上式，便有

$$u_{\text{双}} = f(B) \left[ 1 + \frac{L_1'^2}{2\rho'^2} \cos^2 B (1 + \eta^2) + \frac{L_1'^4}{24\rho'^4} \cos^4 B (5 - 4\text{tg}^2 B) \right] \quad (6-30)$$

已知在标准经线 $L = L_1$ 上的 $u_{\text{双}} = 1$ ，移项后，上式写成：

$$f(B) = 1 / \left[ 1 + \frac{L_1'^2}{2\rho'^2} \cos^2 B (1 + \eta^2) + \frac{L_1'^4}{24\rho'^4} \cos^4 B (5 - 4\text{tg}^2 B) \right]$$

展开成级数后取前二项得

$$m_0 = f(B) = 1 - \frac{L_1'^2}{2\rho'^2} \cos^2 B (1 + \eta^2) \quad (6-31)$$

仿高斯投影，由(6-8)式可知，只要先确定中央子午线上的长度比 $m_0$ ，则

$$x_0 = \int_0^B m_0 M dB = \int_0^B M \left[ 1 - \frac{L_1'^2}{2\rho'^2} \cos^2 B (1 + \eta^2) \right] dB$$

积分后可写出如下关系式

$$x_0 = s - \frac{aL_1'^2}{2\rho'^2} \left[ A' B + \frac{B'}{2} \sin 2B + \frac{C'}{4} \sin 4B + \frac{D'}{6} \sin 6B + \dots \right] \quad (6-32)$$

式中 $a$ 为地球椭球体的长半径， $s$ 为纬度自 $0^\circ$ 到 $B$ 的经线弧长，乘系数 $A'$ 、 $B'$ …可由下式确定：

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{1}{2} + \frac{1}{16}e^2 + \frac{3}{128}e^4 + \frac{25}{2048}e^6 + \dots \\ B' &= \frac{1}{2} - \frac{3}{256}e^4 - \frac{5}{512}e^6 + \dots \\ C' &= -\frac{1}{16}e^2 - \frac{3}{128}e^4 - \frac{5}{512}e^6 + \dots \\ D' &= \frac{3}{256}e^4 + \frac{5}{512}e^6 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6-33)$$

再仿高斯-克吕格投影的坐标计算公式便可导出双标准经线等角横圆柱投影的坐标公式。

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + m_0 \left[ \frac{L'^2 N}{2\rho''^2} \sin B \cos B + \frac{L'^4 N}{24\rho''^4} \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B \right. \\
 &\quad \left. + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \dots \right] \\
 y &= m_0 \left[ \frac{L' N}{\rho''} \cos B + \frac{L'^3 N}{6\rho''^3} \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) + \frac{L'^5 N}{120\rho''^5} \cos^5 B (5 \right. \\
 &\quad \left. - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) + \dots \right] \\
 u &= m_0 \left[ 1 + \frac{L'^2}{2\rho''} \cos^2 B (1 + \eta^2) + \frac{L'^4}{24\rho''^3} \cos^4 B (5 - 4\operatorname{tg}^2 B) + \dots \right] \\
 &= 1 + \frac{(L'^2 - L_1'^2)}{2\rho''^2} \cos^2 B (1 + \eta^2) + \dots
 \end{aligned} \tag{6-34}$$

下表列出在6°投影带范围内本投影的长度变形值：

如取  $L_1 = \pm 2^\circ$  表 6-3

$\gamma_m \backslash B$	$L$	0°	1°	2°	3°
90°		0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
60°		-0.00017	-0.00011	0.00000	0.00019
30°		-0.00046	-0.00034	0.00000	0.00057
0°		-0.00061	-0.00046	0.00000	0.00076

由上表可见，在双标准经线上长度不变形，在同一纬线上长度变形随远离标准经线而增大；在同一经线上长度变形则随纬度的增高而减小，在标准经线以内为负变形，以外为正变形。该投影使低纬度的长度变形进一步得到改善，特别是高纬地区的变形要比高斯投影小。

目前在美国、日本和加拿大等国家和一些地区采用一种UTM投影作为地图投影的数学基础，它取Universal Transverse Mercator Projection的前面三个英文大写字母组成，意即通用横轴墨卡托投影，属于横轴等角割圆柱投影，椭圆柱面割在对称于中央子午线约为 $\pm 1^\circ 40'$ 处，投影后两条割线上无变形，中央子午线的长度比小于1，设定 $m_0 = 0.9996$ ，参阅图6-4。只要将此值代入(6-34)式便可获得本投影求 $x$ 、 $y$ 和 $u$ 的公式。

我们也可列出UTM投影的长度变形表：

$L_1 = \pm 1^\circ 40'$  表 6-4

$\gamma_m \backslash B$	$L$	0°	1°	2°	3°
90°		-0.000 40	-0.000 40	-0.000 40	-0.000 40
60°		-0.000 40	-0.000 36	-0.000 25	-0.000 06
30°		-0.000 40	-0.000 23	+0.000 06	+0.000 63
0°		-0.000 40	-0.000 25	+0.000 21	+0.000 98

从表列长度变形值中进行分析，可见该投影改善了高斯-克吕格投影低纬度地区的变形，使得在  $B = 0^\circ$ ， $L = 3^\circ$  处的最大长度变形小于  $+0.0001$ ，此时中央子午线上的长度变形成为  $-0.00040$ ；在赤道上离中央子午线大约  $\pm 180\text{km}$  (约  $\pm 1^\circ 40'$ ) 处的两条割线上无长度变形，偏离这两条割线愈远则变形愈大。位于两条割线以内的长度变形为负值，在此以外的变形则为

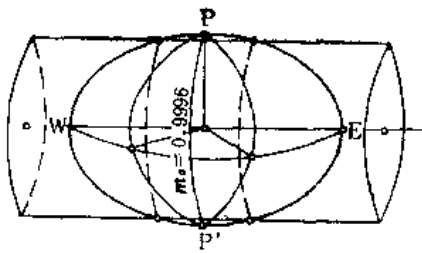


图6-4

正值。

UTM投影将全球划分为60个投影带，每带经差为 $6^\circ$ ，编号自1号至60号。经度自 $180^\circ\text{W}$ 和 $174^\circ\text{W}$ 之间为起始带连续向东计算，所以带的编号系统与百万分之一地形图的有关规定一致。

UTM投影的使用范围介于南纬 $80^\circ$ 到北纬 $84^\circ$ 和经差为 $6^\circ$ 的区域，除此而外的两极地区则采用通用球面极投影(Universal Polar Stereographic Projection)简称UPS投影。

## 练习题

1. 高斯-克吕格投影的投影条件有几条？试用公式表明之。
2. 针对高斯-克吕格投影的直角坐标公式分析经纬线投影表象有何特点？
3. 若对长度比公式进行剖析，高斯投影有哪些变形规律？
4. 若对子午线收敛角的公式进行分析，它有哪些特点？
5. 双标准经线等角横圆柱投影的设想是什么？和高斯投影相比较有何不同？
6. 通用横轴墨卡托投影的设想是什么？与高斯投影相比有哪些改善？

## 计算题

题目：高斯-克吕格投影坐标及子午线收敛角的计算

1. 计算公式：

$$x = s + l'(a_1 + a_2 l') + \delta,$$

$$y = l''(b_1 + b_2 l'') + \delta,$$

$$\gamma = l''(c_1 + c_2 l'') + \delta,$$

式中 $l$ 以秒为单位， $l' = l'' \cdot 10^{-3}$

$$a_1 = \frac{N}{2\rho''^2} \sin B \cos B \cdot 10^8$$

$$a_2 = \frac{N}{24\rho''^4} \sin B \cos^3 B (5 - \text{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4) \cdot 10^{10}$$

$$b_1 = \frac{N}{\rho''} \cos B$$

$$b_2 = \frac{N}{6\rho''^3} \cos^3 B (1 - \text{tg}^2 B + \eta^2) \cdot 10^8$$

$$c_1 = \sin B$$

$$c_2 = \frac{\sin B \cos^2 B}{3\rho''^2} (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) \cdot 10^8$$

$$\delta_5 = \frac{N}{720\rho''^3} \sin B \cos^5 B (61 - 58 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) \cdot L''^3$$

$$\delta_4 = \frac{N}{120\rho''^3} \cos^5 B (5 - 18 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) \cdot L''^3$$

$$\delta_3 = \frac{L''^3}{15\rho''^4} \sin B \cos^4 B (2 - \operatorname{tg}^2 B)$$

当比例尺小于1:20万,计算时可略去 $\delta_3$ ,  $\delta_4$ 和 $\delta_5$ 。在《高斯-克吕格投影计算表》中,只要以纬度 $B$ 为引数,即可查得 $s$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$ 和 $c_2$ 各值。

## 2. 计算说明:

- 1) 先根据已知点经纬度 $L$ 和 $B$ 计算经差 $l$ 和 $l'$ ;
- 2) 以纬度 $B$ 为引数,查取各参数;
- 3) 参考公式依次计算 $x$ ,  $y$ 和 $\gamma$ 。

计算 顺序	计算内容 (计算步骤)	示 例					
		0	1	2	3	4	5
1	$B$	30°00'	30°00'	40°00'			
2	$L$	113°00'	116°00'	119°00'			
3	$L_0$	111°00'					
4	$l$						
	(2)-(3)	2°00'					
5	$l''$	7200					
6	$l' = l''^2 \cdot 10^{-8}$	0.5184000					
9	$a_2 \cdot 10^{-3}$	2.249					
11	$b_2 \cdot 10^{-7}$	0.0952896					
13	$c_2 \cdot 10^{-7}$	0.0902983					
8	$a_1$	3248.518					
14	$a_2 l'$						
	(6)×(9)	1.166					
17	$a_1 + a_2 l'$						
	(8)+(14)	3249.684					
7	$S(x)$	3320172.407					
20	$l'(a_1 + a_2 l')$						
	(6)×(17)	1684.636					
23	$x$						
	(7)+(20)	3321857.043					
10	$b_1$	26.8021951					
15	$b_2 l'$						
	(11)×(6)	0.0027421					
18	$b_1 + b_2 l'$						
	(10)+(15)	26.8049372					
21	$y$						
	(5)×(18)	192995.548					
12	$c_1$	0.5000000					
16	$c_2 l'$						
	(13)×(6)	0.0001546					
19	$c_1 + c_2 l'$						
	(12)+(16)	0.5001546					
22	$\gamma''$	3601''					
	(5)×(19)						
24	$\gamma \cdot l''$						
		1°00'01''					

## 编 程 示 例

本章高斯-克吕格和UTM投影的程序和上一章圆柱投影的程序合为一大类，读者可阅读上章编程示例中的源程序。

下面为高斯-克吕格投影的计算实例。

1. 启动: DEF G
2. 输入: Y\$, L<sub>0</sub>、B<sub>S</sub>、B<sub>N</sub>、L<sub>W</sub>、L<sub>E</sub>、db、dl、m和G。
3. 输出: 见下表。

CYLINDRICAL PROJ ( GU GK ) 6					
		$B_S=16^{\circ}00'$			$L_0=117^{\circ}$
		$B_N=18^{\circ}00'$			$dB=0^{\circ}30'$
		$L_W=115^{\circ}00'$			$dL=0^{\circ}30'$
		$L_B=117^{\circ}00'$			$m=1:200\ 000$
B	L	$\frac{X(m)}{X(cm)}$	$\frac{Y(m)}{Y(cm)}$		$r$ U
16°00'	115°00'	1 770 705.17 0.000	20	285830.49 0.000	-0.5514 1.0006
16°00'	115°30'	1 770 254.28 -0.224	20	339430.05 26.770	-0.4134 1.0003
16°00'	116°00'	1 769 932.32 -0.385	20	392959.17 53.534	-0.2756 1.0001
16°00'	116°30'	1 769 973.20 -0.482	20	446481.32 80.295	-0.1377 1.0000
16°00'	117°00'	1 769 674.83 -0.514	20	500000.00 107.055	0.0000 1.0000
16°30'	115°00'	1 826 065.42 27.620	20	286431.46 0.270	-0.5681 1.0006
16°30'	115°30'	1 825 602.00 27.448	20	339835.61 26.973	0.4260 1.0003
16°30'	116°30'	1 825 271.10 27.283	20	393229.46 53.669	-0.2839 1.0001
16°30'	116°00'	1 825 072.61 27.184	20	446616.45 80.363	-0.1419 1.0000
16°30'	117°30'	1 825 006.45 27.151	20	500000.00 107.055	0.0000 1.0000
17°00'	115°00'	1 881 428.00 55.361	20	286988.63 0.549	-0.5549 1.0006
17°00'	115°30'	1 880 952.19 55.124	20	340253.32 27.181	-0.4386 1.0003
17°00'	116°00'	1 880 612.45 54.954	20	393507.86 53.808	-0.2923 1.0001
17°00'	116°30'	1 880 403.65 54.852	20	446755.62 80.433	-0.1461 1.0000
17°00'	117°00'	1 880 340.72 54.818	20	500000.00 107.055	0.0000 1.0000

B	L	$\frac{X(m)}{X(cm)}$		$\frac{Y(m)}{Y(cm)}$	$\frac{r}{U}$
17°30'	115°00'	1 936 792.97 83.044	20	287561.97 0.836	-0.8015 1.0008
17°30'	115°30'	1 936 304.91 82.800	20	340883.15 27.396	-0.4511 1.0003
17°30'	116°00'	1 935 956.42 82.626	20	393794.33 53.952	-0.3006 1.0001
17°30'	116°30'	1 935 747.38 82.521	20	446898.83 80.604	-0.1503 1.0000
17°30'	117°00'	1 935 674.70 82.486	20	500000.00 107.055	0.0000 1.0000
18°00'	115°00'	1 992 160.37 110.728	20	288151.41 1.130	-0.6182 1.0006
18°00'	115°30'	1 991 660.22 110.478	20	341125.06 27.817	-0.4635 1.0003
18°00'	116°00'	1 991 303.09 110.299	20	394088.85 54.099	-0.3089 1.0001
18°00'	116°30'	1 991 088.86 110.192	20	447046.07 80.679	-0.1544 1.0000
18°00'	117°00'	1 991 017.48 110.159	20	500000.00 107.055	0.0000 1.0000

# 第七章 圆锥投影

## § 7-1 圆锥投影的概念

圆锥投影是以可展曲面之一的圆锥面作为投影面，使之与地球椭球体套合，此时可能出现相切或相割两种情况，分别定为切投影和割投影。若将椭球面上的经纬线投影于圆锥面上，再沿圆锥之母线切开，展成平面后就得到圆锥投影的表象。图7-1(1)和(2)是正轴切圆锥和割圆锥投影的示意图。由图可知经线投影后为交于圆锥顶点的一束直线、纬线投影是以圆锥顶点为中心的同心圆弧。我们还可确认经线的投影长度为同心圆弧的半径，两经线间的夹角与相应的经度差成正比。

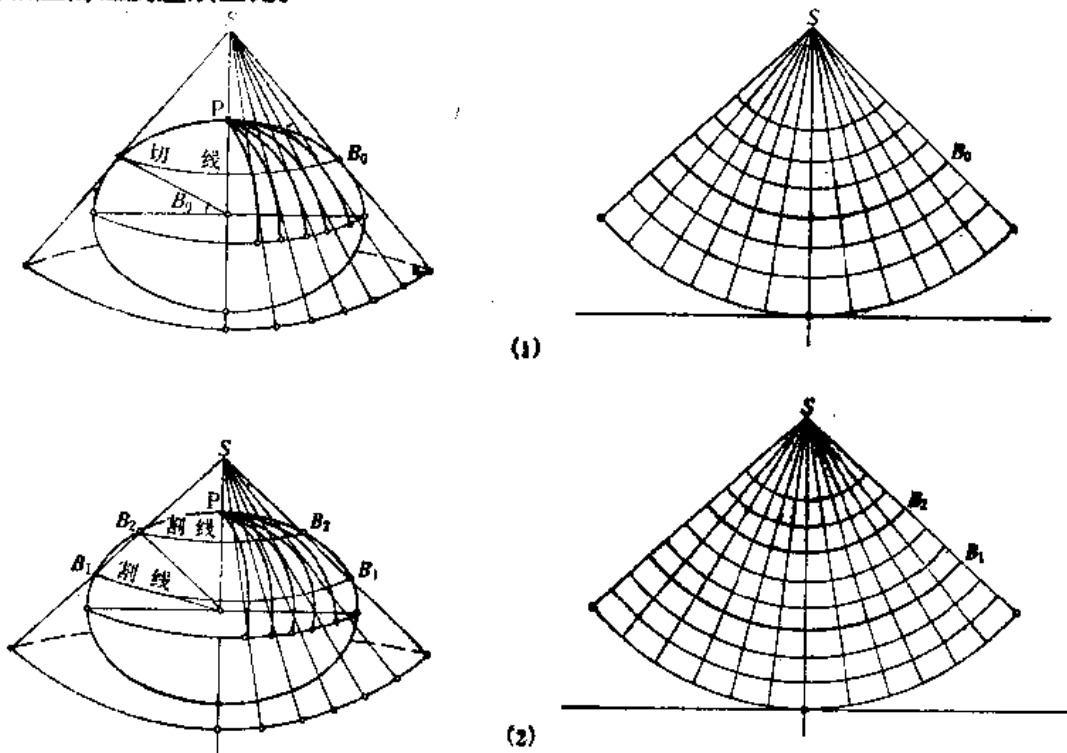


图7-1

按圆锥面与地球椭球体所处的不同相对位置，有正轴、横轴和斜轴圆锥投影三种投影。在正轴情况下，圆锥轴是和地球椭球体的旋转轴一致，见图7-2(1)；横轴时，圆锥轴和椭球体的长轴相一致，见图7-2(2)；但在斜轴位置时，圆锥轴通过椭球体中心，但不和它的旋转轴或长轴重合，处于任意位置，见图7-2(3)所示。

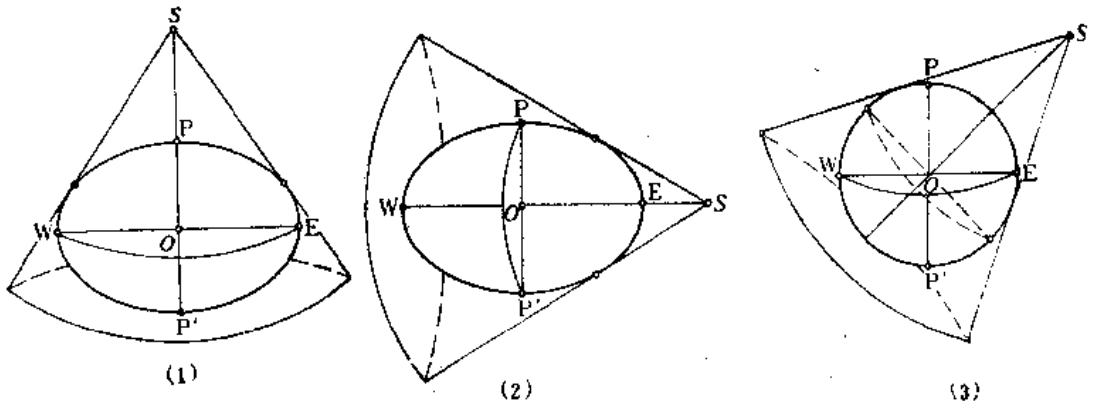


图7-2

如按投影的变形性质，圆锥投影又可分为等角、等面积和等距离投影。

## § 7-2 圆锥投影的一般公式

我们先着手推导正轴时圆锥投影的一般公式，此处需重复强调圆锥投影中纬线投影后为同心圆圆弧，经线投影的表象为相交于一点的直线束，其相邻夹角和经差成正比。参阅图 7-3，即可列出该投影的极坐标公式：

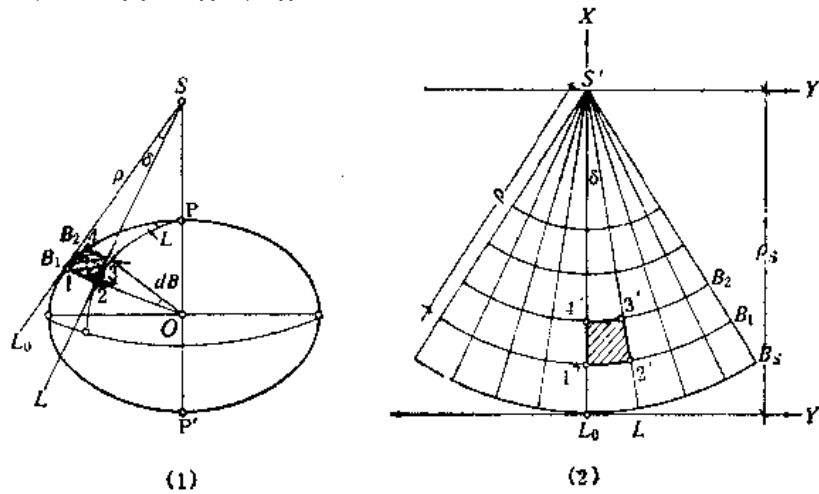


图7-3

$$\left. \begin{aligned} \rho &= f(B) \\ \delta &= al \end{aligned} \right\} \quad (7-1)$$

如前所述，式中的 $\rho$ 为纬线投影半径，它随不同的纬度 $B$ 而变化，函数 $f$ 则取决于投影的性质； $l$ 为椭球面上两相邻经线间的夹角，它在平面上的投影为 $\delta$ 。根据正轴圆锥投影的定义，



$l$ 与 $\delta$ 应成正比,其比值是 $a$ ,为恒小于1的常数。如以圆锥顶点 $S'$ 为原点,中央经线 $L_0$ 为 $X$ 轴,过 $S'$ 点垂直于中央经线的直线为 $Y$ 轴,在此投影平面内任意一点的平面直角坐标为:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (7-2)$$

如坐标原点移至投影区域中最低(南)纬线 $B_s$ 和中央经线 $L_0$ 的交点 $O$ 处,则该点的平面直角坐标为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho_s - \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (7-3)$$

上式中 $\rho_s$ 为制图区域内最低纬线的投影半径,它在一个已决定的投影中是常数。为获得沿经、纬线的微分线段投影后长度比的表达式,可对(7-3)式取偏导数,以求出一阶基本量 $E$ , $F$ 和 $G$ 。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= \rho'_s - \rho' \cos \delta + \rho \sin \delta \frac{\partial \delta}{\partial B} \\ \frac{\partial x}{\partial L} &= \rho \sin \delta \frac{\partial \delta}{\partial L} \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= \rho' \sin \delta + \rho \cos \delta \frac{\partial \delta}{\partial B} \\ \frac{\partial y}{\partial L} &= \rho \cos \delta \frac{\partial \delta}{\partial L} \end{aligned} \right\} \quad (7-4)$$

(7-4)式中,因 $\rho_s$ 为常数,故 $\rho'_s = 0$ ;参考(7-1)式 $\frac{\partial \delta}{\partial B} = 0$ , $\frac{\partial \delta}{\partial L} = a$ 。将上列各关系式代入 $E$ , $F$ 和 $G$ ,便有

$$\left. \begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{dB}\right)^2 \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2 = a^2 \rho^2 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial x}{\partial L} + \frac{\partial y}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial L} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-5)$$

在正轴圆锥投影中,由于经纬线投影后呈正交,故经纬线方向就是主方向,经纬线长度比也即极值长度比, $a$ 、 $b$ 就是 $m$ 、 $n$ ,其中数值大的为 $a$ ,小的为 $b$ 。

在第三章中已知:

$$\left. \begin{aligned} \text{沿经线长度比} \quad m &= \frac{\sqrt{E}}{M} = -\frac{d\rho}{MdB} \\ \text{沿纬线长度比} \quad n &= \frac{\sqrt{G}}{r} = \frac{a\rho}{r} \\ \text{面积比} \quad P &= mn = -\frac{a\rho d\rho}{MrdB} \\ \text{最大角度变形} \quad \sin \frac{\omega}{2} &= \frac{a-b}{a+b} \text{ 或 } \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned} \right\} \quad (7-6)$$

考虑到 $\rho$ 值由圆心起算,椭球体的纬度由赤道起算,两者方向相反,所以 $d\rho/MdB$ 前应加上负号。综合(7-1)、(7-2)和(7-6)式即得圆锥投影的一般公式。如把地球椭球体视为球体,只需将(7-6)式中的 $M$ 换以 $R$ , $r = N \cos B = R \cos \varphi$ 即可。

### § 7-3 等角圆锥投影

正轴等角圆锥投影是按等角条件决定 $\rho = f(B)$ 函数形式的一种圆锥投影。根据等角条件 $m = n$ 或 $a = b$ 或者 $\omega = 0$ ,参考(7-6)式得

$$-\frac{d\rho}{MdB} = \frac{\alpha\rho}{r}$$

将 $r = N\cos B$ 代入上式并适当归并后为

$$-\frac{d\rho}{\rho} = \alpha \frac{MdB}{N\cos B} \quad (7-7)$$

式中 $d\rho$ 表示由于纬度的略微变化而引起投影后纬线半径相应的微小增量。已知

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 B)^{1/2}}$$

将 $M, N$ 代入(7-7)式并取积分

$$\begin{aligned} -\int \frac{d\rho}{\rho} &= \alpha \int \frac{MdB}{N\cos B} \\ -\ln\rho &= \alpha \int \frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2 B)} \cdot \frac{dB}{\cos B} - \ln K \end{aligned} \quad (7-8)$$

根据(5-5)式中积分的方法,可知

$$\alpha \int \frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2 B)} \cdot \frac{dB}{\cos B} = \alpha \ln \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right)}{\operatorname{tg}^*\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right)} = \alpha \ln U$$

代入(7-8)式便得

$$\begin{aligned} \ln \frac{K}{\rho} &= \alpha \ln U \\ \therefore \frac{K}{\rho} &= U^\alpha, \quad \rho = \frac{K}{U^\alpha} \end{aligned} \quad (7-9)$$

上式中已知  $U = \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right)}{\operatorname{tg}^*\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right)}$ ,  $\sin\psi = e\sin B$ ,  $K$ 为积分常数,只有当 $B = 0^\circ$  (即位于赤道)

时,  $\rho = K$ ,所以可以认为 $K$ 的几何含义是赤道的投影半径; $\alpha$ 为另一投影常数,将按不同的特定条件予以确定。现将以上有关各式进行整理得出正轴等角圆锥投影的公式如下:

$$\left. \begin{aligned}
 \rho &= \frac{K}{U^\alpha} \\
 \delta &= \alpha L \\
 x &= \rho_s - \rho \cos \delta \\
 y &= \rho \sin \delta \\
 u = m = n &= \frac{a\rho}{r} = \frac{aK}{rU^\alpha} \\
 P = mn &= \left( \frac{aK}{rU^\alpha} \right)^2 \\
 \omega &= 0^\circ
 \end{aligned} \right\} (7-10)$$

从(7-10)式中可以看出, 只有确定了两个待定常数 $\alpha$ 和 $K$ 后始能进行实际计算,  $\alpha$ 和 $K$ 是圆锥投影曲面转化为平面后出现的新矛盾, 将视以下几种情况分别解决。

### 1. 单标准纬线等角圆锥投影

单标准纬线等角圆锥投影就是保持在指定制图区域内某一条纬线或在此区域内的一条中间纬线上无长度变形, 这是一种将圆锥面切椭球面于某一纬线上的投影, 故也称等角切圆锥投影。如图7-4, 设圆锥面切地球椭球面于纬度为 $B_0$ 的纬线上, 过切点 $C$ 作法线交地轴于 $n$ 点。已知,  $Cn = N_0$ ,  $SC = \rho_0$ , 由相似三角形知  $\angle CS'n = B_0$ , 在直角三角形 $S'Cn$ 中

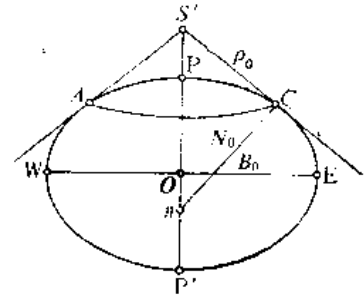


图7-4

$$\operatorname{tg} B_0 = \frac{Cn}{S'C} = \frac{N_0}{\rho_0}$$

$$\therefore \rho_0 = N_0 \operatorname{ctg} B_0 \quad (7-11)$$

又因  $n = \frac{a\rho}{r} = \frac{aK}{rU^\alpha}$ , 与椭球面相切的纬线长度比等于1, 所以当纬度为 $B_0$ 时有

$$n_0 = \frac{a\rho_0}{r_0} = \frac{aK}{r_0 U_0^\alpha} = 1$$

移项后即可求出 $\alpha$ 和 $K$ 。

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha &= \frac{r_0}{\rho_0} = \frac{N_0 \cos B_0}{N_0 \operatorname{ctg} B_0} = \sin B_0 \\
 K &= \frac{r_0 U_0^\alpha}{\alpha} = \frac{N_0 \cos B_0 U_0^\alpha}{\sin B_0} = N_0 \operatorname{ctg} B_0 U_0^\alpha
 \end{aligned} \right\} (7-12)$$

只要得到 $\alpha$ 和 $K$ , (7-10)式可获全解。

现举一例说明于下, 若编制中华人民共和国地图(南海诸岛作为插图)时采用此类投影, 设制图区域南北边纬线的纬度分别为 $B_S = 15^\circ$ 和 $B_N = 55^\circ$ , 当圆锥切在 $B_0 = 35^\circ$ 的纬线上时, 可按公式(7-12)算出 $\alpha = 0.5735764$ ,  $K = 13231784\text{m}$ 。再根据 $u$ 式算出各条纬线上的长度比, 列表表示于下:

$\Delta B = 5'$

表 7-1

B	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°
u	1.0591	1.0331	1.0148	1.0037	1.0000	1.0039	1.0161	1.0378	1.0710

由表可以看出在标准纬线上长度比为1, 标准纬线以外的长度比逐渐增大。此外, 在离标准

纬线纬差相等的情况下，其变形的变化并不是均匀的，北边纬线比南边增长较快。为使南北纬线变形的增长速率均匀一些，可设计另一种限制南北边纬线长度比相等条件的投影，为此需满足：

$$n_S = n_N$$

$$\frac{\alpha K}{r_S U_S^\alpha} = \frac{\alpha K}{r_N U_N^\alpha}$$

$$\left(\frac{U_N}{U_S}\right)^\alpha = \frac{r_S}{r_N}$$

两边取对数得

$$\alpha(\lg U_N - \lg U_S) = \lg r_S - \lg r_N$$

$$\therefore \alpha = \frac{\lg r_S - \lg r_N}{\lg U_N - \lg U_S} \quad (7-13)$$

上式中的 $r_S, r_N, U_S$ 和 $U_N$ 均可从《制图用表》中以纬度为引数查得，常数 $\alpha$ 即可求出。按 $\alpha = \sin B_0$ 的关系式求出 $B_0$ 后即可解出另一常数 $K$ 值，此时

$$K = \frac{r_0 U_0^\alpha}{\alpha} \quad (7-14)$$

仍按前例，由上两式算出：

$\alpha = 0.5862122, K = 13054931\text{m}, B_0 = 35^\circ 53' 19''$ ，再由长度比的公式求出诸纬线的 $u$ 值，详见表7-2。

$\Delta B = 5'$

表 7-2

$B$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$	$35^\circ$	$35^\circ 53' 19''$	$40^\circ$	$45^\circ$	$50^\circ$	$55^\circ$
$u$	1.0644	1.0371	1.0175	1.0052	1.0001	1.0000	1.0026	1.0133	1.0332	1.0644

此表显示的 $u$ 值较为均匀，在南北边纬线处的长度比相等。由此得出结论，在制图区域南北边纬线相隔较窄的情况下，宜用单标准纬线等角圆锥投影，但如南北边纬相距甚宽则宜采用双标准纬线等角圆锥投影。

## 2. 双标准纬线等角圆锥投影

这类投影指的是在制图区域中有两条纬线无长度变形，它们的长度比均为1，由于圆锥面和椭球面上有某两条纬线相割，故也称等角割圆锥投影。设双标准纬线的纬度为 $B_1$ 和 $B_2$ ，见图7-5，依长度比条件有

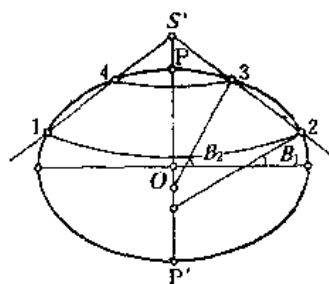


图7-5

$$n_1 = n_2 = 1$$

或

$$\frac{\alpha K}{r_1 U_1^\alpha} = \frac{\alpha K}{r_2 U_2^\alpha} = 1 \quad (7-15)$$

化简后得

$$\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^\alpha = \frac{r_2}{r_1}$$

$$\alpha(\lg U_1 - \lg U_2) = \lg r_2 - \lg r_1$$

$$\therefore \alpha = \frac{\lg r_2 - \lg r_1}{\lg U_1 - \lg U_2} \quad (7-16)$$

投影常数 $\alpha$ 求得后，代入(7-15)式便得

$$K = \frac{r_1 U_1^\alpha}{\alpha} = \frac{r_2 U_2^\alpha}{\alpha} \quad (7-17)$$

将有关公式整理后得双标准纬线等角圆锥投影的坐标公式为：

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho_s - \rho \cos \delta, & y &= \rho \sin \delta \\ \rho_s &= \frac{K}{U_s^2}, & \rho &= \frac{K}{U^2}, & \delta &= \alpha l \\ \alpha &= \frac{\lg r_2 - \lg r_1}{\lg U_1 - \lg U_2}, & K &= \frac{r_1 U_1^2}{\alpha} = \frac{r_2 U_2^2}{\alpha} \\ u &= \frac{\alpha \rho}{r}, & \rho &= \left(\frac{\alpha \rho}{r}\right)^2, & \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-18)$$

至于  $B_1$  和  $B_2$  的纬度可用下式确定之

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= B_s + \frac{B_N - B_s}{4} \\ B_2 &= B_N - \frac{B_N - B_s}{4} \end{aligned} \right\} \quad (7-19)$$

仍以绘制中华人民共和国地图(南海诸岛作插图)为例,如选用此类投影,已知南北边纬纬度  $B_s = 15^\circ$ ,  $B_N = 55^\circ$ ,由公式(7-19)算得  $B_1 = 25^\circ$ ,  $B_2 = 45^\circ$ ,然后再按(7-16)和(7-17)式计算出

$$\alpha = 0.5765872 \quad K = 12988716m$$

同样可依据长度比公式计算各条纬线上的长度比,见表7-3所示:

$\Delta B = 5^\circ$  表 7-3

B	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°
u	1.0442	1.0184	1.0000	0.9888	0.9849	0.9884	1.0000	1.0210	1.0532

由表可见,标准纬线上无长度变形,长度变形随着纬差的向外增大而逐渐变大,但在双标准纬线之间的长度变形是向负的方向增大,即投影后的纬线长度较之原面上的纬线长度缩短了。经线的长度变形规律也是如此,增长的速率北边比南边要快些。

如同上节要求一样,希望整个制图区域内的变形分布均匀一些,则可采用边缘纬线和中纬线长度变形的绝对值相等的条件来确定投影常数  $\alpha$  和  $K$ 。设制图区域边纬的纬度为  $B_s$  和  $B_N$ ,中纬的纬度  $B_M = (B_s + B_N)/2$ ,其长度比分别用  $n_N$ 、 $n_S$  和  $n_M$  表示,按变形绝对值相等的条件有:

$$|n_N - 1| = |n_S - 1| = |n_M - 1|$$

由长度变形  $\nu$  的定义得

$$n_M = 1 + \nu; \quad n_S = 1 + \nu; \quad n_N = 1 - \nu \quad (7-20)$$

可写出

$$n_S = n_N, \quad \lg \frac{\alpha K}{r_S U_S^2} = \lg \frac{\alpha K}{r_N U_N^2}$$

化简后得

$$\alpha = \frac{\lg r_S - \lg r_N}{\lg U_N - \lg U_S} \quad (7-21)$$

常数  $\alpha$  求得后可进一步解求  $K$  值,已知

$$n_M = \frac{\alpha K}{r_M U_M^2} = 1 + \nu, \quad n_N = \frac{\alpha K}{r_N U_N^2} = 1 - \nu$$

将上两式相加得

$$\begin{aligned} \frac{\alpha K (r_M U_M^2 + r_N U_N^2)}{r_M U_M^2 \cdot r_N U_N^2} &= 2 \\ \therefore K &= 2 r_M U_M^2 \cdot r_N U_N^2 \cdot \alpha (r_M U_M^2 + r_N U_N^2) \end{aligned} \quad (7-22)$$

仍按上例计算之，已知 $B_S = 15^\circ$ ， $B_N = 55^\circ$ ，则 $B_M = 35^\circ$ 。由(7-21)和(7-22)两式算出

$$\alpha = 0.5862122, K = 12647095\text{m}$$

$$\because \sin B_0 = \alpha, \therefore B_0 = 35^\circ 53' 19''$$

再按长度比公式  $u = \frac{\alpha \rho}{r}$  计算出各条纬线上的长度比，见表7-4。

$\Delta B = 5^\circ$  表 7-4

$B$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$	$35^\circ$	$35^\circ 53' 19''$	$40^\circ$	$45^\circ$	$50^\circ$	$55^\circ$
$u$	1.0311	1.0047	0.9857	0.9738	0.9689	0.9688	0.9715	0.9816	1.0009	1.0311

从表中可以看出在整个投影区域内的变形是比较均匀的，其变形最大值与表7-3相比要小些。然而前者的双标准纬线的纬度是指定的，一般取整度数，后者的双标准纬线的纬度一般不是整度数。从常数计算和应用方便的角度来看，以事先指定双标准纬线的纬度为佳，但若从变形的均匀方面来考虑，后者又稍有利。根据长期生产实践的经验，若制图区域不大时，可采用如下所示的经验公式，以确定双标准纬线的纬度，即

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= B_S + 0.16(B_N - B_S) \\ B_2 &= B_N - 0.12(B_N - B_S) \end{aligned} \right\} \quad (7-23)$$

仍应用上例可算出 $B_1 = 21^\circ 30'$ ， $B_2 = 50^\circ$ ，其常数值为： $\alpha = 0.5905785$   $K = 12596616\text{m}$

通过各条纬线长度比的计算，证明两种方法的变形分布大体接近，变形值 $u$ 见表7-5。

$\Delta B = 5^\circ$  表 7-5

$B$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$	$35^\circ$	$40^\circ$	$45^\circ$	$50^\circ$	$55^\circ$
$u$	1.0355	1.0066	0.9871	0.9748	0.9695	0.9714	0.9812	1.0000	1.0296

### 3. 定域等面积等角圆锥投影

在等角圆锥投影中，两条标准纬线以内的面积变形是负的，以外则为正值。适当选取两条标准纬线，使制图区域内各部分面积变形的总和为零，除此条件外还要求投影区域南北边纬线的变形值相等。由于我们是根据正轴圆锥投影中，长度比与经差无关，只是纬度的函数的原则来决定投影常数的，所以称之为定域等面积等角投影。

设制图区域总面积变形为 $P$ ，在该区范围内的微分面积为 $\Delta F$ ，它的面积变形以 $p-1$ 表示，于是可写出如下关系式

$$P = \sum (p-1) \cdot \Delta F \quad (7-24)$$

按题示要求定域等面积的必要条件是

$$P = 0$$

实际上微分面积可由一定经差和纬差的单位面积来替代，例如以 $f$ 表示经差、纬差均为1弧度的球面梯形单位面积，即

$$f = M dB \cdot r dL = Mr \cdot \text{arc}^2 1^\circ \quad (7-25)$$

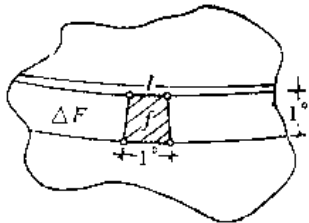


图7-6

式中 $M$ 为子午圈曲率半径， $r$ 为纬圈半径。

因为正轴圆锥投影的长度比仅是纬度的函数，所以在同一纬度上长度比相等。在实际计算中我们还可以取一定纬差(例如为1度)的两条纬线和制图区域周界所交的一条带宽为 $l$ 的带状面来表示单位面积，实际上，带宽 $l$ 即为制图区域内所含的经度差。如

图7-6。

$$\Delta F = f \cdot l = Mr \operatorname{arc}^2 1^\circ \cdot l \quad (7-26)$$

已知正轴等角圆锥投影的面积比为

$$P = m^2 = n^2 = \left( \frac{\alpha K}{r U^\alpha} \right)^2 \quad (7-27)$$

现将(7-25)式改写成

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^n (p_i - 1) \Delta F_i = \sum_{i=1}^n (n_i^2 - 1) \Delta F_i \\ &= (n_1^2 - 1) \Delta F_1 + (n_2^2 - 1) \Delta F_2 + \cdots + (n_i^2 - 1) \Delta F_i + \cdots \end{aligned} \quad (7-28)$$

式中*i*为制图区域内按一定纬差划分的带数，由于定域等面积要求*P* = 0，可将(7-27)式代入(7-28)式得

$$\sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\alpha K}{r_i U_i^\alpha} \right)^2 - 1 \right] \Delta F_i = 0$$

即

$$(\alpha K)^2 \sum_{i=1}^n \frac{\Delta F_i}{(r_i U_i^\alpha)^2} = F$$

式中*F*为制图区域的总面积， $\Delta F_i$ 为各条带宽为*l*的微分带状面积，该式移项后可算得*K*值

$$K = \sqrt{\frac{F}{\alpha^2 \sum_{i=1}^n \frac{\Delta F_i}{(r_i U_i^\alpha)^2}}} \quad (7-29)$$

再按南北边纬线变形值相等的要求(即*n<sub>N</sub>* = *n<sub>S</sub>*)求出*α*值。

$$\begin{aligned} \frac{\alpha K}{r_N U_N^\alpha} &= \frac{\alpha K}{r_S U_S^\alpha} \\ \therefore \alpha &= \frac{\lg r_S - \lg r_N}{\lg U_N - \lg U_S} \end{aligned} \quad (7-30)$$

如编制我国地图(南海诸岛作为插图)应用此类投影，先算出两条标准纬线的纬度，即  $B_1 = 29^\circ 20'$  和  $B_2 = 44^\circ 00'$ ，从长度变形的计算中可知，在北纬  $18^\circ$  和  $54^\circ$  处的变形值约为 0.0430，中纬  $36^\circ$  处的变形值则小于 0.0100，总面积变形与该区域总面积之比为 0.15% 左右，由此看出总面积变形是接近于零的。

## § 7-4 等面积圆锥投影

正轴等面积圆锥投影是按等面积条件决定  $\rho = f(B)$  函数形式的一种圆锥投影，它要求投影后制图区域的面积大小保持不变，即符合面积比  $P = ab = 1$  的条件，由于在正轴圆锥投影中沿经纬线长度比即为极值长度比，所以也可写成  $P = mn = 1$ ，参阅(7-6)式有

$$P = mn = -\frac{d\rho}{M dB} \cdot \frac{\alpha \rho}{r} = 1$$

移项后

$$-\rho d\rho = \frac{1}{\alpha} M r dB$$

两端取积分

$$-\int \rho d\rho = \frac{1}{\alpha} \int M r d B$$

$$\frac{\rho^2}{2} = -\frac{1}{\alpha} \int M r d B + C = \frac{1}{\alpha} \left( C - \int M N \cos B d B \right)$$

已知上式中的  $\int M N \cos B d B$  为经差1弧度，纬差从赤道到纬度  $B$  的地球椭球体上的梯形面积，在第二章用  $F$  表示，其值可在《制图用表》中查取，经整理后得

移项后

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 &= \frac{2}{\alpha} (C - F) \\ C &= \frac{\alpha \rho^2}{2} + F \end{aligned} \right\} \quad (7-31)$$

式中  $C$  为积分常数，和另一个常数  $\alpha$  一起可采用前节的方法求解之。至此可将正轴等面积圆锥投影的主要公式归纳于下：

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 &= \frac{2}{\alpha} (C - F), \quad \delta = \alpha l \\ x &= \rho_s - \rho \cos \delta, \quad y = \rho \sin \delta \\ n &= \frac{\alpha \rho}{r}, \quad m = \frac{1}{n} \\ P &= 1, \quad \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{m}{n}} \end{aligned} \right\} \quad (7-32)$$

下面介绍几种不同情况的等面积圆锥投影

### 1. 正轴等面积切圆锥投影

具体的投影条件是指定制图区域内某一条纬线上（应为切线）无长度变形且长度比为最小。根据投影条件，令无长度变形纬线的纬度为  $B_0$ ，其上  $n_0 = 1$  且为最小，已知

$$\alpha = \sin B_0$$

又因  $n_0 = \frac{\alpha \rho_0}{r_0} = 1$ ， $\therefore \rho_0 = \frac{r_0}{\alpha} = \frac{N_0 \cos B_0}{\sin B_0} = N_0 \operatorname{ctg} B_0$  (7-33)

以此代入(7-31)式便得

$$C = \frac{\alpha \rho_0^2}{2} + F_0 \quad (7-34)$$

上式中  $F_0$  为自赤道至纬度为  $B_0$  的地球椭球体上的梯形面积。此类投影属单标准纬线投影的类型。

### 2. 双标准纬线等面积圆锥投影

双标准纬线等面积圆锥投影就是等面积割圆锥投影，所割纬线的纬度设定为  $B_1$  和  $B_2$ ，在割纬线上无长度变形，依此条件知  $n_1 = n_2 = 1$ ，也可写出  $P = n_1^2 = n_2^2 = 1$

$$\therefore n^2 = \frac{\alpha^2 \rho^2}{r^2} = \frac{\alpha^2 \left[ \frac{2}{\alpha} (C - F) \right]}{r^2} = \frac{2\alpha(C - F)}{r^2} = 1$$

根据两个不同的割线纬度，可写成

$$2\alpha(C - F_1) = r_1^2$$

$$2\alpha(C - F_2) = r_2^2$$

若将上两式相减便得



$$\alpha = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2(F_2 - F_1)} \quad (7-35)$$

同样因为  $n = \frac{\alpha \rho}{r} = 1$ , 标准纬线  $B_1$  和  $B_2$  的投影半径分别为  $\rho_1 = \frac{r_1}{\alpha}$  和  $\rho_2 = \frac{r_2}{\alpha}$ , 将算出的  $\rho_1$  和  $\rho_2$  再代入本投影的基本公式(7-31)后可得

$$\rho_1^2 = \frac{2}{\alpha} (C - F_1), \quad \rho_2^2 = \frac{2}{\alpha} (C - F_2)$$

由此可解算出求常数  $C$  的公式

$$C = \frac{\alpha \rho_1^2}{2} + F_1 = \frac{\alpha \rho_2^2}{2} + F_2 \quad (7-36)$$

再回代至(7-31)式即可计算各条纬线的投影半径  $\rho$ , 使用  $B_1$  或  $B_2$  算得的结果是一样的。

$$\rho^2 = \rho_1^2 + \frac{2}{\alpha} (F_1 - F) = \rho_2^2 + \frac{2}{\alpha} (F_2 - F) \quad (7-37)$$

如此类投影应用于我国地图(南海诸岛作为插图)的编制时, 标准纬线的纬度可取  $B_1 = 25^\circ$ ,  $B_2 = 47^\circ$ , 则按(7-35)和(7-36)式分别算出

$$\alpha = 0.5771091 \quad C = 460773.17 \text{ km}^2$$

其变形值如表7-6所示。

$\Delta B = 5^\circ$

表7-6

$B$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$	$35^\circ$	$40^\circ$	$45^\circ$	$50^\circ$	$55^\circ$
$m$	0.9615	0.9328	1.0000	1.0121	1.0181	1.0170	1.0070	0.9859	0.9511
$n$	1.0404	1.0175	1.0000	0.9880	0.9822	0.9833	0.9931	1.0143	1.0514
$\omega$	$4^\circ 39'$	$1^\circ 59'$	$0^\circ 00'$	$1^\circ 23'$	$2^\circ 03'$	$1^\circ 52'$	$0^\circ 48'$	$1^\circ 38'$	$5^\circ 44'$

从表7-6可以看出, 除面积无变形外其它均存在变形。在标准纬线以内, 纬线变形向负的方向增大, 但经线变形却向正的方向增大; 在标准纬线以外, 情况恰好相反。由于这样才能保持投影前后面积相等的条件。角度变形显然是随着离标准纬线的远近程度而逐渐增大的。

本投影属正轴等面积割圆锥投影, 在有的地图上也称它为亚尔勃斯投影(Albers Projection)。

### 3. 指定制图区域边纬和中纬长度变形绝对值相同的等积圆锥投影

已知制图区域南北边纬为  $B_S$  和  $B_N$ , 要求在此纬线上的长度变形与中纬  $B_M = \frac{B_S + B_N}{2}$  上的长度变形的绝对值相等。可分两个步骤来考虑:

先按边纬长度比相等的条件写出

$$\frac{\alpha^2 \rho_N^2}{r_N^2} = \frac{\alpha^2 \rho_S^2}{r_S^2}$$

$$\therefore \rho^2 = \frac{2}{\alpha} (C - F)$$

$$\therefore \frac{C - F_N}{r_N^2} = \frac{C - F_S}{r_S^2}$$

由此可得出求投影常数  $C$  的公式为

$$C = \frac{r_S^2 F_N - r_N^2 F_S}{r_S^2 - r_N^2} \quad (7-38)$$

然后再按变形绝对值相等的条件即

$$\left. \begin{aligned} n_N &= 1 + \nu \\ n_M &= 1 - \nu \\ n_G &= 1 + \nu \end{aligned} \right\} \quad (7-39)$$

若将上式中的1,2式相加, 得

$$r_N + r_M = 2$$

或为

$$\frac{\alpha \sqrt{\frac{2}{a}(C-F_N)}}{r_N} + \frac{\alpha \sqrt{\frac{2}{a}(C-F_M)}}{r_M} = 2$$

$$\sqrt{\frac{2a(C-F_N)}{r_N^2}} + \sqrt{\frac{2a(C-F_M)}{r_M^2}} = 2$$

两端平方后得

$$\frac{\alpha(C-F_N)}{r_N^2} + \frac{\alpha(C-F_M)}{r_M^2} + \frac{2\alpha\sqrt{(C-F_N)(C-F_M)}}{r_N \cdot r_M} = 2$$

由此解出

$$\alpha = \frac{2r_N^2 r_M}{r_M^2(C-F_N) + r_N^2(C-F_M) + 2r_N r_M \sqrt{(C-F_N)(C-F_M)}} \quad (7-40)$$

由于该投影两条标准纬线的纬度, 是根据计算所得的各纬线长度比, 采用图解法求得, 所以一般不会是整度数。举例说明, 在编制我国地图(南海诸岛作为插图)时, 如选用  $B_M = 54^\circ$ ,  $B_S = 18^\circ$ , 则  $B_M = 36^\circ$ 。现按上列各式计算  $m, n$  和  $\omega$  并附表7-7于下。

$\Delta B = 4^\circ$

表7-7

$B$	$54^\circ$	$50^\circ$	$46^\circ$	$42^\circ$	$38^\circ$	$34^\circ$	$30^\circ$	$26^\circ$	$22^\circ$	$18^\circ$
$m$	0.9763	1.0003	1.0156	1.0238	1.0263	1.0238	1.0169	1.0066	0.9923	0.9763
$n$	1.0243	0.9997	0.9846	0.9767	0.9744	0.9767	0.9834	0.9934	1.0073	1.0243
$\omega$	$2^\circ 45'$	$0^\circ 02'$	$1^\circ 46'$	$2^\circ 42'$	$2^\circ 58'$	$2^\circ 42'$	$1^\circ 55'$	$0^\circ 45'$	$0^\circ 50'$	$2^\circ 45'$

从表中可看出, 中纬  $B_M = 36^\circ$  处的长度比为 0.9756, 南北边纬的长度比是 1.0243, 所以符合本投影题设要求三者绝对值相等的条件。至于标准纬线应设置的位置从表中也可粗略估出,  $B_1$  在不到  $24^\circ$  处,  $B_2$  则接近  $50^\circ$ , 较精确的结果可用图解法解出。从表中所有变形值来看, 在整个制图区域内的变形分布是比较均匀的。

## § 7-5 等距离圆锥投影

正轴等距离圆锥投影是以等距离为条件, 决定  $\rho = f(B)$  函数形式的一种圆锥投影。在等距离圆锥投影中一般是指沿经线保持等距离即满足  $m = 1$  的条件, 由公式得

$$m = -\frac{d\rho}{MdB} = 1$$

$$d\rho = -MdB$$

两端取积分

$$\rho = C - \int M dB = C - S_M \quad (7-41)$$

式中 $C$ 为积分常数， $S_M$ 为赤道到纬度 $B$ 的子午线弧长，该值可从制图用表中直查取，当 $B = 0^\circ$ 时， $S_M = 0$ ，由此可知 $C$ 值即为赤道的投影半径 $\rho_0$ ，现将本投影的公式列于下：

$$\left. \begin{aligned} \rho &= C - S_M, & \delta &= \alpha l \\ x &= \rho_s - \rho \cos \delta, & y &= \rho \sin \delta \\ n &= \frac{\alpha \rho}{r} = \frac{\alpha(C - S_M)}{r}, & m &= 1 \\ P &= n, & \sin \frac{\omega}{2} &= \left| \frac{n-1}{n+1} \right| \end{aligned} \right\} \quad (7-42)$$

如同等角、等积投影一样，本投影也有两个常数 $\alpha$ 和 $C$ 需要确定，可按不同情况分析之

### 1. 正轴等距离切圆锥投影

按投影的条件应为指定制图区域内某一纬线 $B_0$ 上长度比等于1且为最小，按条件有

$$n_0 = 1$$

从(7-12)式中可知

$$\alpha = \sin B_0$$

又知(7-11)式中的切线纬圈投影半径 $\rho_0 = N_0 \operatorname{ctg} B_0$ 。将此关系式代入(7-41)式便得

$$C = \rho_0 + S_0 = S_0 + N_0 \operatorname{ctg} B_0 \quad (7-43)$$

$S_0$ 是自赤道到纬度 $B_0$ 的子午线弧长。

### 2. 双标准纬线等距离圆锥投影

本投影在指定制图区域内有两条纬线(即割线上无长度变形)，故称等距离割圆锥投影，按条件有

$$n_1 = n_2 = 1$$

$$\frac{\alpha \rho_1}{r_1} = \frac{\alpha \rho_2}{r_2} = 1$$

$$\frac{\alpha(C - S_1)}{r_1} = \frac{\alpha(C - S_2)}{r_2} = 1$$

$$\therefore C = \frac{r_1 S_2 - r_2 S_1}{r_1 - r_2}$$

$$\alpha = \frac{r_1}{C - S_1} = \frac{r_2}{C - S_2} \text{ 或 } \alpha = \frac{r_1 - r_2}{S_2 - S_1}$$

(7-44)

在我国地图(南海诸岛作为插图)中，如取 $B_1 = 25^\circ$ ， $B_2 = 47^\circ$ ，则 $\alpha = 0.5842745$ ， $C = 12665751\text{m}$ ，其变形值如表7-8所示。

$\Delta B = 5^\circ$

表 7-8

$B$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$	$35^\circ$	$40^\circ$	$45^\circ$	$50^\circ$	$55^\circ$
$n=P$	1.0436	1.0186	1.0000	0.9877	0.9820	0.9835	0.9934	1.0134	1.0467
$\omega$	$2^\circ 27'$	$1^\circ 03'$	$0^\circ 00'$	$0^\circ 43'$	$1^\circ 02'$	$0^\circ 57'$	$0^\circ 23'$	$0^\circ 46'$	$2^\circ 37'$

由表可见，此投影的经线长度无变形，其它变形在标准纬线处均等于零，在双标准纬线以内， $n$ 和 $P$ 是向负的方向增大，在割线以外情况则相反。角度变形是随着距离标准纬线的远近而逐渐增大。

### 3. 指定边纬与中纬变形绝对值相等的等距离圆锥投影

根据投影条件可写为

$$n_N = 1 + \nu$$

$$n_M = 1 - \nu$$

$$n_S = 1 + \nu$$

公式含意同前述, 由于  $n = \frac{\alpha(C-S)}{r}$

$$\therefore \frac{\alpha(C-S_N)}{r_N} = \frac{\alpha(C-S_S)}{r_S}$$

由此得出

$$C = \frac{r_S S_N - r_N S_S}{r_S - r_N} \quad (7-45)$$

若将  $n_N = 1 + \nu$  与  $n_M = 1 - \nu$  相加得

$$\begin{aligned} n_N + n_M = 2 &= n_S + n_M \\ \frac{\alpha(C-S_N)}{r_N} + \frac{\alpha(C-S_M)}{r_M} &= \frac{\alpha(C-S_S)}{r_S} + \frac{\alpha(C-S_M)}{r_M} = 2 \\ \therefore \alpha &= \frac{2r_N r_M}{(C-S_N)r_M + (C-S_M)r_N} = \frac{2r_S r_M}{(C-S_S)r_M + (C-S_M)r_S} \quad (7-46) \end{aligned}$$

编制我国地图(南海诸岛作插图)时,若取边纬  $B_S = 18^\circ$ ,  $B_N = 54^\circ$ ; 中纬  $B_M = 36^\circ$ , 按公式可算得:  $n = P = 1.0250$ ,  $\omega = 1^\circ 26'$ 。

#### 4. 定域等面积且南北边纬线变形值相等的等距离圆锥投影

此投影的构思已在等角投影中作了说明, 现按指定制图区域边缘纬线变形值相等的条件(即  $n_N = n_S$ )来求出  $C$ , 其值同前

$$C = \frac{r_S S_N - r_N S_S}{r_S - r_N}$$

对于等距离圆锥投影条件应满足  $P = n$ , 再附加定域等面积的条件, 就要使  $P = 0$ 。

前已知

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (P_i - 1) \Delta F_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n (n_i - 1) \Delta F_i &= 0 \\ \therefore n &= \frac{\alpha(C-S)}{r} \\ \therefore \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\alpha(C-S_i)}{r_i} - 1 \right] \Delta F_i &= 0 \end{aligned}$$

移项后便得

$$\alpha = \frac{F}{C \sum_{i=1}^n \frac{\Delta F_i}{r_i} - \sum_{i=1}^n \frac{S_i \Delta F_i}{r_i}}$$

只需将  $C$  值代入上式, 即可得出求  $\alpha$  的公式

$$\alpha = \frac{F}{\frac{S_N r_S - S_S r_N}{r_S - r_N} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta F_i}{r_i} - \sum_{i=1}^n \frac{S_i \Delta F_i}{r_i}} \quad (7-47)$$

## § 7-6 斜轴和横轴圆锥投影

由于正轴圆锥投影中同一纬线上的变形保持不变，它仅是纬度的函数，所以这类投影非常适合于中纬度附近沿纬线扩延的地区。如制图区域并非沿纬线，而是沿着某方向的小圆扩延时，正轴投影是未臻理想的了，因为从变形的情况来分析，只有采用斜轴或横轴投影是更为有利的。

在地图编制工作中，斜轴或横轴投影一般用于小比例尺地图的网格绘制。如前所述，为了便于计算，常把地球椭球体当作半径为  $R$  的球体，并采用球面极坐标的两个参数（即方位角  $a$  和天顶距  $Z$ ）来表示点位，此时坐标原点设于称之为新极的  $Q$  点，其经纬度为  $\varphi_0$  和  $\lambda_0$ ，它是通过制图区域最大延伸方向小圆的极。参阅图 7-7，如果将斜轴和正轴投影作相应的对比，不难看出，垂直圈相当于子午圈，它的投影表象为由新极  $Q$  出发的辐射直线，和正轴时的经线投影相仿。等高圈与垂直圈垂直，它的表象为同心圆圆弧，与正轴投影的纬圈相当。斜轴投影时经纬线的投影均呈曲线，仅有经度为  $\lambda_0$  并通过  $Q$  点的经线表象为直线，且为其它经线投影的对称轴。在定位三角形  $AQP$  中，可找出球面极坐标  $a, Z$  和地理坐标  $\varphi, \lambda$  的对应关系，前已介绍，不再重复。

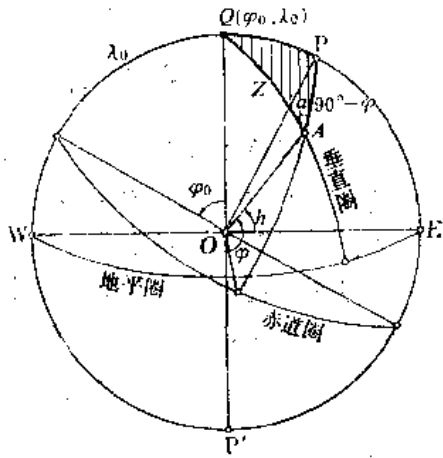


图7-7

在斜轴圆锥投影中，主方向即为垂直圈和等高圈所在的方向，此时沿垂直圈和等高圈的长度比  $u_1$  和  $u_2$  就是极值长度比  $a$  和  $b$ 。在制图实践中，横轴圆锥投影用得较少，我们只将斜轴和正轴圆锥投影的公式作相应比较于下：

正轴圆锥投影	斜轴圆锥投影
$\delta = a\lambda$	$\delta = a\alpha$
$\rho = f(\varphi)$	$\rho = f(Z)$
$x = \rho \sin \delta$	$x = \rho \cos \delta$
$y = \rho \cos \delta$	$y = \rho \sin \delta$
$m = -\frac{d\rho}{M d\varphi}$	$u_1 = \frac{d\rho}{R dZ}$
$n = \frac{a\rho}{r}$	$u_2 = \frac{a\rho}{R \sin Z}$
$P = mn$	$P = u_1 \cdot u_2$
$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}$	$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}$

斜轴圆锥投影中的  $\rho$  是等高圈的投影半径，函数  $f$  则决定于各种投影条件如等角、等积或等距离。斜轴投影的坐标原点设于  $Q(\varphi_0, \lambda_0)$  处，设通过  $Q$  点且经度为  $\lambda_1$  的经圈的投影表象为

X轴，过Q点与X轴垂直并表示天顶距Z的轴线为Y轴，X坐标的正向和天顶距增加的方向一致。现将斜轴圆锥投影的计算步骤归纳于下：

1. 确定球体半径R；
2. 根据投影区域的范围，确定其最大延伸方向小圆极点Q的地理坐标 $\varphi_0$ 和 $\lambda_0$ ；
3. 根据规定的经纬网间隔将投影区域内所有网格交点的地理坐标 $\varphi$ 和 $\lambda$ 换算为以Q为原点的球面极坐标 $\alpha$ 和Z；
4. 参考正轴圆锥投影之公式求解各常数 $a$ 、C和K；
5. 依次计算该投影的直角坐标 $x$ 和 $y$ 以及所有变形值 $u_1$ 、 $u_2$ 、P和 $\omega$ 。

## §7-7 圆锥投影的变形分析及其应用

圆锥投影的等变形线应与纬线一致，因为该投影的变形只是和纬度有关，我们可以从图7-8中来分析切和割圆锥投影的变形分布情况。

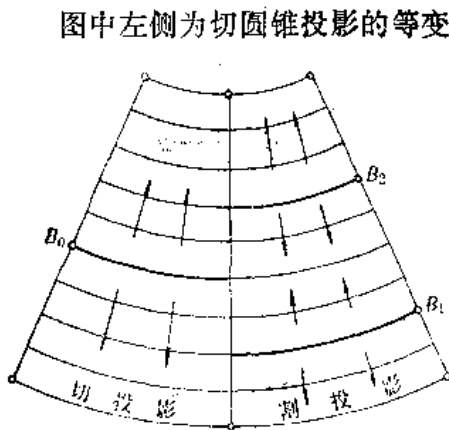


图7-8

图中左侧为切圆锥投影的等变形线示意图， $B_0$ 为与地球相切的标准纬线的纬度，等变形线与纬线一致，箭头所指方向就是变形增加的方向。由此可见，只有标准纬线 $B_0$ 处的长度比 $n_0 = 1$ ，其余纬线的长度比均大于1， $n$ 随着距 $B_0$ 南北纬差的增加而增大。右侧为割圆锥投影的等形线示意图，标准纬线 $B_1$ 和 $B_2$ 处的长度比 $n_1 = n_2 = 1$ ，在双标准纬线以外箭头所指方向为变形增加的方向，其内 $n < 1$ ，为负变形。

根据等角、等积和等距三种不同性质投影所限定的条件，即 $m = n$ 、 $mn = 1$ 和 $m = 1$ ，再参考上述切、割圆锥投影的变形特征，可列出表7-9，以便进一步研究其相关关系。

表 7-9

投影名称	长度比 位置	等角投影		等面积投影		等距离投影	
		$m$	$n$	$m$	$n$	$m$	$n$
切圆锥投影	北	$m > 1$	$n > 1$	$m < 1$	$n > 1$	$m = 1$	$n > 1$
	$B_0$	$m_0 = 1$	$n_0 = 1$	$m_0 = 1$	$n_0 = 1$	$m_0 = 1$	$n_0 = 1$
	南	$m > 1$	$n > 1$	$m < 1$	$n > 1$	$m = 1$	$n > 1$
割圆锥投影	北	$m > 1$	$n > 1$	$m < 1$	$n > 1$	$m = 1$	$n > 1$
	$B_2$	$m_2 = 1$	$n_2 = 1$	$m_2 = 1$	$n_2 = 1$	$m_2 = 1$	$n_2 = 1$
		$m < 1$	$n < 1$	$m > 1$	$n < 1$	$m = 1$	$n < 1$
	$B_1$	$m_1 = 1$	$n_1 = 1$	$m_1 = 1$	$n_1 = 1$	$m_1 = 1$	$n_1 = 1$
	南	$m > 1$	$n > 1$	$m < 1$	$n > 1$	$m = 1$	$n > 1$

从表7-9中显见，在标准纬线相同的情况下，对于不同性质的投影其变形值是不尽相同的，如同本节开始分析的那样，沿纬线长度比是基本一致的，但沿经线长度比相差的程度较

大，必须引起注意。此外，对同一制图区域选择比较适宜的投影时，应考虑割圆锥投影中变形增长的绝对值要比切圆锥投影小些，所以在实际工作中割圆锥投影得到广泛应用。

下面再着重研究切、割圆锥投影中当赋予不同的投影性质时，长度变形、面积变形和角度变形之间的相互关系，先参阅表7-10，然后再对照图7-9便可进行不同性质圆锥投影的变形分析。

表 7-10

投影性质	长度比条件	变形值	关系式	$\omega = \nu_a - \nu_b$	$\nu_p = \nu_a + \nu_b$
等角	$a=b$	$\nu_a = \nu_b = \nu$	$\omega \approx \nu_a - \nu_b = 0$ $\therefore \nu_a = \nu_b$	0	$2\nu$
等面积	$P = ab = 1$	$\nu_a = -\nu_b$	$\nu_p \approx \nu_a + \nu_b = 0$ $\therefore \nu_a = -\nu_b$	$2\nu$	0
等距离	$b=1$ 或 $a=1$	$\nu_a = 0$ $\nu_b = \nu$	$\nu_a = a-1 = 0$ $\nu_b = \nu$	$\nu$	$\nu$

等角圆锥投影的变形特点是角度无变形，沿经线和纬线的长度变形是相同的，面积变形约为长度变形的两倍；等面积圆锥投影时，变形的特点是面积变形等于零，此时沿经线长度

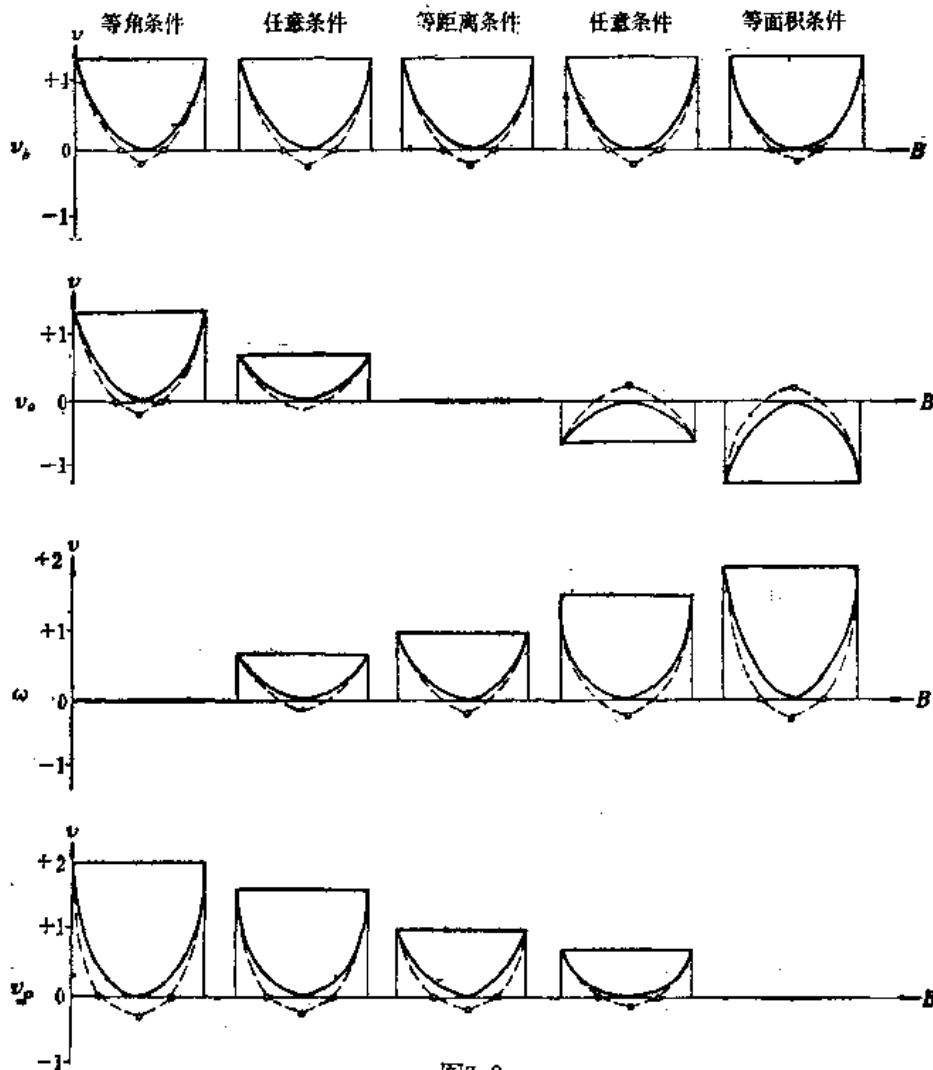


图7-9  
切投影(实线)割投影(虚线)

比与沿纬线长度比互为倒数，两者变形值的符号相反，角度变形较大，约为长度变形的两倍；在等距离圆锥投影的变形特征中，除沿经线长度比保持为1外，沿纬线的长度变形近似和角度变形及面积变形相等，总的来看，等距离投影的变形大小介于等角与等面积投影之间。还可发现沿纬线长度比的变化一般较缓，其它变形的变化均较大。面积变形逐步自右向左增大，到等角投影时为最大；角度变形则相反，自左向右逐渐增长、到等面积投影时角度变形为最大；沿经线方向的长度变形分为两种情况，自等距离投影向等角投影的方向过渡时是正向增大，向等面积投影方向为负向增大。不难设想，在等角投影和等面积投影之间，根据变形特征，还可设计出许多新的投影，一般称为任意投影。等距离投影实质上也是属于任意投影的一种，应用较为广泛。

由于圆锥投影最适用于作为中纬度处沿纬圈伸展的制图区域以及地球上广大陆地分布于中纬度地区等原因，加以该投影之经纬线表象形状简单，经线为辐射直线，纬线为同心圆弧，无论在编图和用图过程中都较为简便，所以在制图实践中得到广泛的应用。

我国地图出版社1957年出版的《中华人民共和国地图集》中的分省图采用统一的编稿、套框和分幅方法，所采用的投影即等角圆锥投影，双标准纬线的纬度为  $B_1 = 25^\circ$ 、 $B_2 = 45^\circ$ 。正轴等面积圆锥投影应用于编制一些行政区划图，人口及社会经济等地图中，我国中国科学院地理研究所编制的1:400万《中国地势图》曾采用圆锥投影，双标准纬线的纬度与上同。我国在编制1:1000000比例尺，经纬度间隔为 $1^\circ$ 的中国北部、中国南部（南海诸岛作插图）以及各省区的地图中广为应用双标准纬线等角圆锥投影，可见其影响之深。正轴等距离圆锥投影目前在我国较少采用。

在国外，日本采用等角割圆锥投影编制1:100万比例尺的地方行政区划图，另选用斜轴等角割圆锥投影绘制比例尺为1:250万和1:400万的《日本国势地图集》。苏联编纂的《世界地图集》内的大部分地图采用了等角圆锥投影。其它许多中纬度国家（如美国、巴基斯坦及欧洲国家）编制各类地图中也多采用圆锥投影。总之，前述各种性质的圆锥投影都各具特点，在编制各类地图或地图集时，均可按不同要求来选择较为合适的地图投影。

## 思考题

1. 圆锥投影基本公式之推演，并说明为什么  $x = \rho_s - \rho \cos \delta$ ?
2. 在正轴等角、等面积和等距离圆锥投影中，如何确定纬圈投影半径  $\rho$  值?
3. 推导双标准纬线等角圆锥投影坐标公式的出发点是什么?
4. 定域等面积圆锥投影的基本设想是什么？如何求得常数  $\alpha$ ， $K$  值?
5. 试对正轴圆锥投影和斜轴圆锥投影之公式作一比较。
6. 圆锥投影之变形分析。

## 圆锥投影计算实例

### 一、正轴等角割圆锥投影



应用双标准纬线等角圆锥投影计算湖北省地图的数学基础。

1. 已知参数及要求

制图区域:  $L_W = 108^\circ$ ,  $L_E = 116^\circ$ ;  $B_S = 29^\circ$ ,  $B_N = 34^\circ$

经纬线网格密度:  $\Delta B = \Delta L = 1^\circ$

标准纬线:  $B_1 = 30^\circ 30'$ ,  $B_2 = 32^\circ 00'$

中央经线:  $L_0 = 112^\circ$  (东经)

制图比例尺:  $M_0 = 1:400$ 万

计算精度:  $\lg \alpha$ ,  $\lg K$  精确到对数小数点后七位;  $x, y$  精确到  $0.001$ cm,  $\delta$  精度为  $1''$ ;  $m, P$  算至  $0.0001$ 。

投影计算公式:

$$\alpha = \frac{\lg r_1 - \lg r_2}{\lg U_2 - \lg U_1}, \sin B_0 = \alpha$$

$$K = \frac{100}{M_0} \cdot \frac{r_1 U^a}{\alpha} = \frac{100}{M_0} \cdot \frac{r_2 U^a}{\alpha} \text{ (cm)}$$

$$\delta'' = \alpha \cdot 1'', \rho = \frac{K}{U^a}$$

$$x = \rho_s - \rho \cos \delta, y = \rho \sin \delta$$

$$u = m = n = \frac{\alpha K}{r U^a} = \frac{\alpha \rho}{r}, P = m^2 = n^2, \omega = 0$$

式中:

$$U = \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right)}{\operatorname{tg}^*\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right)}, \sin \psi = e \sin B, e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

2. 投影常数  $\alpha, K$  的计算

序号	公式符号	计算值	序号	公式符号	$B_1$	$B_2$
1	$\lg r_1$	6.740 396 3	1	$\alpha$	0.518 791 4	0.518 791 4
2	$\lg r_2$	8.733 530 2	2	$\lg U$	0.241 471 8	0.254 708 6
3	$A$ (1)-(2)	0.008 866 1	3	$U^a$	1.334 301 5	1.355 625 1
4	$\lg U_2$	0.254 708 6	4	$r$	6500426	5414149
5	$\lg U_1$	0.241 471 3	5	$M_0 \times 100$	0.000025	0.000025
6	$B$ (4)-(5)	0.013 234 8	6	$K$ (cm)	353.685	353.685
7	$\alpha$ (3)/(6)	0.518 791 4		(3) × (4) × (5) / (1)		
8	$B_0$	$31^\circ 15' 04''$				

3. 计算极坐标  $\rho, \delta$

$$\alpha = 0.5187914$$

$L_i$	$112^\circ$	$111^\circ$	$110^\circ$	$109^\circ$	$108^\circ$
$\delta$		$113^\circ$	$114^\circ$	$115^\circ$	$116^\circ$
$L_i - L_0$	$0^\circ$	$1^\circ$	$2^\circ$	$3^\circ$	$4^\circ$
$\delta$	$0^\circ 00' 00''$	$0^\circ 31' 08''$	$1^\circ 02' 15''$	$1^\circ 33' 23''$	$2^\circ 04' 30''$

$$\alpha = 0.5187914 \quad K = 353.685$$

符号	B					
	29°	30°	31°	32°	33°	34°
lgU	0.2284415	0.2371064	0.2458599	0.2547066	0.2636513	0.2726990
lgU <sup>a</sup>	0.1185135	0.1230088	0.1275500	0.1321395	0.1367800	0.1414739
U <sup>a</sup>	1.3137523	1.3274212	1.3413744	1.3556251	1.3701876	1.3850769
$\rho(\text{cm})$	269.218	266.445	263.674	260.900	258.129	255.354

#### 4. 计算平面直角坐标(以B = 29°为例)

B	L <sub>0</sub>	L <sub>0</sub> - L				
		112°	111°	110°	109°	108°
		0°	1°	2°	3°	4°
29°	$\delta$	0°00'00"	0°31'08"	1°02'15"	1°33'23"	2°04'30"
	x(cm)	0.00	0.01	0.05	0.10	0.18
	$\rho_B$	269.218	269.218	269.218	269.218	269.218
	$\rho \cos \delta$	269.218	269.207	269.174	269.118	269.041
	$\cos \delta$	1	0.9999590	0.9998360	0.9996311	0.9993442
	$\rho$	269.218	269.218	269.218	269.218	269.218
	$\sin \delta$	0	0.0090543	0.0181078	0.0271598	0.0362096
	y(cm)	0.00	2.44	4.87	7.31	9.75

#### 5. 平面直角坐标表 (以cm为单位)

B	L	L <sub>0</sub> = 112°				
		111°	110°	109°	108°	
29°	x	0.00	0.01	0.05	0.10	0.18
	y	0.00	2.44	4.87	7.31	9.75
33°	x	2.77	2.78	2.82	2.87	2.95
	y	0.00	2.41	4.82	7.24	9.65
31°	x	5.54	5.56	5.59	5.64	5.72
	y	0.00	2.39	4.77	7.16	9.55
32°	x	8.32	8.33	8.35	8.42	8.49
	y	0.00	2.36	4.72	7.09	9.45
33°	x	11.09	11.10	11.13	11.19	11.26
	y	0.00	2.34	4.67	7.04	9.39
34°	x	13.87	13.88	13.91	13.92	14.01
	y	0.00	2.31	4.61	6.94	9.25

#### 6. 计算长度比和面积比

$$\alpha = 0.5187914$$

B	29°	30°	31°	32°	33°	34°
$\rho$	269.218	266.445	263.674	260.900	258.129	255.354
$M_{\phi} \cdot 100$	139.5733	138.2987	136.9021	135.3537	133.8641	132.3337
$m$	1.0007	1.0002	0.9999	1.0000	1.0004	1.0011
$P$	1.0014	1.0003	0.9998	1.0000	1.0008	1.0021

图7-10为长度比和面积比的变化曲线图, 通过  $m = n = 1$  的水平轴线与变形曲线的两个交点即为双标准纬圈的纬度  $B_1$  和  $B_2$ 。

#### 二、正轴等面积割圆锥投影

应用双标准纬线等面积圆锥投影计算中华人民共和国地图(南海诸岛作插图)的数学基

础。

1. 已知参数及要求

制图区域:  $L_W = 135^\circ, L_E = 70^\circ; B_S = 18^\circ, B_N = 55^\circ$

经纬线网格密度:  $\Delta B = \Delta L = 5^\circ$

标准纬线:  $B_1 = 25^\circ, B_2 = 47^\circ$

中央经线:  $L_0 = 105^\circ$  (东经)

制图比例尺:  $M_0 = 1:400$ 万

计算精度: 同上例。

投影计算公式:

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_1^2 - r_2^2}{S_2 - S_1}, C = \frac{\alpha \rho_1^2}{2} + F_1 = \frac{\alpha \rho_2^2}{2} + F_2$$

$$\text{或 } C = \frac{r_1^2}{2\alpha} + F_1 = \frac{r_2^2}{2\alpha} + F_2$$

$$\rho^2 = \frac{2}{\alpha} (C - F), \delta = \alpha l$$

2. 投影常数  $\alpha, C$  的计算

$B$	$r(\text{km})$	$r^2(\text{km}^2)$	$F(\text{km}^2)$
$B_1 \quad 25^\circ$	5784.112	33 455 952	17 091 506
$B_2 \quad 47^\circ$	4357.760	18 990 072	29 624 560
$r_1^2 - r_2^2$	14 465 880	$F_2 - F_1$	12 533 054
$\frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)$	7 232 940	$\alpha$	0.5 771 091

$B$	$r^2(\text{km}^2)$	$2\alpha$	$r^2/2\alpha$	$F(\text{km}^2)$	$C(\text{km}^2)$
$B_1 \quad 25^\circ$	33 455 952	1.1 542 182	28 995 812	17 091 506	46 077 318
$B_2 \quad 47^\circ$	18 990 072	1.1 542 182	16 452 757	29 624 560	46 077 318

3. 计算极坐标  $\rho$  和  $\delta$

$$C = 46\,077\,318 \quad \alpha = 0.577\,109\,1$$

$B$	$18^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$	$35^\circ$	$40^\circ$	...
$F(\text{km}^2)$	12 492 610	13 828 153	17 091 506	20 227 428	23 212 150	26 022 870	
$C - F$	33 584 708	32 249 165	28 885 812	25 849 890	22 865 168	20 054 448	
$2/\alpha$	3.4 655 492						
$\rho^2$	116 389 459	111 761 068	100 451 758	89 584 088	79 240 365	69 499 677	
$\rho(\text{km})$	10 788.395	10571.711	10 022.582	9 464.886	8901.700	8336.647	

$L$	$105^\circ$	$100^\circ$ $110^\circ$	$95^\circ$ $115^\circ$	$90^\circ$ $120^\circ$	$85^\circ$ $125^\circ$	...
$l$	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	
$l''$	0	18000	36000	54000	72000	
$\alpha l''$	0	10388	20776	31164	41552	
$\delta$	0	$2^\circ 53' 08''$	$5^\circ 46' 16''$	$8^\circ 39' 24''$	$11^\circ 32' 32''$	

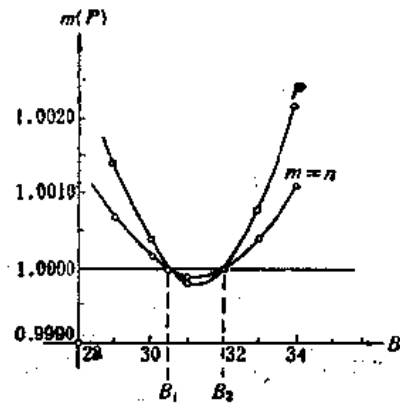


图7-10

#### 4. 计算平面直角坐标

$$\rho_s = 10788.395(\text{km})$$

B	L	105°	110°	115°	120°	125°	...
		0°	5°	10°	15°	20°	
20°	cosδ	1	0.9987321	0.9949315	0.9886080	0.9797775	
	sinδ	0	0.0503412	0.1005547	0.1505132	0.2000900	
	ρ	10571.711					
	ρcosδ	0571.711	10558.307	10518.129	10451.278	10357.925	
	x (km)	216.684	230.088	270.266	337.117	430.470	
	y (km)	0	532.132	1083.035	1591.182	2115.294	
	x' = 10 <sup>5</sup> M <sub>0</sub> x(cm)	5.417	5.752	6.757	8.428	10.762	
	y' = 10 <sup>5</sup> M <sub>0</sub> y(cm)	0	13.305	28.576	39.780	52.882	
25°	ρ	10022.562					
	ρcosδ	10022.562	10009.854	9971.783	9908.385	9819.881	
	x	785.833	778.641	816.632	880.010	968.514	
	y	0	504.547	1007.815	1508.528	2006.414	
	x'	19.146	19.464	20.418	22.000	24.013	
	y'	0	12.614	25.195	37.713	50.135	...

#### 5. 各变形值的计算

$$n = \frac{\alpha\rho}{r}, \quad m = \frac{1}{n}, \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{m-n}{m+n}$$

$$\alpha = 0.5771091$$

B	18°	20°	25°	30°	35°	40°	...
ρ	10788.395	10571.711	10022.562	9464.886	8901.706	8336.647	
αρ	6726.081	6101.031	5784.112	5462.272	5137.256	4811.155	
r	6068.011	5995.938	5784.112	5528.349	5230.514	4892.790	
n = αρ/r	1.0260	1.0175	1.0000	0.9880	0.9822	0.9833	
m = 1/n	0.9747	0.9828	1.0000	1.0121	1.0181	1.0170	
m - n	0.0513	0.0347	0	0.0241	0.0359	0.0337	
m + n	2.0007	2.0003	2	2.0001	2.0003	2.0003	
sinω/2	0.02564	0.01735	0	0.01205	0.01795	0.01685	
ω	2°56'20"	1°59'20"	0	1°22'50"	2°03'30"	1°55'50"	

### 三、正轴等距离割圆锥投影算例

应用双标准纬线等距离圆锥投影计算苏联全国地图的数学基础。

1. 已知参数及要求

制图区域:  $L_W = 6^\circ$ 、 $L_E = 168^\circ$ ;  $B_S = 32^\circ$ 、 $B_N = 86^\circ$

经纬线网格密度:  $\Delta B = \Delta L = 2^\circ$

标准纬线:  $B_1 = 47^\circ$ 、 $B_2 = 62^\circ$

中央经线:  $L_0 = 100^\circ$ (东经)

制图比例尺:  $M_0 = 1:250$ 万

计算精度: 同前例。

投影计算公式:

$$\rho = C - S_M, \delta = \alpha l, x = \rho_s - \rho \cos \delta, y = \rho \sin \delta$$

$$C = \frac{r_1 S_2 - r_2 S_1}{r_1 - r_2}, \alpha = \frac{r_1 - r_2}{S_2 - S_1}, n = \frac{\alpha \rho}{r}, P = n, \sin \frac{\omega}{2} = \frac{|n - 1|}{|n + 1|}$$

### 2. 投影常数 $\alpha, C$ 的计算

$B$	$r$ (km)	$B$	$S$ (km)		
47°	4357.760	47°	5207.339	$r_1 S_2$	29968538
62°	3002.249	62°	6677.051	$r_2 S_1$	15633723
$r_1 - r_2$	1355.512	$S_2 - S_1$	1669.712	$r_1 S_2 - r_2 S_1$	14334815
		$\alpha$	0.8118238	$C$ (km)	10575.203

### 3. 计算极坐标 $\delta$ 和 $\rho$

$$L_0 = 100^\circ \text{E} \quad \alpha = 0.8118238$$

$L$	100°	98° 102°	96° 104°	94° 106°	92° 108°	90° 110°
$l'$	0	2	4	6	8	10
$l''$	0	7200	14400	21600	28800	.....
$\alpha l''$	0	5845'	11690.3	17535.4	23380.5	
$\delta$	0°	1°37'25"	3°14'50"	4°52'15"	6°29'40"	

$$C = 10575.203 \text{m}$$

$B$	30°	32°	34°	36°	38°	40°
$S_M$	3320172	3541915	3783728	3985613	4237573	.....
$\rho$	7255031	7033288	6811475	6589590	6367630	

### 4. 计算平面直角坐标 $x$ 和 $y$

$$\rho_s = 7033288$$

$B$	$L$	100°	98° 102°	96° 104°	94° 106°	92° 108°	90° 110°
		0°	2°	4°	6°	8°	10°
30°	$\cos \delta$	1	0.9995985	0.9983943	0.9963885	0.9935826	.....
	$\sin \delta$	0	0.0283340	0.0566458	0.0849117	0.1131093	
	$\rho$	7255031					
	$\rho \cos \delta$	7255031	7252118	7243382	7228829	7208473	
	$x$ (m)	2744969	2747882	2756618	2771171	2791527	
	$x'$ (cm)	109.89	109.92	110.26	110.85	111.66	
	$y$ (m)	0	205564	410967	616037	820611	
	$y'$ (cm)	0	8.22	16.44	24.64	32.82	
32°	$\rho$	7033288					
	$\rho \cos \delta$	7033288	7030464	7021995	7007637	6988153	
	$x$ (m)	2966712	2969536	2978005	2992113	3011847	
	$x'$ (cm)	118.67	118.73	119.12	119.58	120.47	
	$y$ (m)	0	199281	398406	597208	795530	
	$y'$ (cm)	0	7.97	15.94	23.89	31.82	

表中  $x'$  (cm) =  $10^2 M_c \cdot x$  (m) =  $0.4 \times 10^{-4} x$  (m),  $y'$  (cm) =  $10^2 M_o \cdot y$  (m) =  $0.4 \times 10^{-4} y$  (m)

### 5. 计算长度比 $n$ 和角度变形 $\omega$

$B$	$30^\circ$	$32^\circ$	$34^\circ$	$36^\circ$	$38^\circ$	$40^\circ$
$\rho$	7255031	7033288	6811475	6589590	6367630	.....
$\alpha\rho$	5889881	5709791	5529717	5349586	5169394	
$r$	5528348	5414149	5293347	5166085	5032514	
$n, \rho$	1.0654	1.0546	1.0447	1.0355	1.0272	
$\sin\omega/2$	0.0317	0.0266	0.0219	0.0174	0.0134	
$\omega$	$3^\circ 38'$	$3^\circ 03'$	$2^\circ 31'$	$2^\circ 00'$	$1^\circ 32'$	

## 计 算 题

题目：应用双标准纬线正轴等角圆锥投影计算新疆维吾尔自治区地图的数学基础。

制图区域： $L_W = 73^\circ$ ， $L_E = 97^\circ$ ； $B_S = 34^\circ$ ， $B_N = 51^\circ$

经纬线网格密度： $\Delta B = \Delta L = 1^\circ$

标准纬线： $B_1 = 36^\circ 30'$ ， $B_2 = 48^\circ 00'$

中央经线： $L_0 = 85^\circ$ （东经）

制图比例尺： $1:1\,000\,000$

计算精度要求及投影计算公式详见本章计算实例一。

计算步骤：

1. 绘制制图区域略图；
2. 常数 $\alpha, B$ 的计算；
3. 计算极坐标 $\rho, \delta$ ；
4. 计算平面直角坐标 $x, y$ ，列出各交点的直角坐标表；
5. 长度比和面积比的计算；
6. 绘制长度比、面积比的变化曲线图。
7. 所有计算表格仿实例一自制，不另附印。

## 编 程 示 例

### 一、源程序

```

:
:
105 :IF Y$ = "CN2" OR Y$ = "CR2"
      OR Y$ = "CD2" GOSUB 502
:
:
500:REM "SUB. CONI."
502:INPUT "B1=" , D1, "B2=" , D2:
      GLCURSOR (130, -75):LPRINT
      USING, "B1=" , D1:GLCURSOR
      (110, -75):LPRINT "B2=" , D2
503:D1=DEG D1:D2=DEG D2:RETU

```

```

RN
508:B = (BS + BN) / 2 : GOSUB 513 : RM =
    RB : UM = U : S = SM
510:B = BN : GOSUB 513 : RN = RB : UN =
    U : S2 = SM
512:B = BS
513 : GOSUB 50 : GOSUB 30 : GOSUB 302 :
    RETURN
514 : AR = SIN B0 : B = B0 : GOSUB 513 : P0
    = N / TAN B0 : RETURN
516 : GOSUB 510
518 : C = (RB * S2 - RN * SM) / (RB - RN) :
    RETURE
520 : GOSUB 513 : P = K / U ^ AR
522 : DR = AR * DL : X = PS - P * COS DR :
    Y = P * SIN DR : U2 = AR * P / RB :
    RETURN
524 : INPUT "I = ", I : D G = (BN - BS) /
    I : RETURN
526 : GOSUB 510
528 : AR = (LOG RB - LOG RN) / (LOG U
    N - LOG U) : RETURN
530 : GOSUB 520 : U1 = U2 : RETURN
532 : GOSUB 50 : BN = B : DB = B : LD = DL
    : DL = PD : GOSUB 38 : P = sqrt(2 / AR
    * (C - T)) : DL = LD : GOSUB 522 :
    U1 = 1 / U2 : RETURN
534 : GOSUB 513 : P = C - SM : GOSUB 522
    : U1 = 1 : RETURN
540 : J = 1
542 : BN = SB + J * DG : BS = BN - DG : B =
    (BS + BN) / 2 : GOSUB 513 : DF = M *
    RB / PD ^ 2 * DL * DG : GOSUB U $
543 : J = J + 1 : IF J <= I GOTO 542
544 : RETURN
547 : "N4" DT = DT + DF / (RB ^ 2 * U ^
    (2 * AR)) : RETURN
548 : "D4" DT = DT + DF / R B : ST = ST +
    SM * DF / RB : RETURN
600 : REM "CONICAL PROJ"
602 : "H" CLEAR : W $ = "CONICAL
    PRO." : INPUT "Y $ = ", Y $
604 : IF Y $ = "CR1" OR Y $ = "CR2"
    OR Y $ = "CR3" LET X $ = "CE

```

```

R" : GOTO 612
606 : IF Y $ = "CD1" OR Y $ = "CD2"
    OR Y $ = "CD3" OR Y $ = "CD4
    " LET X $ = "CED" : GOTO 612
608 : X $ = "CEN"
612 : GOSUB 69 : GOSUB 101
614 : GOSUB 55 : GOSUB 72 : SB = BS : NB
    = BN : GOTO Y $
620 : "CN1" GOSUB 514 : K = P0 * U ^
    AR : GOTO 652
622 : "CN2" BS = D1 : BN = D2 : GOSUB
    526 : K = RB * U ^ AR / AR : GOTO 652
624 : "CN3" GOSUB 526 : B = ASN AR :
    GOSUB 513 : K = RB * U ^ AR / AR :
    GOTO 652
626 : "CN4" GOSUB 524 : GOSUB 526 :
    GOSUB 38 : U $ = "N4"
628 : DT = 0 : GOSUB 540 : K = sqrt(T / (AR ^
    2 * DT)) : GOTO 652
630 : "CN5" GOSUB 508 : GOSUB 528 : K
    = 2 * RM * UM ^ AR * RN * UN ^ AR /
    (AR * (RM * UM ^ AR + RN * UN ^
    AR)) : GOTO 652
632 : "CR1" GOSUB 514 : BS = 0 : BN =
    B0 : DB = B0 : DL = PD : GOSUB 38 : C
    = AR * P0 ^ 2 / 2 + T : GOTO 653
634 : "CR2" B = D2 : GOSUB 50 : RN = RB
    : B = D1 : GOSUB 50 : BS = 0 : BN = D2 :
    DB = D2 : DL = PD : GOSUB 38 : TN =
    T : BN = D1 : DB = D1
636 : GOSUB 38 : AR = (RB ^ 2 - RN ^ 2) /
    (2 * (TN - T)) : C = RB ^ 2 / (2 * AR) +
    T : GOTO 653
638 : "CR3" GOSUB 508 : BS = 0 : DB = BN
    : DL = PD : GOSUB 38 : TN = T : BN =
    (SB + NB) / 2 : DB = BN : GOSUB 38 : T
    M = T
640 : BN = SB : DB = BN : GOSUB 38 : C =
    (RB ^ 2 * TN - RN ^ 2 * T) / (RB ^ 2 -
    RN ^ 2)
642 : AR = 2 * RN ^ 2 * RM ^ 2 / (RM ^ 2 *
    (C - TN) + RN ^ 2 * (C - TM) + 2 * R
    M * RN * sqrt((C - TN) * (C - TM))) :
    GOTO 653

```

```

644: "CD1" GOSUB 514: C = SM + P0:
      GOTO 654
646: "CD2" BS = D1: BN = D2: GOSUB
      516: AR = RB / (C - SM): GOTO 654
648: "CD3" GOSUB 508: GOSUB 518:
      AR = 2 * RN * RM / ((C - S2) * RM +
      (C - S) * RN): GOTO 654
650: "CD4" GOSUB 524: GOSUB 516:
      GOSUB 38: DT = 0: ST = 0: U$ = "
      D4": GOSUB 540: AR = T / (C * DT
      - ST): GOTO 654
652: B = SB: GOSUB 302: PS = K / U \ AR:
      GOTO 656
653: BN = SB: DB = SB: GOSUB 38: PS =
      sqrt(2 / AR * (C - T)): GOTO 656
654: B = SB: GOSUB 30: PS = C - SM
656: B = B1
658: L = L1
660: DL = L - L0: GOTO X$
662: "CEN" GOSUB 530: GOTO 670
664: "CER" GOSUB 532: GOTO 670
666: "CED" GOSUB 534
670: GOSUB 185: GOSUB 190: GOSUB
      134
672: L = L + DS: IF L <= L2 GOTO 660
674: B = B + DS: IF B <= B2 GOTO 658
676: END
STATUS 1

```

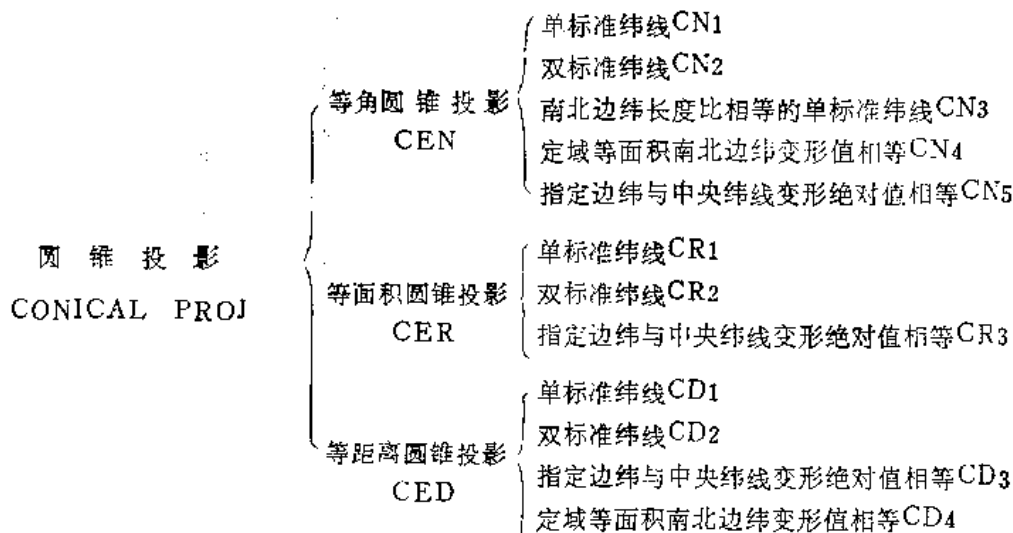
2087

## 二、程序功能

本程序能解决圆锥投影这一大类的投影计算，其中包括等角圆锥投影CEN、等面积圆锥投影CER和等距离圆锥投影CED这三类所隶属的十二个小类的投影计算问题。

## 三、各类投影命名原则

大类取其英文命名并赋入W\$，中类及小类均取其英文缩写字母为名赋入控制变量X\$和Y\$中，并将其名作为标号列入程序，当多路分支时，各个标号即为各类投影计算的入口目标。现将其分支及相应标号列于下面。



## 四、主要标识符

存储器名	X\$, Y\$	D1 D2	I
变量名	控制变量	南北割线纬度	面积分割块数

注：在圆锥投影的程序段中，已略去与方位投影和圆柱投影中的重复部份，内含：第30—45行、50—75行、101—104行、106—187行、190—194行和302行。



五、实例

双标准纬线等角圆锥投影之计算实例

1. 起动: DEFH

2. 输入:  $Y_0, B_0, L_0, B_S, B_N, L_W, L_E, B_1, B_2, dS, m$

3. 输出: 见下表。

CONICAL PROJECTION (CEN CN <sub>2</sub> )							
		$B_1=30^{\circ}30'$			$L_W=108^{\circ}00'$	$d_S=1.00$	
		$B_2=32^{\circ}00'$			$L_E=116^{\circ}00'$	$m=1:4000000$	
		$B_S=29^{\circ}00'$			$B_0=31^{\circ}30'$		
		$B_N=34^{\circ}00'$			$L_0=112^{\circ}00'$		
B	L	X (cm)	Y (cm)	$U_1$	$U_2$	P	W
29	112	0.000	0.000	1.0007	1.0007	1.0014	0.0000
29	113	0.011	2.438	1.0007	1.0007	1.0014	0.0000
29	114	0.044	4.875	1.0007	1.0007	1.0014	0.0000
29	115	0.099	7.312	1.0007	1.0007	1.0014	0.0000
29	116	0.177	9.749	1.0007	1.0007	1.0014	0.0000
30	112	2.772	0.000	1.0002	1.0002	1.0003	0.0000
30	113	2.783	2.413	1.0002	1.0002	1.0003	0.0000
30	114	2.816	4.825	1.0002	1.0002	1.0003	0.0000
30	115	2.871	7.237	1.0002	1.0002	1.0003	0.0000
30	116	2.947	9.648	1.0002	1.0002	1.0003	0.0000
31	112	5.544	0.000	0.9999	0.9999	0.9998	0.0000
31	113	5.555	2.387	0.9999	0.9999	0.9998	0.0000
31	114	5.587	4.775	0.9999	0.9999	0.9998	0.0000
31	115	5.641	7.162	0.9999	0.9999	0.9998	0.0000
31	116	5.717	9.548	0.9999	0.9999	0.9998	0.0000
32	112	8.316	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
32	113	8.328	2.362	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
32	114	8.368	4.724	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
32	115	8.412	7.086	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
32	116	8.487	9.447	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
33	112	11.089	0.000	1.0004	1.0004	1.0008	0.0000
33	113	11.099	2.337	1.0004	1.0004	1.0008	0.0000
33	114	11.131	4.674	1.0004	1.0004	1.0008	0.0000
33	115	11.184	7.011	1.0004	1.0004	1.0008	0.0000
33	116	11.258	9.347	1.0004	1.0004	1.0008	0.0000
34	112	13.863	0.000	1.0011	1.0011	1.0021	0.0000
34	113	13.874	2.312	1.0011	1.0011	1.0021	0.0000
34	114	13.905	4.624	1.0011	1.0011	1.0021	0.0000
34	115	13.958	6.936	1.0011	1.0011	1.0021	0.0000
34	116	14.031	9.247	1.0011	1.0011	1.0021	0.0000

## 第八章 伪方位、伪圆柱和伪圆锥投影

### § 8-1 伪投影的特点

本章所介绍的伪投影并非常规地以一个投影面与地球椭球面相接触，然后将其投影于平面上，而是在前述各类投影经纬线表象的基础上，按制图的特定要求，即考虑到区域形状的特点，设计另一种投影的经纬线形状，再选用合适的投影条件，求出其投影公式。由此，可以看出伪投影是一种变形较为复杂的投影，其等变形线的形状是随着投影条件的不同而不同；此外，它并没有一定的投影面，主要采用数学解析的方法作为构成的基础。

根据如上伪投影的设想方案，可对前述三种主要投影进行适当改造，分别引导出一系列新的投影设计，称之为：伪方位投影、伪圆柱投影及伪圆锥投影，将在本章内依次简述之。

### § 8-2 伪方位投影

首先考虑方位投影与伪方位投影的异同处。在正轴情况下，伪方位投影的纬线投影表象为同心圆，经线投影为对称于中央直经线的曲线（注意此点与方位投影不同），并交于诸纬线的共同圆心。在斜轴或横轴投影中，等高圈相应地表现为同心圆，垂直圈的表象则为交于诸等高圈的共同圆心，并与过中央经线的垂直圈相对称的曲线。在此投影中，经纬线的投影均呈较复杂的曲线。我们已知方位投影中的等变形线为圆，但在伪方位投影中，等变形线根据不同的设计要求可能是椭圆形或为卵形，还有可能是其它有规则的几何图形。

对于方位投影来说，不妨回顾一下，即无论怎样选择投影参数，都不会改变它的等变形线为圆的固有特点。根据变形分布以探求投影的基本原则为主要设想，乃是要使投影的等变形线与制图区域的轮廓形状相一致，或者大体上能与之套合，如能满足如此原则的投影，才认为它是该区域较适宜的投影。前几章介绍的三大常规投影，其等变形线非圆（即平行直线），如按上述原则考虑，就没有伪投影灵活、多样、更为有效了。伪方位投影多用于编制小比例尺地图，在实践中可视地球椭球体为球体。

现以我国为例，包括南中国海在内的整个制图区域的形状大致可辨认为是三个方向凸出和三个方向凹入的不规则形状。前者于新疆、西藏方向，东北方向和南中国海方向；后者于中蒙边界中部、渤海、黄海方向和中缅印三国交界处。为此如对中国区域的轮廓形状加以深

入地分析研究，便会发现在极坐标系中的三叶玫瑰线的形状是比较接近中国区域的实际轮廓外形，那么我们就可以利用三叶玫瑰线的方程并适当加以改化，以期与我们所希望的形状和要求相符合。

由于等变形线要求与制图区域的轮廓近似一致，而这类投影的设计和计算均有不同的特点，所以在伪方位投影中，以非正轴位置为多，其一般公式的推导要从任意位置的球面极坐标出发，有的公式甚至是经验公式，如苏联制图学家金兹布尔格(Г. А. Гинзбург)曾以方位投影为出发点，用概念上的分析和归纳的方法，给出了伪方位投影的一般公式

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \\ \rho &= f_1(Z) \\ \delta &= f_2(Z, a) \end{aligned} \right\} \quad (8-1)$$

极角 $\delta$ 具有如下函数形式

$$\delta = a - C \left( \frac{Z}{Z_0} \right)^q \sin K\alpha \quad (8-2)$$

式中 $Z$ 为天顶距、 $a$ 为方位角、 $C, Z_0, q, K$ 均为投影参数，其中 $Z_0$ 是制图区域的中心到最远边界方向的天顶距。 $K$ 是确定投影网格对称轴线的参数，如制图区域为椭圆或卵形， $K$ 值可取为1，表示整个投影区域有一个对称轴；三角形或三叶玫瑰形的 $K$ 值可取为3，表示有三个对称轴。 $q$ 一般选定为1。 $C$ 值是根据区域轮廓凸出方向之最远点和凹入方向之最近点的面积变形相等的原则推求的。总之，参数 $q$ 和 $C$ 需在使等变形线与区域轮廓形状相似的条件下来计算决定的。

在采用伪方位投影编制中国全图时， $C$ 值定为 $-0.005308$ （证明见后）。至于(8-1)式中 $\rho$ 的形式，根据具体条件选取方位投影中三种不同性质投影求 $\rho$ 的公式均可，即

$$\begin{aligned} \rho &= KR \sin \frac{Z}{K}, \\ \rho &= RZ, \\ \text{或 } \rho &= KR \operatorname{tg} \frac{Z}{K}. \end{aligned}$$

在其他条件均相同的情况下，我们可算出 $\rho = KR \sin \frac{Z}{K}$ 的面积变形为最小； $\rho = KR \operatorname{tg} \frac{Z}{K}$

的角度变形为最小，而 $\rho = RZ$ 的变形界于两者之间。根据经纬线投影后不正交不可能是等角投影以及两条纬线间的间隔虽等，但经距不等时不存在等面积性质投影的条件来分析，伪方位投影本身只存在任意投影，因此即使 $\rho$ 值取为这类形式，也不可能使投影具有单纯的等面积或等角的性质。

在第三章已导出求 $E, G, F$ 和 $H$ 的一般公式，现结合本章可写出：

$$\left. \begin{aligned} E &= \left( \frac{\partial x}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial Z} \right)^2 \\ G &= \left( \frac{\partial x}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial a} \right)^2 \\ F &= \left( \frac{\partial x}{\partial Z} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial a} \right) + \left( \frac{\partial y}{\partial Z} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial a} \right) \\ H &= \left( \frac{\partial x}{\partial Z} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial a} \right) - \left( \frac{\partial x}{\partial a} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial Z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8-3)$$

再应用推求变形的公式可得出：

$$\left. \begin{aligned}
 u_0 &= \rho' = \frac{d\rho}{dZ} \\
 u_1 &= u_0 \sec \epsilon = \sqrt{E} = \sqrt{\rho^2 \left( \frac{\partial \delta}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial Z} \right)^2} \\
 u_2 &= \sqrt{G} \csc Z = \rho \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} \csc Z \\
 P &= u_1 u_2 \cos \epsilon \\
 \operatorname{tge} &= -\frac{F}{H} = -\frac{\rho \frac{\partial \delta}{\partial Z}}{\frac{d\rho}{dZ}} \\
 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_1 + u_2}{P} - 2}
 \end{aligned} \right\} \quad (8-4)$$

现以编制中国全图为例，如选定  $\rho = RZ$ ，即选取近似于方位投影中的等距离投影，但在伪方位投影中并不保持正长，于是有

$$\left. \begin{aligned}
 x &= \rho \cos \delta \\
 y &= \rho \sin \delta \\
 \rho &= RZ \\
 \delta &= \alpha - c \left( \frac{Z}{Z_0} \right)^k \sin K \alpha
 \end{aligned} \right\} \quad (8-5)$$

如令  $R=1$ ，则有

$$\left. \begin{aligned}
 d\rho &= dZ \\
 \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} &= 1 - KC \left( \frac{Z}{Z_0} \right)^k \cos K \alpha
 \end{aligned} \right\} \quad (8-6)$$

将(8-6)式代入(8-4)式得

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= \sec \epsilon \\
 u_2 &= \frac{Z}{\sin Z} \left[ 1 - KC \left( \frac{Z}{Z_0} \right)^k \cos K \alpha \right] \\
 P &= u_2 \\
 \operatorname{tge} &= \rho \frac{\partial \delta}{\partial Z} \frac{d\rho/dZ}{d\rho/dZ}
 \end{aligned} \right\} \quad (8-7)$$

该投影的中心点选在  $\lambda_0 = 105^\circ$ ， $\varphi_0 = 35^\circ$  处，估算从中心点到最突出处的天顶距  $Z_0$  为  $26^\circ$  左右。因凸出和凹入方向的夹角近似为  $60^\circ$ ，如设凹入处的方位角  $\alpha = 0^\circ$ ，则凸出处应为  $60^\circ$ 。对凹入方向的  $Z_0$  值估算约  $14^\circ$ 。C 值是根据设定区域轮廓凸出和凹入点的面积变形相等为原则计算的，参考上式，便可列出：

$$\frac{14}{\sin 14^\circ} \left[ 1 - 3C \frac{14^\circ}{16^\circ} \cos 0^\circ \right] = \frac{26^\circ}{\sin 26^\circ} \left[ 1 - 3C \frac{26^\circ}{26^\circ} \cos 180^\circ \right]$$

移项后，算得

$$C = -0.005308$$

前已说明，之所以选定  $q=1$ ，为的是使边缘角度变形不致过大。

根据中国整个区域形状的特点，欲使等变形线尽可能与区域轮廓一致，在计算极角  $\delta$  时，

可将由球面坐标变换所得之方位角加上 $15^\circ$ ，也可理解为将方位角的起算方向逆时针旋转 $15^\circ$ 。这样适合于中国区域的等距离伪方位投影的计算公式由下列各式表示：

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta, \quad y = \rho \sin \delta, \\ \rho &= RZ, \quad \delta = \alpha + \frac{0.005308}{0.453786} \cdot Z \sin 3(15^\circ + \alpha), \\ u_1 &= \sec \epsilon, \quad u_2 = \frac{Z}{\sin Z} \left[ 1 + 3 \frac{0.005308}{0.453786} \cdot Z \cdot \cos 3(15^\circ + \alpha) \right], \\ P &= u_2, \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_1 + u_2}{P}} - 2, \\ \operatorname{tge} &= \frac{0.005308}{0.453786} \cdot Z \sin 3(15^\circ + \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (8-8)$$

式中  $\frac{Z}{\rho^0} = 0.453786$ ，乘系数  $\frac{0.005308}{0.453786} = 0.011697$ 。

表 8 1

$\alpha + 15^\circ$	$3(\alpha + 15^\circ)$	$Z$	$\rho, \omega$	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$
$0^\circ$	$0^\circ$	$\rho$		0.9964	1.0007	1.0076	1.0171	1.0294	
		$\omega$		0	16'	37'	1'11'	1'58'	
$20^\circ$	$60^\circ$	$\rho$		0.9964	0.9962	1.0045	1.0125	1.0231	
		$\omega$		0	10'	29'	56'	1'32'	
$40^\circ$	$120^\circ$	$\rho$		0.9964	0.9961	0.9984	1.0032	1.0107	1.0233
		$\omega$		0	0'	10'	26'	50'	1'33'
$60^\circ$	$180^\circ$	$\rho$		0.9964	0.9946	0.9953	0.9986	1.0045	1.0150
		$\omega$		0	1'	4'	8'	28'	1'04'

伪方位投影的变形线由于在凸出部分最远的方向线和凹入部分最近点的方向线互相对称，所以只计算整个投影面的1/6的变形即可。从等变形线图8-1和图8-2上，可明显地看出，面

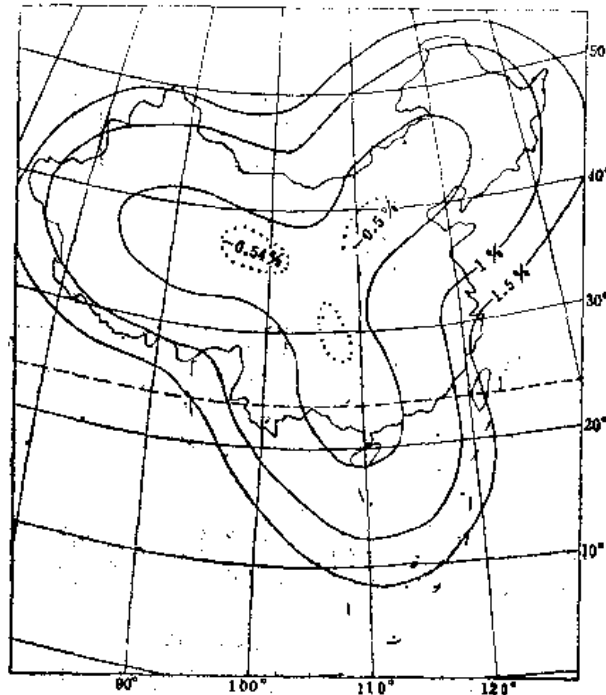


图8-1

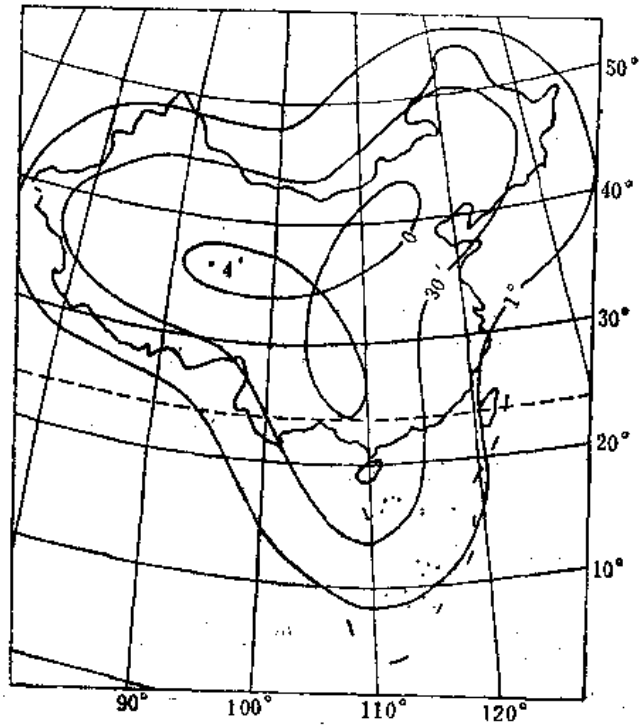


图8-2

积变形和最大角度变形等变形线的形状极为相似，且与中国疆界形状大致套合。同时可以看出面积变形为1.5%的等变形线几乎包括了整个中国的疆域，仅南中国海的最南端和台湾部分地区不计在内。中心点的变形仅为-0.36%，在三个凸出的方向线上，各有一点的面积变形为-0.5%左右。至于最大角度变形为1°的等变形线几乎也包括了上述面积变形为1.5%的整个区域，中心点的角度变形为零，在三个凸出方向上各有一点的变形在5'左右，它在0°等变形线以内。根据如上分析，全域能达到小比例尺地图中等量测精度的要求。

### § 8-3 伪圆柱投影

伪圆柱投影是在圆柱投影经纬线投影表象的基础上，规定纬线投影为平行直线，经线投影为对称于中央直径线的曲线。我们可以先求投影的一般公式，然后运用特定的投影条件推求某一具体的伪圆柱投影。

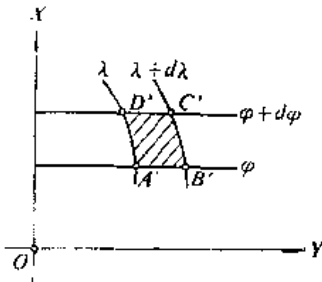


图8-3

参阅图8-3，设伪圆柱投影中央直径线的投影为X轴，赤道投影定为Y轴。由于纬线投影皆为平行于赤道的直线，故它仅为纬度 $\varphi$ 的函数，与经度无关。经线投影的表象为对称于中央经线的曲线，所以它应为经度和纬度的函数。根据经纬线投影后的形状可知两者不呈正交，因此从投影的变形性质来分析，伪圆柱投影只有等积和任意投影两种，并无等角投影。伪圆柱投影中的经线形状虽可以取为任意曲线，但实践中一般选用正弦曲线和椭圆曲线两种，下面将先后予以介绍。如前所述，伪圆柱投影的

函数表达式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(\varphi) \\ y &= f_2(\varphi, \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (8-9)$$

对上式先取导数, 再代入求变形的普遍公式, 即可导出伪圆柱投影变形的一般公式为:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\sqrt{E}}{M} = \frac{dx}{d\varphi} \operatorname{sece} \\ n &= \frac{\sqrt{G}}{r} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \operatorname{sec}\varphi \left( \because \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0 \right) \\ P &= \frac{H}{M_r} = m \sin \theta' = \frac{\frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{M_r} \\ \operatorname{tge} &= -\frac{F}{H} = -\frac{\partial y / \partial \varphi}{dx / d\varphi} \\ \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m+n-2mn \operatorname{cose}}{mn \operatorname{cose}}} \end{aligned} \right\} \quad (8-10)$$

由于伪圆柱投影一般均用于小比例尺制图中, 所以可将地球椭球体视为球体, 此时上式中的  $M$ ,  $N$  均可以  $R$  代替。

本投影以等面积投影为主, 只要先推导出等面积伪圆柱投影的一般公式, 便能进一步探求限定伪圆柱投影经线表象的一般公式。

按等面积投影的条件规定  $P=1$ , 在(8-10)式中,

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{M_r} = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= M_r = R^2 \cos \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{R^2 \cos \varphi}{\frac{dx}{d\varphi}}, \end{aligned}$$

移项后取积分得:

$$y = \frac{R^2 \cos \varphi}{\frac{dx}{d\varphi}} \lambda + C$$

式中  $C$  为积分常数, 由于中央经线为直线,  $\lambda$  是由中央经线算起的, 所以当  $\lambda=0^\circ$  时,  $y=0$ ,  $C=0^\circ$  最后  $y$  式可写成:

$$y = \frac{R^2 \cos \varphi}{\frac{dx}{d\varphi}} \lambda \quad (8-11)$$

其它变形公式依次列于下:

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{R}{\frac{dx}{d\varphi}}, m = \frac{\operatorname{sece}}{n} \\ \operatorname{tge} &= -\frac{\partial y}{\partial \varphi} / \frac{dx}{d\varphi}, \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2} \quad (\because mn \operatorname{cose} = 1) \end{aligned} \right\} \quad (8-12)$$

当上述等面积伪圆柱投影的一般公式导出后,即可按规定投影中所要求的经纬线形状,如正弦曲线或椭圆曲线,以进一步寻求其投影的具体公式。

如果经线投影为正弦曲线,我们就可写出正弦曲线的方程式为:

$$y = (A \cos \alpha + D) \lambda \quad (8-13)$$

式中  $A$ 、 $D$  为固定系数,它取决于投影的特定条件; $\alpha$  和  $x$  坐标的含义相仿,它也是纬度的函数,现假设  $\alpha$  和  $x$  有如下关系:

$$x = C \alpha \quad (8-14)$$

式中  $C$  为另一固定系数。

只需通过比较(8-11)或(8-13)两式中的相关符号,便可写出经线形状为正弦曲线时的等面积伪圆柱投影的方程:

$$\frac{R^2 \cos \varphi}{\frac{dx}{d\varphi}} = (A \cos \alpha + D)$$

$$\therefore dx = C d\alpha$$

$$\therefore R^2 \cos \varphi d\varphi = C (A \cos \alpha + D) d\alpha$$

积分后得

$$R^2 \sin \varphi = C (A \sin \alpha + D \alpha)$$

设定  $\varphi = 0$  时,  $\alpha = 0$ , 故积分常数  $C = 0$ 。现将经线为正弦曲线的等面积伪圆柱投影的方程式归纳于下:

$$x = C \alpha$$

$$y = (A \cos \alpha + D) \lambda$$

$$R^2 \sin \varphi = C (A \sin \alpha + D \alpha)$$

(8-15)

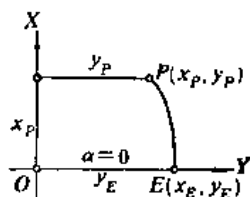


图8-4

在图8-4中,设有这样的条件,即令  $PE$  为离中央经线  $\lambda = \pi$  的经线,根据(8-15)式有

$$x_E = 0$$

$$y_E = (A + D) \pi$$

(8-16)

因为  $E$  点位于赤道,  $\varphi = 0^\circ$  时,  $\alpha$  为零。

又另设  $P$  点,其纬度  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  时,则

$$x_P = C \cdot \alpha_P$$

$$y_P = (A \cos \alpha_P + D) \lambda$$

(8-17)

由此可知,随着对确定  $A$ 、 $D$  和  $C$  三个系数的条件变更,我们便可获得不同要求的投影。如果设定经线投影为椭圆形状,可写出如下的一般方程式:

$$x = C \sin \alpha$$

$$y = (A \cos \alpha + D) \lambda$$

(8-18)

现对  $x$  微分得:

$$dx = C \cos \alpha d\alpha$$

参阅(8-11)式,将上式代入其中,便有

$$y = \frac{R^2 \cos \varphi}{\frac{dx}{d\varphi}} \lambda = \frac{R^2 \cos \varphi d\varphi}{C \cos \alpha d\alpha} \lambda$$

将上式与(8-18)式相比较后,就可写出如下等式

$$(A \cos \alpha + D) \lambda = \frac{R^2 \cos \varphi d\varphi}{C \cos \alpha d\alpha} \lambda$$



两端各取积分，得到了经线投影为椭圆形状时的第三个公式，即

$$R^2 \sin \varphi = \frac{1}{4} C (2A\alpha + 4D \sin \alpha + A \sin 2\alpha) \quad (8-19)$$

在积分时，由于设  $\varphi = 0^\circ$  时， $\alpha$  为零，故积分常数也为零。如同正弦曲线时一样，椭圆形状中的常数  $A, D$  和  $C$  也可按不同条件求之。

### 1. 正弦曲线等面积伪圆柱投影——桑逊投影

桑逊投影所给予的特定条件是等面积投影，除满足  $P = 1$  外，还考虑  $n = 1$  和  $m_0 = 1$ 。从而该投影的纬线表象是间隔相等且互为平行的直线，中央直经线为垂直于各纬线的直线，其它纬线投影均为对称于中央经线的正弦曲线。

根据这些条件再参考(8-15)式便可求其投影公式。从直观上来分析，由于  $m_0 = 1$ ，中央直经线上无长度变形，故有

$$x = R\varphi \quad (8-20)$$

又因  $n = 1$ ，表明所有纬线投影后均保持长度不变，已知纬线实长等于  $R \cos \varphi \cdot \lambda$ ，故

$$y = R \cos \varphi \cdot \lambda \quad (8-21)$$

上列两式即为本投影的基本投影公式。由于  $x$  值与实地经线等长， $y$  值又与实地纬线等长，所以两值相乘后必然和实地面积相符合，据此即可认为是满足等面积条件的。若从(8-21)式中消去  $\varphi$ ，此时  $\varphi = \frac{x}{R}$ ，将它代入(8-21)式便有  $y = R \cos \varphi \lambda = R \lambda \cos \left( \frac{x}{R} \right) = R \lambda \sin \left( 90^\circ - \frac{x}{R} \right)$  式中因含有  $\lambda$  值，故此式表示经线投影，其图形必为正弦曲线。

如对(8-20)和(8-21)两式取导数并代入(8-10)式，便可写出本投影的变形公式：

$$\left. \begin{aligned} m \cdot \frac{\frac{dx}{d\varphi}}{m} \operatorname{secc} &= \operatorname{secc} \\ n &= 1 \\ P &= 1 \\ \operatorname{tgc} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} / \frac{dx}{d\varphi} = \lambda \sin \varphi \\ \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \operatorname{tgc} = \frac{1}{2} \lambda \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (8-22)$$

现进一步分析本投影中的最大角度变形值：

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \lambda \sin \varphi = \frac{1}{2} \frac{y}{R \cos \frac{x}{R}} \sin \frac{x}{R} = \frac{y}{2R} \operatorname{tg} \frac{x}{R}$$

即 
$$y \operatorname{tg} \frac{x}{R} = 2R \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$$

当  $\frac{x}{R}$  为一较小数值时，可用弧度代替正切，上式简写为：

$$xy = 2R^2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \quad (8-23)$$

此式表示在赤道附近，角度最大变形的等变形线为等边双曲线，所以此投影适合于制作赤道邻近和沿中央经线延伸地区的地图。

图8-5表示桑逊投影的全球经纬线网略图，以此投影编制世界地图时，中央经线选为经度

0°。这类投影的缺点在于高纬度地区的角度变形很大，在实用中一般只取其中央经线与赤道交点附近的部份，所以该投影适用于绘制非洲地图、南美洲地图以及赤道附近国家和地区的地图。

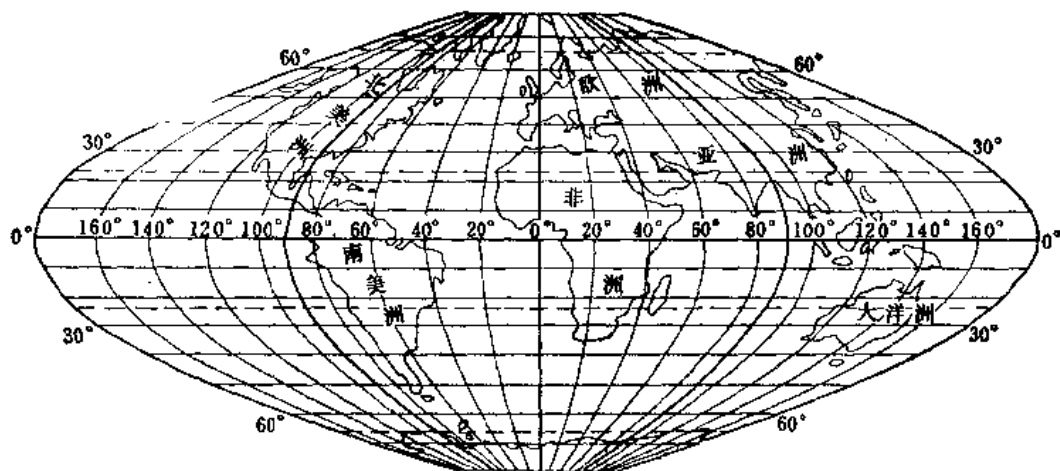


图8-5

本投影由法国人桑逊于1650年创始，1729年英国人弗里斯蒂德用它编制世界地图而著名，故又称桑逊-弗里斯蒂德投影(Sanson-Fiamsteed Proj)。

本投影的经线长度变形和最大角度变形值详见下表：

表 8-2

$m$		$\lambda$					
		0°	10°	20°	30°	40°	
$\varphi$	0°	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
	10°	1.000	1.000	1.002	1.004	1.007	
	20°	1.000	1.002	1.007	1.016	1.028	
	30°	1.000	1.004	1.015	1.034	1.059	
	40°	1.000	1.008	1.025	1.055	1.096	

表 8-3

$\omega$		$\lambda$					
		0°	10°	20°	30°	40°	
$\varphi$	0°	0°00' .0	0°00' .0	0°00' .0	0°00' .0	0°00' .0	
	10°	0°00' .0	1°44' .2	3°28' .2	5°12' .4	5°56' .2	
	20°	0°00' .0	3°25' .6	6°50' .0	10°14' .0	13°37' .0	
	30°	0°00' .0	4°59' .8	9°58' .4	14°55' .0	19°48' .0	
	40°	0°00' .0	8°25' .2	12°48' .2	19°06' .2	25°17' .6	

## 2. 极点投影成线的等面积伪圆柱投影——爱凯特投影(Eckert Proj.)

桑逊投影中，纬度较高的地方角度变形甚大，为改善此缺陷，世人曾设计过经改良的用极线来表示两极的经线为正弦曲线的等积伪圆柱投影。可设想经线不交于一点，而是终止于两条称为极线的直线上，于是便不能再保持 $n=1$ 的条件了。

本投影有如下规定： $P=1, x_p = y_p = \frac{y_p}{2}$ ，这些条件表明两极投影成极线，且其长度等于赤道周长之一半。爱凯特投影的计算公式如下：

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{2R}{\sqrt{\pi+2}} \alpha \\
 y &= \frac{2R\lambda}{\sqrt{\pi+2}} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\
 \sin \alpha + \alpha &= \frac{\pi+2}{2} \sin \varphi \\
 n &= \frac{2}{\sqrt{\pi+2}} \sec \varphi \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\
 m &= \frac{\sqrt{\pi+2}}{2} \cos \varphi \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sec \varepsilon \\
 P &= 1 \\
 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2}
 \end{aligned} \tag{8-24}$$

(8-24)式之推导过程从略，式中的 $\alpha$ 是用逐渐趋近法求得的。本投影在高纬度处的角度变形较桑逊投影为小，但由于极点投影成线，在用图时会有一些不适应，它主要适用于小比例尺世界地图的编制。与桑逊投影相似，它也适合于非洲、南美洲以及近赤道国家。图8-6是该投影的经纬线网略图。

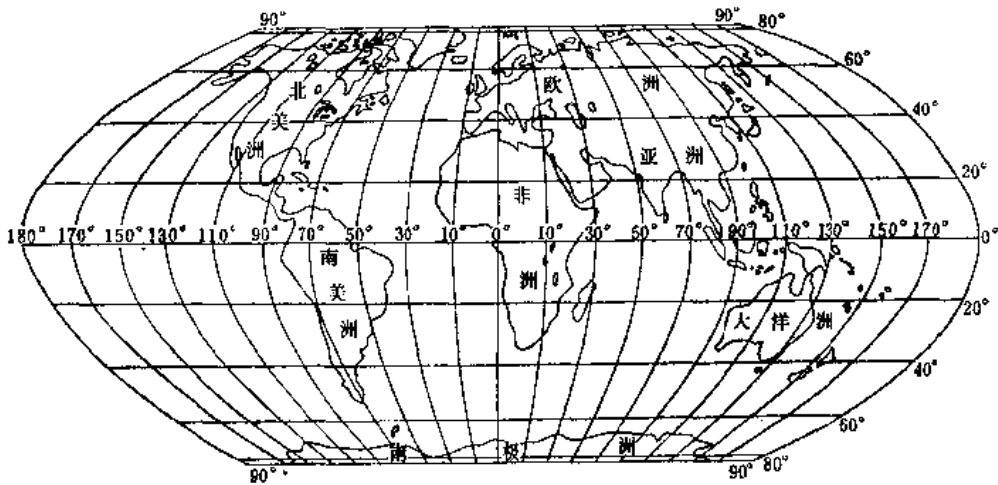


图8-6

### 3. 椭圆经线等面积伪圆柱投影——摩尔威德投影(Mollweide Proj.)

摩尔威德投影的特定条件是离中央经线经差为 $\pm 90^\circ$ 处的经线表象为一圆，并使此圆的面积等于地球面积的一半，除此而外所有经线投影均为椭圆，整个投影保持面积无变形。下面简述这类投影公式推导的过程，同时参阅图8-7。

设圆的半径为 $K$ ，因为要求此圆的面积等于地球面积的一半，所以

$$\begin{aligned}
 \pi K^2 &= 2\pi R^2 \\
 \therefore K &= \sqrt{2} R
 \end{aligned}$$

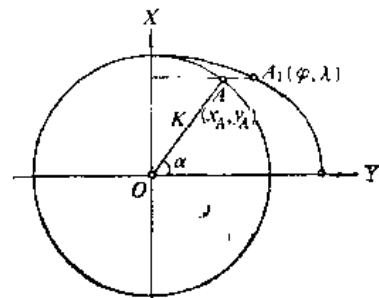


图8-7

在离中央经线 $\pm 90^\circ$ 的经线处，由于设计的经线投影为一圆，故其上 $A$ 点的直角坐标为：

$$\left. \begin{aligned} x_A &= K \sin \alpha = \sqrt{2} R \sin \alpha \\ y_A &= K \cos \alpha = \sqrt{2} R \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (8-25)$$

式中 $\alpha$ 表示 $OA$ 和赤道的交角， $\alpha$ 为纬度的函数，当 $\varphi = 0^\circ$ 时， $\alpha = 0^\circ$ ， $\varphi = 90^\circ$ 时， $\alpha = 90^\circ$ 。在等面积伪圆柱投影中，同一纬线上诸点的 $x$ 坐标均与 $x_A$ 相同， $y$ 坐标则与经差成正比，比如图所示， $A_1$ 点和 $A$ 点为同纬度的点，其坐标可写成如下关系式

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} R \sin \alpha \\ \frac{y}{y_A} &= \frac{\lambda}{\frac{\pi}{2}}, \quad y = \frac{2\lambda}{\pi} y_A \\ \therefore y &= \frac{2\sqrt{2}R}{\pi} \lambda \cos \alpha \end{aligned} \quad (8-26)$$

为了消去 $\alpha$ ，可将 $x, y$ 的等式平方并整理后得出：

$$\frac{x^2}{2R^2} + \frac{y^2}{8R^2 \lambda^2} = 1 \quad (8-27)$$

此为椭圆方程式，因式中含有 $\lambda$ ，故可认为是经线投影的方程式。

为求得某点的直角坐标，必须求出 $\alpha$ 与 $\varphi$ 之间的关系式。根据等面积投影条件并参考(8-10)式，可得出

$$P = \frac{\frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{M} = \frac{\frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{R^2} \sec \varphi = 1$$

$$\frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = R^2 \cos \varphi$$

取积分后

$$y = \frac{R^2 \cos \varphi}{\frac{dx}{d\varphi}} \lambda \quad (8-28)$$

若将(8-26)式与(8-28)式进行比较，便可写出

$$\frac{2\sqrt{2}R}{\pi} \cos \alpha = \frac{R^2 \cos \varphi}{\frac{dx}{d\varphi}}$$

只要将(8-25)式中的 $x$ 对 $\varphi$ 取导数，代入上式后有

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \alpha = \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{2} \cos \alpha d\alpha}$$

移项后

$$\pi \cos \varphi d\varphi = 4 \cos^2 \alpha d\alpha = 2(1 + \cos 2\alpha) d\alpha$$

两端积分得

$$\pi \sin \varphi = 2\alpha + \sin 2\alpha \quad (8-29)$$

此式为(8-25)式的辅助方程式，只要先求出 $\alpha$ 与 $\varphi$ 的关系值，再回代至(8-25)式，始能求出点的坐标值。至于 $\alpha$ 可用逐渐趋近法求之。表8-4为根据(8-29)式计算的取不同纬度 $\varphi$ 时的 $\alpha$ 值。

表 B-4

$\varphi$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\alpha$	0°00'00"	7°51'49"	15°47'03"	23°49'36"	32°04'17"	40°37'45"	49°40'45"	59°31'54"	70°58'42"	90°00'00"

如对(8-25)、(8-26)和(8-29)式取导数,并代入(8-10)式,即可推求本投影的变形公式,其结果如下:

$$\left. \begin{aligned} tge &= \frac{2\lambda}{\pi} \operatorname{tg}\alpha \\ m &= \frac{\pi \cos\varphi}{2\sqrt{2} \cos\alpha} \operatorname{secc} \\ n &= \frac{2\sqrt{2} \cos\alpha}{\pi \cos\varphi} \\ P &= 1 \\ \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2} \end{aligned} \right\} (8-30)$$

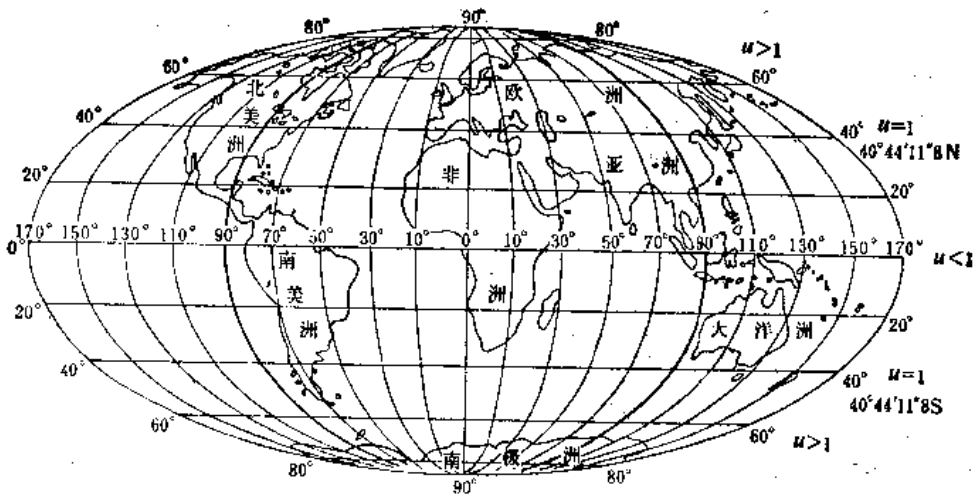


图8-8

图8-8是该投影的经纬线网略图。在表8-5和表8-6中分别列出摩尔威德投影的经纬线长度比和最大角度变形。

表 8-5

$\varphi$	$n$	$m$			
		$\lambda=0^\circ$	$30^\circ(\pi/6)$	$60^\circ(\pi/3)$	$90^\circ(\pi/2)$
89°	3.665	0.273	1.365	2.568	3.840
60°	1.165	0.859	0.922	1.091	1.326
30°	0.951	1.052	1.063	1.096	1.150
0°	0.900	1.111	1.111	1.111	1.111

表 8 6

		$\lambda$			
		0°	30°	60°	90°
$\varphi$	90°	180°00'	180°00'	180°00'	180°00'
	60°	17°27'	25°41'	40°39'	55°42'
	30°	5°46'	10°23'	15°30'	26°44'
	0°	12°01'	12°01'	12°01'	12°01'

该投影于1805年由德国人摩氏创拟，常用于编制小比例尺世界地图，其目的是为了便于表达高纬度地区的地理轮廓。此投影只有在南、北纬 $40^{\circ}44'11.8''$ 处的纬线长度比为1，朝向低纬度的长度比小于1，面向高纬的长度比大于1。无角度变形的点位位于南北纬 $40^{\circ}44'11.8''$ 与中央经线的交角处，角度等变形线为蚌形曲线，凸向极点。

4. 分瓣伪圆柱投影——古特投影(Goode Proj.)

综合上述各伪投影的变形情况来分析，可知在高纬度且远离中央经线的地区均含有较大变形的缺陷。古德曾提出将摩尔威德投影进行分瓣的改良方法以减小变形值，同时也能克服“极点”和“极线”附近的地理轮廓形状不易有真实感的缺点。分瓣投影时将伪圆柱投影中的不同部分采用各自不同的中央经线，但必须在赤道上统一起来。如是中央经线两侧的投影区域不广，经线表象的弯曲程度就要小些，它和纬线的交角也和实地相差不致太大了。例如在编制世界地图时，若要求大陆部分保持完整，变形也较小，可在分瓣时将海洋部分割裂，只需在赤道上统一起来。对于不同的大陆可采用不同的中央经线，规定如下：

表 8-7

洲 名	中央经线的地理位置
北美洲	西 经 100°
南美洲	西 经 60°
非 洲	东 经 20°
欧、亚两洲	东 经 60°
澳 洲	东 经 150°

表 8-8

大 洋 名	中央经线的地理位置
太平洋北部	西 经 170°
太平洋南部	西 经 140°
北大西洋	西 经 30°
南大西洋	西 经 20°
印度洋北部	东 经 60°
印度洋南部	东 经 90°

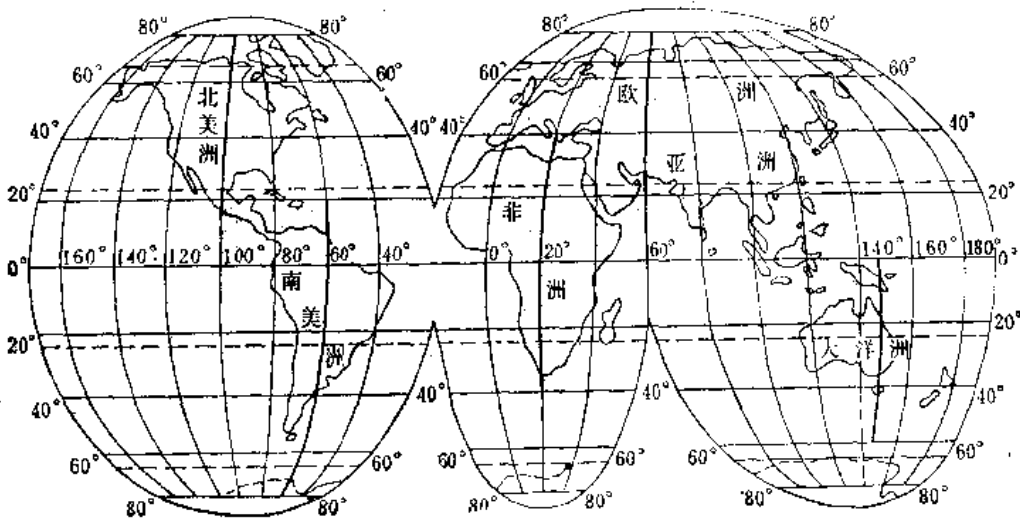


图8-9

若表现以大洋为主的世界地图时，则要求海洋部分保持完整，此时只能将大陆割裂，各部分的中央经线一般定在下列位置：

分瓣投影的经纬线网略图如图8-9所示。

美国人古德于1923年提出用分瓣法绘制世界地图，其基本概念是通过将世界划分成几个地带，会产生有重复的变形为最小的区域，每个区域均选择一个中心，这样即可通过分瓣投影来实现。那些分开的区域应沿某些指定的共用的线——中央经线接合，而并非在任何地方接合。古德是在南北纬 $40^{\circ}44'11''8$ 之间采用桑生投影，由此向南向北到极地处则采用摩氏投影，所以实际上古德投影是一种分瓣画法的组合投影。

## §8-4 伪圆锥投影

伪圆锥投影是在圆锥投影经纬线网形状的基础上演变而来的。纬线投影半径  $\rho$  仅是纬度  $\varphi$  的函数，和圆锥投影一样，其表象也为一组同心圆弧，圆心位于中央直经线上。经线投影则为对称于中央经线的曲线，在同一经线上各点的动径角  $\delta$  是不同的，所以它的投影是经度  $\lambda$  和纬度  $\varphi$  的函数，其投影极坐标公式为：

$$\left. \begin{aligned} \rho &= f_1(\varphi) \\ \delta &= f_2(\varphi, \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (8-31)$$

如用直角坐标表示，设以投影区域最南边的纬线投影与中央经线的交点为原点，中央经线为  $X$  轴，过原点垂直于中央经线的直线为  $Y$  轴，则其直角坐标的公式为

$$\left. \begin{aligned} x &= q - \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (8-32)$$

上式中  $q$  为纬线投影的圆心到坐标原点的距离，即圆心纵坐标，应为常数。

已知用平面极坐标表示的变形公式：

$$\left. \begin{aligned} \text{tge} &= -\frac{F}{H} = \frac{\rho \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} + q' \sin \delta}{\rho' - q' \cos \delta} \\ m &= \frac{q' \cos \delta - \rho' \operatorname{secc} \epsilon}{M} \\ n &= \frac{\sqrt{G}}{r} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \\ P &= \frac{H}{M r} = \rho \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \cdot \frac{q' \cos \delta - \rho'}{M r} \end{aligned} \right\} \quad (8-33)$$

考虑到  $q$  为常数，所以  $q' = 0$ ，由此可得出伪圆锥投影的变形公式：

$$\left. \begin{aligned} \text{tge} &= \frac{\rho}{\rho'} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} \\ m &= -\rho' \frac{\operatorname{secc} \epsilon}{M} \\ n &= \frac{\rho}{r} \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \\ P &= -\rho \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \cdot \frac{\rho'}{M r} \end{aligned} \right\} \quad (8-34)$$

伪圆锥投影有几种特例，如经线成为交于诸纬线共同圆心的直线束，就是前述的圆锥投影；如纬线半径为无穷大，就成为一组平行直线，则为伪圆柱投影。由于伪圆锥投影的经纬线均不呈正交，所以不可能有等角投影，只能有等面积或任意投影。

本节着重介绍彭纳等面积伪圆锥投影。彭纳投影(Bonne Proj.)的变形特征是纬线投影后长度不变，面积相等，因而有 $n=1, P=1$ 。已知

$$n = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} = 1$$

积分后得

$$\delta = \frac{r}{\rho} \lambda + C$$

式中 $C$ 为积分常数，如以中央经线作为 $0^\circ$ 起算，即 $\lambda = 0^\circ$ 时， $C = 0$ ，所以

$$\delta = \frac{r}{\rho} \lambda \quad (8-35)$$

又知

$$P = -\rho \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \cdot \frac{\rho'}{M r} = -n \frac{\rho'}{M} = 1$$

积分后得

$$\rho = C - S \quad (8-36)$$

式中 $C$ 为积分常数， $S$ 为赤道到纬度 $\varphi$ 的经线弧长。

只要对(8-35)式求偏导数，并以 $\rho' = -M$ 代入(8-33)式便能导出如下变形公式，首先取偏导数

$$\frac{\partial \delta}{\partial \varphi} = \left( \frac{-M \sin \varphi \cdot \rho + M r}{\rho^2} \right) \lambda$$

然后依次求

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\rho}{\rho'} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} = \left( \sin \varphi - \frac{r}{\rho} \right) \lambda$$

$$m = \sec \varepsilon, \quad n = 1, \quad P = 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2mnc \operatorname{ose}}{4mnc \operatorname{ose}}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varepsilon \quad (\because \operatorname{tg} \varepsilon = \sqrt{\sec^2 \varepsilon - 1})$$

(8-37)

因为中央经线与所有纬线呈正交，故 $\theta' = 90^\circ$ ，也即 $\varepsilon = 0$ ，所以中央经线上长度比 $m_0 = 1$ ，由此表明彭纳投影的中央经线上无长度变形。

下面来决定(8-36)式中的常数 $C$ ，若令某一指定的纬线 $\varphi_0$ 上无变形，此处与所有经线均

成正交，即 $\varepsilon = 0$ ，所以

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \lambda \left( \sin \varphi_0 - \frac{r_0}{\rho_0} \right) = 0$$

$$\sin \varphi_0 - \frac{r_0}{\rho_0} = 0$$

$$\rho_0 = N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0$$

$$\therefore C = \rho_0 + S_0 = N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0 + S_0 \quad (8-38)$$

通常取投影区域的中部纬度作为 $\varphi_0$ ，在其上应满足 $n_0 = 1$ 和 $\varepsilon = 0$ 。我们已确认彭纳投影的中央经线 $\lambda_0$ 和指定纬线 $\varphi_0$ 上无变形，所以它的等变形线在中心点 $\lambda_0, \varphi_0$ 附近表现为双曲线，如图8-10所示。

本投影由法国人彭纳于1752年提出，由于始用于绘制法国地形图而著名。彭纳投影一般

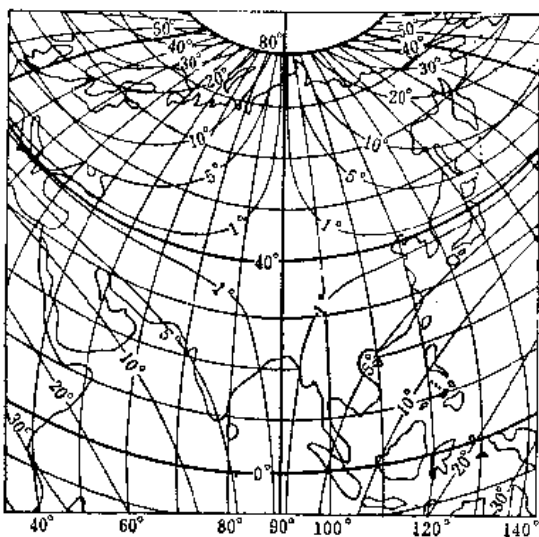


图8-10



适用于绘制中纬度地区小比例尺地图，例如地图出版社出版的《世界地图集》中的亚洲政区图 and 我国1957，1972年出版的《中华人民共和国地图集》中的中国政区图和亚洲地形图等均采用彭纳投影。

## 思 考 题

1. 试比较下列几种等面积伪圆柱投影：  
桑逊、爱凯特和摩尔威德投影。
2. 伪方位、伪圆柱和伪圆锥投影与相应的方位、圆柱和圆锥投影在投影表象上有何异同？
3. 分瓣伪圆柱投影的基本设想是什么？
4. 如何获得经线为正弦曲线的等面积伪圆柱投影的方程式？
5. 彭纳投影中，纬线投影半径 $\rho = C - S$ ，式中的积分常数是如何求得的？
6. 为什么伪方位投影不存在等角和等面积性质的投影？

# 第九章 多圆锥投影

## § 9-1 多圆锥投影的概念及其主要公式

顾名思义，多圆锥投影不只有一个投影面，如从几何构成来理解，可设想对地球上若干成一定纬距的纬线作一系列切圆锥，由此形成了多圆锥的概念。这些处于不同位置的切圆锥其圆心必位于一条共同的地球旋转轴上，然后各自沿一母线剪开即得此投影。据此可知多圆锥投影的纬线表象应为同轴圆弧，即以不同圆锥的切线为半径的圆弧，各圆心分别位于中央直经线上，它的定位是以中央经线上相邻圆弧间的距离与实地保持相等为准则。经线投影为对称于中央经线的曲线，实践中是以光滑曲线连接各纬线上具有一定间距的经线交点所构成的对称曲线，参阅图9-1和图9-2。

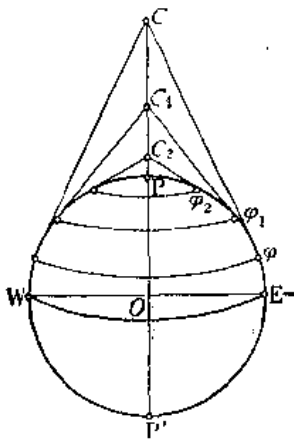


图9-1

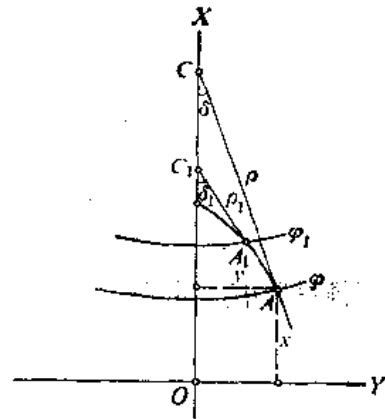


图9-2

设X轴与中央经线相合，以赤道或制图区域中最低纬线与中央经线的交点为原点。若以极坐标法表示某点位置时，应有如下函数关系

$$\delta = f_1(\varphi, \lambda), \quad \rho = f_2(\varphi)$$

同时可写出直角坐标与极坐标的关系式

$$x = q - \rho \cos \delta$$

$$y = \rho \sin \delta$$

上式中， $q = x_0 = f(\varphi)$ ，因为是同轴圆弧，所以它并非为常数，而是纬度的函数。如欲求一阶基本量F、G和H诸值，可仿照(3-42)式，先推求各偏导数

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= q' - \rho' \cos \delta + \rho \sin \delta \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \rho \sin \delta \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \rho' \sin \delta + \rho \cos \delta \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \rho \cos \delta \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (9-1)$$

上式中的

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}, \quad q' = \frac{dq}{d\varphi}$$

将(9-1)式代入F、G和H的关系式得:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \rho \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \left( q' \sin \delta + \rho \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} \right) \\ G &= \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 = \left( \rho \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \right)^2 \\ H &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \rho \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} (q' \cos \delta - \rho') \end{aligned} \right\} \quad (9-2)$$

参考求变形的基本公式(8-10)得:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tge} &= -\frac{F}{H} = \frac{\rho \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} + q' \sin \delta}{\rho' - q' \cos \delta} \\ p &= \frac{H}{M_r} = \rho \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \cdot \frac{q' \cos \delta - \rho'}{M_r} \\ n &= \frac{\sqrt{G}}{r} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \\ m &= \frac{\rho}{n \cos e} = \frac{q' \cos \delta - \rho'}{M} \operatorname{sece} \\ \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{p^2} - 2} \end{aligned} \right\} \quad (9-3)$$

在多圆锥投影中,常用的有等角和任意性质的两种,而任意性质的普通多圆锥投影应用较广。

## §9-2 普通多圆锥投影

普通多圆锥投影为美国人海斯勒于1820年所创始,曾用于绘制美国海岸地图而著名,所以又称美国多圆锥投影。该投影实际上是中央经线和每一条纬线投影后均与实地等长的多圆锥投影。中央经线是直线,长度比  $m_0 = 1$ ; 各纬线均为与中央经线成正交的同轴圆弧,圆心位于中央经线上,其投影半径  $\rho = N \operatorname{ctg} \varphi$ 。由于属多圆锥投影,每条与圆锥相切的纬线上的长度比均应保持不变,即  $n = 1$ 。上述各条皆为普通多圆锥投影必须满足的条件,应该说明的是中央直径线并非用几何方法投影到圆锥面上所形成的直线,而是先限定中央经线的投影与

实地保持相等，再确定圆锥顶点的位置后而形成的直线。图 9-3 所示为一系列切圆锥中的某一个圆锥， $AB$  为此圆锥与地球相切的纬线，在投影平面上表示为  $A'B'$ ，按  $n=1$  的投影条件可写成

$$A'B' = AB = r\lambda = N\cos\varphi \cdot \lambda$$

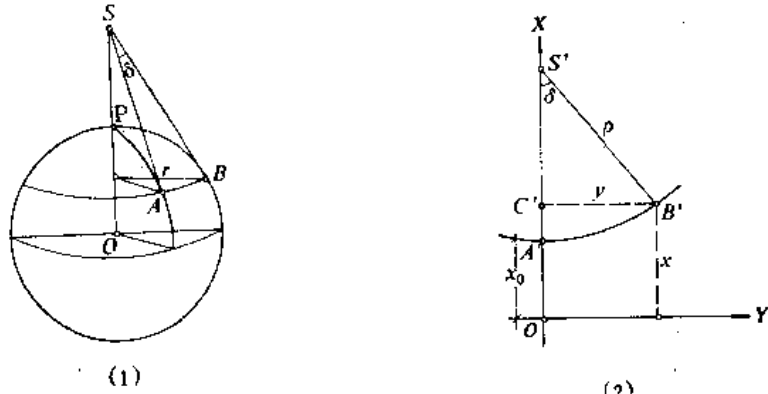


图9-3

又

$$\delta = \frac{A'B'}{\rho} = \frac{N\cos\varphi \cdot \lambda}{N\text{ctg}\varphi} = \lambda\sin\varphi$$

由此可知普通多圆锥投影的极坐标公式为：

$$\left. \begin{aligned} \rho &= N\text{ctg}\varphi \\ \delta &= \lambda\sin\varphi \end{aligned} \right\} \quad (9-4)$$

设中央经线的投影为  $X$  轴，赤道投影为  $Y$  轴，则在投影平面上任一点  $B'$  的直角坐标为：

$$\begin{aligned} x &= OC' = OA' + A'S' - C'S' \\ y &= C'B' \end{aligned}$$

在直角三角形  $B'C'S'$  中， $C'S' = \rho\cos\delta$ ， $C'B' = \rho\sin\delta$ 。同时顾及本投影的条件有  $OA' = x_0 = S_M$ ，即它等于由赤道至纬度  $B$  在中央经线上的经线弧长，由此可获得普通多圆锥投影的直角坐标公式

$$\left. \begin{aligned} x &= S_M + \rho - \rho\cos\delta = S_M + \rho(1 - \cos\delta) \\ y &= \rho\sin\delta \end{aligned} \right\} \quad (9-5)$$

只要对(9-4)式取导数，然后分别代入投影变形的一般公式，即可推算本投影的有关变形公式

$$\left. \begin{aligned} \text{tge} &= \frac{\rho \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} + q' \sin \delta}{\rho' - q' \cos \delta} = \frac{\delta - \sin \delta}{\cos \delta - \left(1 + \frac{N}{M} \text{tg}^2 \varphi\right)} \\ m &= \frac{q' \cos \delta - \rho'}{M} = \left(1 + 2 \frac{N}{M} \text{ctg}^2 \varphi \sin^2 \frac{\delta}{2}\right) \text{sece} \\ n &= 1 \\ P &= \rho \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \cdot \frac{q' \cos \delta - \rho'}{M_r} = 1 + 2 \frac{N}{M} \text{ctg}^2 \varphi \sin^2 \frac{\delta}{2} \\ \text{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + 1}{P} - 2} \end{aligned} \right\} \quad (9-6)$$

根据上列各式，可计算出不同纬线上离中央经线为  $\pm \lambda$  的各项变形值，详见表9-1。

表9-1

$\varphi$	变 值 形	$\lambda$	0°	15°	30°	60°	90°
0°	$\epsilon$		0	0	0	0	0
	$m$		1	1.03450	1.13800	1.55201	2.24201
	$P$		1	1.03450	1.13800	1.55201	2.24201
	$\omega$		0	1°56'35"	7°24'03"	24°59'05"	45°03'06"
15°	$\epsilon$		0	-2'23"	-17'42"	-1°45'21"	-4°03'22"
	$m$		1	1.03216	1.12851	1.51236	2.14807
	$P$		1	1.03216	1.12850	1.51165	2.14242
	$\omega$		0	1°48'35"	6°55'34"	23°36'05"	42°59'41"
30°	$\epsilon$		0	-3'46"	-28'01"	-2°54'03"	-7°08'42"
	$m$		1	1.02580	1.10278	1.40576	1.89786
	$P$		1	1.02580	1.10274	1.40396	1.88312
	$\omega$		0	1°27'51"	5°37'24"	19°38'22"	36°50'34"
60°	$\epsilon$		0	-2'12"	-17'05"	-2°01'20"	-5°46'03"
	$m$		1	1.00854	1.03375	1.12885	1.27057
	$P$		1	1.00854	1.03374	1.12815	1.26414
	$\omega$		0	28'38"	1°55'06"	7°13'40"	14°51'59"
90°	$\epsilon$		0	0	0	0	0
	$m$		1	1	1	1	1
	$P$		1	1	1	1	1
	$\omega$		0	0	0	0	0

由表9-1可以看出,在普通多圆锥投影中各种变形都存在,故属于任意性质的投影。在中央经线附近的各种变形均较小,离中央经线愈远变形也愈大。例如当 $\varphi=0^\circ$ 时, $\lambda=\pm 15^\circ$ 的边缘经差上 $m$ 的最大值为3.4%、角度变形等于 $1^\circ 56' 35''$ 。可见该投影最适宜于表示沿中

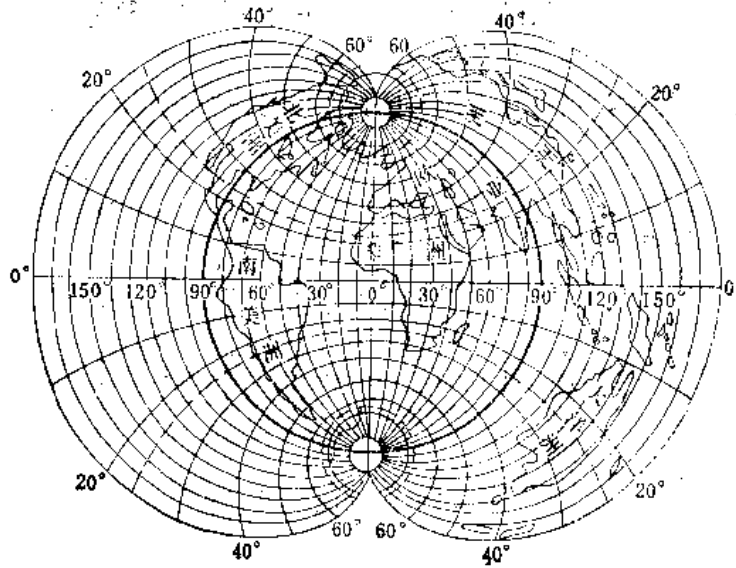


图9-4

央经线延伸的制图区域,当然也比较适合制作沿南北方向延伸地区的地图。如南美洲的智利、阿根廷曾选用此类投影,我国30年代编纂的《中华民国新地图》中也曾采用该投影绘制分区地图。图9-4为普通多圆锥投影的经纬线网略图。

### § 9-3 改良多圆锥投影

1909年国际制图会议讨论编制1:100万地图时,建议采用由拉勒孟德(Lallemend)推荐的投影方案,由于此投影曾对普通多圆锥投影作了一些改良,所以又称它为改良多圆锥投影,通常也称国际百万分之一地图投影。按投影属多圆锥投影之一种,其基本设想是将地球椭球体的表面按百万分之一地图分幅,可分成一系列的球面梯形,它是按纬差 $4^\circ$ 、经差 $6^\circ$ 来划分的。每一球面梯形均采用相同的投影方法各自进行投影,在地图投影中,俗称多面体投影,即利用普通多圆锥投影的原理实施于多面体投影,再运用一些改良的方法建立新的数学基础。它每幅图的边缘纬线是根据普通多圆锥投影的公式计算出来的坐标进行展绘的,其余纬线是将经线绘成直线并等分之,然后连接相应的等分点而绘成之。该投影的中央经线并不与实地等长,而是被缩短了,与实地等长的经线位于中央经线的两侧,边缘经线则比实地要长。除边缘纬线与实地等长外,其余均比实地要短,这是不同于普通多圆锥投影的,因为在普通多圆锥投影中每条纬线都与实地等长。经过这些改良,一是促使图幅内的变形分布均匀些,由于正、负变形同时存在,变形绝对值就会比原来的要小,二是便于左右两相邻图幅的衔接。

改良多圆锥投影按如下规定执行:

1. 纬度 $0^\circ-60^\circ$ 范围内是按纬差 $4^\circ$ 、经差 $6^\circ$ 分幅;纬度 $60^\circ-76^\circ$ 范围内是按纬差 $4^\circ$ 、经差 $12^\circ$ 分幅;纬度 $76^\circ-88^\circ$ 范围内则按纬差 $4^\circ$ 、经差 $24^\circ$ 分幅。

经纬线网密度均为 $1^\circ \times 1^\circ$ ,每一图幅皆各自单独投影。

2. 各纬线投影表象为同轴圆弧,圆心位于中央经线上,投影半径 $\rho = N \operatorname{ctg} \varphi$ 。

3. 南、北边缘纬线上无长度变形。

4. 各经线投影皆为直线。

5. 在距中央经线东、西各 $2^\circ$ 的经线上无长度变形,但在纬度 $60^\circ$ 以上和 $76^\circ$ 以上的区间需作相应变更,无变形经线的位置应设在 $\pm 4^\circ$ 和 $\pm 8^\circ$ 处。

参考上述各条规定,可推导该投影的基本公式。先按普通多圆锥投影的公式可计算南、北边缘纬线上各点的坐标。由于本投影的坐标原点按要求设置在边缘纬线和中央经线的交点上,此时 $S_M = 0$ ,原坐标公式改写为:

$$\left. \begin{aligned} x &= S_M + \rho - \rho \cos \delta = \rho - \rho \cos \delta = \rho(1 - \cos \delta) \\ y &= \rho \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (9-7)$$

式中

$$\rho = N \operatorname{ctg} \varphi, \quad \delta = \lambda \sin \varphi。$$

在普通多圆锥投影中,已知经线长度比为:

$$m = \left( 1 + 2 \frac{N}{M} \operatorname{ctg}^2 \varphi \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) \operatorname{secc} \epsilon$$

因为在一幅百万分之一地图中的 $\epsilon$ 值很小,一般不超过 $3''$ ,故可视 $\operatorname{secc} \epsilon = 1$ 。如令 $M = N$ ,则上

式可简写为:

$$m = 1 + 2\text{ctg}^2\varphi \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1 + \text{ctg}^2\varphi(1 - \cos\delta)$$

由于  $\delta = \lambda \sin\varphi$ , 代入上式并按函数展开式展开得:  $(1 - \cos\delta) = 1 - \cos(\lambda \sin\varphi) = 1 - 1 + \frac{\lambda^2 \sin^2\varphi}{2} + \dots \approx \frac{\lambda^2 \sin^2\varphi}{2}$

$$\therefore m = 1 + \text{ctg}^2\varphi \left( \frac{\lambda^2 \sin^2\varphi}{2} \right) = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2\varphi = 1 + \frac{\lambda^{\circ 2}}{2\rho^{\circ 2}} \cos^2\varphi$$

我们已知在按经差 $6^\circ$ 的分幅中, 离中央经线为 $\pm 2^\circ$ 的经线上保持与实地等长, 那么本投影的经线长度比公式可改写为:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1 + \frac{\lambda^{\circ 2}}{2\rho^{\circ 2}} \cos^2\varphi}{1 + \frac{4^{\circ}}{2\rho^{\circ 2}} \cos^2\varphi} = \left( 1 + \frac{\lambda^{\circ 2}}{2\rho^{\circ 2}} \cos^2\varphi \right) \left( 1 + \frac{4^{\circ}}{2\rho^{\circ 2}} \cos^2\varphi \right)^{-1} \\ &= 1 + \frac{\lambda^{\circ 2}}{2\rho^{\circ 2}} \cos^2\varphi - \frac{4}{2\rho^{\circ 2}} \cos^2\varphi + \dots \\ &= 1 + \frac{\lambda^{\circ 2} - 4}{2\rho^{\circ 2}} \cos^2\varphi = 1 + 0.0001523 (\lambda^{\circ 2} - 4) \cos^2\varphi \end{aligned}$$

若设在中央经线上,  $\lambda = 0^\circ$ , 则

$$m_0 = 1 - 0.000609 \cos^2\varphi \quad (9-8)$$

已知  $m_0 = \frac{H}{S}$ ;  $H = Sm_0 = S(1 - 0.000609 \cos^2\varphi)$ ,

式中 $H$ 表示投影后缩短了的长度,  $S$ 为中央经线的长度,  $H$ 也可用如下形式表示:

$$H = S - \Delta S = S(1 - 0.000609 \cos^2\varphi) \quad (9-9)$$

我们从制图用表中查出当纬差等于 $4^\circ$ 时, 在百万分之一地图上的平均子午线弧长等于 $444\text{mm}$ , 故

$$\Delta S = 444 \times 0.000609 \cos^2\varphi = 0.271 \text{mm} \times \cos^2\varphi \quad (9-10)$$

至此, 以纬度为引数可求出 $\Delta S$ , 继之算出 $H$ 值。由于有了中央经线的长度改正值, 就可以进一步作图了。作图的步骤简述于下:

1. 在图纸中央作一垂线使其长度等于 $H$ , 并以此为 $X$ 轴; 过 $O$ 点作垂直于 $X$ 轴的 $Y$ 轴;
2. 按公式(9-7)分别计算经差每隔 $1^\circ$ 时的边缘纬线上各点的坐标。也可按图幅所在经纬度为引数从《小比例尺地图投影集(一)》(测绘出版社1978年出版)中查取南、北边缘纬线上经差分别为 $1^\circ$ 、 $2^\circ$ 和 $3^\circ$ 各交点的坐标。此时应注意北边缘纬线上的 $1'$ 、 $2'$ 和 $3'$ 应以 $O'$ 起算, 而南边纬线上的 $1$ 、 $2$ 和 $3$ 点则以 $O$ 起算。参阅9-5图。以后就可采用直线内插法定出中间各纬线上各交点的坐标;

3. 使用坐标展点仪分别展绘各经纬线交点的图上位置, 将上下同名纬度各点以圆滑曲线连接之, 并用直线连接同名经线上相邻各点, 于是即构成一幅百万分之一地图的经纬线网图。

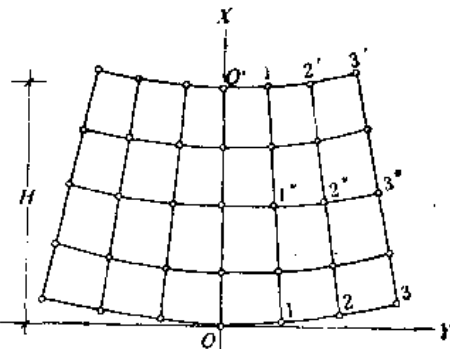


图9-5

现在来分析改良多圆锥投影的变形, 先探求纬线的

变形。如图9-6,  $A_1, A_0, A_2$  为经差  $3^\circ$  的曲线,  $A_1, A_1', A_2$  是  $A_1, A_2$  两点连成的直线。其中  $A_0, A_0'$  是中纬线因曲线连成直线而缩短的距离。边纬与中纬的纬线弧长用下式表示:

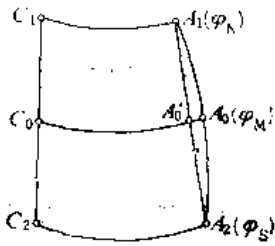


图9-6

$$C_2 A_2 = r_s \cdot \lambda = N_s \cos \varphi_s \cdot \lambda$$

$$C_0 A_0 = r_M \cdot \lambda = N_M \cos \varphi_M \cdot \lambda$$

$$C_1 A_1 = r_N \cdot \lambda = N_N \cos \varphi_N \cdot \lambda$$

式中  $\lambda$  为边缘经线和中央经线的经差。

$$\begin{aligned} C_0 A_0' &= \frac{1}{2}(C_1 A_1 + C_2 A_2) = \frac{1}{2} \lambda (N_N \cos \varphi_N + N_s \cos \varphi_s) \\ &= \frac{1}{2} N_M \lambda (\cos \varphi_N + \cos \varphi_s) \end{aligned}$$

所以中纬线的长度比应为

$$\begin{aligned} n_0 &= \frac{C_0 A_0'}{C_0 A_0} = \frac{\frac{1}{2} N_M \lambda (\cos \varphi_N + \cos \varphi_s)}{N_M \lambda \cos \varphi_M} \\ &= \frac{2 \cos \varphi_M \cos \left( \frac{\varphi_N - \varphi_s}{2} \right)}{2 \cos \varphi_M} = \cos \left( \frac{\varphi_N - \varphi_s}{2} \right) \end{aligned}$$

如将  $\cos \left( \frac{\varphi_N - \varphi_s}{2} \right)$  展开成级数, 并取其二次项, 则

$$n_0 = 1 - \frac{(\varphi_N^\circ - \varphi_s^\circ)^2}{8\rho^{\circ 2}} \quad (9-11)$$

由于一幅百万分之一地图的  $\varphi_N - \varphi_s = 4^\circ$

所以

$$n_0 = 1 - 0.0006$$

此式表明中纬线的变形值为  $-0.6\%$ 。

设定中央经线两侧各  $2^\circ$  的经线上无长度变形, 其余各经线均有不等的长度变形, 参阅求中央经线长度比  $m_0$  的公式(9-8)有

$$m_0 = 1 - 0.000609 \cos^2 \varphi$$

当  $\varphi = 0^\circ$  时, 在赤道的一幅图中其值为最大, 有

$$m_0 = 1 - 0.000609$$

故中央经线变形值为  $-0.61\%$ , 是所有变形中的最大值。

面积变形可近似地取值为长度变形的两倍。

角度变形随纬度而变化, 纬度愈低变形愈大。位于赤道上的图幅其角度变形不会超过  $5'$ , 而中等纬度的图幅一般不超过  $3'$ 。由此可以得出结论: 国际百万分之一地图投影中无论哪一幅地图, 其变形值都不很大, 精度较高。在我国范围内, 长度变形不超过  $0.6\%$ , 面积变形不超过  $1.2\%$ , 角度变形不会超过  $5'$ , 所以在实用时可忽略不计。

百万分之一地图投影是每幅图单独投影的, 因此相邻图幅在拼接时会产生某些裂隙, 如图9-7所示, 若相邻四幅图围绕一公共图廓点进行拼接, 经推算裂隙角  $e$  值可由下式计算:

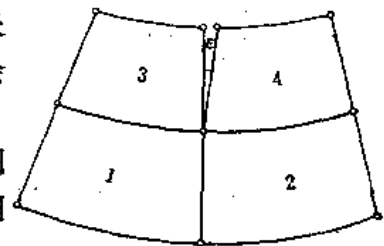


图9-7



$$\varepsilon' = 25.15 \cos \varphi \quad (9-12)$$

式中 $\varphi$ 为公共图廓点的纬度。

如以裂隙距表示, 则有 
$$\varepsilon = 3.25 \cos \varphi (\text{mm}) \quad (9-13)$$

由上两式可判明当低纬度时, 相邻图幅的裂隙值较大, 在赤道上其值最大, 分别为  $25' 15$  或  $3.25 \text{mm}$ 。一般情况下, 裂隙值均较小, 故对地图的实际使用影响不大。

我国在1978年前编制的百万分之一地图采用该投影。

1962年在波恩举行的国际地图会议上通过建议采用双标准纬线等角圆锥投影来代替改良多圆锥投影作为国际百万分之一地形图的数学基础, 使之能与世界百万分之一航空图更好地协调一致。两者仍有不少相似之处, 但实行变革的有:

1. 等角圆锥投影也是对每幅图单独进行投影, 指定每幅图内有两条标准纬线, 应按下式计算

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_S + 40' \\ \varphi_2 &= \varphi_N - 40' \end{aligned}$$

2. 百万分之一地形图采用两种投影, 由赤道至北纬 $84^\circ$ 和至南纬 $80^\circ$ 之间选用等角圆锥投影, 它们至南、北极的区间则采用等角方位投影。

3. 地图的分幅规定纬度 $60^\circ-76^\circ$ 按经差 $12^\circ$ 分幅; 纬度 $76^\circ-84^\circ$ 按 $24^\circ$ 分幅; 纬度 $84^\circ-88^\circ$ 按 $36^\circ$ 分幅; 其它规定均不变。

我国自1978年以来决定采用等角圆锥投影作为百万分之一地形图的数学基础。地图分幅原则与国际上1962年所采用的相同, 但投影的标准纬线的位置选用下面的近似式计算

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\approx \varphi_S + 35' \\ \varphi_2 &\approx \varphi_N - 35' \end{aligned}$$

故稍有差异。本投影的投影常数是根据边纬与中纬长度变形绝对值相等的条件求得, 即:

$$\left. \begin{aligned} n_S &= n_N = 1 + \nu \\ n_m &= 1 - \nu \\ \alpha &= \frac{\lg r_S - \lg r_N}{\lg U_N - \lg U_S} \\ K &= \frac{1}{\alpha} \sqrt{r_N r_M U_N^\alpha U_M^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{r_S r_M U_S^\alpha U_M^\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (9-14)$$

投影的变形值很小, 长度变形在边纬与中纬上是 $\pm 0.030\%$ , 面积变形约为长度变形的两倍。

百万分之一圆锥投影中, 经线投影成一组辐射直线, 根据经线东西相邻图幅拼接是没有问题的, 当图幅在上下邻边相接时, 因为在计算投影常数时所取的纬度不同, 使得同名纬线的投影半径 $\rho$ 略有差异, 在接图时由于两条纬线不能重合导致裂隙的产生, 其值随纬度的变化而变化, 最大值处于低纬度图幅, 其值约为 $0.6 \text{mm}$ , 中纬图幅大致在 $0.3 \text{mm}$ 左右。

在我国出版的《小比例尺地图投影集》(第一辑)中载有百万分之一地图适用的正轴等角圆锥投影各图幅的坐标表。

## §9-4 差分纬线多圆锥投影

普通多圆锥投影就其性质来说是一种任意性质的等分纬线多圆锥投影, 投影后每条纬线

上等经差的纬距均各自相等。但离中央经线愈远的地方，经线的弯曲也越大，所以图上出现同一经差和同一纬差所包含的面积均各不相同，这对于要求图上面积有较好对比的世界地图来说是并不适宜的。差分纬线多圆锥投影的设计较好地解决了上述问题。这类投影的纬线并不是等分的，而是依据一定的差分来划分纬线的，从中央经线开始，纬距即按限定的差分逐渐缩短，虽然前述偏离中央经线愈远的经线其弯曲程度愈大，但由于同经差的纬距不等，所以最终能适当保持图上相等经差和纬差的面积变形不致过大。

该投影极坐标是以 $\delta_{\varphi_i}$ 和 $\rho$ 表示的。 $\delta_{\varphi_i}$ 是某一纬线上过*i*点经线的极角，首先要确定差分纬线的函数式，其目的在于精确定出边缘经线和中央经线之间各条经线通过的位置。如果纬线被经线所等分，可称为等分纬线多圆锥投影，它表示其间所插入的各经线位置是等距的。

由多圆锥投影的一般公式可知：

$$\delta = f(\varphi, \lambda)$$

对于某一定纬线 $\varphi_i$ 来说 $\delta$ 仅是 $\lambda$ 的函数，即 $\delta_{\varphi_i} = f(\lambda)$ 。

1. 在等分纬线的情况下， $\delta_{\varphi_i}$ 可由下式求出：

$$\delta_{\varphi_i} = \frac{\delta_{\varphi_n}}{\lambda_n} \cdot \lambda_i \quad (9-15)$$

式中 $\lambda_i$ 为过*i*点的经线和中央经线的经差； $\lambda_n$ 为边缘经线与中央经线的经差，一般均等于 $180^\circ$ 。

2. 如属不等分纬线的多圆锥投影，即差分纬线时， $\delta_{\varphi_i}$ 的概括形式可写为：

$$\delta_{\varphi_i} = \frac{\delta_{\varphi_n}}{\lambda_n} \left[ b - cg\left(\frac{\lambda_i}{d}\right) \right] \lambda_i \quad (9-16)$$

式中 $b$ 、 $c$ 和 $d$ 均为该投影的待定参数； $g\left(\frac{\lambda_i}{d}\right)$ 设为待定函数。当 $\lambda_i = \lambda_n$ 时，(9-16)式可写成

$$\delta_{\varphi_n} = \frac{\delta_{\varphi_n}}{\lambda_n} \left[ b - cg\left(\frac{\lambda_n}{d}\right) \right] \lambda_n$$

$$c = \frac{b-1}{g\left(\frac{\lambda_n}{d}\right)} \quad (9-17)$$

化简后

由此可知参数 $c$ 取决于另两个参数 $b$ 和 $d$ 。若将(9-17)式代入(9-16)式，便得出求 $\delta_{\varphi_i}$ 的主要公式：

$$\delta_{\varphi_i} = \frac{\delta_{\varphi_n}}{\lambda_n} \left[ b - \frac{b-1}{g\left(\frac{\lambda_n}{d}\right)} \cdot g\left(\frac{\lambda_i}{d}\right) \right] \lambda_i \quad (9-18)$$

最常用的有三种差分纬线的方法：

(1) 等差分纬线多圆锥投影

如使 $g\left(\frac{\lambda_i}{d}\right) = \lambda_i$ ，(9-18)式便可改写为：

$$\delta_{\varphi_i} = \frac{\delta_{\varphi_n}}{\lambda_n} \left[ b - \frac{b-1}{\lambda_n} \lambda_i \right] \lambda_i \quad (9-19)$$

此式表明所划分的纬距具有随远离中央经线而等差递减的特性。

(2) 正弦差分纬线多圆锥投影

此时如令  $g\left(\frac{\lambda_i}{d}\right) = \sin\left(\frac{\lambda_i}{d}\right)$ , 代入(9-18)式后

$$\delta_{\varphi_i} = \frac{\delta_{\varphi_0}}{\lambda_0} \left[ b - \frac{b-1}{\sin\left(\frac{\lambda_0}{d}\right)} \sin\left(\frac{\lambda_i}{d}\right) \right] \lambda_i \quad (9-20)$$

按此式划分的纬距将受正弦函数的影响而递减。

(3) 正切差分纬线多圆锥投影

若使  $g\left(\frac{\lambda_i}{d}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\lambda_i}{d}\right)$ , (9-18)式改为:

$$\delta_{\varphi_i} = \frac{\delta_{\varphi_0}}{\lambda_0} \left[ b - \frac{b-1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\lambda_0}{d}\right)} \operatorname{tg}\left(\frac{\lambda_i}{d}\right) \right] \lambda_i \quad (9-21)$$

按此式划分的纬距也将受正切函数的影响而递减。

为了对以上各式有进一步的了解, 现分析和研究参数  $b$  和  $d$  的实际含义。根据多圆锥投影的一般公式有

$$n = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \lambda}$$

针对指定的纬线  $\varphi_i$ , 有

$$n = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{d \delta_{\varphi_i}}{d \lambda_i}$$

式中  $\frac{\rho}{r}$  为常数。

如对上式微分, 可得

$$n = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\delta_{\varphi_0}}{\lambda_0} \left\{ b - \frac{b-1}{g\left(\frac{\lambda_0}{d}\right)} \left[ g\left(\frac{\lambda_i}{d}\right) + \left(\frac{\lambda_i}{d}\right) g'\left(\frac{\lambda_i}{d}\right) \right] \right\} \quad (9-22)$$

在中央经线上, 即  $\lambda_i = 0^\circ$  时, 上式可简化为:

$$n = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\delta_{\varphi_0}}{\lambda_0} b \quad (9-23)$$

$$\therefore b = \frac{n}{\frac{\rho}{r} \cdot \frac{\delta_{\varphi_0}}{\lambda_0}} \quad (9-24)$$

现以  $n_0$  表示等分纬线投影中沿纬线的长度比, 只要顾及  $n = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \lambda}$ , 并对(9-15)式微

分便有

$$n_0 = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\delta_{\varphi_0}}{\lambda_0} \quad (9-25)$$

故有

$$n = b n_0 \quad (9-26)$$

由此看出, 参数  $b$  乃是不等分纬线投影中的中央经线上沿纬线长度比  $n$  和等分纬线投影中相应点上沿纬线长度比  $n_0$  的比值。所以对  $b$  值的选取决定了不等分纬线投影中每一纬线上  $n$  的最大值或最小值, 即  $b > 1$  或  $b < 1$ 。

如果 $b$ 恰为1时, 参数 $c = \frac{b-1}{g\left(\frac{\lambda_s}{d}\right)} = 0$ ,  $\delta_{\varphi_i} = \frac{\delta_{\varphi_s}}{\lambda_s} \left[ b - cg\left(\frac{\lambda_i}{d}\right) \right] \lambda_i$ 式可简化为

$$\delta_{\varphi_i} = \frac{\delta_{\varphi_s}}{\lambda_s} \cdot \lambda_i$$

不难看出, 此即等分纬线多圆锥投影求极角的基本公式。

只要给定了参数 $d$ ,  $\frac{\lambda_s}{d}$ 也告确定, 从而得到了函数值从0到 $g\left(\frac{\lambda_s}{d}\right)$ 的变化范围。又若 $b$ 值也已限定, 则参数 $b$ 和 $d$ 可以反映出纬线上经距变化的速率。

当 $d = \infty$ 时, 则(9-16)式为

$$\delta_{\varphi_i} = \frac{\delta_{\varphi_s}}{\lambda_s} b \lambda_i \quad (9-27)$$

如以 $\lambda_i = \lambda_s, \delta_{\varphi_i} = \delta_{\varphi_s}$ , 则有

$$\delta_{\varphi_s} = \frac{\delta_{\varphi_s}}{\lambda_s} b \lambda_s$$

约化后 $b = 1$ , 此即等分纬线的情况。

当 $\frac{\lambda_s}{d} = 90^\circ$ 时, 正切差分公式中的 $\text{tg}\left(\frac{\lambda_s}{d}\right)$ 值将为无穷大, 该式不可能成立。又当 $\frac{\lambda_s}{d} > 45^\circ$ 时, 正切函数值变化较快, 致使纬线上经距有比较明显的递减, 所以在一般情况下宜使 $\frac{\lambda_s}{d} < 45^\circ$ 。

对于正弦差分公式来说, 当 $\frac{\lambda_s}{d} > 90^\circ$ 时, 正弦函数值会起相反的变化, 表现为在纬线上随远离中央经线已经逐渐递减的经距在 $\frac{\lambda_s}{d} > 90^\circ$ 处又开始逐渐增大, 所以在一般情况下, 正弦差分公式中应使 $\frac{\lambda_s}{d} < 90^\circ$ 。

只要参数 $b$ 和 $d$ 值确定了, 即可由(9-17)式求出另一参数 $c$ 值。

图9-8显示了三种差分函数随着角度变化的情况。等差分函数是随着角度的增加而均匀递增; 正弦差分函数随着角度的增加而递增,

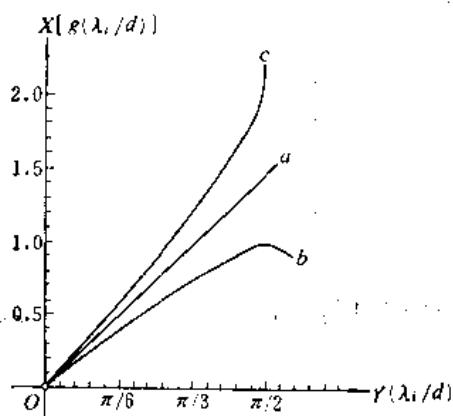


图9-8

$a$ 为等差分函数;  $b$ 为正弦差分函数;  $c$ 为正切差分函数

但速度逐渐减慢, 到达 $\frac{\pi}{2}$ 处开始递减; 正切差分函数随着角度的增加而递增, 其速度越来越快, 到达 $\frac{\pi}{2}$ 处则为无限大。

等差分纬线多圆锥投影是我国制图工作者根据我国边界形状和位置并指定变形分布而设计的, 在编制小比例尺世界政区图中得到较广泛的使用, 如1:22 000 000世界地图。正切差分纬线多圆锥投影是我国在1976年新设计的投影之一, 曾应用于编制1:14 000 000世界地图。现分别将这两类投影的基本公式整理于

下。

等差分纬线多圆锥投影的基本公式：

中央经线上 $x_0$ 的函数式

$$x_0 = q = \frac{(0.9953537\varphi + 0.01476138\varphi^3)R}{\mu_0}$$

此处设  $\mu_0 = 10000000$ ,  $R = 6371116\text{m}$ ,  $\varphi$ 以弧度计, 代入上式得:

$$\left. \begin{aligned} x_0 = q &= 63.41514\varphi + 0.9404646\varphi^3 \\ y_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-28)$$

上式中 $x_0$ 和 $y_0$ 均以厘米计。

极坐标公式为:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\varphi_1} &= \frac{\delta_{\varphi_1}}{\lambda_1} \cdot b(1 - c\lambda_1)\lambda \\ \rho &= \frac{y_1^2 + (x_1 - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)} \end{aligned} \right\} \quad (9-29)$$

式中  $b = 1.10$ ,  $c = 0.000505050$ 。

如图9-9所示,  $x_1$ 、 $y_1$ 是边缘经线上 $\lambda = 180^\circ$ 时所量取的直角坐标值。 $\delta_{\varphi_1}$ 、 $\lambda_1$ 和 $\lambda_1$ 均和前述定义相同。

赤道上的直角坐标值为:

$$\left. \begin{aligned} x_E &= 0 \\ y_E &= \frac{y_1}{\lambda_1} b(1 - c\lambda_1)\lambda \end{aligned} \right\} \quad (9-30)$$

其余各点的直角坐标公式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= q - \rho \cos \delta = q - \rho \cos \delta_{\varphi_1} \\ y &= \rho \sin \delta = \rho \sin \delta_{\varphi_1} \end{aligned} \right\} \quad (9-31)$$

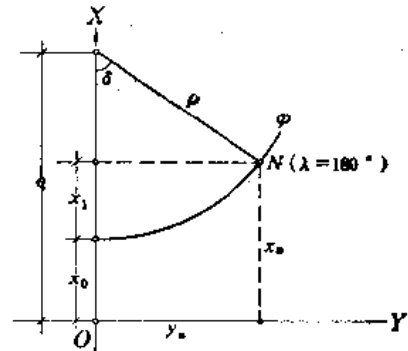


图9-9

由图可知,  $q = \rho + x_0$ 。

该投影的变形公式分别为

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} \cdot \mu_0}{R} \\ n &= \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\delta_{\varphi_1}}{180} \times 1.10(1 - 0.001010101\lambda_1) \\ P &= \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot n \cos \delta_{\varphi_1} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot n \sin \delta_{\varphi_1}\right) \mu_0}{R} \\ \text{tg}^2 \frac{\omega}{2} &= \frac{m^2 + n^2}{4P} - \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (9-32)$$

此外赤道上沿纬线长度比 $n_0$ 为:

$$n_0 = \frac{y_1}{\lambda_1} \cdot \frac{1.10(1 - 0.001010101\lambda_1)\mu_0}{R} \quad (9-33)$$

中央经线上沿经线长度比 $m_0$ 为:

$$m_0 = 0.9953537 + 0.04428414\varphi^2 \quad (9-34)$$

图9-10是一幅等差分纬线多圆锥投影的经纬线格网略图。

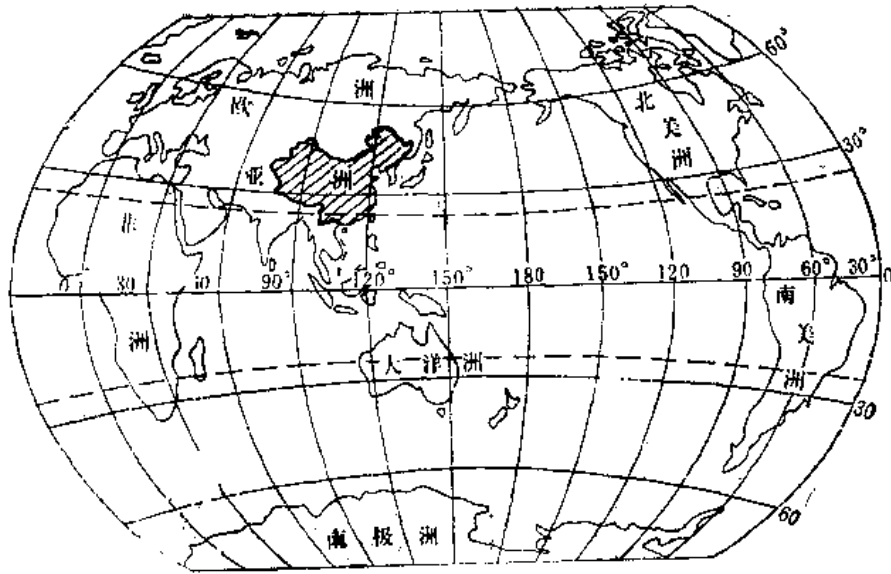


图9-10

等差分纬线多圆锥投影属纬线不等分的多圆锥投影，纬线投影成同轴圆弧，赤道呈直线，投影后长度比小于1，两极投影成圆弧，其长度为赤道的 $\frac{1}{2}$ 。中央经线是垂直于赤道的直线，长度比为1，其余经线上的长度比均向东西两侧增大。在中央经线上的纬线距从赤道向高纬度处略为增大，在纬度 $60^\circ-75^\circ$ 处约为 $0^\circ-15^\circ$ 处的1.06倍。在赤道上的经线距自中央经线向东西两侧分别按一定差值缩小，边缘经线距约为中央经线附近经线距的0.83。该投影属面积变形不大的任意投影，特别是在陆地部分的变形分布较均匀，投影后陆地轮廓的形状也比较接近真实，在世界地图上被配置在较为适中的位置，同时也保持了太平洋的完整，有利于突出我国与太平洋周围各国的联系。此外，在我国范围内的变形一般均较小，大部分地区的面积变形不大于10%，角度变形不超过 $10^\circ$ 。该投影的另一特点是经纬线投影后均为曲线，所以有球体感。1964年以来我国编制出版的世界地图多属此投影。

正切差分纬线多圆锥投影的基本公式列于下：

$$\left. \begin{aligned}
 x_0 &= \frac{(\varphi + 0.06683225\varphi^4)R}{\mu_0} \\
 y_0 &= \frac{132}{210\rho^0} \times 1.1 \left( 1 - 0.10096478 \operatorname{tg} \frac{\lambda_i}{5} \right) \lambda_i \\
 x_i &= x_0 + 9.5493\varphi \\
 y_i &= \sqrt{112^2 - x_i^2} + 20 \\
 \rho &= \frac{y_i^2 + (x_i - x_0)^2}{2(x_i - x_0)} \\
 \delta_{\varphi_i} &= \frac{\delta_{\varphi_0}}{\lambda_i} \times 1.1 \left( 1 - 0.10096478 \operatorname{tg} \frac{\lambda_i}{5} \right) \lambda_i \\
 q &= \rho + x_0 \\
 x &= q - \rho \cos \delta_{\varphi_i} \\
 y &= \rho \sin \delta_{\varphi_i}
 \end{aligned} \right\} \quad (9-35)$$

变形公式为：

$$m = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} \cdot \mu_0}{R}$$

$$n = \frac{\rho \mu_0}{R \cos \varphi} \cdot \frac{\delta \varphi}{\lambda_*} \times 1.1 \left[ 1 - 0.10096478 \left( \operatorname{tg} \frac{\lambda_i}{5} + \frac{\lambda_i}{5} \sec^2 \frac{\lambda_i}{5} \right) \right]$$

$$P = \frac{n \left( \cos \delta \varphi \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \sin \delta \varphi \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \cdot \mu_0}{R}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{P} - 2}$$

赤道上沿纬线长度比和中央经线上沿经线长度比分别为：

$$n_0 = \frac{y_*}{\lambda_*} \cdot \frac{\mu_0}{R} \times 1.1 \left[ 1 - 0.10096478 \left( \operatorname{tg} \frac{\lambda_i}{5} + \frac{\lambda_i}{5} \sec^2 \frac{\lambda_i}{5} \right) \right]$$

$$m_0 = 1 + \frac{y_*^2}{y_i^2} \times 9.5493$$

以上各式中的符号均如前述。

正切差分纬线多圆锥投影的纬线投影后为对称于赤道的同轴圆弧，其圆心恒位于中央经线上；经线是对称于中央经线的曲线，远离中央经线其经距成比例递减，极点表示为圆弧。所以此类投影也属纬线不等分的多圆锥投影。

为了在地图上保持三大洋的完整，所以边缘经纬线网出现了重复部分，赤道横跨经度达

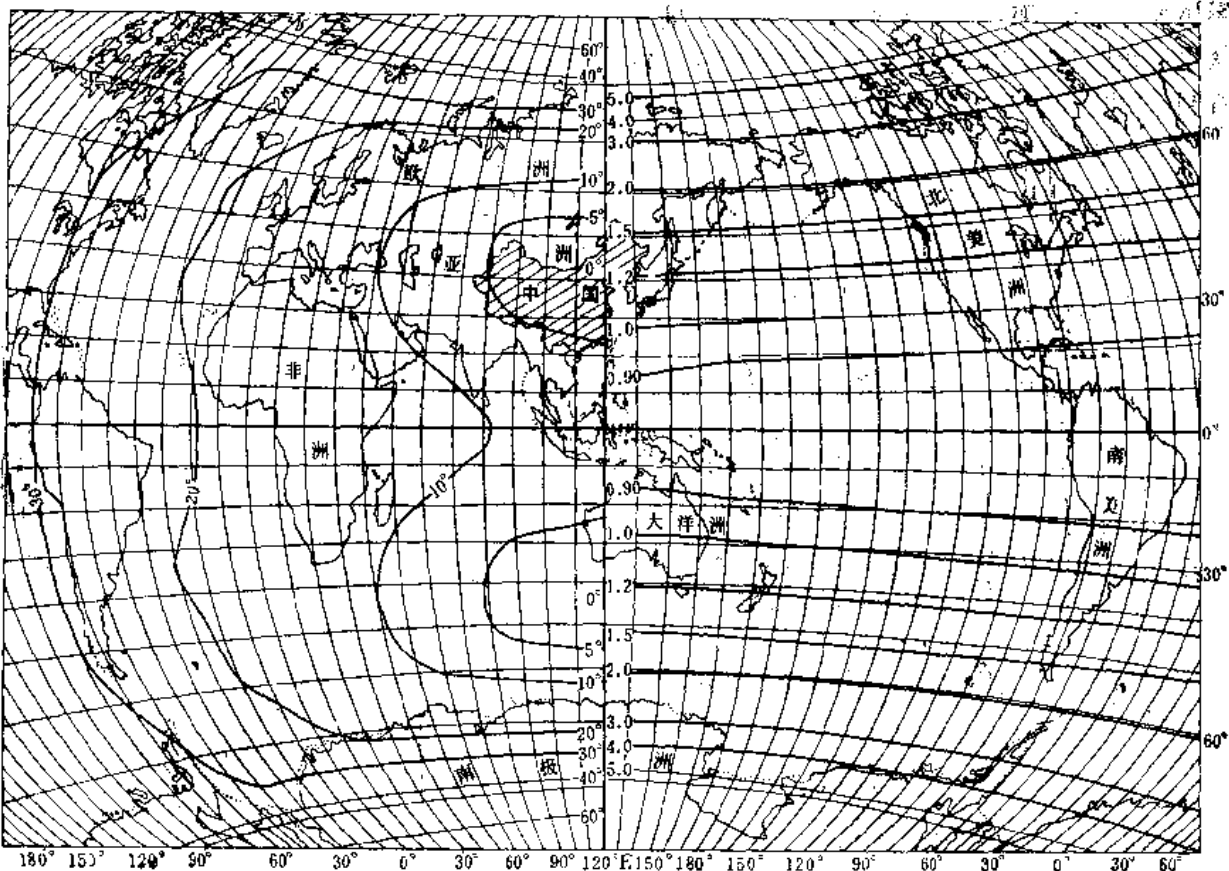


图9-11

420°。经线距从中心向东西两侧按正切差值缩小，边缘部分经线距为中央经线附近的 0.86 倍。纬线距从赤道向高纬度逐渐增大，其比例约为：如以中央经线上 0°—36° 的纬线距为 1，则 30°—60° 处的纬线距接近 1.20。该投影属于角度变形不大的任意投影。在世界地图中，陆地轮廓的形状表示较好，面积等变形线大致和纬线一致，在南北纬 30° 以内的面积变形为 10%—15%，但在高纬方向的面积变形增大较快，例如在南北纬 60° 处增至 200%，到了南北纬 80° 以上地区增大更快，已达 400%—500%。角度无变形点位于中央经线和南北纬线为 44° 的交点处，在高纬度地区的角度变形递增甚快，但在赤道及东西方向附近的角速度变形缓慢增加。

按设计将我国疆域配置在图幅的中部附近，中央经线设于东经 120°。此时，南、北美洲大陆位于图幅东侧，此外太平洋和大西洋均保持完整。总的看来，世界主要大陆的轮廓形状并无明显的变形，我国的形状比较正确，大部分地区的面积变形均在 10%—20% 以内，部分地区为 ±60%。我国大陆部分的最大角度变形均在 6° 以内。图 9-11 为本投影的经纬网略图。

## 思考题

1. 多圆锥投影的基本概念是什么？
2. 如何推求普通多圆锥投影极坐标和直角坐标的公式？
3. 改良多圆锥投影的基本设想是什么？
4. 在编制改良多圆锥投影地图时，有那些规定的条件要执行？
5. 差分纬线多圆锥投影的基本概念是什么？
6. 差分纬线多圆锥投影有几种？简述它们的主要区别。
7. 等差分和正切差分多圆锥投影的特点是什么？



## 第十章 地图投影的变换

### § 10-1 投影变换问题的提出

在地图编制的过程中,经常会遇到原始资料地图和新编地图之间一些点位的转换问题,在地图投影中称为投影变换,它是通过数学解析的方法完成的。这种变换是多种多样的。根据不同的要求采取不同的方式,例如,最简单的是在地形图系列之间仅仅作比例尺的变换,所谓地形图的缩放。由于彼此的投影方式是相同的,故只能称为相似变换。人们熟悉的旅游地图即为一例,该图要求明显、详细地表明具有吸引旅游者的地区,其相对位置至关重要,为此提出了变比例尺地图投影的问题,即将某些重点地区突出夸大表示,其余部分则适当缩小,因此各部分具有不同的比例尺。如果处理另一种类型的问题,用属于高斯-克吕格投影的1:20万或1:50万地形图来编制1:100万属等角圆锥投影的地形图,就要顾及地图投影的变换了。由于它们本身的变形甚微,其差别也小,尽管理论上两者之间的变换较为复杂,但在常规的编图作业中仍是较易处理的。又如利用墨卡托投影的海图资料补充到属于圆锥投影的新编图上,虽其投影变形的性质雷同,但网格形状迥异,前者是矩形网格,后者则为扇形网格,两者间的投影变换较为复杂,故在实际编图作业中是较难处理的。

针对不同地图投影内容的转绘,所选择的方法也是不同的,常规的方法有格网转绘法,即大家所熟悉的先取适当的微小面积,使之——对应后逐点均匀变换;另一种方法是将资料图印在透明塑料薄膜上,经过无定型的拉伸扭曲后粘贴到新编图的投影格网中,此法可在较大面积的投影变换中使用,但质量的优劣主要取决于编图者的技巧。另外也可根据同素变换的原理,即使用摄影测量中的纠正仪进行地图投影的变换,这样就能实现地图图形的转换,从而形成了新的编图工艺,但该法不能实现直线与曲线之间的变换,故有一定的局限性。

随着计算技术和制图自动化的发展,常规的投影变换方法已经陈旧,被逐步淘汰和革新。自动制图的过程要求将资料地图上二维的点经过计算机处理直接变换成新编地图投影中的二维点位,由此需要建立两种不同方式投影之间点与点的变换关系式,本章将简述于下。

### § 10-2 投影变换的基本公式

投影变换是在两种不同投影性质的平面场上进行的,其上的点位可以按如下的对应关系

式来表示, 即:

$$\left. \begin{aligned} X &= F_1(x, y) \\ Y &= F_2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (10-1)$$

式中  $X, Y$  是新编地图投影平面上的直角坐标,  $x, y$  则为需作变换的、原始资料地图上的直角坐标。 $F_1$ 和 $F_2$ 皆为在一定区域内单值、连续的函数。参考前面各章, 针对任意两种不同的地图投影来说, 它们各自的函数表达式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(\varphi, \lambda), & y &= f_2(\varphi, \lambda) \\ X &= f_3(\varphi, \lambda), & Y &= f_4(\varphi, \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (10-2)$$

如从资料地图投影的函数式中求其反解得:

$$\varphi = \varphi(x, y), \quad \lambda = \lambda(x, y)$$

将上式代入新编地图投影的函数式中, 便有

$$\left. \begin{aligned} X &= f_3[\varphi(x, y), \lambda(x, y)] \\ Y &= f_4[\varphi(x, y), \lambda(x, y)] \end{aligned} \right\} \quad (10-3)$$

(10-3)式即为地图投影变换的数学通式。

对于那些具有比较简单表达式的投影公式是可以根据上述的函数式进行反解计算的, 反之, 难度甚大, 并非所有投影均能如此解决。还有种种不利的情况, 诸如新编地图的投影方式虽为已知, 但原地图资料所采用的投影未必都能确切掌握, 在实践中是较难获取地图资料的具体投影方程的。即便在外观上能从经纬线的投影表象来探求该投影所属分类, 但也并非一定能确知其投影的具体公式, 这也就难以解算了。再者原始资料地图因使用或贮藏日久会含有因纸张伸缩而引起的变形, 致使在图上量取的直角坐标  $x$  和  $y$  会含有各种随机误差, 这样如仅直接反解一次以求  $\varphi$  和  $\lambda$  值, 均会受误差传播的影响导致无法着手检查。

比较好的解决方法是先由(10-1)式展开成两种平面场上的直角坐标之间关系的多项式:

$$\left. \begin{aligned} X &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ &\quad + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \\ Y &= b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \\ &\quad + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \end{aligned} \right\} \quad (10-4)$$

只要在图上量取足够已知点的直角坐标, 便可求出上式中的各个系数  $a_{ij}$  和  $b_{ij}$ 。如前所述, 量取的  $x, y$  坐标值均含有误差, 即便按(10-4)式求出新编地图的直角坐标  $X$  和  $Y$ , 也会导致误差的积累, 从而影响到点位质量和成果检定, 一般我们可从计算方法上加以改进解决。

目前主要采用由原投影求反解。即根据  $x, y$  反求  $\varphi, \lambda$ ; 再代入新编地图投影方程中去, 以求出  $X$  和  $Y$ 。如果条件具备, 可应用电子计算机通过数学上的迭代法进行投影公式的解析变换。

### § 10-3 两种投影方法为已知的投影变换

只要原始资料地图的投影是已知的, 那么由原投影的直角坐标反求  $\varphi$  和  $\lambda$  才有可能, 下面略举几个较简单的例子:

1. 由等角圆柱投影变换为等角方位投影

已知等角圆柱投影的公式为:

$$x = a \ln U = r_K \ln U, \quad y = a \lambda = r_K \lambda$$

将上式移项, 得:

$$\ln U = \frac{x}{r_K}, \quad U = e^{\frac{x}{r_K}}, \quad \lambda = \frac{y}{r_K} \quad (10-5)$$

式中  $r_K$  是圆柱投影中标准纬线  $\varphi_K$  的半径。

为了便于进行投影变换的计算, 可对原来推导的一些公式进行改化, 如视地球椭球体为

圆球体,  $e=0$ ,  $\therefore U = \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}'\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ + \varphi)$ 。将此关系式代入已

知等角方位投影的公式中, 便有

$$\left. \begin{aligned} \rho &= K \operatorname{tg} \frac{Z}{2} = K \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi) = K / \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ + \varphi) = \frac{K}{U} \\ \delta &= \lambda, \quad x = \rho \cos \delta, \quad y = \rho \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (10-6)$$

将(10-5)式代入(10-6)式便得:

$$\left. \begin{aligned} X &= \rho \cos \delta = \frac{K}{U} \cos \lambda = \frac{K}{e^{\frac{x}{r_K}}} \cos \left( \frac{y}{r_K} \right) \\ Y &= \rho \sin \delta = \frac{K}{U} \sin \lambda = \frac{K}{e^{\frac{x}{r_K}}} \sin \left( \frac{y}{r_K} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10-7)$$

式中角度均以弧度计,

2. 由等角圆柱投影变换为等角圆锥投影

已知等角圆锥投影的方程为:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= K/U^a, \quad \delta = a\lambda \\ x &= \rho_s - \rho \cos \delta, \quad y = \rho \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (10-8)$$

只要将(10-5)式代入(10-8)式, 可得:

$$\left. \begin{aligned} X &= \rho_s - \rho \cos \delta = \rho_s - \frac{K}{U^a} \cos \left( a \cdot \frac{y}{r_K} \right) = \rho_s - \frac{K}{e^{\frac{ax}{r_K}}} \cos \left( a \cdot \frac{y}{r_K} \right) \\ Y &= \rho \sin \delta = \frac{K}{U^a} \sin \left( a \cdot \frac{y}{r_K} \right) = \frac{K}{e^{\frac{ax}{r_K}}} \sin \left( a \cdot \frac{y}{r_K} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10-9)$$

式中角度也以弧度计。

3. 由等距离圆柱投影变换为等距离圆锥投影

仍采用上面的方法, 先列出等距离圆柱投影方程:

$$x = s, \quad y = r_K \cdot \lambda, \quad \lambda = \frac{y}{r_K} \quad (10-10)$$

同样, 等距离圆锥投影方程也为已知, 即

$$\rho = C - s, \quad \delta = a\lambda \quad (10-11)$$

将(10-10)式代入(10-11)式:

$$\left. \begin{aligned} X &= \rho_s - \rho \cos \delta = \rho_s - (C-s) \cos(\alpha \lambda) = \rho_s - (C-s) \cos\left(\alpha \cdot \frac{y}{r_k}\right) \\ Y &= \rho \sin \delta = (C-s) \sin(\alpha \lambda) = (C-s) \sin\left(\alpha \cdot \frac{y}{r_k}\right) \end{aligned} \right\} \quad (10-12)$$

式中  $s$  为由赤道到  $\varphi$  的子午线弧长，所有角度均以弧度计。

上面仅举了三个典型的例子，读者还可根据实际要求自行推演。但必须注意，在实践中要获得地图资料的确切投影方法是比较困难的，例如原始资料图纸的缩变，导致  $x, y$  读数值含有误差以及经一次反算未必能达到预期的精度等均会影响到最后成果，因此，需要在计算方法上加以改进以确保必要的精度。

## § 10-4 应用解析计算的迭代法进行投影变换

在实际编图过程中常遇到的是仅掌握所编地图的投影方程，至于原始资料地图的投影方式往往是未知的。所以在具体变换过程中先读取一系列点的直角坐标值以求得  $\varphi$  和  $\lambda$ ，然后再按以上各式求  $X$  和  $Y$ 。采用逼近多项式的方法求解是较为适宜的；先写出求  $\varphi$  和  $\lambda$  的通式：

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t a_{i,j} x^i y^j \\ \lambda &= \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t b_{i,j} x^i y^j \end{aligned} \right\} \quad (10-13)$$

式中的上、下角标的含义为：

$$i = 0, 1, 2, \dots, s, \quad j = 0, 1, 2, \dots, t, \quad i + j = n$$

所有  $a_{i,j}$  和  $b_{i,j}$  均为待定系数。

只要将上式代入所编地图的投影方程中去，即得(10-3)函数式的形式。据此可依次计算诸点在新的投影坐标平面中的直角坐标。计算的关键在于如何应用(10-13)式解决由读取的直角坐标值解求地理坐标  $\varphi$  和  $\lambda$  的问题。我们采用迭代法的首要问题是决定逼近多项式的次数，若从二次多项式增加为三次多项式，肯定会明显提高逼近的精度。我们可以参考式(10-4)式的形式将逼近多项式(10-13)改写为：

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ &\quad + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \\ \lambda &= b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \\ &\quad + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \end{aligned} \right\} \quad (10-14)$$

如由(10-14)式求各待定系数  $a_{i,j}$  和  $b_{i,j}$ ，至少需要有10个已知点的经纬度和直角坐标  $x, y$  的读数值。系数  $a_{i,j}$  和  $b_{i,j}$  一旦解出后，只要量测任一新点的坐标值便可计算其相应的经纬度。从几何学中得知，决定二次曲线要有5个点、至于三次曲线则要求有9个点。如果视经纬线均为三次曲线，整个坐标平面应含有81个点，这些点最好选取在曲线变化比较复杂的地方，离起点远的部分要适当多布置一些。根据所选各点的经纬度及坐标量测值，应用最小二乘法的原理解算各待定系数，接着按原式即可求出已知点的第一次经纬度近似值，以  $\varphi'$  和  $\lambda'$  表示。将它与已知值相比较得到了  $\nu_\varphi$  和  $\nu_\lambda$ ，以下式表示：

$$\left. \begin{aligned} v_\varphi &= \varphi - \varphi' \\ v_\lambda &= \lambda - \lambda' \end{aligned} \right\} \quad (10-15)$$

求出  $v_\varphi$  和  $v_\lambda$  的目的在于计算量度值的均方误差, 它表示第一次计算结果的精度, 如果均方误差大于规定的逼近精度, 就必须计算第二次近似值, 此时可将  $\varphi'$  和  $\lambda'$  替代原起始值, 用下面的式子按原法计算

$$\left. \begin{aligned} \varphi'' &= a'_{00} + a'_{10}\varphi' + a'_{01}\lambda' + a'_{20}\varphi'^2 + a'_{11}\varphi'\lambda' + a'_{02}\lambda'^2 \\ &\quad + a'_{30}\varphi'^3 + a'_{21}\varphi'^2\lambda' + a'_{12}\varphi'\lambda'^2 + a'_{03}\lambda'^3 \\ \lambda'' &= b'_{00} + b'_{10}\varphi' + b'_{01}\lambda' + b'_{20}\varphi'^2 + b'_{11}\varphi'\lambda' + b'_{02}\lambda'^2 \\ &\quad + b'_{30}\varphi'^3 + b'_{21}\varphi'^2\lambda' + b'_{12}\varphi'\lambda'^2 + a'_{03}\lambda'^3 \end{aligned} \right\} \quad (10-16)$$

即可获得各待定系数的第二次近似值  $a'_{ij}$  和  $b'_{ij}$ , 再代入(10-16)式即可求出各点的第二次经纬度逼近值, 根据均方误差来判别是否限定在规定的精度范围内, 如此逐次计算, 直至符合要求为止。地理坐标求出后, 按所编投影公式计算直角坐标  $x$  和  $y$ 。上述迭代的次数取决于所指定的逼近精度, 它又是按制图的精度来考虑的, 一般限定为  $0.2\text{mm}$  或  $0.01^\circ$ 。

综上所述, 资料地图的变换精度主要由三种误差积累影响所致, 首先是在原始资料图上量取直角坐标的量度误差, 以  $m_1$  表示, 目前量测仪器的精度可达  $0.05\text{mm}$  至  $0.1\text{mm}$ ; 其次是直角坐标计算公式的函数误差, 以  $m_2$  表示; 第三是要求逼近的精度, 用  $m_3$  表示。最后以均方误差形式表示的投影变换精度  $m$  以(10-17)式计算:

$$m = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \quad (10-17)$$

## § 10-5 计算机辅助制图情况下的投影变换

地图制图学中的一个中心问题是地图投影的有效应用, 众所周知, 尚无一种投影能提供无变形的地球椭球体的二维表象, 所以实质性的问题是如何在各种不同的场合选择一种最为适宜的投影方法。由于大量繁琐的计算给投影选择带来诸多不便, 因而计算机辅助制图为地图投影既提供适合的投影方法, 又能赋予各类投影变换以种种便捷之法, 省时又省力, 收到了意想不到的实际效果。

与常规的作业方法相比, 前阶段的工作是相似的, 我们将各种专业资料置放于基础地图上, 有时称轮廓地图, 然后再完成图形设计和绘制。计算自动化给地图投影的选择和变换带来了彻底的变革, 计算机程序的编制能快速而精确地建立投影的数学基础, 一个优良的程序应包含众多方法的投影演算, 允许对所有投影进行缩放和转换, 并便于创造新的投影。

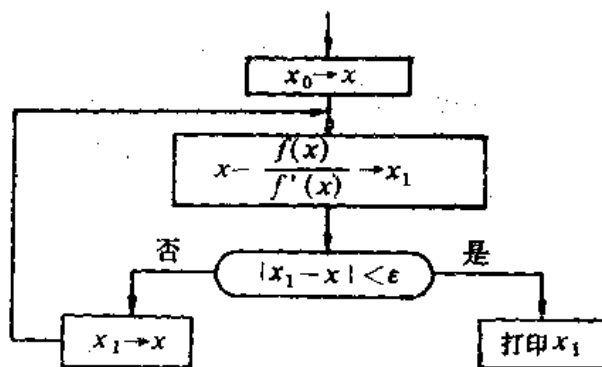
在制图自动化作业的过程中, 地图投影的变换大致可分为如下三个步骤:

从资料地图上读取点的坐标值  $\rightarrow$  在计算机中进行投影点的坐标变换  $\rightarrow$  在新编制的地图上依变换点的坐标进行转点, 这种方法首先需提供一种坐标变换的数学模式, 然后进行计算所需的程序设计和编制。下面我们来探讨适合于计算机自动绘制的有效投影变换方法。具体选择了三种投影即高斯投影、墨卡托投影和等角圆锥投影三者之间的各种解析变换法, 着重研究它们的反解变换法。

现介绍迭代反解变换法的基本理论依据, 我们可以从高等数学中得知, 采用牛顿迭代法求解超越方程  $f(x) = 0$  的公式是:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (10-18)$$

当  $f(x) = 0$  为单根时，牛顿法恒收敛，且收敛速度甚快，可用框图简单表示于下：



下举数例：

1. 由高斯投影变换为墨卡托和等角圆锥投影

已知高斯直角坐标，反求其地理坐标的公式为：

$$\left. \begin{aligned} B_f - B &= -\frac{y_0^2}{2N_f^2} (1 + \eta_f^2) t_f \left\{ 1 - \frac{y_0^2}{12N_f^2} (5 + 3t_f^2 + \eta_f^2) + \frac{y_0^4}{360N_f^4} (61 + 90t_f^2) \right\} \\ l &= \frac{y_0}{N_f \cos l} \left\{ 1 - \frac{y_0^2}{6N_f^2} (1 + 2t_f^2 + \eta_f^2) + \frac{y_0^4}{120N_f^4} (5 + 28t_f^2 + 6\eta_f^2) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10-19)$$

上式中

$B_f$  为底点纬度，即地球表面上某点至中央经线的垂线和中央经线相交的交点纬度；

$$B = B_f - (l_f - B) ;$$

$$\eta_f = e'^2 \cos^2 B_f ; \quad t_f = \operatorname{tg} B_f ; \quad N_f^2 = \frac{a^2}{(1 - e'^2 \sin^2 B_f)^2}$$

前已列出由赤道至纬度  $B$  的经线弧长，同样可以写出相当于底点纬度  $B_f$  的弧长值，现以  $x_0$  表示之，可参阅 (2-15) 及 (2-16) 式。

$$x_0 = a(1 - e'^2) \left( A' \frac{B_f}{\rho^0} - \frac{B_f'}{2} \sin 2B_f + \frac{C'}{4} \sin 4B_f - \frac{D'}{6} \sin 6B_f + \dots \right) \quad (10-20)$$

该式为一超越方程，为此可利用牛顿迭代法求解  $B_f$ ，具体公式是：

$$\left. \begin{aligned} B_f &= B_{f-1} - \frac{f(B_{f-1})}{f'(B_{f-1})} \\ B_0 &= \frac{x_0}{a(1 - e'^2) \cdot A'} \cdot \rho^0 \\ i &= 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \right\} \quad (10-21)$$

式中  $B_0$  为迭代的初始纬度值，或可更近似地取为： $B_0 = \frac{x_0}{a}$ ；

$$f(B) = a(1 - e'^2) \left( A' \frac{B}{\rho^0} - \frac{B'}{2} \sin 2B + \frac{C'}{4} \sin 4B - \dots \right) - x_0 ;$$

$$f'(B) = a(1 - e'^2) \left( \frac{A'}{\rho^0} - B' \cos 2B + C' \cos 4B - \dots \right) .$$

当原始投影（高斯投影）和新编投影（墨卡托投影或等角圆锥投影）之中央经线经度不

一致时, 其经差 $\Delta L$ 的计算公式应为:

$$l' = L_0 + l - L_0' \quad (10-22)$$

参阅图10-1, 式中 $L_0$ 为高斯投影中央经线的经度,  $L_0'$ 为新投影中央经线的经度。

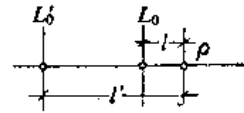


图10-1

利用迭代公式(10-21), 通过累次迭代计算最终求出底点纬度 $B_f$ 后, 回代至(10-19)式即可算出各点的纬度 $B$ , 再按(10-19)和(10-22)两式算出各点的经差 $l'$ 。只需将 $B$ 和 $l'$ 分别代入已知的墨卡托或等角圆锥的投影公式中去, 便可实现由高斯投影到这些投影的变换。

### 2. 由墨卡托投影变换到高斯投影

已知墨卡托投影的坐标公式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= r_0 \ln U \\ y &= r_0 l \end{aligned} \right\} \quad (10-23)$$

式中 $r_0 = N_0 \cos B_0$ , 为割纬线半径,  $B_0$ 为割纬线纬度, 从(10-23)式可得

$$\ln U = \frac{x}{r_0}, \quad l = \frac{y}{r_0}$$

$$\text{令 } f(B) = \ln U - \frac{x}{r_0}$$

$$\text{则 } f'(B) = \frac{d}{dB} (\ln U - \frac{x}{r_0}) = \frac{M}{r} = \frac{M}{N \cos B} = \frac{1}{\cos B (1 + \eta^2)}$$

参阅(10-21)式得出按牛顿迭代法求纬度 $B$ 的计算公式为:

$$\left. \begin{aligned} B_i &= B_{i-1} - (\ln U - \frac{x}{r_0}) \cos B_{i-1} (1 + \eta^2_{i-1}) \\ B_0 &= 2 \arctan \left( e^{\frac{x}{r_0}} \right) - \frac{\pi}{2} \\ &(i = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (10-24)$$

经差 $l'$ 的计算公式为

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{y}{r_0} \\ l' &= L_0 + l - L_0' \end{aligned} \right\} \quad (10-25)$$

利用公式(10-24)迭代求出各纬度 $B$ , 再由(10-25)式计算 $l'$ , 然后将它们代入高斯投影的坐标公式即可实现由墨卡托到高斯投影的变换。

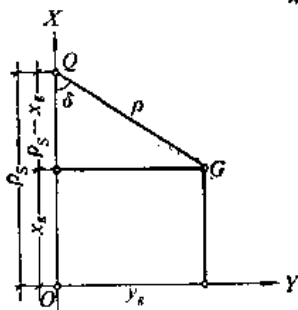


图10-2

### 3. 由等角圆锥投影变换到高斯投影

已知等角圆锥投影的坐标公式

$$\begin{aligned} x &= \rho_s - \rho \cos \delta; \\ y &= \rho \cos \delta; \\ \rho &= \frac{C}{U^k}; \quad \delta = a l \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{在图10-2中, } \rho &= \sqrt{(\rho_s - x_0)^2 + y_0^2} \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{y_0}{\rho_s - x_0} \end{aligned} \right\} \quad (10-26)$$

$$\left. \begin{aligned} \ln U &= \frac{1}{\alpha} (\ln C - \ln \rho) \\ l &= \frac{1}{\alpha} \cdot \operatorname{tg}^{-1} \delta \end{aligned} \right\} \quad (10-27)$$

$$\left. \begin{aligned} f(B) &= \ln U - \frac{1}{\alpha} (\ln C - \ln \rho) \\ f'(B) &= \frac{M}{r} = \frac{1}{\cos(1 + \eta^2)} \end{aligned} \right\} \quad (10-28)$$

继之，按牛顿迭代法求纬度  $B$  的计算公式为：

$$\left. \begin{aligned} B_i &= B_{i-1} - \left( \ln U_{i-1} - \frac{1}{\alpha} (\ln C - \ln \rho) \right) \cos B_{i-1} (1 + \eta_{i-1}^2) \\ B_0 &= 2 \operatorname{tg}^{-1} \left( e^{\frac{\ln C - \ln \rho}{\alpha}} \right) - \frac{\pi}{2} \\ &(i = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (10-29)$$

上式中的  $B_0$  由下法化算而得：

$$\begin{aligned} \ln U_0 &= \frac{1}{\alpha} (\ln C - \ln \rho), \quad U = e^{\frac{\ln C - \ln \rho}{\alpha}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (90^\circ + B_0) \\ \therefore B_0 &= 2 \operatorname{tg}^{-1} \left( e^{\frac{\ln C - \ln \rho}{\alpha}} \right) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

经差  $l'$  的计算公式为：

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{y_G}{p_S - x_G} \right) \\ l' &= L_0 + l - L_0' \end{aligned} \right\} \quad (10-30)$$

只要依公式(10-26)，(10-29)和(10-30)计算出  $B_i$  和  $l'$  后再代入高斯投影的坐标公式即可实现由等角圆锥投影到高斯投影之变换。

以上三例公式虽然演算较为复杂，但应用迭代法的特点是它适用于计算机编程和操作，所以还是有实用的价值。

## 思 考 题

1. 如何由等角圆锥投影变换为等角圆柱投影？
2. 如何由等角圆柱投影变换为等角方位投影？
3. 应用解析变换的迭代法变换地图投影的基本概念是什么？



# 第十一章 新投影的探求

## § 11-1 地图投影的条件

新投影公式的构思和推演均为数学家、地理学家及制图学家所关心，可能会设计出很多新的投影，但关键之处要善于从计算机投影程序中所提供的大量投影数据及资料里进行择取。一般在设计新投影时有三个问题要考虑，即新投影的概念、何时需要去建立新投影及其建立的方法。一种新的投影就其本身来说应包含某种新的数学概念，有一整套新的图解构成法，它是不可能只通过现有的投影公式来描述表达的。

对于一族系列投影通常均有一组通用公式，在实践中只需改变公式中的某些变量，便能产生不同的转换，只要转换后的投影性质及其变形特征均与该族投影中含有的本质有所不同，皆可认为它是一种新的投影设计。

一般来说推求地图投影的方法是先设定已知投影中的经纬线形状，引入投影条件，即变形的某一关系式和其它辅助条件后，便可求得对应于此的地图投影。谈到地图投影的条件，常规的方法是从变形椭圆着手，可探求许多新的投影条件，进一步获得一些新的投影，这样就易于挑选若干经过优化的地图投影。我们可以分别按各种投影所固有的性质来探求地图投影新的理论和方法，常用的有如下几种方法：

为了简化问题的讨论，将地球椭球体视作球体，球面上点位坐标用经纬度 $\lambda$ 和 $\varphi$ 表示，对应于投影平面上的点位坐标为 $x$ 和 $y$ 。已知一般的方程式为  $x = f_1(\varphi, \lambda)$ ， $y = f_2(\varphi, \lambda)$ ，由此经纬线方程便可写成：

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y, \lambda) &= 0 \\ F_2(x, y, \varphi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11-1)$$

只要投影方程为已知，参阅第三章的变形公式便可写出探求地图投影的一系列基本公式：

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} \\ n &= \frac{1}{R \cos \varphi} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2} \\ P &= \frac{1}{R^2 \cos \varphi} \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11-2)$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)} \quad (11-2)$$

现在根据变形椭圆的特性来探讨投影条件。由于球面为一不可展曲面。因此球面上的微分圆在平面上的投影，即变形椭圆必然会随点而异，这种变形表现为形状上的变形。形状变形的数学表达式可以  $\frac{a}{b} = K$  表示，在上面一些章节中曾介绍过形状变形有时也是纬度  $\varphi$  或天顶距  $Z$  的函数。前述各种函数的具体形式是多样的，所以其投影条件也是不同的。我们设此函数的形式为： $a = b$ ，属等角投影条件； $a = \frac{1}{b}$  属于等面积投影条件； $a = 1$  或  $b = 1$  则属等距离投影条件。除此之外，还可假设一些新的函数形式，以便论证新的投影条件。

为了保证使球面上的微分圆投影后其表象一般为椭圆，特殊情况下为圆，所以  $a$  或  $b$  值均不能为负值或零。此外变形椭圆随点位而变化，故  $a$  和  $b$  值不能同时设为常数。下面列举几种其含意各异的函数形式：

$$1. a = Kb \quad (K \text{ 为常数})$$

如将此条件引入最大角度变形的式子即  $\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\omega}{4}) \approx \sqrt{\frac{a}{b}}$ ，则角度最大变形为常数；当  $K = 1$  时，符合等角投影条件。此函数式可视为改变等角投影条件之普遍式。

$$2. a = b^K \quad (K \text{ 为常数})$$

式中之  $K$  值若分别取为 1、-1 或 0 时，则表明符合等角、等积和等距离投影条件，故此函数式可视为相应条件的普遍式。

$$3. ab = K \quad (K \text{ 为常数})$$

式中之  $K$  值若为 1 时，则表明符合等积投影条件，此函数式可视为改变等积投影条件的普遍式。

$$4. a = (b + \frac{1}{b} + 1)/3$$

此式可理解为等角、等积和等距离投影条件之平衡式，如遵循此式探求新的投影，便可使三种变形得到一定程度的补偿。

以此类推，还可设立其它符合某两类投影条件之平衡式。

## § 11-2 地图投影按内涵的变形特征分类

由第二章可知，导致或影响投影的变形，长度比的变化规律是起着决定性作用的。研究证明在某一类投影中，如果排除诸如方位投影中心点或者圆锥投影及圆柱投影中的标准纬线等特殊点线外，通过研究变形椭圆长、短半径的变化规律来划分投影的类型也是行之有效的。参考解析几何对二次曲线划分的方法，凡是无渐近方向的称为椭圆型，有一个渐近方向的叫抛物型，有两个渐近方向的则谓之双曲型。由此可见，等角投影是椭圆型投影中  $a = b > 1$

或  $a = b < 1$  情况中的一种特例；等面积投影是由双曲型投影中  $ab = 1$  或  $a = \frac{1}{b}$  中的一个特例；等距离投影则为抛物型投影，若投影是等距的，则沿某一主方向的长度保持不变，它符合  $a = 1$  或  $b = 1$  的等价条件。

图11-1表示各类投影所处的几何图形位置。因椭圆的两半轴皆为正数，故投影条件的图象必然在第一象限，可记为  $\{0, a, b\}$ 。过原点  $o$  的  $a = b$  的斜线表示等角投影，平行于两坐标轴  $a = 1$  或  $b = 1$  的两条直线表示等距离投影，过  $(1, 1)$  并以坐标轴为渐近线且同时满足  $ab = 1$  的曲线则表示等面积投影。

在图 11-1 中，画有斜线的部分表示属于双曲型投影的范围，其它部分属椭圆型投影范围。显而易见，等角、等积和等距投影在  $\{0, a, b\}$  域内分别用四种线条来表示它们所处的位置，那么，在此平面域内，我们可以设计各种形状，且处于不同位置的几何线条、用来表示各种任意投影，借以作为探求某一新投影的依据。

如果在平面域内绘出另两条用虚线表示的线条，前者代表一种  $a = Kb$  的投影，由于  $a$  和  $b$  之间存在着固定的比值，可命名为准相似投影，后者则代表一种以  $ab = K$  表示的投影，一般称它为倍积投影。

从上述几何图象中，可以看出椭圆型和双曲型对应于两大区域，进而细分出用直线  $a = b$  确定的等角投影和由双曲线  $ab = 1$  确定的等积投影。但是抛物型图象  $a = 1$  和  $b = 1$  显然是两大区域的分界线，所以就不能再细分和派生出属于它们的子项来。由此可见在平面域  $\{0, a, b\}$  上任作一条曲线即能代表一类投影，它们的特征是通过变形椭圆来反映该曲线所具有的函数关系。

按此原则，如在椭圆型外的非等角投影区域内作一曲线，它介于直线  $a = b$  和  $a = 1$  或  $b = 1$  之间，相应地其变形椭圆的特征也就介于等角和等距离之间。同理，如在双曲型外的非等积投影区域作一曲线，使它处于双曲线  $ab = 1$  和直线  $a = 1$  或  $b = 1$  之间，那么它所代表的投影及其变形椭圆的特征就介于等积和等距离投影之间。

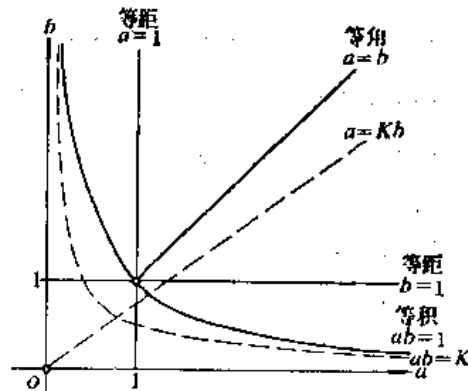


图11-1

### § 11-3 投影中的经纬线形状

欲探求具体的地图投影，还须了解投影中经纬线的一般形状，下面介绍几种常见的经纬线形状：

1. 投影中的经线是由一点向外辐射的直线，其夹角与对应的经差相等，纬线是以经线的交点为圆心的同心圆，由此定义可写出这种经纬线形状的一般方程式为：

$$x = \rho \cos \lambda, \quad y = \rho \sin \delta$$

式中纬线投影半径  $\rho$  为  $\varphi$  的函数，即  $\rho = f(\varphi)$ ，如将上式取微分后代入(11-2)式便得：

$$\left. \begin{aligned} M = -\frac{d\rho}{Rd\varphi}, \quad n = \frac{\rho}{R\cos\varphi}, \quad \rho = mn \\ \sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{或} \quad \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned} \right\} \quad (11-3)$$

此即正轴方位投影的方程式。

2. 投影中的纬线为同心圆弧，经线为交于纬线圆心的一束直线，其夹角与对应的经差成比例、由此可得：

$$x = \rho \cos a\lambda, \quad y = \rho \sin a\lambda$$

式中的 $a$ 为比例系数，同样将上式取微分后代入(11-2)式便有：

$$\left. \begin{aligned} m = -\frac{d\rho}{Rd\varphi}, \quad n = \frac{a\rho}{R\cos\varphi}, \quad P = mn \\ \sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{或} \quad \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned} \right\} \quad (11-4)$$

此即正轴圆锥投影的一般方程式。

3. 投影中的经线为一组平行直线，各直线间的距离相等且与对应经差成比例，纬线表象为垂直于经线的直线，由此可得：

$$x = f(\varphi), \quad y = a\lambda$$

同样将上式取微分后代入(11-2)式得：

$$\left. \begin{aligned} m = \frac{dx}{Rd\varphi}, \quad n = \frac{a}{R\cos\varphi}, \quad P = mn \\ \sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{或} \quad \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned} \right\} \quad (11-5)$$

此即正轴圆柱投影的一般方程。

我们还可以利用球面极坐标的两个参数即方位角 $\alpha$ 和天顶距 $Z$ 与地理坐标 $\varphi$ 和 $\lambda$ 的关系式进一步导出上述投影的斜轴和横轴的投影公式。

现根据投影的变形性质，正轴投影时的经纬线形状以及其它标志的特征等进行地图投影的投影分类，以列表的形式归纳于表11-1中，作为探求新投影时的对比和参考。

## § 11-4 新投影探求数例

根据上节所示的基本公式，还可探求一些新的投影。

### 1. $a = Kb$ 之正轴方位投影

正轴方位投影的经纬线方向与主方向一致，因此经纬线长度比相应于最大和最小长度比。其条件可写成： $m = Kn$  或  $n = Km$ ，因 $K$ 为常数，取任一式均可。参考(11-3)式，正轴方位投影的方程式为： $m = -\frac{d\rho}{Rd\varphi}$ ， $n = \frac{\rho}{R\cos\varphi}$

依投影变形性质 依正轴投影经纬线形状 依球面坐标系统极点的位置 依投影方程中参数的特征 其它 标志

分类	依投影变形性质	应满足条件	分类	投影特性	投影坐标方程式	依球面坐标系统极点的位置	依投影方程中参数的特征	其它	标志
等角投影	1. 投影后不产生角度变形, 即 $\omega=0$ ; 2. 投影后的图形与地球表面上的图形相似; 3. 变形椭圆长轴与短轴之比相等。	$a=b$ , $\theta=90^\circ$ , $m=n$ , $F=0$ $\sqrt{E} = \sqrt{G}$ $M = r$ $\frac{ax}{aL} = -M \frac{ay}{aB}$ $\frac{ay}{aL} = M \frac{ax}{aB}$	方位投影 圆柱投影	1. 纬线投影为同心圆; 经线投影为同心圆的半径; 2. 两相邻经线的夹角与两相邻经线的夹角相等; 3. 两相邻经线投影后的距离与相应的经线距离成正比。 1. 纬线投影为一组平行的直线; 2. 经线投影为一组与纬线相交的平行直线; 3. 经线投影后的距离与相应的经线距离成正比。	投影极坐标方程式: $\rho = f(B)$ $\delta = l$ 投影直角坐标方程式: $x = f(B)$ $y = Cl$ ( $C$ 为比例常数)	1. 极点位于地球两极上; 2. 长轴与短轴重合。	$x = f_1(\varphi, \lambda)$ $y = f_2(\varphi, \lambda)$ 或 $\rho = f_1(\varphi, \lambda)$ $\delta = f_2(\varphi, \lambda)$	定义 1. 任一点处皆无等长方向; 2. 无渐近方向。 特别: 等角投影	变形椭圆与单位圆的关系 
等面积投影	1. 投影后的面积与地球表面上相应的面积相等; 2. 投影后不产生面积变形, 即 $p=1$ ; 3. 变形椭圆面积相等但形状不同的椭圆。	$ab=1$ $a=1/b$ 或 $b=1/a$ $\theta=90^\circ$ $m=n=1$ $H=Mf$	圆锥投影 伪圆柱投影	1. 纬线投影为同心圆弧; 2. 经线投影为同心圆的半径; 3. 两相邻经线间的夹角与两相邻经线间的夹角成正比。 1. 纬线投影为同心圆; 2. 经线投影为同心圆的半径; 3. 两相邻经线间的夹角与两相邻经线间的夹角成正比。	投影极坐标方程式: $\rho = f(B)$ $\delta = \alpha l$ ( $\alpha$ 为比例常数) 投影直角坐标方程式: $x = f_1(B)$ $y = f_2(B, L)$	1. 极点位于赤道; 2. 长轴与短轴重合。	$x = f_1(\varphi, \lambda)$ $y = f_2(\lambda)$ 或 $\rho = f_1(\varphi, \lambda)$ $\delta = f_2(\lambda)$	定义 1. 任一点处有唯一的等长方向; 2. 有一个渐近方向。 特别: 等距离投影	同上 
任意投影	1. 既不等于等角, 也不等于等面积, 同时存在面积、角度和长度变形; 2. 变形椭圆在图上表现出大小不等, 形状皆异的椭圆; 3. 如指定沿某一主要方向上的长度比等于 1, 即 $q=1$ 或 $b=1$ , 则可称它为等距离投影	正轴条件下: $\theta=90^\circ$ $M=1$	伪圆柱投影 多面锥投影	1. 纬线投影为平行直线; 2. 经线投影为对称于中央经线的曲线。 1. 纬线投影为同心圆弧; 2. 经线投影为对称于中央经线的曲线。 1. 纬线投影为同心圆弧; 2. 经线投影为对称于中央经线的曲线。	投影极坐标方程式: $x = f_1(B)$ $y = f_2(B, L)$ 投影直角坐标方程式: $\rho = f_1(B)$ $\delta = f_2(B, L)$ 投影极坐标方程式: $\rho = f_1(B)$ $\delta = f_2(B, L)$	1. 极点位于除地球两极和赤道以外的任何地点上; 2. 长轴与短轴斜交。	$x = f_1(\varphi)$ $y = f_2(\lambda)$ 或 $\rho = f_1(\varphi)$ $\delta = f_2(\lambda)$	定义 1. 任一点处都有两个渐近方向; 2. 有渐近方向。 特别: 等面积投影	同上 

$$\therefore -\frac{d\rho}{Rd\varphi} = \frac{K\rho}{R\cos\varphi}, \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{Kd\varphi}{\cos\varphi}$$

取积分得:  $\rho = C \operatorname{ctg}^K\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$  (11-6)

式中  $C$  为常数, 可根据已知纬度为  $\varphi_c$  的纬线长度比  $n_c = 1$  的条件求得, 此时

$$n_c = \frac{\rho_c}{R\cos\varphi_c} = \frac{C \operatorname{ctg}^K\left(45^\circ + \frac{\varphi_c}{2}\right)}{R\cos\varphi_c} = 1$$

$$\therefore C = R\cos\varphi_c \operatorname{tg}^K\left(45^\circ + \frac{\varphi_c}{2}\right) \quad (11-7)$$

当  $\varphi_c = 90^\circ$  时, 常数  $C$  为无穷大, 所以不能使纬线长度比等于 1 的纬线纬度为  $90^\circ$ 。

由此可得  $a = Kb$  之正方位投影公式于下:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= R \operatorname{ctg}^K\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg}^K\left(45^\circ + \frac{\varphi_c}{2}\right) \cos\varphi_c \\ x &= \rho \cos\delta, \quad y = \rho \sin\delta \\ n &= \frac{\rho}{R\cos\varphi}; \quad m = Kn = \frac{K\rho}{R\cos\varphi} \\ p = mn &= Kn^2; \quad \sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{K-1}{K+1} \end{aligned} \right\} \quad (11-8)$$

从上列公式可以看出,  $K$  值将根据具体的变形数值而定, 如要求角度最大变形不超过  $20'$ , 则  $\sin 10' = \frac{K-1}{K+1}$ ; 故可取  $K = 1.0058$ 。也可根据某一纬线上面积比或长度比的特定要求来求得相应的  $K$  值。只要限定  $K$  为某些常数, 便可推求一些新的衍生投影。

## 2. $a = Kb$ 之正轴圆锥投影

由于正轴圆锥投影的经纬线是正交的, 所以极值长度比  $a$ 、 $b$  相等于经纬线长度比  $m$ 、 $n$ , 因而投影条件式可以写为:  $m = Kn$ 。

已知正轴圆锥投影的投影条件

$$m = -\frac{d\rho}{Rd\varphi}, \quad n = \frac{\rho}{R\cos\varphi}$$

将此条件式代入  $m = Kn$  得:

$$-\frac{d\rho}{Rd\varphi} = \frac{K\rho}{R\cos\varphi}$$

移项后  $\frac{d\rho}{\rho} = -K \operatorname{ctg}\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$

积分后得:  $\rho = C \operatorname{ctg}^{K+1}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$  (11-9)

由此可写出  $a = Kb$  之正轴圆锥投影公式:

$$\rho = C \operatorname{ctg}^{K+1}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\left. \begin{aligned}
 x &= \rho \cos \alpha \lambda, \quad y = \rho \sin \alpha \lambda \\
 n &= \frac{\alpha \rho}{R \cos \varphi}, \quad m = K n, \quad P = K n^2 \\
 \sin \frac{\omega}{2} &= \frac{K-1}{K+1}
 \end{aligned} \right\} \quad (11-10)$$

凡式中含有常数  $C$ 、 $K$  和  $\alpha$ ，均可采用前例以同法求之。如设已知纬度  $\varphi_0$  的长度比等于 1，且为最小的条件，则  $\alpha = \sin \varphi_0$ ，又由  $n_0 = 1$ ，参阅(11-3)式有：

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha \rho_0}{R \cos \varphi_0} &= \frac{\alpha C}{R \cos \varphi_0} \operatorname{ctg}^{\alpha K} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right) = 1 \\
 \therefore C &= \frac{1}{\alpha} R \cos \varphi_0 \operatorname{tg}^{\alpha K} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (11-11)
 \end{aligned}$$

$K$  为视不同要求选定的一些常数值，从而寻求所需的新的衍生投影。

### 3. $a = K b$ 之正轴圆柱投影

和上述两种投影的设定相类似，经纬线长度比是和最大最小长度比一致的，所以  $m = K n_0$

已知  $m = \frac{dx}{R d\varphi}$  和  $n = \frac{\alpha}{R \cos \varphi}$ ，顾及上式得

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{R d\varphi} &= K \frac{\alpha}{R \cos \varphi} \\
 dx &= K \alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi}
 \end{aligned}$$

积分后可得：

$$x = \frac{K \alpha}{\operatorname{Mod}} \lg \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + C \quad (11-12)$$

上式中  $C$  为积分常数，如  $Y$  轴取与赤道一致，当  $\varphi = 0^\circ$  时， $x = 0$ ， $\therefore C = 0$ 。故可推出正轴圆柱投影的主要公式：

$$\left. \begin{aligned}
 x &= \frac{K \alpha}{\operatorname{Mod}} \lg \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right), \quad y = \alpha \lambda \\
 n &= \frac{\alpha}{R \cos \varphi}, \quad m = K n, \quad P = K n^2 \\
 \sin \frac{\omega}{2} &= \frac{K-1}{K+1}
 \end{aligned} \right\} \quad (11-13)$$

上式中  $K$  和  $\alpha$  为常数， $K$  值可仿前法求之， $\alpha$  则同样根据已知纬度  $\varphi_0$  的纬线长度比  $n_0 = 1$  的条件求得。

$$n_0 = \frac{\alpha}{R \cos \varphi_0} = 1, \quad \therefore \alpha = R \cos \varphi_0$$

如令  $\varphi_0 = 0^\circ$ ，便得  $\alpha = R$ 。

### 4. $a = b^k$ 在正轴圆柱投影中的应用

投影中的经纬线长度比  $m, n$  和  $a, b$  一致，因此， $m = n^k$ 。

已知正轴圆柱投影的公式：

$$m = \frac{dx}{R d\varphi}, \quad n = \frac{\alpha}{R \cos \varphi}$$

$$\therefore \frac{dx}{Rd\varphi} = \left( \frac{\alpha}{R\cos\varphi} \right)^K \quad (11-14)$$

若在上式中分别以  $K = \pm 1$  或  $0$  代入，则不难求得等角、等面积和等距离之正轴圆柱投影。

至于探求新的投影，可分别令  $K = \pm 2$  或  $\pm \frac{1}{2}, \dots$  等。

现举一实例于下，如令  $K = -2$ ，则(11-14)式改写为：

$$\frac{dx}{Rd\varphi} = \left( \frac{\alpha}{R\cos\varphi} \right)^{-2} = \left( \frac{R}{\alpha} \right)^2 \cos^2\varphi$$

$$dx = \frac{R^3}{\alpha^2} \cos^2\varphi d\varphi$$

$$\text{积分后得} \quad x = \frac{R^3}{\alpha^2} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + C \right) \quad (11-15)$$

如取  $Y$  轴与赤道一致，当  $\varphi = 0^\circ$  时， $x = 0$ ， $C = 0$ 。又因，已知纬度  $\varphi_0$  的纬线长度比  $n_0 = 1$ ，所以

$$n_0 = \frac{\alpha}{R\cos\varphi_0} = 1$$

$$\therefore \alpha = R\cos\varphi_0$$

当  $\varphi_0 = 0^\circ$  时，则  $\alpha = R$ 。由此得出  $a = b^{-2}$  的正轴圆柱投影公式：

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R^3}{\alpha^2} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) ; y = \alpha\lambda \\ n &= \frac{\alpha}{R\cos\varphi} ; m = n^{-2} = \left( \frac{R}{\alpha} \cos\varphi \right)^2 ; P = mn = n^{-1} \\ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{4} \right) &= \sqrt{\frac{a}{b}} = n^{-\frac{2}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (11-16)$$

又令  $K = -\frac{1}{2}$ ，按  $a = b^K$  的投影条件可写成

$$\frac{dx}{Rd\varphi} = \left( \frac{\alpha}{R\cos\varphi} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{R\cos\varphi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore dx = \sqrt{\frac{R^3}{\alpha}} \cos^{\frac{1}{2}}\varphi d\varphi$$

如欲将上式积分，需将  $\cos^{\frac{1}{2}}\varphi$  展开成级数式：

$$\therefore \cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots$$

$$\therefore \cos^{\frac{1}{2}}\varphi = 1 - \frac{1}{4}\varphi^2 - \frac{1}{96}\varphi^4 - \dots$$

代入上式得：

$$dx = \sqrt{\frac{R^3}{\alpha}} \left( 1 - \frac{1}{4}\varphi^2 - \frac{1}{96}\varphi^4 - \dots \right) d\varphi$$

积分后得：

$$x = \sqrt{\frac{R^3}{\alpha}} \left( \varphi - \frac{1}{12}\varphi^3 - \frac{1}{480}\varphi^5 - \dots + C \right) \quad (11-17)$$



如使Y轴与赤道一致, 当 $\varphi = 0^\circ$ 时,  $x = 0$ 则积分常数 $C = 0$ 。因设 $n_\sigma = 1$ ,  $n_\sigma = \frac{\alpha}{R \cos \varphi}$ ,

$\therefore \alpha = R \cos \varphi_\sigma$ , 当 $\varphi = 0^\circ$ 时,  $\alpha = R$ , 由此便有 $a = b^{\frac{1}{2}}$ 之正轴圆柱投影的基本公式:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= R \cos \varphi_\sigma ; \quad \alpha = R(\varphi_\sigma = 0^\circ) ; \\ x &= \sqrt{\frac{R^3}{\alpha}} \left( \varphi - \frac{1}{12} \varphi^3 - \frac{1}{480} \varphi^5 - \dots \right) ; \quad y = \alpha \lambda ; \\ n &= \frac{\alpha}{R \cos \varphi} ; \quad m = n^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{R \cos \varphi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} , \quad P = n^{\frac{1}{2}} ; \\ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\omega}{4} \right) &= n^{-\frac{1}{4}} \end{aligned} \right\} \quad (11-18)$$

此例可得到介于等面积和等距离之间的投影。由于该投影为级数展开式, 故可按实际需要, 给 $\varphi$ 值以某一限制。

5.  $a = \frac{1}{3} \left( b + \frac{1}{b} + 1 \right)$ 之正轴圆柱投影

和前述之理由相同, 已知 $a = m$ ,  $b = n$ 和 $m = \frac{dx}{R d\varphi}$ ,  $n = \frac{\alpha}{R \cos \varphi}$ , 顾及本题所给条件:

$$\begin{aligned} 3m &= n + \frac{1}{n} + 1 \\ 3 \frac{dx}{R d\varphi} &= \frac{\alpha}{R \cos \varphi} + \frac{R \cos \varphi}{\alpha} + 1 \end{aligned}$$

移项后,  $dx = \frac{\alpha}{3} \sec \varphi d\varphi + \frac{R^2}{3\alpha} \cos \varphi d\varphi + \frac{R}{3} d\varphi$

两端取积分,

$$x = \frac{\alpha}{3 \operatorname{Mod}} \lg \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{R^2}{3\alpha} \sin \varphi + \frac{R\varphi}{3} + C$$

如令 $\varphi_0 = 0^\circ$ ,  $x = 0$ , 则积分常数 $C = 0$ , 又令 $n_\sigma = 1$ ,  $\alpha = R \cos \varphi_\sigma$ , 所以 $\alpha = R$ 。故等角、等面积和等距离三者平衡之正轴圆柱投影公式为:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= R \cos \varphi_\sigma \text{ 或 } \alpha = R \\ x &= \frac{\alpha}{3 \operatorname{Mod}} \lg \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{R^2}{3\alpha} \sin \varphi + \frac{R\varphi}{3}, \quad y = \alpha \lambda \\ n &= \frac{\alpha}{R \cos \varphi}, \quad m = \frac{n^2 + n + 1}{3n}, \quad P = \frac{1}{3}(n^2 + n + 1) \\ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\omega}{4} \right) &= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{3} \end{aligned} \right\} \quad (11-19)$$

此外, 我们还可以运用偏微分方程来限定在一种新投影或一组新投影上保持一定的投影性质, 然后从求解这个方程的过程中根据所规定的附加条件导出新的投影, 这些附加条件主要是为了可以在方程内确定常数之用。

## 思考题

1. 如何按变形椭圆的变化规律来划分投影的类型? 用图表示之。
2. 试分析  $a = Kb$ 、 $a = b^K$ , 和  $ab = K$  ( $K$ 为常数)三种函数式之不同含义。
3. 试根据投影中的经纬线形状探求具体的地图投影。
4. 导出  $a = \frac{1}{3}(b + \frac{1}{b} + 1)$  平衡式之正轴方位投影的基本公式。
5. 导出  $a = b^K$  在正轴圆锥投影中的应用公式。

## 第十二章 地图投影的判别和选择

### § 12-1 地图投影的判别

了解地图投影的分类及其变形特征、大小和分布规律,是研究地图投影和应用地图的一个重要环节。当地图上缺乏数学基础的说明时,读图者只能根据地图上的经纬线形状,应用已掌握的地图投影知识,参照各种投影的标准样图进行分析、研究和比较,必要时还需作一些图上的参数量算才能作出对投影类型、变形性质和变形分布的确切判断。如需完整地判别一种投影,一般可从以下几个方面来考虑:

1. 首先确定投影系统,如属方位、圆柱或圆锥;或为多圆锥、伪方位投影等;
2. 其次了解投影的变形性质,如属等角、等面积或任意、等距离投影等;
3. 还需确定投影形式:诸如投影常数、标准纬线和无变形点的地理位置,投影面和地球表面相切或相割的位置以及投影中心的经纬度等。

### § 12-2 确定地图投影系统

假如某一地图投影的经纬线形状已被认定,其投影系统便不难判别。我们已了解到经纬线形状不外乎是直线、二次曲线、正弦曲线及其它曲线等,现分别简述于下:

1. 经纬线形状为直线时,还应区分成等距平行直线、非等距平行直线或交于一点的直线束;

2. 经纬线形状为二次曲线时,应区分出是圆、椭圆、双曲线或抛物线。如肯定无疑是圆,还要进一步识别是属于同心圆还是同轴圆。我们可以采用几何的或图解的方法来识别各类曲线。

3. 正弦曲线也是通过图解的方法予以判别的;其它在伪投影中的各类曲线一般较难识别,需作特殊方法的验证。

表12-1归纳以前各章所学过的投影。按其经纬线投影形状来区分,供投影判别时参考。

表 12-1

经纬线形状	形状	直线			二次曲线				正弦曲线	其它曲线
		等距平行线	平行线	直线束	圆	椭圆	双曲线	抛物线		
直线	等距平行线	方格投影							桑逊投影	
	平行线	圆柱投影		梯形投影		摩尔威德投影 爱凯特投影 横轴正射投影			爱凯特投影	
二次曲线	同心圆			圆锥投影 方位投影						伪圆柱投影
	非同心的圆(同轴圆)				球面投影					伪圆锥投影 伪方位投影
	椭圆					斜轴正射投影				(多圆锥投影)
	双曲线		横轴球心投影	斜轴球心投影				斜轴		
	抛物线							透视外心投影		
其它曲线										各类横轴 斜轴投影

### § 12-3 确定投影变形性质

投影系统一旦确定后, 尚需进一步判别其变形的性质、为了取得较好的判别效果, 最好利用变形一般较大的图幅边缘部分和变形较小的图幅中间部分进行比较和对照, 易于发现其间存在的方向、长度和面积上的差异。我们可按下面几条规则通过细心的直观观察来判别变形的性质。

1. 经纬线夹角不呈直角时, 首先肯定不可能是等角投影。此外, 在同纬度带内, 由相同经差构成的球面梯形的面积相差悬殊时肯定不会是等面积投影。

2. 在某一直经线上, 如发现相同纬差的纬线所截取各经线段长度不同时, 不可能是沿经线方向的等距离投影; 同样也可判断不属沿纬线方向的等距离投影。

3. 如初步判定某投影属于伪投影的一类, 其纬线投影为平行直线, 经线投影则为各种曲线。由于这类投影的经纬线均不能处处呈正交, 所以肯定不属等角投影。

还有其它许多判别变形性质的方法, 读者可以推演思考。但是如果通过上述手段还不能作出明确判断时, 可借助一些具体的量算数据进行深入的分析, 以便进一步证实投影变形的性质, 下举数例以说明之。

#### 1. 等角投影的判定

过经纬线交点分别作经线和纬线上的切线, 两切线间的夹角若为直角时, 可进一步量测过交点  $P$  并沿经线或经纬线上的一段长度  $\Delta S'$ , 然后查取相应的实地长度并按主比例尺缩小, 以便算出交点上的长度比:  $u = \frac{\Delta S'}{\Delta S}$ 。如在同一幅图上位于不同位置的若干点处均存在  $m = n$  的结果, 便可认为是等角投影。此外, 如出现  $m \cdot n = 1$  或为常数, 则为等面积投影。又若  $m = 1$  或为常数, 可认为是等距离投影。由于量算中必然会存在各种误差, 故此法仅为近似判别法, 一般只供分析时参考用。

## 2. 等面积投影的判定

可分别量算一些属同纬度带内的相同经差, 但不同位置的球面梯形投影后的面积, 如面积大小趋近相等, 有可能判定为等面积投影。再进一步利用《制图用表》查取相应的实地面积, 并按主比例尺缩小后与之比较, 如面积比恒为 1 或为常数, 则可肯定是等面积投影。

3. 当投影后的经纬线不呈正交时, 也可分别量测其夹角  $\theta'$  和长度比  $m$ 、 $n$ , 再按已知公式计算其极值长度比, 继之按投影条件可判断出是否属于等面积或等距离投影。

4. 对于方位投影, 可观察经纬线网格的变化情况以判别其变形性质。

在正轴方位投影时观察纬线的间隔; 横轴时观察中央经线上的纬线间隔和赤道上的经线间隔; 在斜轴时可观察中央经线上的纬线间隔。

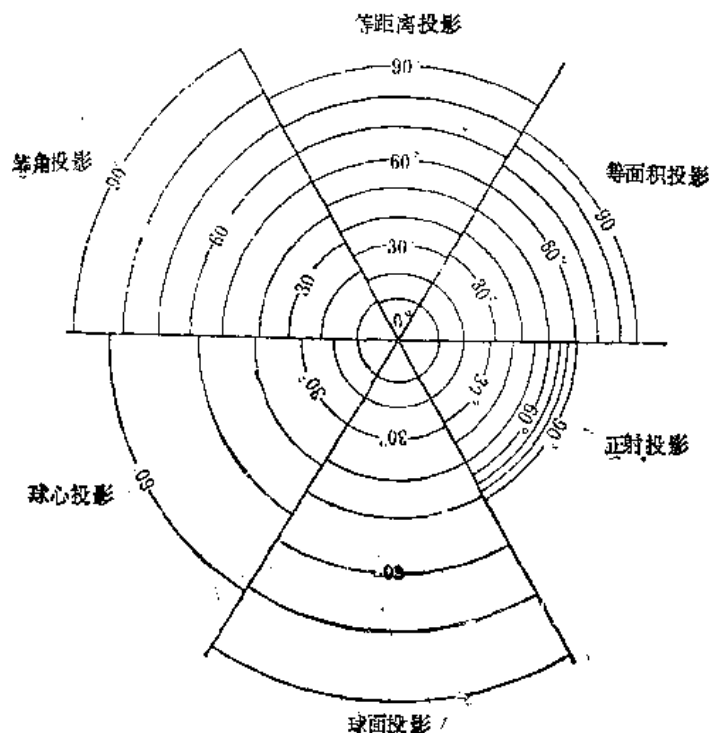


图12-1

根据各类方位投影的变形规律可知, 当经、纬差的间隔相同时, 自投影中心沿大圆上各交点的间隔均相等者为等角或等距离投影; 间隔逐渐缩小者可能是等面积投影; 显著缩小者可能是正射投影。逐渐递增者可能为球面投影; 显著增大者可能是球心投影等。如需进一步证实, 可量取相应的半径值 (纬圈投影半径  $\rho$ ) 代入各类方位投影的公式中, 再对其计算结果作出更确切的分析和判断。方位投影的变形规律可参看图12-1。

5. 对于正轴圆柱投影, 也可观察其纬线间隔, 由赤道至两极间的间隔明显缩小的可能是等面积投影; 显著增大者可能是等角投影; 间隔恒等者则为等距离投影, 可参阅图12-2。

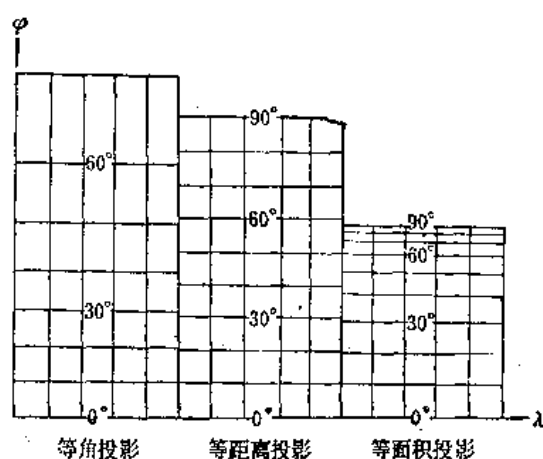


图12-2

6. 大多数横轴和斜轴投影因其经纬线形状比较复杂、凭外形观察难以判断投影的变形性质, 只能通过面积比和长度比的量算才有可能进行有效的判别。

## § 12-4 确定投影形式

投影形式包含诸如投影常数、标准纬圈或等高圈、投影中心(或新极位置)、无变形点或无变形线等, 这些都是某一具体投影建立时所需的一些基本技术数据。针对某一投影而言, 确定投影形式是上述两项工作即确定投影系统和变形性质的继续和补充, 也是进一步验证初步结论是否正确的必要步骤。现简述于下:

1. 正轴投影的形式较为简单, 只需通过一定的量测手段就可取得较佳的效果。如圆锥投影, 观察纬线间隔的变化就能初步发现两条标准纬线的位置, 即可确定为双标准纬线圆锥投影。

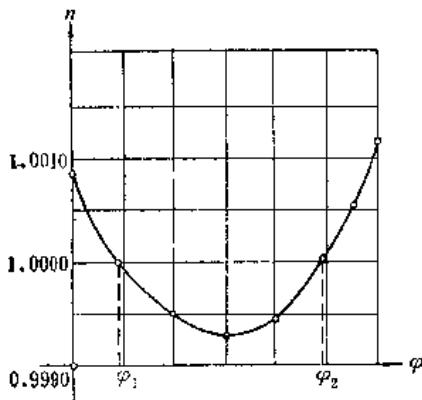


图12-3

此外, 凡是等角性质的投影均具有两条标准纬线向内的纬线间隔缩小的特点, 反之, 则属等面积性质。我们只要量算纬线间隔发生相反变化的区间内各纬线的长度比  $n$ , 取横坐标为  $\varphi$  值, 纵坐标为  $n$  值, 便可绘出不同纬线上长度变化的变化曲线, 最终可图解出精确求定标准纬线的纬度, 见图12-3。正轴圆柱投影也可利用上述方法确定标准纬线的纬度, 但此时变形变化曲线是以赤道为对称轴的。

2. 方位投影的投影中心肯定在中央直径线上, 只要量算中央经线上各点的长度比  $m$ , 绘出变形变化曲线后, 可以发现它的变化应该对称于投影中心, 由此, 即可求出投影中心和标准等高圈的位置。

综上所述, 投影判别的过程可以归纳为: 了解并掌握各类投影的特点——参考投影分类表——参阅各类投影的标准样图——图上量算(长度比)——绘制变形变化草图——分析研究——判别投影。

一般在地图或地图集中均刊有投影说明, 有时还附有某些有关投影的技术指标, 诸如标准纬线或等高圈的位置, 投影中心的地理坐标和投影常数等, 对详细了解地图数学基础均有参考价值。

在投影判别中, 地图比例尺愈大, 判断愈困难, 反之则易。那是由于较大比例尺的图幅范围较小, 变形也小, 加上制图、印刷及图纸伸缩等影响, 还有图上量测精度的影响等等, 往往不易获得真实的投影变形值, 从而降低了投影判别的可靠程度。反之在小比例尺地图中, 图幅内面积与形状的变异较为明显, 这样就易于在判别时发现矛盾之所在, 故能较为迅速地确定投影的变形特征。

现举一确定投影型式的实例说明之。制图区域: 南美洲; 制图比例尺: 1:6000万。见图12-4。具体分析判断的步骤如下:

1. 先初步观察该图投影的经纬线形状, 可以发现其经线投影表象均为曲线, 其中只有

一条在 $\lambda = -60^\circ$ 处的中央经线表示为直线，各纬线的投影表象均为圆弧，通过逐段量取其相邻纬距大致相等。由此可认为纬线为一组同心圆圆弧，其圆心必然在中央直经线上。根据上述各种方法的推断，有可能判为伪方位投影或为伪圆锥投影。但因为伪方位投影并不存在各经线上等分纬线的条件，故可将它摒弃，这样初判为伪圆锥投影类就有把握了。

2. 如为伪圆锥投影，可知彭纳投影的投影条件是： $P = 1, n = 1$ 。我们可以通过图上和实地面积的量算以资比较来验证是否符合此条件。以图12-4为例，现对抽样的三块图上面积 $A$ 、 $B$ 和 $C$ 进行量算，分别得出其图上面积依次为：3.38、3.24和3.07 $\text{cm}^2$ ，与其相应的实地面积经比例尺换算后为：3.40、3.30和3.10 $\text{cm}^2$ ，故可算出 $P \approx 1$ 。又对三段取样的长度 $a$ 、 $b$ 和 $c$ 量得1.86、1.82和1.75 $\text{cm}$ ，经实际计算其相应的实地距离经比例尺化算后为1.86、1.83和1.74 $\text{cm}$ ，按公式计算出了沿纬线上的长度比 $n$ 也近似等于1，这样可进一步推断为彭纳投影。

3. 已知彭纳投影内应有一条纬线和所有的经线相垂直，所以只有这条纬线能满足 $m = n = 1$ 的条件，经观察与各经线交角最接近于直角的是在南纬 $20^\circ$ 处。通过进一步的量算，得知在1、2和3点处的沿经线长度比 $m$ 也接近1，由于它满足了 $m = n = 1$ 的条件，从而证实了南纬 $20^\circ$ 处的纬线与各经线均呈正交。其次，中央经线上各纬线所截取的线段相等，故 $m_c = 1$ ，这样就完全符合彭纳投影的特点。通过如上反复分析验证，始可确认为彭纳投影，其标准纬线位于南纬 $20^\circ$ 处。

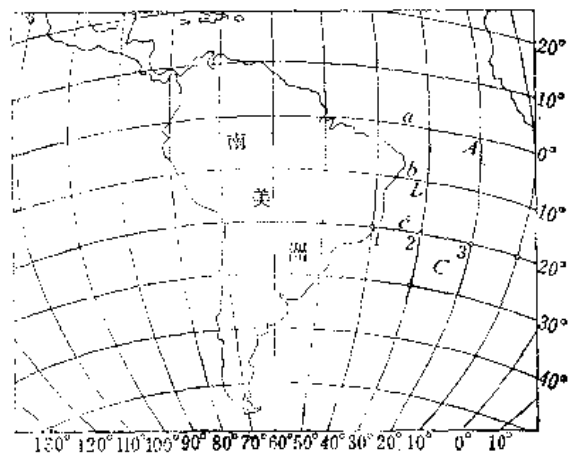


图12-4

## § 12-5 地图投影的选择

从投影变形的多样性可以了解，对于一定内容和用途的地图，应该选用符合地图使用目的的投影。善于选择适合的地图投影有助于集中和扩大一张地图的地理信息，反之，投影选择不当，无疑会有损于地图的实际使用效果。要为各种制图目的选择适宜的投影，需熟知如何开发新的投影以满足某些特殊制图的要求。应该了解地图投影的性质和经纬线的形状不仅与地图编制的过程有关，并且也和地图的使用有关，所以地图投影的选择是一个重要的课题。为了选择投影方式，客观上需要知道由各种不同投影产生的变形类型、变形值和变形分布，归纳之即称为变形图形。投影的选择是一项创造性的工作，没有既定的公式、方案或规范可循，由于投影的种类日益增多，如要恰当地选择投影就必须顾及如下一些因素：

### 1. 地图的用途和性质

各种地图的用途殊异，不同的用途对地图投影有不同的要求（主要是对投影变形性质的要求）。例如，经济地图、行政区划图，人口密度图、地质图、地貌图和水文图等一般均采用等积投影来编制。这类图上各编图要素的面积和实地相比均应有正确的比值。采用此种投影的角度变形较为显著，长度变形也可能较大，但这些对上述地图来说并非是主要的。

航海图、航空图或军事用地图一般多采用等角投影，如航海图常采用墨卡托投影，因为在该投影中等角航线的表象为直线，能较正确地表示海洋的流向和航向。另一特点是在小区域内，点与点之间的关系无角度变形，从而保持图形与实地相似，对领航工作较方便。

对于普通地图，如教学用图则要求各种变形都不太大，宜采用任意性质的投影，因为它能明确地显示出地理的概念。如果有些地图对于各种变形均具有同等重要的意义，那么采用等距离投影是比较合适的，因为这类地图既要对比各种物体的面积，又要研究诸如陆地的境界线、海岸线、河流或道路的长度，甚至还要注意各地貌要素的形态和方向等。

总之，选择地图投影时，首先应注意所编地图的内容和目的，还要考虑地图的用途，接着按投影变形的性质来选择哪一类投影是较佳的，所以必须联系实际，方能得到较好的结论。

## 2. 制图区域的形状和地理位置

制图区域的形状和地理位置均对地图投影的选择产生影响。主要应使等变形线基本上能与制图区域的概略轮廓相套合，以便减少图上各部分的变形。俄国的制图学者契比雪夫(Чебычев)曾经指出：“能和地图上的制图区域边界保持同一长度比的投影，即为该区域最适宜的投影。”由此可见，圆形区域宜采用方位投影，在极区采用的是正轴方位投影，中纬度地区宜选用斜轴方位投影，如欧亚大陆或北美洲等地图。赤道地区则采用横轴方位投影，如东西半球或大洋洲等地图。又如在中等纬度东西延伸的地区，可采用正轴圆锥投影，因为该投影的长度比是随纬度而变化的，和经差的增加无关，即便在东西方向任意延伸，变形也不致增大。在低纬度和赤道地区，适用正轴圆柱投影，因为这种投影的等变形线是同纬线一致的。但是对于沿经线伸展的地区，宜采用横轴圆柱投影或正轴多圆锥投影，如美国东、西海岸的地图宜采用该投影。针对任意沿斜方向延伸的地区，常采用斜轴圆柱投影或斜轴圆锥投影，如斯堪的那维亚半岛，苏联远东地区等。对于三大洋来说，为使等变形线与轮廓一致，可选用伪圆柱投影或分瓣投影。

## 3. 制图区域的大小

制图区域的大小对投影选择产生影响，因为制图范围的增大会使投影选择更为复杂，需要选择的投影选择种类就更多，且须联系各方面的要求始能作出决定。对于区域面积不大的大比例尺地图就毋需更多地顾及制图区域的形状和地理位置等因素，因为在小区域内，各种特定的要求很容易同时得到满足，更不必过多地考虑地图的用途和所含内容等方面的要求。如前所述按六度分带的等角横切圆柱投影在许多国家均可使用，依梯形分幅为原则的多面体投影也广泛地应用于各地。一个国家的基本比例尺地图一经选用某投影，通常是不会改变的，所以地图投影的选择问题，实际上主要是编制大地区小比例尺地图的问题。此时如要选择投影，除了需要根据地区的形状位置，地图的内容、使用方法以及对变形分布的要求一起加以考虑外，有时还要顾及经纬线网的形状，图幅配置等因素。为此，不可能选用少数几种投影满足大区域地图的各种要求，那就需要有多种不同的投影类型以供各种地图选用。从实际经验出发，区域面积的大小和选择与某类投影的长度变形有如下关系：

区域面积小于  $600 \times 10^6 \text{ km}^2$  时，选择某类投影的长度变形应控制在  $\pm 0.5\%$  左右；

区域面积介于  $3.5-4.0$  千平方公里时，选择某类投影的长度变形在  $\pm 2-3\%$  之内均可；

区域面积大于  $4 \times 10^4 \text{ km}^2$  的范围时，选择某类投影的长度变形可超过  $\pm 3\%$ 。

所以对前面两种情况来说，选择投影时一般只考虑它的几何因素，如地理位置和轮廓形状等，至于地图用途对投影变形的要求是毋需顾及的。



#### 4. 其他

地图配置对投影选择产生影响,如有些地图除要编绘制图区域本身的内容外,还要考虑其邻近地区具有一定价值的地方,以编制东北地区图件为例,有时需将北京、天津、平壤甚至海参崴及其它有特殊交通意义的地点编绘在内,这将影响制图区域的范围,由于地图的重新配置,投影选择的问题也将另行考虑了。

在经纬线形状方面,有些地图均对它有特殊的要求,比如在教学用图中,世界地图或半球地图的经纬线形状要求与赤道相对称;北极投影成点状。时区图、卫星轨迹图则要求经线成平行直线;普通地图的经纬线网最好具有球形感,如此等等都可以限制投影选择于某些投影的范围之内。

如采用图解法进行投影选择时,可以首先指定所需的条件,例如一幅等面积投影的世界地图,图上的经纬线设计时必须为平行或近似平行直线,据此条件,可规定中央直线上纬线的间距,然后再解决其余经线的形式和间距。反之,也可先行选择经线的形状,然后再解出纬线间距,即可产生一系列比较适宜的投影方案。

此外,在选择地图投影时,应使所选择的投影尽可能与编图资料所采用的经纬线投影形状相似,以便不使工作复杂化。总之投影选择是一项难度较大并且内容涉及较广的科学研究工作,只有精通地图投影的原理和熟悉地图使用的各方面实际知识和技能,始能胜任这项工作。

### § 12-6 中外地图集投影选择的简介

首先根据地图投影的基本原理着重研讨我国分省地图的最佳投影方式。如从制图区域的形状和位置来考虑,我国绝大部分省、区处于中纬度地带,故最适宜采用圆锥投影。至于个别省份(如广东省含南海诸岛及南中国海域),因接近赤道地区,可采用正轴圆柱投影;对于经差较小、南北延伸的地区也可选用高斯-克吕格投影。

如从地图的用途,比例尺和制图区域的大小等方面来考虑,最大的新疆维吾尔自治区其纬差为 $14^{\circ}$ 左右、经差约 $23^{\circ}$ ,面积接近160余万平方公里,宜采用圆锥投影。经过实际计算证明,无论采用何种性质的圆锥投影,其变形值均不会大于 $\pm 5\%$ ,因此可满足地图出版的要求。至于我国其他省份因所含面积较小,故其变形也甚微小。

归纳之,我国各省、区宜选用的投影主要有:

1. 正轴等角割圆锥投影(也可采用等面积和等距离圆锥投影)。由于割圆锥投影有两条标准纬线,故其变形要比分带投影的变化值小些;
2. 正轴等角割圆柱投影(墨卡托投影);
3. 宽带高斯-克吕格投影(经差 $\Delta\lambda$ 最大可达 $9^{\circ}$ )。中央经线可根据各省、区的地理位置而选定,其中经差在 $6^{\circ}$ 以内的省区有:湖南、江西、福建和浙江等;经差在 $6^{\circ}$ - $8^{\circ}$ 以内的省、区有湖北、广西和河南等;在 $8^{\circ}$ - $10^{\circ}$ 以内的有云南、广东和吉林等。
4. 经差超过 $10^{\circ}$ 的省、区(如新疆、黑龙江、青海、甘肃和西藏等省、区)可采用各种类型的圆锥投影,其标准纬线均可单独设计。

现将我国解放前、后编制的较有影响的地图集简介于下:

### 1. 申报馆中国地图集(1934)

地图集内总图比例尺为1:1500万和1:2300万,其它分图大部分为1:200万,其中蒙、(含蒙古人民共和国)新、藏为1:500万。图集内全国总图采用亚尔勃斯割圆锥等面积投影,它以北纬24°和48°为标准纬线,其它分区多采用多圆锥投影。

### 2. 中华人民共和国地图集(1957)

全国总图的比例尺主要为1:1800万,大区图主要为1:600万,分省图则为1:300万,边区省份图为1:400万。其中全国总图主要采用亚尔勃斯割圆锥投影,大区和分省图大部分采用兰勃脱割圆锥等角投影,其标准纬线均为北纬25°和45°。

### 3. 国家大地图集(1959)

在其中的普通地图卷中,各分省、区图幅采用的是分带的等角圆锥投影,其具体方案如下:

第一带:纬度4°—28°,采用标准纬线为 $\varphi_1 = 8^\circ, \varphi_2 = 28^\circ$ 的双标准纬线等角圆锥投影;

第二带:纬度18°—38°,采用边纬和中纬变形绝对值相等的等角圆锥投影;

第三带:纬度32°—54°,采用的投影与第二带相同。

1981年地图出版社出版的“中华人民共和国地图集”的分省区图幅,所采用的投影与国家大地图集普通地图卷的分省区图幅相同。

### 4. 中华人民共和国分省新图(1969)

全国总图的比例尺为1:1200万,采用了斜轴等面积方位投影;各省区普通地图比例尺以1:150万为主;北京、天津和上海三个直辖市的比例尺是1:75万,采用国际百万分之一改良多圆锥投影,其它省区的比例尺分别有:1:200万、1:250万和1:400万等,均采用边纬与中央纬线变形绝对值相等的等角圆锥投影。

### 5. 江苏省地图集

我国各省区的地图集选此为例。比例尺以1:170万为主,仅气候图为1:400万,1:680万,分县地形一览图均为1:25万。图集内所有各图一律采用高斯-克吕格投影。

国外地图集编纂时的投影选择主要也是根据地图比例尺,制图区域的轮廓范围、大小及其地理位置,还有地图的实际应用价值等。下面简单介绍苏、美、英等国的编图情况。

#### 1. 苏联《世界地图集》(Атлас Мира)1954年第一版

地图比例尺为1:25万到1:5000万,绝大部分为1:50万到1:750万,其中各区域地区以1:250万和1:500万占多数。本图集内大部分地图是比例尺大于1:2000万的各区域的普通地图,都采用了等角圆锥投影,以便于互相比较。等角投影正适合编制这种比例尺的普通地图,使图幅范围内边纬与具有最小变形的纬线(中纬度)上的变形绝对值相等。

#### 2. 美国国家地图集(The National Atlas of United States of America)1970年出版

图集的第一幅地图采用了斜轴半球球面投影,具有立体感。表示在这半球之内,包括本土、阿拉斯加和夏威夷的美国五十个洲。图集内的一般参考图和专题地图的投影都采用亚尔勃斯双标准纬线等面积投影。美国本土的标准纬线为北纬 $29\frac{1}{2}^\circ$ 和 $45\frac{1}{2}^\circ$ ;阿拉斯加图幅的标准纬线为北纬55°和65°;夏威夷群岛为北纬8°和15°。

#### 3. 美国《古特世界地图集》(Goode's World Atlas)

1979年出至第十五版,是一本较好的教学用地图集。图集内世界地图采用古特分瓣投影

(等面积投影), 在海区分瓣后, 可使各大陆形状保持完整, 但在高纬度地区的形状不甚理想。图集内其它地图的投影如世界海陆交通图采用罗宾逊投影, 在面积及形状方面其变形都较小, 不用分瓣, 但边缘部分的变形仍较大。极区采用等距离方位投影, 各大陆用斜轴等面积方位投影; 各分区图采用等角圆锥投影; 北冰洋外各大洋图选用改良圆柱投影。

4. 英国《泰晤士世界地图集》(The Times Atlas of the World) 1895年初版, 1980年修订至第六版。

这是一部大型的世界普通地图集。本图集内前面部分的世界地图采用了如下几种投影: 伪圆柱投影(以南北纬 $45^{\circ}$ 纬线为标准纬线); 平极椭圆形任意投影。世界航空图采用椭圆形的斜轴等面积投影。

5. 《日本国势地图集》(日本国势图帐) 1977年初版

图集基本比例尺为1:250万和1:400万, 采用斜轴等角割圆锥投影, 主要为了保持四大岛的图形完整。在专题地图之后的地方行政区划图(冲绳、九州、中国、四国、近畿及北海道、小笠原群岛等)的1:100万比例尺的普通地图均采用等角割圆锥投影。

6. 《捷克斯洛伐克共和国地图集》(Atlas Republiky Ceskoslovenski) 1935年出版

捷克是一个位于中纬度的东西狭长的国家, 采用了以北纬 $49^{\circ}$ 作为标准纬线的单圆锥投影, 效果颇好。

## 思考题

1. 根据已学习的投影知识, 你知道有几种地图投影的判别方法?
2. 试述各类方位投影的变形规律。
3. 如何区别等角、等面积和等距离圆柱投影?
4. 在进行地图投影的选择时, 应遵循那些原则?

## 第十三章 投影计算自动化

### § 13-1 投影计算改革的必要性

在所编《地图投影》的各章中,已分别按它们的类型、方式和特点等编排了常规的和新设计的投影不下四十余种,除了从理论上对其方法进行系统的学习、研究外,还附有许多实际运算的例子供读者参考,此乃理论与实践相结合的一个重要环节。

地图投影的计算历来被认为是一项较为复杂而繁琐的工作,读者在参与运算几个实例后可能也有所体会。在地质制图中,一件中型或大型的投影作品可供选择的投影类型不下十种,一般需经成百上千次的运算,其中每一个交点的直角坐标及变形值均需经过多次运算才能取得,何况每一算题的投影点数少则几十多则数百个。按常规的计算方法,需经查表(如苏联中央测绘科学研究所编制的《制图用表》及我国出版的《高斯投影图廓坐标表》、《地图投影计算用表》等)、内插计算、计算表格填写及组装计算等项步骤才能完成一个点的运算。此法沿用至今已有数十载,尚未作较大的革新变动,投影计算是一项既十分繁琐又要求精度很高的工作,例如运算中的有效数字一般均取十位左右,手工操作的每一步骤均有出错的可能,为此,专门设立的计算检查工作是必不可少的组成部分,不然稍一疏忽,极易造成差错,影响工作的进度。这就要求投影计算工作者除了必须具备熟练的运算技巧外,尚需有耐心细致、认真负责的工作作风。综观几十年来已形成的一套查表、内插、填表、运算,检查等计算步骤,以及一种投影一种表格,其运算成果尚需装订成册,致使投影计算工作耗去大量宝贵的时间。

统观整个运算过程其大量工作均属简单重复,即运用相同的公式、采用不同的数据求取一系列交点的坐标及变形值,投影数据的特点是遵循一定的规律而变化的,这正是利用计算机解题的最有利条件。目前人类已进入电子时代,过去常规的运算方法已到了彻底改革的时候了,历年来在这方面作出努力和成绩的也不乏其人,但多为一类投影、一个程序。我们在实践中经反复研究、编制和修改,现已编写出本书涉及的各类投影程序三大组,即方位、圆柱(含高斯投影)和圆锥投影各一组,每组程序可解决一个大类的投影计算问题,使用者只需了解各大类中每一个具体投影类别的代号,计算机就会自动找到该类的投影公式,并根据输入的已知投影区域范围、切点(线)或割线经纬度、经纬度步距、比例尺等数据进行自动运算。最终打印输出全部成果。这样就淘汰了所有的制图用表,因为计算中的常用数值除有 $a$ 、 $b$ 、 $e$ 、 $\rho$ 、 $\text{Mod}$ 外尚有 $M$ 、 $N$ 、 $R$ 、 $S_M$ 、 $S_N$ 、 $r$ 、 $T(F)$ 和 $U$ 等均作为子程序隶属于总体程序之中。同时也免去了大量的内插计算工作,因为在常规用表中的表列值均为 $30'$ 一载,但在程序中不受此限制,一分一秒之差均可算出。由于成果能自动按列表形式打印

输出，所以以前的填表、中间数据检查等工作一概全免。计算机操作能确保运算过程的正确无误，所以计算精度是严格符合设计要求的。

鉴于BASIC语言易学易懂；所采用的PC-1500袖珍机具有体积小，重量轻，价格低以及环境条件要求不高等优点，它能完全胜任投影计算的各项工作，且在地矿和其它部门均早已遍及，因此我们决定选用PC-1500机来编写程序及上机操作。读者如有条件采用微机或中、小型机，只需将所提供的程序稍作修改、即可移植应用。如条件具备可进一步和绘图仪连接，使打印成果和计算机自动绘图结合起来，以达到计算机绘图全部自动化的目的。

本书采取按投影大类为编程单元，将它所属各小类的投影程序分别分散在相应各章之后，其后还选有一实际算题作为示例。这样可以帮助读者在学习编制程序时达到由浅入深、循序渐近，最终全部掌握的目的。编程单元之划分内容为：

- 第二章 各投影常用参数表；
- 第三章 地理坐标和球面极坐标之换算表；
- 第四章 方位投影内含9个投影小类的程序段；
- 第五章 圆锥投影内含9个投影小类的程序段；
- 第六章 圆锥投影内含12个投影小类的程序段。

除了分散在第四、五、六和七章的四个算例外，考虑到读者在自学投影计算时有更多的实例可以参考和对照，在本书篇幅安排许可的情况下，还按每个投影中类为单位增添10个计算实例，这样可供读者选择的算例就有14个，再加上手算的算例已接近20个之多了。

## § 13-2 地图投影常用符号及计算公式综合

### 一、地图投影常用符号

符 号	说 明
$a, b$	地球椭球体长、短半径
$\alpha$	地球椭球体扁率
$e, e'$	第一偏心率及第二偏心率
$u$	长度比
$m, n$	沿经线和纬线长度比
$u_1, u_2$	沿垂直圆和等高圆长度比
$a, b$	极值长度比
$P$	面积比
$\omega$	最大角度变形
$v_m$	长度变形
$v_p$	面积变形
$M$	地球椭球体子午圈曲率半径
$N$	地球椭球体卯酉圈曲率半径
$r$	地球椭球体纬圈半径
$S_M$	经线弧长，自赤道起到某一纬度的经线长度
$S_N$	纬线弧长，也称平行圆弧长
$F'$	地球椭球体上的梯形面积，指从赤道到某一纬线，经差为一弧度(约57.3°)的面积
$R$	地球球体半径或平均曲率半径( $R = \sqrt{MN}$ )
$B, L, l$	地球椭球体上点的纬度、经度、经度差，也称大地经纬度(以法线为依据)
$\varphi, \lambda, \Delta\lambda$	地球圆球体上点的纬度、经度、经度差，也称地理或天文经纬度(以垂线为依据)
$\varphi_0, \lambda_0$	斜(横)轴投影中球面极坐标原点Q的地理坐标
$\varphi_k, \varphi_1, \varphi_2$	标准纬线，相切或相割位置所处的纬度，即在投影中没有长度变形的纬线。

符 号	说 明
$a, Z$	球面极坐标的方位角和天顶距(单位是度、分、秒)
$e$	经纬线交角投影后的变形值
$\theta$	经纬线交角在平面上的投影
$x, y$	投影中点位的平面直角坐标; 纵坐标和横坐标
$\delta, \rho$	投影中点位的平面极坐标; 极角和向径(纬圈投影半径)
$p_s$	投影中的最大向径; 如圆锥投影中最南边的纬线投影半径
$H$	在1:100万地图中的中央子午线投影后的长度
$U, \lg U, \lg \lg U$	等角投影表象中纬度的函数及其对数
Mod	$U = \text{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) / \text{tg}^*\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right), \sin\varphi = e \sin\varphi$ 或 $U = \text{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 - e \sin\varphi}{1 + e \sin\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}$
$a, K, C$	$\lg e$ , 即0.43429448 各投影常数
$e'$	具有一公共点的四幅百万分之一地图拼接时的裂隙角

## 二、地图投影常用参数计算公式

序 号	名 称	公 式
1	地球椭球体长, 短半径	$a = 6\,378\,245\text{m}, b = 6\,356\,863\text{m}$ (克氏)
	扁 率	$\alpha = \frac{a-b}{a}$
	第一、第二偏心率	$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$
2	子午圈曲率半径	$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2}}$
	卯酉圈曲率半径	$N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 B)^{1/2}}$
	平均曲率半径	$R = \sqrt{MN}$
3	纬圈半径	$r = N \cos B$
	等面积球体半径	$R_{\pi A} = 637\,111.6\text{m}$
	等体积球体半径	$R_{\pi V} = 637\,111.0\text{m}$
4	子午线弧长	$S_M = a(1-e^2) \left\{ \frac{A^*}{\rho^*} (B_K - B_A) - \frac{1}{2} B^* (\sin 2B_K - \sin 2B_A) \right.$ $\left. + \frac{1}{4} C^* (\sin 4B_K - \sin 4B_A) - \frac{1}{6} D^* (\sin 6B_K - \sin 6B_A) \right\}$ $\rho^* = \frac{180^\circ}{\pi}$ $A^* = 1.005\,051\,773\,9$ $B^* = 0.005\,062\,377\,6$ $C^* = 0.000\,010\,624\,5$ $D^* = 0.000\,000\,020\,8$
	纬线弧长	$S_N = N \cos B \cdot \frac{L}{\rho}$
5	地球椭球体梯形面积	$F = K_0 \left( K_1 \sin \frac{\Delta B}{2} \cos B_m - K_2 \sin \frac{3}{2} \Delta B \cos 3B_m + K_3 \sin \frac{5}{2} \Delta B \cos 5B_m - \dots \right)$ $\Delta B = B_2 - B_1$ $B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$ $K_0 = 2a^2(1-e^2) \cdot \frac{(L_2 - L_1)\rho}{\rho^0}$ $K_1 = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \dots$ $K_2 = \frac{1}{6}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \dots$ $K_3 = \frac{3}{80}e^4 + \dots$
	等量纬度	$U = \text{tg}\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B}\right)^{1/2}$ Mod=0.4342945
	地理坐标与球面极坐标之换算	$\cos Z = \sin B \sin B_0 + \cos B \cos B_0 \cos(L - L_0)$ $\text{ctg} \alpha = \text{tg} B \cos B_0 \csc(L - L_0) - \sin B_0 \text{tg}(L - L_0)$

三、方位投影计算公式

投影大类	投影中类	投影小类	公式	
方位投影 Azimuthal Projection	透视方位投影 PP	外心投影 EX	$x = \frac{LR \sin Z \cos \alpha}{D + R \cos Z}$ $y = \frac{LR \sin Z \sin \alpha}{D + R \cos Z}$	$u_1 = \frac{L(D \cos Z + R)}{(D + R \cos Z)^2}$ $u_2 = \frac{L}{D + R \cos Z}$ $P = \frac{L^2(D \cos Z + R)}{(D + R \cos Z)^3}$ $\sin \frac{\omega}{2} = \left  \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \right $
		球心投影 GN		$D=0, L=R$
		球面投影 ST		$D=R, L=2R$
		正射投影 OR	$D=\infty, L=\infty,$ $x = R \sin Z \cos \alpha$ $y = R \sin Z \sin \alpha$	$u_1 = \cos Z$ $u_2 = 1$ $P = \cos Z$ $\sin \frac{\omega}{2} = \left  \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \right $
	非透视方位投影 NP	等角方位投影 EAN	$\rho = K \operatorname{tg} \frac{Z}{2}$ $K = 2R \cos^2 \frac{Z_K}{2}$ $\delta = \alpha$ $x = \rho \cos \delta$ $y = \rho \sin \delta$	$u_1 = \cos^2 \frac{Z_K \sec^2 Z}{2}$ $u_2 = u_1$ $P = u_1^2$ $\omega = 0$
		等面积方位投影 EAR	$\rho = 2R \sin \frac{Z}{2}$ $\delta = \alpha$ $x = \rho \cos \delta$ $y = \rho \sin \delta$	$u_2 = \sec^2 \frac{Z}{2}$ $u_1 = 1/u_2$ $P = 1$ $\operatorname{tg}(45^\circ + \omega/4) = \sec Z/2$
		等距离方位投影 ED	$\rho = R \cdot Z^\circ / \rho^\circ$ $\delta = \alpha$ $x = \rho \cos \delta$ $y = \rho \sin \delta$	$u_1 = 1$ $u_2 = \frac{Z^\circ}{\rho^\circ \sin Z}$ $P = u_1 \cdot u_2$ $\sin \omega/2 = \left  \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \right $
		等距离球心投影 EG	$\rho = K R \operatorname{tg} \frac{Z}{K}$ $\delta = \alpha$ $x = \rho \cos \delta$ $y = \rho \sin \delta$ $0 < K < \infty$	$u_1 = \sec^2 \frac{Z}{K}$ $u_2 = K \frac{\operatorname{tg} Z/K}{\sin Z}$ $P = u_1 \cdot u_2$ $\sin \omega/2 = \left  \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \right $
	双重方位投影 BA	等距离正射投影 EO	$\rho = K R \sin Z / K$ $\delta = \alpha$ $x = \rho \cos \delta$ $y = \rho \sin \delta$ $0 < K < \infty$	$u_1 = \cos Z / K$ $u_2 = K \frac{\sin Z / K}{\sin Z}$ $P = u_1 \cdot u_2$ $\sin \omega/2 = \left  \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \right $

#### 四、圆柱投影计算公式

投影大类	投影中类	投影小类	公式
圆柱投影	正轴圆柱投影	等角圆柱投影 CY1	$x = \frac{a}{\text{Mod}} \lg U$ $y = aL$ $a = a(\text{切})$ $a = r_K(\text{割})$ $u_1 = u_2 = a/r \text{ (切)}$ $u_1 = u_2 = r_K/r \text{ (割)}$ $P = u^2$ $\omega = 0$
		等面积圆柱投影 CY2	$x = \frac{1}{a} F$ $y = aL$ $a = a(\text{切})$ $a = r_K(\text{割})$ $u_2 = a/r \text{ (切)}$ $u_2 = r_K/r \text{ (割)}$ $u_1 = 1/u_2$ $P = 1$ $\sin \omega/2 = \frac{ u_1 - u_2 }{u_1 + u_2}$
		等距离圆柱投影 CY3	$x = S$ $y = aL$ $a = a(\text{切})$ $a = r_K(\text{割})$ $u_1 = 1$ $u_2 = a/r \text{ (切)}$ $u_2 = r_K/r \text{ (割)}$ $P = u_1 \cdot u_2$ $\sin \omega/2 = \frac{ u_1 - u_2 }{u_1 + u_2}$
	横轴圆柱投影	等角圆柱投影 CY4	$x = R(90^\circ - a)$ $y = \frac{R}{\text{Mod}} \lg \text{ctg} Z/2$ $\text{ctg} a = \text{tg} B \sec(L - L_0)$ $\cos Z = \cos B \sin(L - L_0)$ $u_1 = \csc Z$ $u_2 = \csc Z$ $P = \csc^2 Z$ $\omega = 0$
		等距离圆柱投影 CY5	$x = R(90^\circ - a)$ $y = R(90^\circ - Z)$ 求 $a, Z$ 公式与 CY4 同 $u_2 = \csc Z$ $u_1 = 1$ $P = \csc Z$ $\sin \omega/2 = \frac{ u_1 - u_2 }{u_1 + u_2}$
		等面积圆柱投影 CY6	$x = R(90^\circ - a)$ $y = R \cos Z$ 求 $a, Z$ 公式与 CY4 同 $u_2 = \csc Z$ $u_1 = 1/u_2 \sin Z$ $P = 1$ $\sin \omega/2 = \frac{ u_1 - u_2 }{u_1 + u_2}$
斜轴圆柱投影	等角圆柱投影 CY7	$x = \frac{R}{\text{Mod}} \left[ \lg(1 + \cos Z) - \frac{1}{2} \lg(1 - \cos^2 Z) \right]$ $y = Ra$ $\cos Z = \sin B \sin B_0 + \cos B \cos B_0 \cos(L - L_0)$ $\text{ctg} a = \text{tg} B \cos B_0 \csc(L - L_0) - \sin B_0 \text{ctg}(L - L_0)$ $u_1 = \frac{1}{(1 - \cos^2 Z)^{1/2}}$ $u_2 = u_1$ $P = \frac{1}{1 - \cos Z}$ $\omega = 0$	
	高斯-克吕格投影 GK	$x = S + \frac{L^2 N}{2 \rho^2} \sin B \cos B$ $+ \frac{L^4 N}{24 \rho^4} \sin B \cos^3 B (5 - \text{tg}^2 B + 9\eta^2)$ $y = \frac{L^2 N}{\rho^2} \cos B + \frac{L^3 N}{6 \rho^3} \cos^3 B (1 - \text{tg}^2 B + \eta^2)$ $+ \frac{L^5 N}{120 \rho^5} \cos^5 B (5 - 18 \text{tg}^2 B)$ $\eta^2 = e^2 \cos^2 B$ $u = 1 + \frac{L^2 N}{2 \rho^2} \cos^2 B (1 + \eta^2)$ $+ \frac{L^4 N}{24 \rho^4} \cos^4 B (5 - 4 \text{tg}^2 B)$ $r'' = L^2 \sin B + \frac{L^3 N}{3 \rho^3} \sin B \cos^2 B$ $\cdot (1 + 3\eta^2)$	
	横轴椭圆柱投影 GU	$x = 0.9996 \left[ S + \frac{L^2 N}{2 \rho^2} \sin B \cos B \right.$ $\left. + \frac{L^4 N}{24 \rho^4} \sin B \cos^3 B (5 - \text{tg}^2 B + 9\eta^2) \right]$ $y = 0.9996 \left[ \frac{L^2 N}{\rho^2} \cos B + \frac{L^3 N}{6 \rho^3} \cos^3 B (1 - \text{tg}^2 B \right.$ $\left. + \eta^2) + \frac{L^5 N}{120 \rho^5} \cos^5 B (5 - 18 \text{tg}^2 B) \right]$ $u = 0.9996 \left[ 1 + \frac{L^2 N}{2 \rho^2} \cos^2 B (1 + \eta^2) \right.$ $\left. + \frac{L^4 N}{24 \rho^4} \cos^4 B (5 - 4 \text{tg}^2 B) \right]$ $r'' = L^2 \sin B + \frac{L^3 N}{3 \rho^3} \times \sin B \cos^2 B (1 + 3\eta^2)$	
UTM投影 UTM	$x = 0.9996 \left[ S + \frac{L^2 N}{2 \rho^2} \sin B \cos B \right.$ $\left. + \frac{L^4 N}{24 \rho^4} \sin B \cos^3 B (5 - \text{tg}^2 B + 9\eta^2) \right]$ $y = 0.9996 \left[ \frac{L^2 N}{\rho^2} \cos B + \frac{L^3 N}{6 \rho^3} \cos^3 B (1 - \text{tg}^2 B \right.$ $\left. + \eta^2) + \frac{L^5 N}{120 \rho^5} \cos^5 B (5 - 18 \text{tg}^2 B) \right]$ $u = 0.9996 \left[ 1 + \frac{L^2 N}{2 \rho^2} \cos^2 B (1 + \eta^2) \right.$ $\left. + \frac{L^4 N}{24 \rho^4} \cos^4 B (5 - 4 \text{tg}^2 B) \right]$ $r'' = L^2 \sin B + \frac{L^3 N}{3 \rho^3} \times \sin B \cos^2 B (1 + 3\eta^2)$		



### 五、圆锥投影计算公式

投影大 类	投影中 类	投影小 类	公 式
圆锥投影	等角圆锥投影 CEN	单标准纬线 CN1	$\alpha = \sin B_0$ $K = N_0 \operatorname{ctg} B_0 \cdot U_0^2$
		双标准纬线 CN2	$\alpha = \frac{\lg r_2 - \lg r_1}{\lg U_1 - \lg U_2}$ $K = \frac{r_1 U_1^2}{\alpha} = \frac{r_2 U_2^2}{\alpha}$
		南北边纬长度比相等的单标准纬线圆锥投影 CN3	$\alpha = \frac{\lg r_S - \lg r_N}{\lg U_N - \lg U_S}$ $\sin B_0 = \alpha$ $K = \frac{r_0 U_0^2}{\alpha}$
		定域等面积南北边纬变形值相等的圆锥投影 CN4	$\alpha = \frac{\lg r_S - \lg r_N}{\lg U_N - \lg U_S}$ $\Delta F = \frac{Mr}{p^2} \cdot \Delta B - \Delta L$ $K = \sqrt{\frac{F}{\alpha^2 \sum_{i=1}^n \frac{\Delta F_i}{r_i^2 U_i^2}}}$
		指定边纬与中央纬线变形绝对值相等的圆锥投影 CN5	$\alpha = \frac{\lg r_S - \lg r_N}{\lg U_N - \lg U_S}$ $K = \frac{2r_m U_m^2 \cdot r_N U_N^2}{\alpha(r_m U_m^2 + r_N U_N^2)} = \frac{2r_m U_m^2 \cdot r_S U_S^2}{\alpha(r_m U_m^2 + r_S U_S^2)}$
	等面积圆锥投影 CER	单标准纬线 CR1	$\alpha = \sin B_0$ $\rho_0 = N_0 \operatorname{ctg} B_0$ $C = \frac{\alpha p^2}{2} + F_0$
		双标准纬线 CR2	$\alpha = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2(F_2 - F_1)}$ $C = \frac{\alpha \rho_1^2}{2} + F_1 = \frac{\alpha \rho_2^2}{2} + F_2$ 或 $C = \frac{r_1^2}{2\alpha} + F_1 = \frac{r_2^2}{2\alpha} + F_2$
		指定边纬与中央纬线变形绝对值相等的圆锥投影 CR3	$C = \frac{r_S^2 F_N - r_N^2 F_S}{r_S^2 - r_N^2}$ $\alpha = \frac{2r_N^2 - r_m^2}{r_m^2(C - F_N) + r_N^2(C - F_m) + 2r_m r_N \sqrt{(C - F_N)(C - F_m)}}$
	等距离圆锥投影 CED	单标准纬线 CD1	$\alpha = \sin B_0$ $\rho_0 = N_0 \operatorname{ctg} B_0$ $C = S_0 + N_0 \operatorname{ctg} B_0$
		双标准纬线 CD2	$\alpha = \frac{r_1}{C - S_1} = \frac{r_2}{C - S_2}$ 或 $\alpha = \frac{r_1 - r_2}{S_2 - S_1}$ $C = \frac{r_1 S_2 - r_2 S_1}{r_S - r_N}$
指定边纬与中央纬线变形绝对值相等的圆锥投影 CD3		$C = \frac{r_S S_N - r_N S_S}{r_S - r_N}$ $\alpha = \frac{2r_N r_m}{(C - S_N)r_m + (C - S_m)r_N} = \frac{2r_S r_m}{(C - S_S)r_m + (C - S_m)r_S}$	
定域等面积南北边纬变形值相等的圆锥投影 CD4		$C = \frac{r_S S_N - r_N S_S}{r_S - r_N}$ $\alpha = \frac{F}{C \sum_{i=1}^n \frac{\Delta F_i}{r_i} - \sum_{i=1}^n \frac{S_i \cdot \Delta F_i}{r_i}}$	

## § 13-3 地图投影编程设计

### 一、编程设想

地图投影运算的步骤可简单地归纳为：先按投影范围及经、纬度步距确定各经纬线交点的经纬度；再根据投影的类型并参照有关公式将一系列交点的地理坐标转换成投影直角坐标，同时算出各点相应的变形值。可以发觉在各种类别的投影之间往往有许多相似或完全相同的公式和计算步骤，因此就没有必要单独按一个投影类别来编写一个程序，即前面提过的“一类投影、一个程序”。我们希望并探求写出一个程序能同时解决多个投影的计算问题。具体的设想是将本书涉及的30种不同类别的投影分成三大类：即方位、圆柱和圆锥投影，并依次将其命名为：Azimuthal Proj、Cylindrical Proj和Conical Proj。接着在各大类中又划分成若干中类，如方位投影这一大类中又分成透视、非透视和双重方位投影三个中类，并各以PP、NP和BA命名。此后，再进一步将每一中类投影细分成许多小类，如透视投影分为外心、球心、球面和正射投影四小类，并以EX、GN、ST和OR来命名。其它均仿上例类推。详见本章上节计算公式中附有的各类投影的命名介绍。

在上机操作时，计算机首先询问小类名，然后再要求输入各已知数据，此后就能按程序指定的顺序自动运算。为了操作方便，各投影大类和中类名均毋需输入，计算机会自动按小类名归类的。程序设计时，将大类、中类和小类名分别存入控制变量串W\$、X\$和Y\$中，并以X\$、Y\$作为标号置入程序，用来控制程序转向的入口目标，以达到多路分支的目的。对于某些投影的计算步骤有相同之处时则令其合并，采用同一段子程序或同一个出口，这样就能精简大量程序。再细观三大类投影的计算公式中，不乏有许多是采用相同的地图投影参数和常数，更多的是一些度、分、秒和十进制度之间的转化，坐标转换以及输入、输出格式等。所以在编程时可以分别列出，统筹移用，不必重编。例如在第二程序行50—51、302行中含有 $a$ 、 $b$ 、 $e$ 、 $p$ 及 $M$ 、 $N$ 、 $Y$ 、 $R$ 和 $U$ 的公式计算程序；程序行30-34、38—45为 $S_M$ 、 $S_N$ 及 $F$ 公式的运算；52—54为基本数据输入；55—59为60进制的度分秒化为十进制度的计算；69—74为确定计算投影区域范围；101—128为输出封面及标头格式；190—194为坐标换算；134—140为计算成果格式输出等，为便于反复调用，已将这些程序段全编成子程序。在编程时有意识地将各大类的程序段归并在一个行号区间，如方位投影采用200—256行，圆柱投影用400—466行、圆锥投影使用600—676行。为了便于程序的阅读和修改，将各大类专用的子程序均置于其主程序之前，如圆柱投影的子程序置在400行之前(300—340)、圆锥投影的子程序置于600行之前(500—548)。待三大类程序各自调试完毕后，就可轻而易举地将它简单迭加合而为一，如此合并而成的总体程序就能进行三大类内含30个小类的投影计算了，从而替代了一般常规投影的全部计算问题。

计算机操作是在确保精度的前提下，同时能保证运算过程准确无误，因此节省了大量检查校核的步骤。不言而喻，投影计算自动化使过去复杂冗长的计算过程一改而成轻松自若地几个按键的过程，然而程序的编制，特别一个完善的程序编制并非是轻而易举的事，主要取决于专业人员的编程能力和水平。

计算的结果是按统一规定的使用较为方便的格式自动打印输出的，首页上设计了一个封

面, 列出各类投影名、投影区域、切(割)点经、纬度、经纬度步长距及比例尺等数据。其后各页中每行列出一个交点的经、纬度及 $X$ 、 $Y$ 、 $U_1$ 、 $U_2$ 、 $P$ 和 $\omega$ 值, 每页10行, 并注有页号和折叠线, 这样按此线折成的小册子十分有利于查阅及保存。

在封面设计中, 第一行为大类名( $W \$$ ), 第二行圆括号内先打印中类名, 再打印小类名。下面左侧为投影区域边缘经纬度, 即 $B_S$ 、 $B_N$ ;  $L_W$ 和 $L_E$ 。右侧分别列为投影中心的经纬度 $B_0$ 和 $L_0$ , 经纬线步长距及比例尺。

为了适应不同方式的投影, 还需输入所切纬线纬度 $B_K$ (斜轴时为 $Z_K$ )以及双标准纬线时的纬度 $B_1$ 和 $B_2$ 。只要在 $Z \$$ 中分别存入0或1, 以示区别属于切或割投影, 这些符号均打印在左侧投影区域的上方。

此外, 高斯投影和UTM投影多用在大大、中比例尺图上, 此时经纬线步长分别以 $dL$ 和 $dB$ 表示, 并同时输入中央子午线的经度 $L_0$ 。为了计算带号, 还需输入 $GG$ , 分别赋值3或6, 以示区别 $3^\circ$ 带或 $6^\circ$ 带。这些均打印在右侧比例尺的上方。

## 二、分类命名的作用

计算机自动将各大类名存入于 $W \$$ 中, 作打印封面用, 再将中类名赋入 $X \$$ , 以此作为控制变量、小类名则输入 $Y \$$ 之中, 作为各小类具体运算的子程序。如是各类投影均赋以相应的标志, 也就是给各分类命名, 其目的是指示计算机按预定运算线路运行时有一个入口的标志。各大类投影均有独特的启动指令, 一旦启动后, 只要输入小类标志, 就能自动划分中类, 自己寻找入口, 毋需操作者干预。

主程序是沿 $X \$$ 中所指定的线路运算的, 当运算至各小类相异之处时即调用各子程序(采用 $GOS$ 、 $Y \$$ 或 $IF Y \$ \dots$ )调用完毕后又返回至主程序继续执行下一指令。为此除了必需了解各种分类命名的意义外还要切实掌握各分类命名的作用, 下面列出本书所含各类投影的程序设计流程框图, 供读者学习时参考。

## § 13-4 投影计算选题数例

### 一、外心投影(PP EX)S

起动: DEF S

输入:  $Y \$$ 、 $S$ 、 $B_S$ 、 $B_N$ 、 $L_W$ 、 $L_E$ 、 $B_0$ 、 $L_0$ 、 $dS$ 、 $m$

输出: 见附表

### 二、等角方位投影(NP EAN) $Z_K$

起动: DEF S

输入:  $Y \$$ 、 $Z_K(B_K)$ 、 $B_S$ 、 $B_N$ 、 $L_W$ 、 $L_E$ 、 $B_0$ 、 $L_0$ 、 $dS$ 、 $m$

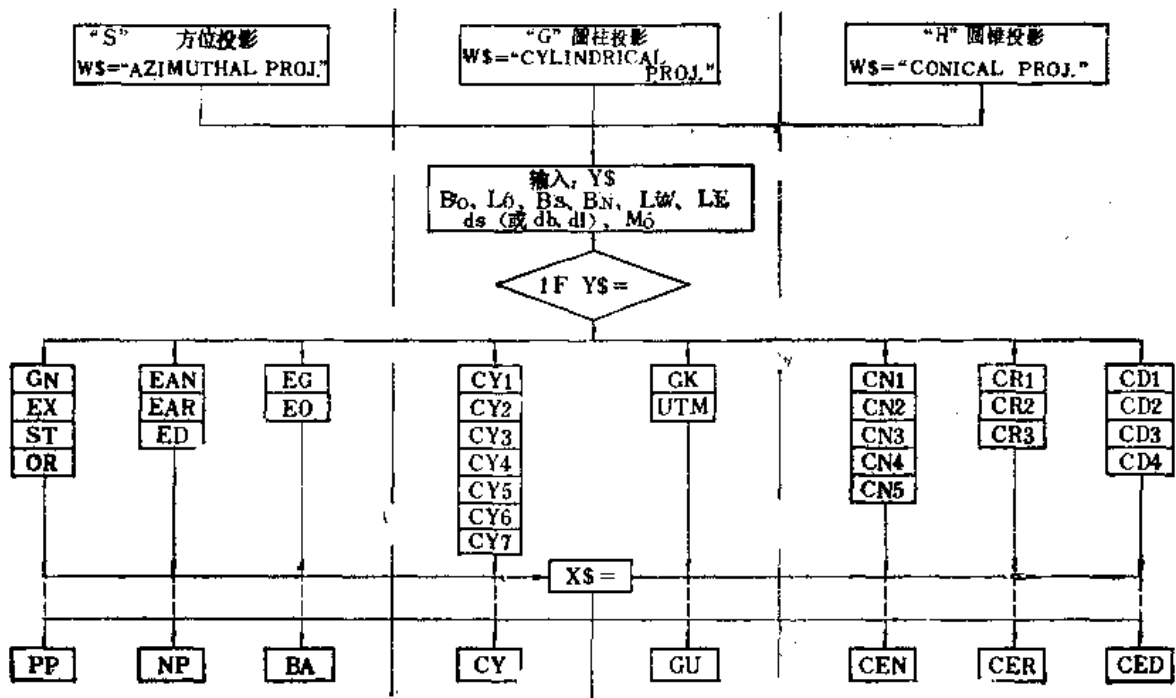
输出: 见附表

### 三、等距离正射投影(BA EO)K

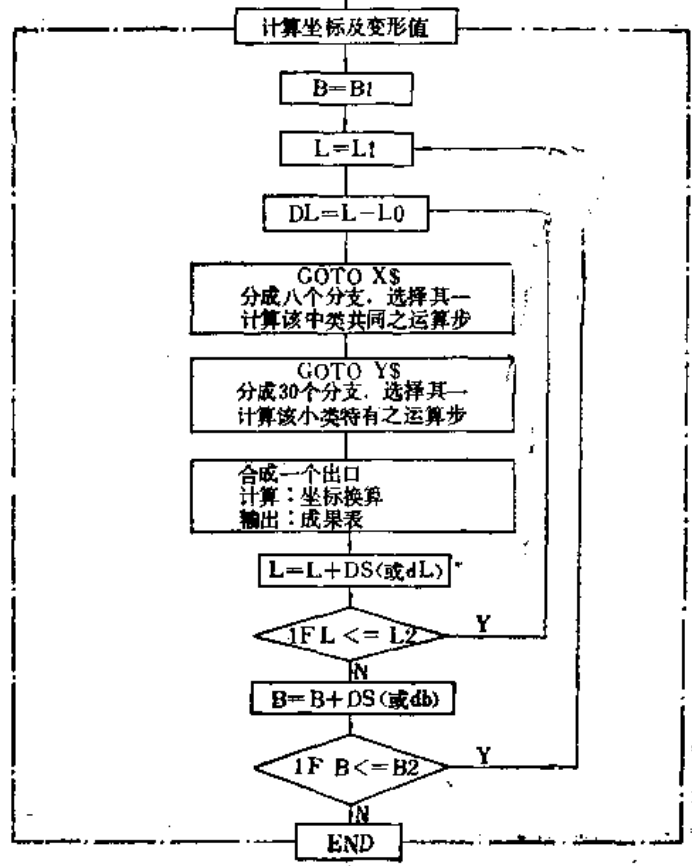
起动: DEF S

输入:  $Y \$$ 、 $K$ 、 $B_S$ 、 $B_N$ 、 $L_W$ 、 $L_E$ 、 $B_0$ 、 $L_0$ 、 $dS$ 、 $m$

输出: 见附表



输出：封面及标头  
计算：运算范围及其他



四、等角圆柱投影(CY CY1)Z<sub>K</sub>

起动: DEF G

输入: Y\$, Z<sub>K</sub>(B<sub>K</sub>), B<sub>S</sub>, B<sub>N</sub>, L<sub>W</sub>, L<sub>E</sub>, B<sub>0</sub>, L<sub>0</sub>, dS, m

输出: 见附表

五、等距离圆柱投影(CY CY5)

起动: DEF G

输入: Y\$, B<sub>S</sub>, B<sub>N</sub>, L<sub>W</sub>, L<sub>E</sub>, dS, m

输出: 见附表

六、斜轴等角圆柱投影(CY CY7)QB, QL

起动: DEF G

输入: Y\$, QB, QL, B<sub>S</sub>, B<sub>N</sub>, L<sub>W</sub>, L<sub>E</sub>, dS, m

输出: 见附表

七、UTM投影(GU UTM)G

起动: DEF G

输入: Y\$, B<sub>S</sub>, B<sub>N</sub>, L<sub>W</sub>, L<sub>E</sub>, L<sub>0</sub>, db, d|m

输出: 见附表

八、南北边纬长度比相等的单标准纬线圆锥投影(等角)(CEN CN3)

起动: DEF H

输入: B<sub>S</sub>, B<sub>N</sub>, L<sub>W</sub>, L<sub>E</sub>, B<sub>0</sub>, L<sub>0</sub>, dS, m

输出: 见附表

九、指定边纬与中央纬线变形绝对值相等的圆锥投影(等面积)(CEN CR3)

起动: DEF H

输入: B<sub>S</sub>, B<sub>N</sub>, L<sub>W</sub>, L<sub>E</sub>, B<sub>0</sub>, L<sub>0</sub>, dS, m

输出: 见附表

十、定域等面积南北边纬变形值相等的圆锥投影(等距离)(CEN CD4)

起动: DEF H

输入: B<sub>S</sub>, B<sub>N</sub>, L<sub>W</sub>, L<sub>E</sub>, B<sub>0</sub>, L<sub>0</sub>, dS, m

输出: 见附表

AZIMUTHAL PROJ.  
( PP EX ) S=100000000

$B_E=4$

$B_N=58$

$L_W=70$

$L_E=140$

$B_0=30$

$L_0=105$

$dS=5$

$m=1:10000000$

B	L	X (cm)	Y (cm)	$U_1$	$U_2$	P	$\omega'$
0	105	0.000	0.000	0.8870	1.0078	0.8937	7.1010
0	110	0.116	5.593	0.8841	1.0078	0.8910	7.2946
0	115	0.484	11.150	0.8757	1.0084	0.8830	8.0442
0	120	1.041	16.634	0.8616	1.0093	0.8696	9.0328
0	125	1.845	22.010	0.8419	1.0106	0.8509	10.2658
0	130	2.871	27.241	0.8168	1.0123	0.8296	12.1626
0	135	4.113	32.294	0.7862	1.0143	0.7974	14.3236
0	140	5.565	37.132	0.7502	1.0167	0.7628	17.2045
5	105	5.927	0.000	0.9213	1.0053	0.9262	4.5951
5	110	5.143	5.559	0.9185	1.0055	0.9238	5.1053
5	115	5.492	11.082	0.9102	1.0061	0.9157	5.4411
5	120	6.070	16.533	0.8983	1.0070	0.9026	6.4011
5	125	6.875	21.875	0.8789	1.0083	0.8842	7.5940
5	130	7.903	27.075	0.8520	1.0100	0.8605	9.4346
5	135	9.148	32.096	0.8219	1.0120	0.8317	11.5402
5	140	10.603	36.904	0.7864	1.0143	0.7977	14.8226
10	105	10.228	0.000	0.9496	1.0034	0.9528	3.0939
10	110	10.343	5.485	0.9468	1.0036	0.9502	3.2011
10	115	10.690	10.934	0.9386	1.0042	0.9425	3.5157
10	120	11.265	16.312	0.9250	1.0051	0.9297	4.4521
10	125	12.067	21.584	0.9060	1.0064	0.9117	6.0105
10	130	13.089	26.713	0.8816	1.0080	0.8887	7.4009
10	135	14.328	31.666	0.8520	1.0100	0.8605	9.4357
10	140	15.775	36.409	0.8173	1.0123	0.8273	12.1415
15	105	15.568	0.000	0.9716	1.0019	0.9735	1.4543
15	110	15.683	5.372	0.9689	1.0021	0.9710	1.5546
15	115	16.025	10.709	0.9609	1.0026	0.9635	2.2605
15	120	16.593	15.975	0.9476	1.0035	0.9510	3.1701
15	125	17.384	21.137	0.9291	1.0048	0.9336	4.2911
15	130	18.394	26.159	0.9054	1.0064	0.9112	6.0330
15	135	19.617	31.009	0.8765	1.0083	0.8838	8.0111
15	140	21.046	35.651	0.8427	1.0106	0.8516	10.2346
20	105	21.014	0.000	0.9874	1.0009	0.9882	0.4641
20	110	21.126	5.220	0.9848	1.0010	0.9856	0.5617
20	115	21.461	10.406	0.9770	1.0016	0.9786	1.2512
20	120	22.018	15.524	0.9642	1.0024	0.9665	2.1346
20	125	22.794	20.539	0.9462	1.0036	0.9497	3.2231
20	130	23.793	25.419	0.9232	1.0052	0.9280	4.5217
20	135	24.982	30.129	0.8953	1.0071	0.9016	6.4407
20	140	26.382	34.638	0.8626	1.0093	0.8705	8.5925
25	105	26.529	0.000	0.9968	1.0002	0.9971	0.1138
25	110	26.636	5.032	0.9944	1.0004	0.9947	0.2047
25	115	26.965	10.030	0.9869	1.0009	0.9878	0.4821
25	120	27.506	14.962	0.9745	1.0017	0.9762	1.3436
25	125	28.260	19.795	0.9573	1.0029	0.9600	2.4003
25	130	29.222	24.496	0.9352	1.0044	0.9393	4.0523
25	135	30.396	29.083	0.9083	1.0062	0.9140	6.5134
25	140	31.746	33.375	0.8769	1.0083	0.8841	9.5947
30	105	32.030	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
30	110	32.185	4.807	0.9976	1.0002	0.9978	0.0843
30	115	32.500	9.582	0.9905	1.0006	0.9912	0.3457
30	120	33.021	14.293	0.9787	1.0014	0.9801	1.1856
30	125	33.747	18.909	0.9622	1.0026	0.9647	2.2108
30	130	34.674	23.398	0.9412	1.0040	0.9449	3.4207
30	135	35.795	27.730	0.9156	1.0057	0.9208	5.2244
30	140	37.105	31.874	0.8855	1.0077	0.8924	7.2400

<i>B</i>	<i>L</i>	<i>X</i> (cm)	<i>Y</i> (cm)	<i>U</i> <sub>1</sub>	<i>U</i> <sub>2</sub>	<i>P</i>	$\omega^*$
35	105	37.631	0.000	0.9968	1.0002	0.9971	0.1138
35	110	37.731	4.548	0.9946	1.0004	0.9950	0.1954
35	115	38.031	9.065	0.9879	1.0008	0.9887	0.4448
35	120	38.529	13.521	0.9767	1.0016	0.9782	1.2682
35	125	39.222	17.887	0.9611	1.0025	0.9636	2.2526
35	130	40.105	22.131	0.9412	1.0040	0.9448	3.4208
35	135	41.175	26.226	0.9169	1.0056	0.9221	5.1713
35	140	42.424	30.142	0.8886	1.0075	0.8953	7.1136
40	105	43.147	0.000	0.9874	1.0009	0.9882	0.4641
40	110	43.241	4.256	0.9853	1.0010	0.9862	0.5431
40	115	43.524	8.482	0.9789	1.0014	0.9803	1.1803
40	120	43.994	12.652	0.9685	1.0021	0.9705	1.5729
40	125	44.647	16.735	0.9539	1.0031	0.9568	2.5808
40	130	45.481	20.705	0.9352	1.0044	0.9398	4.0525
40	135	46.409	24.588	0.9125	1.0059	0.9179	5.3455
40	140	47.667	28.193	0.8859	1.0077	0.8926	7.2222
45	105	48.592	0.000	0.9716	1.0019	0.9735	1.4543
45	110	48.680	3.832	0.9698	1.0021	0.9716	1.5305
45	115	48.944	7.838	0.9638	1.0025	0.9662	2.1513
45	120	49.381	11.690	0.9541	1.0031	0.9570	2.6217
45	125	49.990	15.462	0.9405	1.0040	0.9443	3.4432
45	130	50.768	19.127	0.9232	1.0052	0.9280	4.5210
45	135	51.706	22.661	0.9022	1.0066	0.9082	6.1606
45	140	52.802	26.039	0.8777	1.0082	0.8849	7.5623
50	105	53.933	0.000	0.9486	1.0034	0.9528	3.0939
50	110	54.014	3.580	0.9478	1.0035	0.9511	3.1631
50	115	54.256	7.135	0.9424	1.0039	0.9461	3.3712
50	120	54.657	10.641	0.9335	1.0045	0.9377	4.1147
50	125	55.215	14.073	0.9212	1.0053	0.9261	5.0028
50	130	55.927	17.408	0.9054	1.0064	0.9111	6.0633
50	135	56.739	20.622	0.8862	1.0077	0.8930	7.2123
50	140	57.793	23.692	0.8667	1.0092	0.8717	8.5424
55	105	59.134	0.000	0.9213	1.0053	0.9262	4.5951
55	110	59.207	3.200	0.9197	1.0054	0.9247	5.0612
55	115	59.424	6.379	0.9149	1.0058	0.9202	5.2518
55	120	59.786	9.512	0.9069	1.0063	0.9125	5.5714
55	125	60.289	12.579	0.8958	1.0070	0.9021	6.4208
55	130	60.930	15.558	0.8816	1.0080	0.8886	7.4013
55	135	61.705	18.428	0.8644	1.0091	0.8723	8.5144
55	140	62.610	21.168	0.8443	1.0105	0.8531	10.1701

AZIMUTHAL PROJ.

( NP EAN )  $Z_k=15$

$B_S=4$

$P_0=30$

$B_N=58$

$L_0=105$

$L_W=70$

$d_g=5$

$L_E=140$

$m=1:1000000$

<i>B</i>	<i>L</i>	<i>X</i> (cm)	<i>Y</i> (cm)	<i>U</i> <sub>1</sub>	<i>U</i> <sub>2</sub>	<i>P</i>	$\omega^*$
0	105	0.000	0.000	1.0535	1.0535	1.1099	0.0000
0	110	0.069	5.857	1.0554	1.0554	1.1139	0.0000
0	115	0.275	11.732	1.0610	1.0610	1.1258	0.0000
0	120	0.622	17.642	1.0705	1.0705	1.1459	0.0000
0	125	1.115	23.605	1.0839	1.0839	1.1748	0.0000
0	130	1.781	29.640	1.1014	1.1014	1.2131	0.0000
0	135	2.568	35.768	1.1234	1.1234	1.2620	0.0000
0	140	3.549	42.003	1.1501	1.1501	1.3226	0.0000

B	L	X (cm)	Y (cm)	$U_1$	$U_2$	P	$\omega^*$
5	105	5.790	0.000	1.0313	1.0313	1.0635	0.0000
5	110	5.867	5.711	1.0331	1.0331	1.0672	0.0000
5	115	6.098	11.438	1.0384	1.0384	1.0783	0.0000
5	120	6.487	17.196	1.0474	1.0474	1.0971	0.0000
5	125	7.039	23.002	1.0602	1.0602	1.1240	0.0000
5	130	7.762	28.870	1.0769	1.0769	1.1598	0.0000
5	135	8.664	34.820	1.0973	1.0973	1.2052	0.0000
5	140	9.759	40.866	1.1232	1.1232	1.2616	0.0000
10	105	11.469	0.000	1.0135	1.0135	1.0272	0.0000
10	110	11.553	5.549	1.0152	1.0152	1.0307	0.0000
10	115	11.807	11.111	1.0203	1.0203	1.0411	0.0000
10	120	12.233	16.700	1.0289	1.0289	1.0587	0.0000
10	125	12.837	22.330	1.0411	1.0411	1.0840	0.0000
10	130	13.623	28.014	1.0571	1.0571	1.1174	0.0000
10	135	14.612	33.767	1.0770	1.0770	1.1599	0.0000
10	140	15.806	39.603	1.1011	1.1011	1.2124	0.0000
15	105	17.062	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
15	110	17.152	0.369	1.0016	1.0016	1.0032	0.0000
15	115	17.425	10.750	1.0065	1.0065	1.0131	0.0000
15	120	17.883	16.153	1.0147	1.0147	1.0296	0.0000
15	125	18.531	21.590	1.0263	1.0263	1.0534	0.0000
15	130	19.378	27.073	1.0415	1.0415	1.0848	0.0000
15	135	20.435	32.612	1.0605	1.0605	1.1246	0.0000
15	140	21.713	38.219	1.0834	1.0834	1.1737	0.0000
20	105	22.590	0.000	0.9905	0.9905	0.9811	0.0000
20	110	22.686	5.173	0.9920	0.9920	0.9841	0.0000
20	115	22.975	10.356	0.9967	0.9967	0.9934	0.0000
20	120	23.459	15.556	1.0045	1.0045	1.0091	0.0000
20	125	24.145	20.734	1.0156	1.0156	1.0314	0.0000
20	130	25.040	26.047	1.0301	1.0301	1.0610	0.0000
20	135	26.154	31.355	1.0481	1.0481	1.0984	0.0000
20	140	27.501	36.716	1.0698	1.0698	1.1445	0.0000
25	105	28.077	0.000	0.9848	0.9848	0.9699	0.0000
25	110	28.177	4.961	0.9863	0.9863	0.9728	0.0000
25	115	28.478	9.928	0.9908	0.9908	0.9816	0.0000
25	120	28.984	14.910	0.9982	0.9982	0.9964	0.0000
25	125	29.699	19.911	1.0088	1.0088	1.0176	0.0000
25	130	30.632	24.938	1.0225	1.0225	1.0455	0.0000
25	135	31.792	29.997	1.0396	1.0396	1.0808	0.0000
25	140	33.191	35.094	1.0602	1.0602	1.1241	0.0000
30	105	33.542	0.000	0.9830	0.9830	0.9662	0.0000
30	110	33.645	4.731	0.9844	0.9844	0.9690	0.0000
30	115	33.956	9.467	0.9886	0.9886	0.9773	0.0000
30	120	34.478	14.211	0.9957	0.9957	0.9914	0.0000
30	125	35.214	18.968	1.0057	1.0057	1.0114	0.0000
30	130	36.174	23.742	1.0188	1.0188	1.0379	0.0000
30	135	37.365	28.536	1.0350	1.0350	1.0711	0.0000
30	140	38.800	33.353	1.0545	1.0545	1.1119	0.0000
35	105	39.008	0.000	0.9848	0.9848	0.9699	0.0000
35	110	39.113	4.483	0.9862	0.9862	0.9725	0.0000
35	115	39.430	8.969	0.9902	0.9902	0.9805	0.0000
35	120	39.960	13.458	0.9969	0.9969	0.9938	0.0000
35	125	40.710	17.954	1.0064	1.0064	1.0129	0.0000
35	130	41.685	22.457	1.0188	1.0188	1.0379	0.0000
35	135	42.894	26.968	1.0341	1.0341	1.0693	0.0000
35	140	44.347	31.488	1.0525	1.0525	1.1077	0.0000
40	105	44.494	0.000	0.9905	0.9905	0.9811	0.0000
40	110	44.600	4.216	0.9917	0.9917	0.9836	0.0000
40	115	44.919	8.432	0.9955	0.9955	0.9911	0.0000
40	120	45.453	12.649	1.0019	1.0019	1.0038	0.0000
40	125	46.208	16.864	1.0109	1.0109	1.0218	0.0000
40	130	47.185	21.078	1.0225	1.0225	1.0455	0.0000
40	135	48.398	25.289	1.0369	1.0369	1.0752	0.0000
40	140	49.848	29.495	1.0542	1.0542	1.1114	0.0000
45	105	50.022	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
45	110	50.128	3.929	1.0012	1.0012	1.0024	0.0000
45	115	50.444	7.856	1.0048	1.0048	1.0095	0.0000
45	120	50.975	11.778	1.0107	1.0107	1.0216	0.0000



B	L	X (cm)	Y (cm)	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	P	ω'
45	125	51.722	15.894	1.0191	1.0191	1.0387	0.0000
45	130	52.691	19.800	1.0301	1.0301	1.0610	0.0000
45	135	53.888	23.493	1.0435	1.0435	1.0890	0.0000
45	140	55.321	27.367	1.0597	1.0597	1.1230	0.0000
50	105	55.615	0.000	1.0135	1.0135	1.0272	0.0000
50	110	55.718	3.619	1.0146	1.0146	1.0295	0.0000
50	115	56.028	7.235	1.0190	1.0180	1.0362	0.0000
50	120	56.547	10.843	1.0235	1.0235	1.0476	0.0000
50	125	57.276	14.438	1.0314	1.0314	1.0637	0.0000
50	130	58.222	18.016	1.0415	1.0415	1.0848	0.0000
50	135	59.387	21.571	1.0541	1.0541	1.1110	0.0000
50	140	60.780	25.096	1.0690	1.0690	1.1428	0.0000
55	105	61.294	0.000	1.0313	1.0313	1.0635	0.0000
55	110	61.393	3.286	1.0323	1.0323	1.0656	0.0000
55	115	61.691	6.566	1.0354	1.0354	1.0720	0.0000
55	120	62.190	9.836	1.0405	1.0405	1.0827	0.0000
55	125	62.891	13.088	1.0477	1.0477	1.0978	0.0000
55	130	63.797	16.316	1.0571	1.0571	1.1174	0.0000
55	135	64.912	19.514	1.0686	1.0686	1.1419	0.0000
55	140	66.241	22.672	1.0823	1.0823	1.1713	0.0000

AZIMUTHAL PROJ.  
( BA EO ) K=3

$$B_S=0$$

$$B_0=32$$

$$B_N=64$$

$$L_0=104$$

$$L_W=92$$

$$dS=4$$

$$L_E=116$$

$$m=1:10000000$$

B	L	X (cm)	Y (cm)	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	P	ω'
0	104	0.000	0.000	0.9827	1.0479	1.0298	3.4037
0	108	0.083	4.658	0.9825	1.0486	1.0302	3.4344
0	112	0.251	9.313	0.9818	1.0506	1.0315	3.5304
0	116	0.566	13.958	0.9806	1.0541	1.0336	4.0839
4	104	4.379	0.000	0.9868	1.0363	1.0226	2.4831
4	108	4.444	4.596	0.9865	1.0370	1.0230	2.5134
4	112	4.639	9.187	0.9858	1.0390	1.0243	3.0044
4	116	4.964	13.769	0.9846	1.0424	1.0264	3.1600
8	104	8.774	0.000	0.9903	1.0265	1.0165	2.0334
8	108	8.841	4.519	0.9900	1.0275	1.0169	2.0633
8	112	9.041	9.033	0.9893	1.0291	1.0181	2.1530
8	116	9.376	13.537	0.9882	1.0324	1.0202	2.3027
12	104	13.184	0.000	0.9932	1.0183	1.0114	1.2540
12	108	13.252	4.429	0.9930	1.0189	1.0118	1.2834
12	112	13.457	8.850	0.9923	1.0208	1.0130	1.3719
12	116	13.799	13.263	0.9912	1.0240	1.0149	1.5153
16	104	17.606	0.000	0.9957	1.0117	1.0073	0.5445
16	108	17.675	4.323	0.9954	1.0123	1.0077	0.5735
16	112	17.883	8.640	0.9948	1.0141	1.0088	1.0605
16	116	18.231	12.947	0.9937	1.0171	1.0107	1.2015
20	104	22.037	0.000	0.9976	1.0085	1.0041	0.3046
20	108	22.107	4.204	0.9973	1.0071	1.0044	0.3331
20	112	22.318	8.403	0.9967	1.0089	1.0055	0.4145
20	116	22.668	12.590	0.9956	1.0138	1.0074	0.5530
24	104	26.476	0.000	0.9989	1.0029	1.0018	0.1340
24	108	26.546	4.073	0.9987	1.0035	1.0022	0.1619
24	112	26.757	8.139	0.9981	1.0052	1.0032	0.2417
24	116	27.110	12.183	0.9970	1.0080	1.0050	0.3734

B	L	X (cm)	Y (cm)	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	P	ω*
28	104	30.818	0.000	0.9997	1.0007	1.0005	0.0325
28	108	30.990	3.928	0.9995	1.0013	1.0008	0.0558
28	112	31.200	7.849	0.9989	1.0029	1.0018	0.1339
28	116	31.552	11.757	0.9979	1.0056	1.0035	0.2627
32	104	35.365	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
32	108	35.435	3.770	0.9998	1.0005	1.0003	0.0227
32	112	35.644	7.532	0.9992	1.0021	1.0013	0.0948
32	116	35.998	11.282	0.9982	1.0047	1.0029	0.2205
36	104	39.311	0.000	0.9997	1.0007	1.0005	0.0325
36	108	39.879	3.599	0.9995	1.0012	1.0008	0.0545
36	112	40.086	7.190	0.9990	1.0027	1.0017	0.1347
36	116	40.431	10.768	0.9981	1.0052	1.0032	0.2431
40	104	44.254	0.000	0.9983	1.0029	1.0018	0.1340
40	108	44.322	3.415	0.9987	1.0034	1.0021	0.1553
40	112	44.524	6.822	0.9982	1.0048	1.0030	0.2234
40	116	44.861	10.215	0.9973	1.0072	1.0045	0.3347
44	104	48.693	0.000	0.9976	1.0065	1.0041	0.3046
44	108	48.759	3.218	0.9974	1.0070	1.0044	0.3252
44	112	48.955	6.429	0.9969	1.0083	1.0052	0.3910
44	116	49.283	9.626	0.9961	1.0106	1.0066	0.4941
48	104	53.123	0.000	0.9957	1.0117	1.0073	0.5445
48	108	53.188	3.009	0.9955	1.0121	1.0075	0.5643
48	112	53.377	6.010	0.9950	1.0133	1.0083	1.0239
48	116	53.693	8.997	0.9943	1.0155	1.0096	1.1229
52	104	57.546	0.000	0.9932	1.0183	1.0114	1.2540
52	108	57.607	2.786	0.9931	1.0187	1.0117	1.2730
52	112	57.787	5.566	0.9927	1.0199	1.0124	1.3259
52	116	58.088	8.330	0.9919	1.0219	1.0136	1.4208
56	104	61.956	0.000	0.9903	1.0265	1.0165	2.0334
56	108	62.013	2.551	0.9901	1.0269	1.0167	2.0515
56	112	62.183	5.095	0.9897	1.0280	1.0174	2.1018
56	116	62.466	7.625	0.9891	1.0298	1.0186	2.1843
60	104	66.352	0.000	0.9868	1.0363	1.0226	2.4831
60	108	66.404	2.333	0.9866	1.0367	1.0228	2.5003
60	112	66.582	4.599	0.9863	1.0377	1.0235	2.5438
60	116	66.823	6.831	0.9857	1.0394	1.0245	3.0216
64	104	70.730	0.000	0.9827	1.0479	1.0298	3.4037
64	108	70.778	2.041	0.9826	1.0482	1.0299	3.4159
64	112	70.822	4.076	0.9823	1.0491	1.0305	3.4604
64	116	71.162	6.094	0.9818	1.0508	1.0314	3.5253

CYLINDRICAL PROJ ( CY CYI ) 20							
		$B_8=0$			$B_0=22.3$		
		$B_N=47$			$L_0=105$		
		$L_W=75$			$dS=5$		
		$L_s=135$			$m=1:1000000$		
B	L	X (cm)	Y (cm)	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	P	ω*
0	105	0.000	0.000	0.9401	0.9401	0.8837	0.0000
0	110	0.000	5.232	0.9401	0.9401	0.8837	0.0000
0	115	0.000	10.465	0.9401	0.9401	0.8837	0.0000
0	120	0.000	15.697	0.9401	0.9401	0.8837	0.0000
0	125	0.000	20.930	0.9401	0.9401	0.8837	0.0000
0	130	0.000	26.162	0.9401	0.9401	0.8837	0.0000
0	135	0.000	31.395	0.9401	0.9401	0.8837	0.0000

B	L	X (cm)	Y (cm)	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	P	ω'
5	105	5.204	0.000	0.9436	0.9436	0.8904	0.0000
5	110	5.204	5.232	0.9436	0.9436	0.8904	0.0000
5	115	5.204	10.465	0.9436	0.9436	0.8904	0.0000
5	120	5.204	15.697	0.9436	0.9436	0.8904	0.0000
5	125	5.204	20.930	0.9436	0.9436	0.8904	0.0000
5	130	5.204	26.162	0.9436	0.9436	0.8904	0.0000
5	135	5.204	31.395	0.9436	0.9436	0.8904	0.0000
10	105	10.449	0.000	0.9545	0.9545	0.9110	0.0000
10	110	10.449	5.232	0.9545	0.9545	0.9110	0.0000
10	115	10.449	10.465	0.9545	0.9545	0.9110	0.0000
10	120	10.449	15.697	0.9545	0.9545	0.9110	0.0000
10	125	10.449	20.930	0.9545	0.9545	0.9110	0.0000
10	130	10.449	26.162	0.9545	0.9545	0.9110	0.0000
10	135	10.449	31.395	0.9545	0.9545	0.9110	0.0000
15	105	15.776	0.000	0.9730	0.9730	0.9467	0.0000
15	110	15.776	5.232	0.9730	0.9730	0.9467	0.0000
15	115	15.776	10.465	0.9730	0.9730	0.9467	0.0000
15	120	15.776	15.697	0.9730	0.9730	0.9467	0.0000
15	125	15.776	20.930	0.9730	0.9730	0.9467	0.0000
15	130	15.776	26.162	0.9730	0.9730	0.9467	0.0000
15	135	15.776	31.395	0.9730	0.9730	0.9467	0.0000
20	105	21.231	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
20	110	21.231	5.232	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
20	115	21.231	10.465	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
20	120	21.231	15.697	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
20	125	21.231	20.930	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
20	130	21.231	26.162	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
20	135	21.231	31.395	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
25	105	26.864	0.000	1.0366	1.0366	1.0746	0.0000
25	110	26.864	5.232	1.0366	1.0366	1.0746	0.0000
25	115	26.864	10.465	1.0366	1.0366	1.0746	0.0000
25	120	26.864	15.697	1.0366	1.0366	1.0746	0.0000
25	125	26.864	20.930	1.0366	1.0366	1.0746	0.0000
25	130	26.864	26.162	1.0366	1.0366	1.0746	0.0000
25	135	26.864	31.395	1.0366	1.0366	1.0746	0.0000
30	105	32.735	0.000	1.0846	1.0846	1.1763	0.0000
30	110	32.735	5.232	1.0846	1.0846	1.1763	0.0000
30	115	32.735	10.465	1.0846	1.0846	1.1763	0.0000
30	120	32.735	15.697	1.0846	1.0846	1.1763	0.0000
30	125	32.735	20.930	1.0846	1.0846	1.1763	0.0000
30	130	32.735	26.162	1.0846	1.0846	1.1763	0.0000
30	135	32.735	31.395	1.0846	1.0846	1.1763	0.0000
35	105	38.913	0.000	1.1463	1.1463	1.3141	0.0000
35	110	38.913	5.232	1.1463	1.1463	1.3141	0.0000
35	115	38.913	10.465	1.1463	1.1463	1.3141	0.0000
35	120	38.913	15.697	1.1463	1.1463	1.3141	0.0000
35	125	38.913	20.930	1.1463	1.1463	1.3141	0.0000
35	130	38.913	26.162	1.1463	1.1463	1.3141	0.0000
35	135	38.913	31.395	1.1463	1.1463	1.3141	0.0000
40	105	45.485	0.000	1.2255	1.2255	1.5018	0.0000
40	110	45.485	5.232	1.2255	1.2255	1.5018	0.0000
40	115	45.485	10.465	1.2255	1.2255	1.5018	0.0000
40	120	45.485	15.697	1.2255	1.2255	1.5018	0.0000
40	125	45.485	20.930	1.2255	1.2255	1.5018	0.0000
40	130	45.485	26.162	1.2255	1.2255	1.5018	0.0000
40	135	45.485	31.395	1.2255	1.2255	1.5018	0.0000
45	105	52.562	0.000	1.3272	1.3272	1.7615	0.0000
45	110	52.562	5.232	1.3272	1.3272	1.7615	0.0000
45	115	52.562	10.465	1.3272	1.3272	1.7615	0.0000
45	120	52.562	15.697	1.3272	1.3272	1.7615	0.0000
45	125	52.562	20.930	1.3272	1.3272	1.7615	0.0000
45	130	52.562	26.162	1.3272	1.3272	1.7615	0.0000
45	135	52.562	31.395	1.3272	1.3272	1.7615	0.0000

CYLINDRICAL PROJ.  
(CY CY5)

$B_S = -60$   
 $B_N = -30$   
 $L_W = 0$   
 $L_E = 30$

$dS = 5$   
 $m = 1:1000000$

B	L	X (cm)	Y (cm)	$U_1$	$U_2$	P	$\omega'$
-60	0	0.000	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
-60	5	-0.105	2.777	1.0000	1.0010	1.0010	0.0316
-60	10	-0.420	5.538	1.0000	1.0038	1.0038	0.1300
-60	15	-0.948	8.268	1.0000	1.0085	1.0085	0.2902
-60	20	-1.688	10.949	1.0000	1.0150	1.0150	0.5101
-60	25	-2.645	13.565	1.0000	1.0231	1.0231	1.1831
-60	30	-3.819	16.098	1.0000	1.0328	1.0328	1.5056
-55	0	5.559	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
-55	5	5.445	3.188	1.0000	1.0013	1.0013	0.0418
-55	10	5.102	6.358	1.0000	1.0050	1.0050	0.1708
-55	15	4.528	9.493	1.0000	1.0112	1.0112	0.3818
-55	20	3.718	12.580	1.0000	1.0198	1.0198	1.0727
-55	25	2.668	15.599	1.0000	1.0307	1.0307	1.4405
-55	30	1.370	18.531	1.0000	1.0438	1.0438	2.2731
-50	0	11.119	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
-50	5	11.000	3.571	1.0000	1.0026	1.0018	0.0524
-50	10	10.640	7.128	1.0000	1.0063	1.0063	0.2133
-50	15	10.035	10.648	1.0000	1.0141	1.0141	0.4816
-50	20	9.180	14.122	1.0000	1.0251	1.0251	1.2509
-50	25	8.084	17.527	1.0000	1.0391	1.0391	2.1146
-50	30	6.677	20.845	1.0000	1.0560	1.0560	3.0723
-45	0	16.679	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
-45	5	16.558	3.928	1.0000	1.0019	1.0019	0.0632
-45	10	16.191	7.842	1.0000	1.0076	1.0076	0.2607
-45	15	15.575	11.726	1.0000	1.0172	1.0172	0.5833
-45	20	14.699	15.562	1.0000	1.0306	1.0306	1.4335
-45	25	13.550	19.334	1.0000	1.0479	1.0479	2.4047
-45	30	12.113	23.023	1.0000	1.0690	1.0690	3.4929
-40	0	22.239	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
-40	5	22.113	4.256	1.0000	1.0022	1.0022	0.0741
-40	10	21.758	8.500	1.0000	1.0090	1.0090	0.3041
-40	15	21.148	12.716	1.0000	1.0203	1.0203	1.0856
-40	20	20.278	16.882	1.0000	1.0362	1.0362	2.0214
-40	25	19.131	21.004	1.0000	1.0569	1.0569	3.1017
-40	30	17.685	25.042	1.0000	1.0826	1.0826	4.3238
-35	0	27.799	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
-35	5	27.685	4.552	1.0000	1.0026	1.0026	0.0847
-35	10	27.339	9.093	1.0000	1.0103	1.0103	0.3508
-35	15	26.755	13.610	1.0000	1.0233	1.0233	1.1903
-35	20	25.918	18.091	1.0000	1.0417	1.0417	2.2030
-35	25	24.808	22.522	1.0000	1.0659	1.0659	3.3924
-35	30	23.392	26.885	1.0000	1.0962	1.0962	5.1531
-30	0	33.359	0.000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
-30	5	33.253	4.813	1.0000	1.0029	1.0029	0.0949
-30	10	32.935	9.617	1.0000	1.0115	1.0115	0.3919
-30	15	32.394	14.402	1.0000	1.0261	1.0261	1.2836
-30	20	31.618	19.158	1.0000	1.0470	1.0470	2.3749
-30	25	30.580	23.872	1.0000	1.0746	1.0746	4.0709
-30	30	29.255	28.531	1.0000	1.1094	1.1094	5.5645

CYLINDRICAL PROJ.  
(CY CY7) QB=20 QL=70

$$B_S = -60$$

$$B_N = -40$$

$$L_W = 0$$

$$L_E = 20$$

$$d_S = 5$$

$$m = 1:10\ 000\ 000$$

B	L	X (cm)	Y (cm)	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	P	ω*
-60	0	0.000	0.000	1.0093	1.0093	1.0187	0.0000
-60	5	2.448	-1.359	1.0045	1.0045	1.0090	0.0000
-60	10	4.777	-2.888	1.0019	1.0038	1.0038	0.0000
-60	15	6.984	-4.582	1.0004	1.0004	1.0007	0.0000
-60	20	9.056	-6.433	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
-55	0	2.562	4.976	1.0046	1.0046	1.0093	0.0000
-55	5	5.346	3.403	1.0014	1.0014	1.0028	0.0000
-55	10	8.006	1.642	1.0001	1.0001	1.0002	0.0000
-55	15	10.533	-0.301	1.0004	1.0004	1.0008	0.0000
-55	20	12.915	-2.462	1.0022	1.0022	1.0044	0.0000
-50	0	5.152	9.915	1.0015	1.0015	1.0031	0.0000
-50	5	8.257	8.143	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
-50	10	11.236	6.189	1.0008	1.0008	1.0016	0.0000
-50	15	14.079	3.992	1.0036	1.0036	1.0072	0.0000
-50	20	16.773	1.614	1.0081	1.0081	1.0162	0.0000
-45	0	7.757	14.831	1.0001	1.0001	1.0002	0.0000
-45	5	11.170	12.880	1.0008	1.0008	1.0015	0.0000
-45	10	14.460	10.714	1.0041	1.0041	1.0082	0.0000
-45	15	17.617	8.327	1.0098	1.0098	1.0193	0.0000
-45	20	20.627	5.717	1.0176	1.0176	1.0355	0.0000
-40	0	10.365	19.741	1.0003	1.0003	1.0007	0.0000
-40	5	14.074	17.634	1.0036	1.0036	1.0072	0.0000
-40	10	17.669	15.300	1.0100	1.0100	1.0200	0.0000
-40	15	21.141	12.739	1.0192	1.0192	1.0387	0.0000
-40	20	24.474	9.913	1.0309	1.0309	1.0627	0.0000

CYLINDRICAL PROJ.

$$B_S = 18$$

$$B_N = 24$$

$$L_W = 118.3$$

$$L_E = 121.3$$

$$(CU\ UTM)_3$$

$$L_0 = 120$$

$$db = 2$$

$$dl = 0.3$$

$$m = 1:500000$$

B	L	X(m)/x(cm)	Y(m)/y(cm)	r/U
18.00	118.30	199 0863.553 0.000	40 341188.311 0.000	-0.2748 0.9999
18.00	119.00	199 0508.571 -0.071	40 334131.214 10.588	-0.1832 0.9997
18.00	119.30	199 0292.428 -0.114	40 447067.249 21.175	-0.0915 0.9996
18.00	120.00	199 0221.056 -0.128	40 500000.000 31.762	0.0000 0.9996
18.00	120.30	199 0292.428 -0.114	40 552932.752 42.248	0.0916 0.9996
18.00	121.00	199 0508.571 -0.071	40 605888.766 52.936	0.1833 0.9997
18.00	121.30	199 0863.556 0.000	40 658811.389 63.524	0.2749 0.9999

<i>B</i>	<i>L</i>	<i>X(m)/x(cm)</i>	<i>Y(m)/y(cm)</i>	<i>r/U</i>
20.00	118.30	221 2223.415 44.275	40 343075.685 0.377	-0.3046 0.9999
20.00	119.00	221 1833.001 44.193	40 395388.911 10.840	-0.2030 0.9997
20.00	119.30	221 1598.803 44.147	40 447695.992 21.301	-0.1015 0.9996
20.00	120.00	221 1520.747 44.131	40 500000.000 31.762	0.0000 0.9996
20.00	120.30	221 1598.803 44.147	40 552304.008 42.223	0.1016 0.9996
20.00	121.00	221 1833.001 44.193	40 604611.039 52.634	0.2031 0.9997
20.00	121.30	221 2223.415 44.271	40 656924.315 63.147	0.3047 0.9999
22.00	118.30	243 3629.741 88.553	40 345153.311 0.792	-0.3342 0.9999
22.00	119.00	243 3207.793 88.468	40 396773.619 11.117	-0.2228 0.9997
22.00	119.30	243 2954.679 88.418	40 448388.233 21.439	-0.1113 0.9996
22.00	120.00	243 2870.316 88.401	40 500000.000 31.762	0.0000 0.9996
22.00	120.30	243 2954.679 88.418	40 551611.767 42.084	0.1114 0.9996
22.00	121.00	243 3207.793 88.468	40 603226.381 52.407	0.2229 0.9997
22.00	121.30	243 3629.741 88.553	40 654846.689 62.731	0.3343 0.9999
24.00	118.30	285 5086.301 132.844	40 347419.074 1.246	-0.3636 0.9999
24.00	119.00	285 4634.871 132.754	40 398283.732 11.419	-0.2423 0.9997
24.00	119.30	285 4364.068 132.700	40 449143.171 21.590	-0.1211 0.9996
24.00	120.00	285 4273.810 132.682	40 500000.000 31.762	0.0000 0.9996
24.00	120.30	285 4364.068 132.700	40 550856.829 41.933	0.1212 0.9996
24.00	121.00	285 4634.871 132.754	40 601716.268 52.105	0.2424 0.9997
24.00	121.30	285 5086.301 132.844	40 652580.926 62.278	0.3637 0.9999

CONICAL PROJ. (CEN CN <sub>3</sub> )							
<i>B<sub>R</sub></i> =31		<i>B<sub>0</sub></i> =35.3					
<i>B<sub>N</sub></i> =40		<i>L<sub>0</sub></i> =96					
<i>L<sub>W</sub></i> =89		<i>dS</i> =1					
<i>L<sub>E</sub></i> =103		<i>m</i> =1.1000000					
<i>B</i>	<i>L</i>	<i>X</i> (cm)	<i>Y</i> (cm)	<i>U<sub>1</sub></i>	<i>U<sub>2</sub></i>	<i>P</i>	<i>ω*</i>
31	96	0.000	0.000	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000
31	97	0.049	9.579	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000

$B$	$L$	$X$ (cm)	$Y$ (cm)	$U_1$	$U_2$	$P$	$\omega'$
31	98	0.194	19.159	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000
31	99	0.437	28.735	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000
31	100	0.777	38.309	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000
31	101	1.214	47.879	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000
31	102	1.749	57.444	1.0031	1.0031	1.0062	0.0001
31	103	2.380	67.003	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000
32	96	11.115	0.000	1.0019	1.0019	1.0038	0.0000
32	97	11.163	9.467	1.0019	1.0019	1.0038	0.0000
32	98	11.307	18.933	1.0019	1.0019	1.0038	0.0000
32	99	11.547	28.397	1.0019	1.0019	1.0038	0.0000
32	100	11.883	37.858	1.0019	1.0019	1.0038	0.0000
32	101	12.315	47.315	1.0019	1.0019	1.0038	0.0000
32	102	12.943	56.768	1.0019	1.0019	1.0038	0.0000
32	103	13.467	66.214	1.0019	1.0019	1.0038	0.0000
33	96	22.220	0.000	1.0010	1.0010	1.0019	0.0000
33	97	22.267	9.354	1.0010	1.0010	1.0019	0.0000
33	98	22.410	18.707	1.0010	1.0010	1.0019	0.0000
33	99	22.647	28.059	1.0010	1.0010	1.0019	0.0000
33	100	22.979	37.407	1.0010	1.0010	1.0019	0.0000
33	101	23.406	46.752	1.0010	1.0010	1.0019	0.0000
33	102	23.828	56.092	1.0010	1.0010	1.0019	0.0000
33	103	24.544	65.426	1.0010	1.0000	1.0019	0.0000
34	96	33.319	0.000	1.0004	1.0004	1.0007	0.0000
34	97	33.366	9.241	1.0004	1.0004	1.0007	0.0000
34	98	33.506	18.482	1.0004	1.0004	1.0007	0.0000
34	99	33.741	27.721	1.0004	1.0004	1.0007	0.0000
34	100	34.069	36.957	1.0004	1.0004	1.0007	0.0000
34	101	34.490	46.189	1.0004	1.0004	1.0007	0.0000
34	102	25.006	55.417	1.0004	1.0004	1.0007	0.0000
34	103	25.615	64.639	1.0004	1.0004	1.0007	0.0000
35	96	44.414	0.000	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
35	97	44.460	9.129	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
35	98	44.598	18.257	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
35	99	44.831	27.283	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
35	100	45.155	36.507	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
35	101	45.572	45.627	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
35	102	46.981	54.742	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
35	103	48.682	63.851	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
36	96	55.509	0.000	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
36	97	55.555	9.016	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
36	98	55.692	18.032	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
36	99	55.921	27.046	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
36	100	56.241	36.057	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
36	101	56.653	45.064	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
36	102	57.155	54.067	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
36	103	57.750	63.064	1.0000	1.0000	1.0001	0.0000
37	96	66.608	0.000	1.0003	1.0003	1.0003	0.0000
37	97	66.653	8.964	1.0003	1.0003	1.0006	0.0000
37	98	66.789	17.807	1.0003	1.0003	1.0006	0.0000
37	99	67.014	26.708	1.0003	1.0003	1.0006	0.0000
37	100	67.331	35.607	1.0003	1.0003	1.0006	0.0000
37	101	67.737	44.501	1.0003	1.0003	1.0006	0.0000
37	102	68.234	53.392	1.0003	1.0003	1.0006	0.0000
37	103	68.820	62.277	1.0003	1.0003	1.0006	0.0000
38	96	77.714	0.000	1.0009	1.0009	1.0019	0.0000
38	97	77.758	8.791	1.0009	1.0009	1.0019	0.0000
38	98	77.892	17.581	1.0009	1.0009	1.0019	0.0000
38	99	78.115	26.370	1.0009	1.0009	1.0019	0.0000
38	100	78.427	35.156	1.0009	1.0009	1.0019	0.0000
38	101	78.828	43.938	1.0009	1.0009	1.0019	0.0000
38	102	79.319	52.716	1.0009	1.0009	1.0019	0.0000
38	103	79.898	61.488	1.0009	1.0009	1.0019	0.0000
39	96	88.829	0.000	1.0018	1.0018	1.0037	0.0000
39	97	88.873	8.673	1.0018	1.0018	1.0037	0.0000
39	98	89.005	17.356	1.0018	1.0018	1.0037	0.0000
39	99	89.226	26.032	1.0018	1.0018	1.0037	0.0000

B	L	X (cm)	Y (cm)	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	P	ω°
39	100	89.534	34.705	1.0018	1.0018	1.0037	0.0000
39	101	89.930	43.375	1.0018	1.0018	1.0037	0.0000
39	102	90.414	52.040	1.0018	1.0018	1.0037	0.0000
39	103	90.986	60.700	1.0018	1.0018	1.0037	0.0000
40	96	99.958	0.000	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000
40	97	100.903	8.565	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000
40	98	100.133	17.130	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000
40	99	100.350	25.693	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000
40	100	100.654	34.253	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000
40	101	101.045	42.810	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000
40	102	101.523	51.363	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000
40	103	102.087	59.910	1.0031	1.0031	1.0062	0.0000

CONICAL PROJ. ( CER CR 3 )							
$B_B=15$		$B_J=35$					
$B_N=55$		$L_S=110$					
$L_W=90$		$dS=5$					
$L_E=130$		$m=1:10000000$					
B	L	X (cm)	Y (cm)	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	P	ω°
15	110	0.000	0.000	0.9704	1.0305	1	3.2613
15	115	0.138	5.539	0.9704	1.0305	1	3.2613
15	120	0.553	11.064	0.9704	1.0305	1	3.2613
15	125	1.243	16.561	0.9704	1.0305	1	3.2613
15	130	2.208	22.018	0.9704	1.0305	1	3.2613
20	110	5.434	0.000	0.9929	1.0071	1	0.4853
20	115	6.566	5.267	0.9929	1.0071	1	0.4853
20	120	5.960	10.522	0.9929	1.0071	1	0.4853
20	125	6.617	15.750	0.9929	1.0071	1	0.4853
20	130	7.534	20.938	0.9929	1.0071	1	0.4853
25	110	10.984	0.000	1.0111	0.9891	1	1.1536
25	115	11.109	4.990	1.0111	0.9891	1	1.1536
25	120	11.483	9.968	1.0111	0.9891	1	1.1536
25	125	12.105	14.921	1.0111	0.9891	1	1.1536
25	130	12.973	19.836	1.0111	0.9891	1	1.1536
30	110	16.625	0.000	1.0242	0.9764	1	2.4418
30	115	16.743	4.708	1.0242	0.9764	1	2.4418
30	120	17.095	9.405	1.0242	0.9764	1	2.4418
30	125	17.682	14.078	1.0242	0.9764	1	2.4418
30	130	18.502	18.716	1.0242	0.9764	1	2.4418
35	110	22.327	0.000	1.0314	0.9695	1	3.3236
35	115	22.437	4.423	1.0314	0.9695	1	3.3236
35	120	22.768	8.836	1.0314	0.9695	1	3.3236
35	125	23.320	13.226	1.0314	0.9695	1	3.3236
35	130	24.090	17.584	1.0314	0.9695	1	3.3236
40	110	28.055	0.000	1.0315	0.9694	1	3.3327
40	115	28.158	4.137	1.0315	0.9694	1	3.3327
40	120	28.468	8.264	1.0315	0.9694	1	3.3327
40	125	28.984	12.371	1.0315	0.9694	1	3.3327
40	130	29.704	16.446	1.0315	0.9694	1	3.3327
45	110	33.765	0.000	1.0230	0.9775	1	2.3613
45	115	33.861	3.852	1.0230	0.9775	1	2.3613
45	120	34.150	7.684	1.0230	0.9775	1	2.3613
45	125	34.630	11.518	1.0230	0.9775	1	2.3613
45	130	35.300	15.312	1.0230	0.9775	1	2.3613
50	110	39.403	0.000	1.0036	0.9964	1	0.2438
50	115	39.493	3.570	1.0036	0.9964	1	0.2438
50	120	39.760	7.132	1.0036	0.9964	1	0.2438
50	125	40.205	10.675	1.0036	0.9964	1	0.2438
50	130	40.827	14.193	1.0036	0.9964	1	0.2438



B	L	X (cm)	Y (cm)	$U_1$	$U_2$	P	$\omega$
55	110	44.902	0.000	0.9704	1.0305	1	3.2613
55	115	44.985	3.295	0.9704	1.0305	1	3.2613
55	120	45.231	6.583	0.9704	1.0305	1	3.2613
55	125	45.642	9.854	0.9704	1.0305	1	3.2613
55	130	46.216	13.101	0.9704	1.0305	1	3.2613

CONICAL PROJ.

$B_S=15$

(CED CD<sub>4</sub>)

$B_D=35$

$B_N=55$

$L_D=110$

$L_W=90$

$dS=5$

$L_R=130$

$m=1:10000000$

B	L	X (cm)	Y (cm)	$U_1$	$U_2$	P	$\omega$
15	110	0.000	0.000	1.0000	1.0425	1.0425	2.2306
15	115	0.143	5.604	1.0000	1.0425	1.0425	2.2306
15	120	0.573	11.193	1.0000	1.0425	1.0425	2.2306
15	125	1.288	16.753	1.0000	1.0425	1.0425	2.2306
15	130	2.286	22.269	1.0000	1.0425	1.0425	2.2306
20	110	5.534	0.000	1.0000	1.0173	1.0173	0.5903
20	115	5.670	5.321	1.0000	1.0173	1.0173	0.5903
20	120	6.078	10.628	1.0000	1.0173	1.0173	0.5903
20	125	6.757	15.907	1.0000	1.0173	1.0173	0.5903
20	130	7.705	21.144	1.0000	1.0173	1.0173	0.5903
25	110	11.071	0.000	1.0000	0.9985	0.9985	0.0516
25	115	11.200	5.038	1.0000	0.9985	0.9985	0.0516
25	120	11.586	10.062	1.0000	0.9985	0.9985	0.0516
25	125	12.229	15.060	1.0000	0.9985	0.9985	0.0516
25	130	13.129	20.019	1.0000	0.9985	0.9985	0.0516
30	110	16.612	0.000	1.0000	0.9859	0.9859	0.4846
30	115	16.733	4.754	1.0000	0.9859	0.9859	0.4846
30	120	17.098	9.456	1.0000	0.9859	0.9859	0.4846
30	125	17.704	14.213	1.0000	0.9859	0.9859	0.4846
30	130	18.551	18.893	1.0000	0.9859	0.9859	0.4846
35	110	22.156	0.000	1.0000	0.9799	0.9799	1.0946
35	115	22.271	4.471	1.0000	0.9799	0.9799	1.0946
35	120	22.614	8.930	1.0000	0.9799	0.9799	1.0946
35	125	23.184	13.366	1.0000	0.9799	0.9799	1.0946
35	130	23.980	17.767	1.0000	0.9799	0.9799	1.0946
40	110	27.706	0.000	1.0000	0.9811	0.9811	1.0544
40	115	27.813	4.187	1.0000	0.9811	0.9811	1.0544
40	120	28.134	8.363	1.0000	0.9811	0.9811	1.0544
40	125	28.668	12.517	1.0000	0.9811	0.9811	1.0544
40	130	29.414	16.639	1.0000	0.9811	0.9811	1.0544
45	110	33.260	0.000	1.0000	0.9905	0.9905	0.3259
45	115	33.360	3.903	1.0000	0.9905	0.9905	0.3259
45	120	33.659	7.796	1.0000	0.9905	0.9905	0.3259
45	125	34.157	11.668	1.0000	0.9905	0.9905	0.3259
45	130	34.852	15.510	1.0000	0.9905	0.9905	0.3259
50	110	38.819	0.000	1.0000	1.0099	1.0099	0.3355
50	115	38.912	3.619	1.0000	1.0099	1.0099	0.3355
50	120	39.189	7.228	1.0000	1.0099	1.0099	0.3355
50	125	39.651	10.818	1.0000	1.0099	1.0099	0.3355
50	130	40.296	14.381	1.0000	1.0099	1.0099	0.3355
55	110	44.383	0.000	1.0000	1.0425	1.0425	2.2306
55	115	44.488	3.334	1.0000	1.0425	1.0425	2.2306
55	120	44.724	6.660	1.0000	1.0425	1.0425	2.2306
55	125	45.150	9.968	1.0000	1.0425	1.0425	2.2306
55	130	45.744	13.250	1.0000	1.0425	1.0425	2.2306

附录 考虑到我国的地理位置, 附表所载纬度区间均自 0°至60°。

附表一

子午圈曲率半径

(以m为单位)

$\varphi$	$M$	$\Delta \cdot 30$	$\varphi$	$M$	$\Delta \cdot 30$	$\varphi$	$M$	$\Delta \cdot 30$
0° 0'	6 335 553	0.16	20° 0'	6 343 001	12.04	40° 0'	6 361 926	18.38
30	6 335 558	0.48	30	6 343 362	12.29	30	6 362 477	18.43
1 0	6 335 572	0.81	21 0	6 343 731	12.53	41 0	6 363 030	18.48
30	6 335 596	1.13	30	6 344 107	12.77	30	6 363 584	18.52
2 0	6 335 630	1.45	22 0	6 344 490	13.00	42 0	6 364 140	18.56
30	6 335 674	1.78	30	6 344 879	13.23	30	6 364 697	18.59
3 0	6 335 727	2.09	23 0	6 345 276	13.45	43 0	6 365 254	18.61
30	6 335 790	2.41	30	6 345 680	13.68	30	6 365 813	18.64
4 0	6 335 862	2.74	24 0	6 346 090	14.90	44 0	6 366 372	18.65
30	6 335 944	3.05	30	6 346 507	14.11	30	6 366 931	18.66
5 0	6 336 036	3.37	25 0	6 346 931	14.32	45 0	6 367 491	18.66
30	6 336 137	3.69	30	6 347 360	14.53	30	6 368 051	18.66
6 0	6 336 248	4.01	26 0	6 347 796	14.72	46 0	6 368 611	18.64
30	6 336 368	4.32	30	6 348 238	15.92	30	6 369 170	18.64
7 0	6 336 498	4.64	27 0	6 348 686	15.12	47 0	6 369 729	18.61
30	6 336 637	4.95	30	6 349 139	15.31	30	6 370 287	18.59
8 0	6 336 785	5.26	28 0	6 349 598	15.49	48 0	6 370 845	18.55
30	6 336 940	5.56	30	6 350 063	15.66	30	6 371 402	18.52
9 0	6 337 110	5.87	29 0	6 350 533	16.84	49 0	6 371 957	18.48
30	6 337 286	6.18	30	6 351 008	16.91	30	6 372 512	18.43
10 0	6 337 471	6.48	30 0	6 351 488	16.18	50 0	6 373 065	18.37
30	6 337 666	6.79	30	6 351 974	16.33	30	6 373 616	18.31
11 0	6 337 869	7.08	31 0	6 352 464	16.48	51 0	6 374 165	18.25
30	6 338 082	7.39	30	6 352 958	16.63	30	6 374 713	18.18
12 0	6 338 303	7.68	32 0	6 353 457	16.78	52 0	6 375 258	18.10
30	6 338 534	7.97	30	6 353 961	16.93	30	6 375 801	18.03
13 0	6 338 773	8.27	33 0	6 354 468	17.05	53 0	6 376 342	17.93
30	6 339 021	8.56	30	6 354 980	17.19	30	6 376 880	17.84
14 0	6 339 277	8.84	34 0	6 355 495	17.30	54 0	6 377 415	17.74
30	6 339 542	9.12	30	6 356 014	17.43	30	6 377 947	17.64
15 0	6 339 816	9.40	35 0	6 356 537	17.54	55 0	6 378 476	17.53
30	6 340 098	9.68	30	6 357 064	17.64	30	6 379 002	17.42
16 0	6 340 388	9.96	36 0	6 357 593	17.75	56 0	6 379 525	17.29
30	6 340 687	10.23	30	6 358 126	17.84	30	6 380 044	17.17
17 0	6 340 994	10.50	37 0	6 358 661	17.95	57 0	6 380 569	17.04
30	6 341 309	10.76	30	6 359 199	18.02	30	6 381 070	16.90
18 0	6 341 632	11.03	38 0	6 359 740	18.11	58 0	6 381 577	16.76
30	6 341 962	11.28	30	6 360 283	18.18	30	6 382 080	16.61
19 0	6 342 301	11.54	39 0	6 360 829	18.26	59 0	6 382 578	16.47
30	6 342 647	11.79	30	6 361 376	18.31	30	6 383 072	16.30
20° 0'	6 343 001	12.04	40° 0'	6 361 926		60 0	6 383 561	
$\varphi$	$M$	$\Delta \cdot 30$	$\varphi$	$M$	$\Delta \cdot 30$	$\varphi$	$M$	$\Delta \cdot 30$

附表二

卯酉圈曲率半径  $N$

(以m为单位)

$\varphi$	$M$	$\Delta \cdot 30$	$\varphi$	$M$	$\Delta \cdot 30$	$\varphi$	$M$	$\Delta \cdot 30$
0° 0'	6 378 245	0.05	5° 0'	6 378 407	1.13	10° 0'	6 378 889	2.17
30	6 378 247	0.17	30	6 378 441	1.24	30	6 378 954	2.28
1 0	6 378 252	0.27	6 0	6 378 478	1.34	11 0	6 379 022	2.37
30	6 378 260	0.38	30	6 378 519	1.46	30	6 379 094	2.48
2 0	6 378 271	0.49	7 0	6 378 562	1.56	12 0	6 379 168	2.58
30	6 378 286	0.60	30	6 378 609	1.66	30	6 379 245	2.68
3 0	6 378 304	0.70	8 0	6 378 658	1.76	13 0	6 379 325	2.78
30	6 378 325	0.81	30	6 378 711	1.87	30	6 379 409	2.87
4 0	6 378 349	0.92	9 0	6 378 767	1.97	14 0	6 379 495	2.96
30	6 378 376	1.03	30	6 378 826	2.08	30	6 379 584	3.06
5° 0'	6 378 407		10° 0'	6 378		15° 0'	6 379 675	

续表二

$\varphi$	$N$	$\Delta:30$	$\varphi$	$N$	$\Delta:30$	$\varphi$	$N$	$\Delta:30$
15° 0'	6 379 675		30° 0'	6 383 588		45° 0'	6 388 945	
30	6 379 770	3.16	30	6 383 751	5.42	30	6 389 132	6.24
16 0	6 379 867	3.25	31 0	6 383 915	5.47	46 0	6 389 319	6.24
30	6 379 968	3.34	30	6 384 081	5.52	30	6 389 506	6.24
17 0	6 380 070	3.42	32 0	6 384 248	5.57	47 0	6 389 693	6.22
30	6 380 178	3.52	30	6 384 416	5.62	30	6 389 880	6.23
18 0	6 380 284	3.61	33 0	6 384 586	5.67	48 0	6 390 066	6.21
30	6 380 395	3.70	30	6 384 758	5.71	30	6 390 252	6.20
19 0	6 380 509	3.79	34 0	6 384 930	5.76	49 0	6 390 438	6.20
30	6 380 625	3.87	30	6 385 104	5.80	30	6 390 624	6.17
20 0		3.95	35 0		5.83	50 0		6.16
30	6 380 743		30	6 385 278		30	6 390 808	
21 0	6 380 865	4.04	36 0	6 385 455	5.88	51 0	6 390 993	6.14
30	6 380 988	4.12	30	6 385 633	5.91	30	6 391 176	6.12
22 0	6 381 114	4.20	37 0	6 385 811	5.95	52 0	6 391 359	6.10
30	6 381 242	4.28	30	6 385 990	5.98	30	6 391 542	6.08
23 0	6 381 373	4.36	38 0	6 386 170	6.00	53 0	6 391 723	6.05
30	6 381 506	4.44	30	6 386 351	6.03	30	6 391 904	6.02
24 0	6 381 642	4.51	39 0	6 386 533	6.06	54 0	6 392 083	5.99
30	6 381 779	4.58	30	6 386 716	6.08	30	6 392 262	5.96
25 0		4.66	40 0	6 386 899	6.11	55 0	6 392 440	5.93
30	6 382 061	4.73	30	6 387 083	6.13	30	6 392 617	5.90
26 0	6 382 205	4.80	41 0	6 387 267	6.15	56 0	6 392 793	5.85
30	6 382 351	4.87	30	6 387 452	6.17	30	6 392 967	5.82
27 0	6 382 499	4.94	42 0	6 387 638	6.19	57 0	6 393 140	5.77
30	6 382 649	5.00	30	6 387 824	6.20	30	6 393 312	5.73
28 0	6 382 801	5.06	43 0	6 388 010	6.20	58 0	6 393 483	5.69
30	6 383 955	5.13	30	6 388 197	6.22	30	6 393 652	5.64
29 0	6 383 111	5.19	44 0	6 388 384	6.23	59 0	6 393 820	5.60
30	6 383 268	5.25	30	6 388 571	6.24	30	6 393 987	5.55
30° 0'	6 383 427	5.31	45° 0'	6 388 758	6.24	60° 0'	6 394 152	5.50
	6 383 588	5.38		6 388 945	6.24		6 394 315	5.44
$\varphi$	$M$	$\Delta:30$	$\Delta:30$	$N$	$\Delta:30$	$\varphi$	$N$	$\Delta:30$

附表三

平行圆(纬线)曲率半径  $r$  (m)

$\varphi$	$r$	$\varphi$	$r$	$\varphi$	$\lg r$	$\varphi$	$\lg r$
0° 0'	6 378 245	30°	6 228 032	0° 0'	6 804 7012	30	6.794 3508
30	6 378 004	13 0	6 215 824	30	6 804 6848	13 0	6.793 4987
1 0	6 377 280	30	6 208 145	1 0	6 804 6355	30	6.792 6119
30	6 376 074	14 0	6 189 996	30	6 804 5533	14 0	6.791 6904
2 0	6 374 385	30	6 176 379	2 0	6 804 4383	30	6.790 7339
30	6 372 215			30	6 804 2904		
3 0	6 370 562	15 0	6 162 293	3 0	6 804 1096	15 0	6.789 7424
30	6 376 428	30	6 147 740	30	6 803 8958	30	6.788 7155
4 0	6 362 812	16 0	6 132 722	4 0	6 803 6491	16 0	6.787 6533
30	6 358 714	30	6 117 239	30	6 803 3693	30	6.786 5554
5 0		17 0	6 101 292			17 0	6.785 4218
30	6 354 135	30	6 084 882	5 0	6 803 0565	30	6.784 2522
6 0	6 349 076	18 0	6 068 011	30	6 802 7105	18 0	6.783 0464
30	6 343 536	30	6 050 680	6 0	6 802 3314	30	6.781 8042
7 0	6 337 516	19 0	6 032 890	30	6 801 9191	19 0	6.780 5254
30	6 331 017	30	6 014 642	7 0	6 801 4735	30	6.779 2096
8 0	6 324 039			30	6 800 9945		
30	6 316 582	20 0	5 995 938	8 0	6 800 4821	20 0	6.777 8571
9 0	6 308 847	30	5 976 778	30	6 799 9362	30	6.776 4672
30	6 300 234	21 0	5 957 166	9 0	6 799 3567	21 0	6.775 0397
	6 391 345	30	5 937 101	30	6 798 7435	30	6.773 5744
10 0		22 0	5 916 585			22 0	6.772 0711
30	6 281 979	30	5 895 620	10 0	6 798 0965	30	6.770 5295
	6 272 138	23 0	5 874 208	30	6 797 4158	23 0	6.768 9432
11 0	6 261 822	30	5 852 349	11 0	6 796 7007	30	6.767 3939
30	6 251 031	24 0	5 830 046	30	6 795 9517	24 0	6.765 6702
12 0	6 239 788	30	5 807 299	12 0'	6 795 1684	30	6.763 9714

续表三

$\varphi$	$r$	$\varphi$	$r$	$\varphi$	$lgr$	$\varphi$	$lgr$
25 0'	5 784 112	30	4 709 735	25 0	6.762 2367	30	6.672 9965
30	5 760 484	43 0	4 672 031	30	6.760 4590	43 0	6.669 5057
26 0	5 736 419	30	4 633 970	26 0	6.758 6409	30	6.666 9532
30	5 711 918	44 0	4 595 553	30	6.756 7819	44 0	6.662 3378
27 0	5 686 982	30	4 556 784	27 0	6.754 8818	30	6.658 6585
30	5 661 614	45 0	4 517 666	30	6.752 9402	45 0	6.654 9141
28 0	5 625 815	30	4 478 202	28 0	6.750 8567	30	6.651 1037
30	5 609 587	46 0	4 438 394	30	6.748 9309	46 0	6.647 2259
29 0	5 582 932	30	4 398 246	29 0	6.746 8623	30	6.643 2795
30	5 555 852	47 0	4 357 760	30	6.744 7607	47 0	6.639 2633
30 0	5 528 349	30	4 316 840	30 0	6.742 5955	30	6.635 1760
30	5 500 426	48 0	4 275 789	30	6.740 3963	48 0	6.631 0163
31 0	5 472 083	30	4 234 309	31 0	6.738 1527	30	6.626 7826
30	5 443 324	49 0	4 192 505	30	6.735 8642	49 0	6.622 4736
32 0	5 414 149	30	4 150 378	32 0	6.733 5302	30	6.618 0877
30	5 384 562	50 0	4 107 933	30	6.731 1604	50 0	6.613 6233
33 0	5 354 565	30	4 065 171	33 0	6.728 7242	30	6.609 0788
30	5 324 159	51 0	4 022 098	30	6.726 2510	51 0	6.604 4526
34 0	5 293 347	30	3 978 715	34 0	6.723 7304	30	6.599 7428
30	5 262 132	52 0	3 935 026	30	6.721 1617	52 0	6.594 9476
35 0	5 230 514	30	3 891 034	35 0	6.718 5444	30	6.590 0651
30	5 198 498	53 0	3 846 744	30	6.715 8779	53 0	6.585 0932
36 0	5 166 085	30	3 802 157	36 0	6.713 1616	30	6.580 0300
30	5 133 278	54 0	3 757 278	30	6.710 3948	54 0	6.574 8733
37 0	5 100 079	30	3 712 109	37 0	6.707 5789	30	6.569 6207
30	5 066 490	55 0	3 666 654	30	6.704 7072	55 0	6.564 2700
38 0	5 032 514	30	3 620 918	38 0	6.701 7830	30	6.558 8186
30	4 998 153	56 0	3 574 902	30	6.698 8096	56 0	6.553 2641
39 0	4 963 410	30	3 528 611	39 0	6.695 7802	30	6.547 6037
30	4 928 288	57 0	3 482 047	30	6.692 6961	57 0	6.541 8347
40 0	4 892 790	30	3 435 216	40 0	6.689 5565	30	6.535 9540
30	4 856 916	58 0	3 388 120	30	6.686 3606	58 0	6.529 9587
41 0	4 820 671	30	3 340 762	41 0	6.683 1075	30	6.523 8455
30	4 784 058	59 0	3 293 147	30	6.679 7964	59 0	6.517 6111
42° 0'	4 747 078	30	3 245 277	42° 0'	6.676 4264	30	6.511 2518
		60° 0'	3 197 158			60° 0'	6.504 7640
$\varphi$	$r$	$\varphi$	$r$	$\varphi$	$lgr$	$\varphi$	$lgr$

附表四

由赤道至纬度为 $\varphi$ 的纬线间的子午线弧长 $s$ ，纬差30'的经线弧长，  
经差30'的纬线弧长和 $Nctg\varphi$ 值

$\varphi$	由赤道至 $\varphi$ 纬 线间的子午线 弧长(m)	纬差30'的 经线弧长 (m)	经差30' 的纬弧长 (m)	$Nctg\varphi$ (km)	$\varphi$	由赤道至 $\varphi$ 纬 线间的子午线 弧长(m)	纬差30'的 经线弧长 (m)	经差30'的 纬线弧长 (m)	$Nctg\varphi$ (km)
0° 0'	0	55 288	55 661	$\infty$	8° 0'	884 668	55 289	55 123	45 386.51
30	55 288	55 288	55 859	730 874.7	30	939 967	55 301	55 053	42 680.95
1 0	110 576	55 289	55 652	365 409.8	9 0	955 268	55 303	54 980	40 273.95
30	165 865	55 288	55 642	243 575.9	30	1 050 571	55 304	54 902	38 118.26
2 0	221 153	55 289	55 627	182 649.8	10 0	1 105 875	55 305	54 821	36 176.48
30	276 442	55 290	55 608	146 086.8	30	1 161 180	55 308	54 735	34 417.76
3 0	331 732	55 290	55 585	121 705.3	11 0	1 216 488	55 309	54 645	32 817.22
30	387 022	55 290	55 558	104 284.7	30	1 271 797	55 311	54 551	31 354.25
4 0	442 312	55 291	55 526	91 214.64	12 0	1 327 108	55 313	54 452	30 011.63
30	497 603	55 292	55 490	81 044.96	30	1 382 421	55 316	54 350	28 774.02
5 0	552 895	55 293	55 450	72 905.53	13 0	1 437 737	55 317	54 243	27 631.89
30	608 183	55 294	55 406	66 242.64	30	1 493 054	55 316	54 133	26 572.15
6 0	663 482	55 295	55 358	60 687.17	14 0	1 548 373	55 322	54 018	25 586.76
30	718 777	55 295	55 305	55 983.54	30	1 603 695	55 324	53 899	24 666.02
7 0	774 072	55 297	55 249	51 949.22	15° 0'	1 659 019	55 327	53 776	23 809.17
30	829 369	55 295	55 188	48 350.34	30	1 714 346	55 329	53 649	23 004.71

续表四

φ	由赤道至φ纬	纬差30'的	经差30'的	Nctgφ	φ	由赤道至φ纬	纬差30'的	经差30'的	Nctgφ
	线间的子午线	经线弧长	纬线弧长			线间的子午线	经线弧长	纬线弧长	
	弧长(m)	(m)	(m)	(km)		弧长(m)	(m)	(m)	(km)
30	1 714 346	55 329	53 649	23 004.71	38° 0'	4 207 573	55 501	43 917	8 174.157
16 0	1 769 675	55 331	53 518	22 249.24	30	4 263 074	55 506	43 617	8 028.973
30	1 825 006	55 335	53 383	21 538.41	39 0	4 318 580	55 511	43 314	7 886.937
17 0	1 880 341	55 337	53 244	20 868.27	30	4 374 091	55 516	43 007	7 747.908
30	1 935 678	55 339	53 101	20 235.33					
18 0	1 991 017	55 343	52 953	19 636.50	40 0	4 429 607	55 521	42 698	7 611.829
30	2 046 360	55 346	52 802	19 068.99	30	4 485 128	55 526	42 385	7 478.529
19 0	2 101 706	55 348	52 647	18 530.34	41 0	4 540 654	55 530	42 068	7 347.924
30	2 157 054	55 352	52 488	18 018.33	30	4 596 184	55 535	41 749	7 219.911
					42 0	4 651 719	55 540	41 426	7 094.397
20 0	2 212 406	55 354	52 324	17 530.95	30	4 707 259	55 545	41 100	6 971.290
30	2 267 760	55 358	52 157	17 066.40	43 0	4 762 804	55 550	40 771	6 850.502
21 0	2 323 118	55 361	51 986	16 623.04	30	4 818 354	55 554	40 439	6 731.951
30	2 378 479	55 365	51 811	16 199.40	44 0	4 873 908	55 560	40 104	6 615.559
22 0	2 433 844	55 368	51 632	15 794.13	30	4 929 468	55 564	39 765	6 501.247
30	2 489 212	55 371	51 449	15 406.60					
23 0	2 544 583	55 375	51 262	15 033.89	45 0	4 985 032	55 570	39 424	6 388.945
30	2 599 958	55 378	51 071	14 676.77	30	5 040 602	55 574	39 080	6 278.593
24 0	2 655 336	55 382	50 877	14 333.71	46 0	5 096 176	55 579	38 732	6 170.094
30	2 710 718	55 385	50 678	14 003.84	30	5 151 755	55 584	38 382	6 063.415
					47 0	5 207 339	55 589	38 029	5 958.483
25 0	2 766 103	55 390	50 476	13 686.37	30	5 262 928	55 593	37 672	5 855.246
30	2 821 493	55 393	50 270	13 380.57	48 0	5 318 521	55 599	37 313	5 753.642
26 0	2 876 886	55 397	50 060	13 085.76	30	5 374 120	55 603	36 951	5 653.618
30	2 932 283	55 400	49 846	12 801.31	49 0	5 429 723	55 608	36 587	5 555.123
27 0	2 987 683	55 405	49 628	12 526.66	30	5 485 331	55 613	36 219	5 458.108
30	3 043 088	55 409	49 407	12 261.25					
28 0	3 098 497	55 413	49 182	12 004.59	50 0	5 540 944	55 618	35 848	5 362.525
30	3 153 910	55 416	48 953	11 756.23	30	5 596 562	55 623	35 475	5 268.328
29 0	3 209 326	55 421	48 720	11 515.72	51 0	5 652 185	55 628	35 099	5 175.473
30	3 264 747	55 425	48 484	11 282.67	30	5 707 813	55 632	34 721	5 083.917
					52 0	5 763 445	55 637	34 340	4 993.620
30 0	3 320 172	55 430	48 244	11 056.70	30	5 819 082	55 641	33 956	4 904.542
30	3 375 602	55 433	48 000	10 837.46	53 0	5 874 723	55 647	33 569	4 816.645
31 0	3 431 035	55 438	47 753	10 624.62	30	5 930 370	55 651	33 180	4 729.893
30	3 486 473	55 442	47 502	10 417.89	54 0	5 986 011	55 656	32 788	4 644.250
32 0	3 541 915	55 447	47 247	10 216.93	30	6 041 677	55 660	32 394	4 559.683
30	3 597 362	55 451	46 989	10 021.53					
33 0	3 652 813	55 455	46 727	9 831.401	55 0	6 097 337	55 665	31 998	4 476 159
30	3 708 268	55 460	46 462	9 646.317	30	6 153 002	55 670	31 598	4 393.645
34 0	3 763 728	55 465	46 193	9 466.048	56 0	6 208 672	55 674	31 197	4 312.111
30	3 819 193	55 469	45 921	9 290.384	30	6 264 346	55 679	30 793	4 231.527
					57 0	6 320 025	55 683	30 387	4 151.866
35 0	3 874 662	55 473	45 645	9 119.124	30	6 375 708	55 687	29 978	4 073.098
30	3 930 135	55 478	45 365	8 952.079	58 0	6 431 395	55 692	29 567	3 995.197
36 0	3 985 613	55 483	45 083	8 789.069	30	6 487 087	55 696	29 154	3 918.138
30	4 041 096	55 488	44 798	8 629.928	59 0	6 542 783	55 701	28 738	3 841.895
37 0	4 096 584	55 492	44 507	8 474.495	30	6 598 484	55 705	28 320	3 766.448
30	4 152 076	55 497	44 213	8 322.619					
38° 0'	4 207 573	55 501	43 917	8 174.157	60° 0'	6 654 189		27 900	3 691.759

附表五

等量纬度的对数，供计算各等角圆柱或圆锥投影之用

 $\lg U, \lg \lg U$ 

$\varphi$	$\lg U$	$\lg \lg U$	$\varphi$	$\lg U$	$\lg \lg U$
0° 0'	0.000 0000	-	30° 0'	0.237 1064	9.374 9432
30	0.003 7646	7.575 7206	30	0.241 4718	9.382 8664
1 0	0.007 5295	7.876 7673	31 0	0.245 8599	9.390 6877
30	0.011 2950	8.052 8865	30	0.250 2713	9.398 4111
2 0	0.015 0614	8.177 8844	32 0	0.254 7066	9.406 0403
30	0.018 8289	8.274 8247	30	0.259 1664	9.413 5788
3 0	0.022 5979	8.354 0674	33 0	0.263 6513	9.421 0309
30	0.026 3686	8.421 0869	30	0.268 1620	9.428 3972
4 0	0.030 1414	8.479 1628	34 0	0.272 6990	9.435 6835
30	0.033 9105	8.530 4104	30	0.277 2630	9.442 8919
5 0	0.037 6942	8.576 3743	35 0	0.281 8548	9.450 0254
30	0.041 4748	8.617 7846	30	0.286 4749	9.457 0966
6 0	0.045 2587	8.655 7021	36 0	0.291 1242	9.464 0782
30	0.049 0461	8.690 6044	30	0.295 8032	9.471 0029
7 0	0.052 8379	8.722 8406	37 0	0.300 5129	9.477 8631
30	0.056 6328	8.753 0666	30	0.305 2539	9.484 6612
8 0	0.060 4324	8.781 2696	38 0	0.310 0270	9.491 3996
30	0.064 2368	8.807 7841	30	0.314 8331	9.498 0804
9 0	0.068 0463	8.832 8047	39 0	0.319 6729	9.504 7058
30	0.071 8612	8.856 4943	30	0.324 5473	9.511 2760
10 0	0.075 6817	8.878 9906	40 0	0.329 4572	9.517 7990
30	0.079 5081	8.900 4114	30	0.334 4035	9.524 2702
11 0	0.083 3408	8.920 6578	41 0	0.339 3870	9.530 6952
30	0.087 1801	8.940 4175	30	0.344 4088	9.537 0742
12 0	0.091 0264	8.959 1671	42 0	0.349 4698	9.543 4097
30	0.094 8798	8.977 1738	30	0.354 5710	9.549 7033
13 0	0.098 7408	8.994 4967	43 0	0.359 7135	9.555 9568
30	0.102 6097	9.011 1885	30	0.364 8963	9.562 1719
14 0	0.106 4868	9.027 2959	44 0	0.370 1266	9.568 3503
30	0.110 3725	9.042 8609	30	0.375 3994	9.574 4935
15 0	0.114 2670	9.057 9210	45 0	0.380 7179	9.580 6033
30	0.118 1708	9.072 5103	30	0.386 0833	9.586 6811
16 0	0.122 0842	9.086 6595	46 0	0.391 4970	9.592 7224
30	0.126 0075	9.100 3984	30	0.396 9601	9.598 7462
17 0	0.129 9411	9.113 7464	47 0	0.402 4739	9.604 7372
30	0.133 8853	9.126 7328	30	0.408 0400	9.610 7027
18 0	0.137 8405	9.139 3768	48 0	0.413 6596	9.616 6432
30	0.141 8071	9.151 6978	30	0.419 3344	9.622 5604
19 0	0.145 7854	9.163 7140	49 0	0.425 0657	9.628 4560
30	0.149 7758	9.175 4417	30	0.430 8551	9.634 3313
20 0	0.153 7787	9.186 8963	50 0	0.436 7044	9.640 1876
30	0.157 7946	9.198 0920	30	0.442 6151	9.646 0263
21 0	0.161 8236	9.209 0420	51 0	0.448 5891	9.651 8485
30	0.165 8664	9.219 7585	30	0.454 6282	9.657 6564
22 0	0.169 9233	9.230 2529	52 0	0.460 7343	9.663 4505
30	0.173 9946	9.240 5358	30	0.466 9093	9.669 2325
23 0	0.178 0809	9.250 6173	53 0	0.473 1553	9.675 0037
30	0.182 1825	9.250 5066	30	0.479 4744	9.680 7654
24 0	0.186 2999	9.270 2125	54 0	0.485 8688	9.686 5190
30	0.190 4334	9.279 7432	30	0.492 3408	9.692 2659
25 0	0.194 5837	9.289 1064	55 0	0.498 8929	9.698 0073
30	0.198 7510	9.298 3093	30	0.505 5275	9.703 7448
26 0	0.202 9359	9.307 3589	56 0	0.512 2473	9.709 4797
30	0.207 1389	9.316 2616	30	0.519 0550	9.715 2134
27 0	0.211 3604	9.325 0236	57 0	0.525 9534	9.720 9472
30	0.215 6009	9.333 6505	30	0.532 9455	9.726 6828
28 0	0.219 8609	9.342 1479	58 0	0.540 0344	9.732 4214
30	0.224 1409	9.350 5211	30	0.547 2234	9.738 1647
29 0	0.228 4415	9.358 7750	59 0	0.554 5159	9.743 9140
30	0.232 7631	9.366 9142	30	0.561 9155	9.749 8710
30° 0'	0.237 1064	9.374 9432	60° 0'	0.569 4259	9.755 4372
$\varphi$	$\lg U$	$\lg \lg U$	$\varphi$	$\lg U$	$\lg \lg U$

附表六

$$S = \int_0^\varphi M r d\varphi \text{ 值和一度球面梯形面积 } P(1^\circ \times 1^\circ)$$

$\varphi$	$S$ (10km <sup>2</sup> )	$P$ (km <sup>2</sup> )	$\varphi$	$S$ (km <sup>2</sup> )	$P$ (km <sup>2</sup> )
0° 0'	0		30° 0'	202 2743	
30	3 5264	12 308.9	30	205 3309	10 642.8
1 0	7 0525		31 0	208 3721	
30	10 5781	12 305.2	30	211 3978	10 533.0
2 0	14 1029		32 0	214 4076	
30	17 6266	12 298.0	30	217 4014	10 421.8
3 0	21 1491		33 0	220 3789	
30	24 6699	12 287.0	30	223 3399	10 306.6
4 0	28 1890		34 0	226 2841	
30	31 7060	12 272.4	30	229 2114	10 188.2
5 0	36 2206		35 0	232 1215	
30	38 7326	12 254.2	30	235 0142	10 066.6
6 0	42 2417		36 0	237 8892	
30	45 7477	12 232.3	30	240 7465	9 942.0
7 0	49 2503		37 0	243 5856	
30	52 7493	12 206.8	30	246 4064	9 814.3
8 0	56 2443		38 0	249 2088	
30	59 7352	12 177.7	30	251 9924	9 683.6
9 0	63 2216		39 0	254 7570	
30	66 7034	12 145.0	30	257 5025	9 549.8
10 0	70 1802		40 0	260 2287	
30	73 6518	12 108.6	30	262 9353	9 413.2
11 0	77 1179		41 0	265 6220	
30	80 5783	12 068.7	30	268 2889	9 273.6
12 0	84 0327		42 0	270 9354	
30	87 4809	12 025.1	30	273 5616	9 131.1
13 0	90 9226		43 0	276 1671	
30	94 3575	11 973.0	30	278 7519	9 985.8
14 0	97 7855		44 0	281 3156	
30	101 2061	11 927.3	30	283 8581	9 837.7
15 0	104 6193		45 0	286 3792	
30	108 0247	11 873.0	30	288 8787	8 680.8
16 0	111 4220		46 0	291 3564	
30	114 8111	11 815.2	30	293 8121	8 533.2
17 0	118 1916		47 0	296 2456	
30	121 5634	11 753.9	30	298 6567	8 376.9
18 0	124 9261		48 0	301 0452	
30	128 2795	11 689.0	30	303 4109	8 218.0
19 0	131 6234		49 0	305 7537	
30	134 9575	11 620.6	30	308 0734	8 056.5
20° 0'	138 2815		50 0	310 3698	
30	141 5953	11 548.8	30	312 6427	7 892.5
21 0	144 8985		51 0	314 8918	
30	148 1909	11 473.4	30	317 1172	7 726.0
22 0	151 4723		52 0	319 3185	
30	154 7424	11 394.7	30	321 4956	7 557.0
23 0	158 0010		53 0	323 6483	
30	161 2478	11 312.5	30	325 7785	7 385.6
24 0	164 4825		54 0	327 8800	
30	167 7051	11 226.9	30	329 9536	7 211.9
25 0	170 9151		55 0	332 0121	
30	174 1123	11 137.9	30	334 0404	7 035.9
26 0	177 2966		56 0	336 0434	
30	180 4676	11 045.5	30	338 0208	6 857.7
27 0	183 6252		57 0	339 9725	
30	186 7690	10 949.8	30	341 8984	6 677.2
28 0	189 8989		58 0	343 7983	
30	193 0146	10 850.7	30	345 6721	6 494.7
29 0	196 1159		59 0	347 5193	
30	199 2025	10 748.4	30	349 3405	6 310.0
30° 0'	202 2743		60° 0'	351 1349	
$\varphi$	$S$ (km <sup>2</sup> )	$P$ (km <sup>2</sup> )	$\varphi$	$S$ (km <sup>2</sup> )	$P$ (km <sup>2</sup> )

平  
图

⑭

附表七 纬差20'和经差30'的梯形图幅面积  
(1:10万)

$\varphi$	$P$ (km <sup>2</sup> )	$\varphi$	$P$ (km <sup>2</sup> )	$\varphi$	$P$ (km <sup>2</sup> )
35°00'		50°00'		65°00'	
20	1664.6	20	1324.6	20	871.2
40	1677.8	40	1315.4	40	860.3
	1670.9		1306.2		849.3
36°00'		51°00'		66°00'	
20	1664.0	20	1297.0	20	838.4
40	1657.0	40	1287.7	40	827.4
	1650.0		1278.3		816.3
37°00'		52°00'		67°00'	
20	1642.9	20	1268.9	20	805.3
40	1635.7	40	1259.5	40	794.2
	1628.5		1250.0		783.0
38°00'		53°00'		68°00'	
20	1621.3	20	1240.5	20	771.9
40	1613.9	40	1231.0	40	760.7
	1606.6		1221.3		749.5
39°00'		54°00'		69°00'	
20	1599.1	20	1211.7	20	738.3
40	1591.7	40	1202.0	40	727.0
	1584.1		1192.3		715.7
40°00'		55°00'		70°00'	
20	1573.5	20	1182.5	20	704.4
40	1568.9	40	1172.7	40	693.1
	1561.2		1162.8		681.7
41°00'		56°00'		71°00'	
20	1553.4	20	1152.9	20	670.3
40	1545.6	40	1143.0	40	658.9
	1537.8		1133.0		647.4
42°00'		57°00'		72°00'	
20	1529.8	20	1123.0	20	636.0
40	1521.9	40	1112.9	40	624.6
	1513.8		1102.8		613.0
43°00'		58°00'		73°00'	
20	1505.8	20	1092.6	20	601.5
40	1497.6	40	1082.5	40	589.9
	1489.5		1072.2		578.3
44°00'		59°00'		74°00'	
20	1481.2	20	1062.0	20	566.8
40	1473.0	40	1051.7	40	555.1
	1464.6		1041.3		543.5
45°00'		60°00'		75°00'	
20	1456.2	20	1031.0	20	531.9
40	1447.8	40	1020.6	40	520.2
	1439.3		1010.1		508.6
46°00'		61°00'		76°00'	
20	1430.8	20	999.6	20	496.8
40	1422.2	40	989.1	40	485.1
	1413.6		978.6		473.3
47°00'		62°00'		77°00'	
20	1404.9	20	988.0	20	461.5
40	1396.2	40	967.4	40	449.8
	1387.4		946.7		438.0
48°00'		63°00'		78°00'	
20	1378.6	20	936.0	20	426.2
40	1369.7	40	925.3	40	414.3
	1360.8		914.5		402.5
49°00'		64°00'		79°00'	
20	1351.8	20	903.8	20	390.6
40	1342.8	40	992.9	40	378.8
	1333.7		982.1		366.9
50°00'		65°00'		80°00'	

纬差4'和经差6'的梯形图幅面积 (1:100万)

$\varphi$	$P$ (km <sup>2</sup> )
0°	
4	295 195
8	293 794
12	291 000
16	288 820
20	281 272
24	274 376
28	266 160
32	256 654
36	245 899
40	233 938
44	220 822
48	206 607
52	191 358
56	175 143
60	158 037
64	140 124
68	121 489
72	102 225
76	82 430
80	62 204
84	41 652
88°	20 881
$\varphi$	$P$ (km <sup>2</sup> )



## 主要参考资料

- (1) 胡毓钊等, 1981年, 地图投影, 测绘出版社。
- (2) 吴忠性等, 1989年, 数学制图学原理, 测绘出版社。
- (3) 吴忠仕, 1980年, 地图投影, 测绘出版社。
- (4) 陆淑芬, 1987年, 地图学基础, 高等教育出版社。
- (5) 李海晨, 1984年, 专题地图与地图集编制, 高等教育出版社。
- (6) 杨启和, 1983年, 方位投影的研究, 测绘出版社。
- (7) 陆淑芬等译, 1986年, 现代地理学中的地图, 测绘出版社。
- (8) 胡毓钊等, 1983年, 定域等面积的等角与等距离圆锥投影, 测绘出版社。
- (9) 李道义译, A. H. 罗宾逊等著, 1989年, 地图学原理, 测绘出版社。
- (10) A. N. 斯特拉勒, 1983年, 现代自然地理, 科学出版社。
- (11) 李国深, 1963年, 双重方位投影, 测绘学报, 第七卷第四期。
- (12) 吴忠性等, 1981年, 在电子计算机辅助制图情况下地图投影变换的研究, 测绘通报, 第十卷第一期。
- (13) 方炳炎, 1983年, 不等分纬线多圆锥投影及其应用, 测绘出版社。
- (14) 周承恭, 1957年, 根据变形椭圆寻求新投影的问题, 测量制图学报, 第一卷第一期。
- (15) 杨启和, 1983年, 三种改良投影的探讨, 测绘出版社。
- (16) 刘文庆译, 1963年, 制图用表, 中国工业出版社。
- (17) 胡毓钊等, 1972年, 小比例尺地图投影集, 第一辑, 测绘出版社。
- (18) 方炳炎, 1978年, 地图投影计算用表, 测绘出版社。
- (19) 西北师院地理系, 1984年, 中国自然地理图集, 地理出版社。
- (20) 刘文庆译, 1958年, 制图用表(克拉索夫斯基椭圆体), 测绘出版社。